

УДК 517.911.5, 517.988.525

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ С ЗАВИСЯЩИМИ ОТ СОСТОЯНИЯ МАКСИМАЛЬНО МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

А. А. Толстоногов

Доказывается существование абсолютно непрерывного решения дифференциального включения в гильбертовом пространстве, правая часть которого содержит зависящий от времени и состояния максимально монотонный оператор и невыпуклостное возмущение. В основу доказательств положены принадлежащие автору теоремы сравнения для включений с максимально монотонными операторами и теорема о неподвижной точке для многозначных отображений. Такой подход позволяет расширить класс включений с максимально монотонными операторами, для которых справедливы теоремы существования, и, как следствие, получить существенные результаты подобного типа.

Ключевые слова: максимально монотонный оператор, G -сходимость, теорема сравнения.

A. A. Tolstonogov. Evolution inclusions with state-dependent maximal monotone operators.

The existence of an absolutely continuous solution of a differential inclusion whose right-hand side contains a time- and state-dependent maximal monotone operator and a nonconvex perturbation is proved in a Hilbert space. The proofs are based on our comparison theorems for inclusions with maximal monotone operators and a fixed point theorem for multivalued mappings. This approach allows us to extend the class of inclusions with maximal monotone operators for which existence theorems are valid and, as a result, to obtain significant results of this kind.

Keywords: maximal monotone operator, G -convergence, comparison theorem.

MSC: 34A60, 46B50, 54C65, 49J52, 49J53

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-3-241-254

1. Основные результаты

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, нормой $\| \cdot \|$, нулевым элементом Θ и единичным замкнутым шаром $\bar{B}$ с центром в Θ .

Введем следующие обозначения: $T = [0, a]$, $a > 0$, — отрезок числовой полупрямой $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ с мерой Лебега μ и с σ -алгеброй Σ измеримых по Лебегу множеств из T , ω - H — пространство H , наделенное слабой топологией, $A(t, u) : \mathcal{D}(A(t, u)) \subset H \rightrightarrows H$ — семейство максимально монотонных операторов [1] с областью определения $\mathcal{D}(A(t, u)) \subset H$, $t \in T$, $u \in H$.

Пусть

$$\mathcal{D}(A) = \{\cup \mathcal{D}(A(t, u)), t \in T, u \in H\}.$$

Рассмотрим эволюционное включение

$$-\dot{x}(t) \in A(t, x(t))x(t) + U(t, x(t)) + V(t, x(t)), \quad (P)$$

$$x(0) = x_0 \in \mathcal{D}(A(0, x_0)),$$

где $U, V : T \times \mathcal{D}(A) \rightrightarrows H$ — многозначные отображения.

О п р е д е л е н и е 1.1. Под решением включения (проблемы) (P) понимается пара $(x(f)(\cdot), f(\cdot))$ такая, что

- 1) $x(f) : T \rightarrow H$, $x(f)(0) = x_0$, является абсолютно непрерывной функцией, удовлетворяющей включению

$$x(f)(t) \in \mathcal{D}(A(t, x(f)(t))), \quad t \in T;$$

2)

$$f(\cdot) = f_U(\cdot) + f_V(\cdot), \quad f_U(\cdot), f_V(\cdot) \in L^1(T, H); \quad (1.1)$$

3) почти всюду имеют место включения

$$-\dot{x}(f)(t) \in A(t, x(f)(t))x(f)(t) + f(t), \quad (1.2)$$

$$f_U(t) \in U(t, x(f)(t)), \quad f_V(t) \in V(t, x(f)(t)). \quad (1.3)$$

Из определения 1.1 следует, что включение (P) можно рассматривать как управляемую систему (1.2) с управлением $f(\cdot)$ (1.1), удовлетворяющим смешанным ограничениям (1.3).

Пусть $\mathcal{B}(H)$ — σ -алгебра борелевских множеств из H и $\Sigma \otimes \mathcal{B}(H)$ — σ -алгебра, порожденная множествами $\Lambda \times C$, $\Lambda \in \Sigma$, $C \in \mathcal{B}(H)$. Обозначим через $d(y, C)$ расстояние от точки y до множества $C \subset H$ и $\|C\| = \sup\{\|x\|; x \in C\}$.

Обозначим через $\text{gr } A(t, u)$ график оператора $A(t, u)$

$$\text{gr } A(t, u) = \{(x, y) \in H \times H; x \in \mathcal{D}(A(t, u)), y \in A(t, u)x\}.$$

Для семейства $A(t, u)$, $t \in T$, $u \in H$, максимально монотонных операторов сделаем следующие предположения.

Гипотезы $H(A)$:

- 1) для любого $u \in H$ отображение $t \mapsto \text{gr } A(t, u)$ измеримо;
- 2) отображение $u \mapsto \text{gr } A(t, u)$ полунепрерывно снизу при почти всех $t \in T$;
- 3) существует функция $m(\cdot) \in L^2(T, \mathbb{R}^+)$ такая, что

$$\|A^0(t, u)x\| \leq m(t)(1 + \|x\| + \|u\|) \text{ п.в., } t \in T, \quad x \in \mathcal{D}(A(t, u)), \quad u \in H, \quad (1.4)$$

где $A^0(t, u)x$ — элемент минимальной нормы множества $A(t, u)x$, который существует, так как множество $A(t, u)x \subset H$ является замкнутым и выпуклым [1];

- 4) существуют абсолютно непрерывная функция $\beta : T \rightarrow \mathbb{R}$ и константа $L \in]0, 1[$ такие, что

$$|d(x, \mathcal{D}(A(t, u))) - d(x, \mathcal{D}(A(s, v)))| \leq |\beta(t) - \beta(s)| + L\|u - v\|, \quad s \leq t, \quad (1.5)$$

$$s, t \in T, \quad x, u, v \in H.$$

Гипотезы $H(U)$:

- 1) многозначное отображение $U : T \times \mathcal{D}(A) \rightrightarrows H$ с замкнутыми, не обязательно выпуклыми, значениями является $\Sigma \otimes \mathcal{B}(\mathcal{D}(A))$ измеримым;
- 2) отображение $x \mapsto U(t, x)$ полунепрерывно снизу при почти всех $t \in T$;
- 3) имеет место неравенство

$$d(\Theta, U(t, x)) < l_U(t)(1 + \|x\|), \quad l_U(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+), \quad l_U(t) > 0, \quad t \in T.$$

Гипотезы $H(V)$:

- 1) значениями отображения $V : T \times \mathcal{D}(A) \rightrightarrows H$ являются замкнутые выпуклые множества и отображение $x \mapsto V(t, x)$ имеет слабо секвенциально замкнутый график;
- 2) отображение $t \mapsto V^0(t, x)$, $x \in H$, измеримо, где $V^0(t, x)$ — элемент минимальной нормы множества $V(t, x)$;
- 3) выполняется неравенство

$$d(\Theta, V(t, x)) \leq l_V(t)(1 + \|x\|) \text{ п.в.,} \quad (1.6)$$

$$\text{где } l_V(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+).$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{\rho}(t) = \frac{1}{1-L} \{ |\dot{\beta}(t)| + 2m(t)(1+2\rho(t)) + 2l(t)(1+\rho(t)) \}, \quad \rho(0) = \|x_0\|, \quad (1.7)$$

где

$$l(t) = l_U(t) + l_V(t). \quad (1.8)$$

Гипотеза $H(A)_S$: для любого $t \in T$ и любого ограниченного множества $C \subset H$, $\|C\| \leq \rho(t)$, множество

$$(\cup \mathcal{D}(A(t, u)); u \in C) \cap C$$

относительно компактно.

Теорема 1.1. Пусть имеют место гипотезы $H(A)$, $H(A)_S$, $H(U)$, $H(V)$. Тогда включение (P) имеет решение $(x(f)(\cdot), f(\cdot))$, удовлетворяющее неравенствам

$$\|x(f)(t)\| \leq \rho(t), \quad t \in T, \quad (1.9)$$

$$\|\dot{x}(f)(t)\| \leq \dot{\rho}(t), \quad \|f(t)\| \leq l(t)(1+\rho(t)) \quad \text{н.в.} \quad (1.10)$$

Пусть

$$\text{dis}(A_1, A_2) = \sup \left\{ \frac{\langle x_1 - x_2, y_2 - y_1 \rangle}{1 + \|y_1\| + \|y_2\|}; y_i \in A_i x_i, x_i \in \mathcal{D}(A_i), i = 1, 2 \right\} \quad (1.11)$$

— псевдорасстояние, по Владимирову [2], между максимально монотонными операторами A_i , $i = 1, 2$.

Следствие 1.1. Пусть выполняются неравенство (1.4), гипотезы $H(A)_3$, $H(A)_S$, $H(U)$, $H(V)$ и неравенство

$$\text{dis}(A(t, u), A(s, v)) \leq |\beta(t) - \beta(s)| + L\|u - v\|, \quad s \leq t, \quad s, t \in T, \quad u, v \in H, \quad (1.12)$$

где $\beta(\cdot)$ и L имеют тот же смысл, что и в неравенстве (1.5). Тогда справедливы утверждения теоремы 1.1.

Ниже мы докажем, что при выполнении неравенств (1.4), (1.12) будут иметь место гипотезы $H(A)$ 1), 2). Поэтому следствие вытекает из теоремы 1.1. Следствие включает в себя как частный случай результат последних работ [3; 4] в этом направлении. Получить более общие результаты в настоящей работе удалось за счет нового подхода, базирующегося на нашей теореме сравнения [5] для эволюционных включений с максимально монотонными операторами и теореме Фана [6] о неподвижной точке для многозначных отображений. Включением (P) описывается огромное количество проблем в приложениях к теории уравнений с частными производными (уравнение теплопроводности, задачи с препятствиями), в механике (системы твердых тел с ударами, трение Кулона), в электротехнике (диоды, транзисторы).

Детальное описание приложений можно найти в [7; 8] и в ссылках в этих работах.

2. Основные обозначения и определения

Пусть X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, нулевым элементом Θ и единичным замкнутым шаром $\overline{B}$. Через $d(y, C)$ мы обозначаем расстояние от точки $y \in X$ до множества C .

Для множества $C \subset X$ символ $\overline{\text{co}} C$ означает замкнутую выпуклую оболочку множества C . Через $\omega\text{-}X$ мы обозначаем пространство X , наделенное слабой топологией.

Пространства $C(T, X)$ и $L^1(T, X)$ имеют общепринятый смысл. Расстояние по Хаусдорфу между множествами $C_i \subset X$, $i = 1, 2$, обозначается как

$$\text{haus}(C_1, C_2) = \max \left\{ \sup_{x \in C_2} d(x, C_1), \sup_{y \in C_1} d(y, C_2) \right\}.$$

Известно, что справедливо равенство

$$\text{haus}(C_1, C_2) = \sup_{z \in X} |d(z, C_1) - d(z, C_2)|. \quad (2.1)$$

Пусть Y — метрическое пространство и $F : Y \rightrightarrows X$ — многозначное отображение.

Обозначим

$$F^{-1}(U) = \{y \in Y; F(y) \cap U \neq \emptyset\}, \quad U \subset X.$$

Многозначное отображение $F : Y \rightrightarrows X$ называется *измеримым* [9], если $F^{-1}(U) \in \Sigma$ для любого открытого множества $U \subset X$. Аналогично если $F : T \times Y \rightrightarrows X$, то измеримость понимается относительно σ -алгебры $\Sigma \otimes \mathcal{B}(Y)$.

Многозначное отображение $F : Y \rightrightarrows X$ полунепрерывно снизу, если для любого открытого множества $U \subset X$ множество $F^{-1}(U)$ открыто.

Из определения вытекает, что многозначное отображение $F : Y \rightrightarrows X$ полунепрерывно снизу тогда и только тогда, когда для любых $y \in Y$, $x \in F(y)$ и любой последовательности $y_n \in Y$, $n \geq 1$, сходящейся к y , существует последовательность $x_n \in F(y_n)$, $n \geq 1$, сходящаяся к x .

Многозначное отображение $F : Y \rightrightarrows X$ слабо полунепрерывно сверху, если для любого открытого множества $U \subset \omega$ - X множество $F^+(U) = \{y \in Y; F(y) \subset U\}$ открыто.

Обозначим через $\text{gr } F$ график отображения F : $\text{gr } F = \{(y, x) \in Y \times X; x \in F(y), y \in Y\}$.

Многозначное отображение $F : Y \rightrightarrows \omega$ - X с выпуклыми замкнутыми значениями имеет слабо секвенциально замкнутый график, если для любого $y_0 \in Y$ и любой последовательности $(y_n, x_n) \in \text{gr } F$, $n \geq 1$, сходящейся в пространстве $Y \times \omega$ - X к точке (y_0, x_0) , имеет место включение $x_0 \in F(y_0)$.

Если $C \subset X$, то через $\omega\text{-cl } C$ мы будем обозначать замыкание множества C в пространстве ω - X . Аналогично если последовательность $x_n \in X$, $n \geq 1$, сходится к x в пространстве ω - X , то мы пишем $x = \omega\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Возьмем последовательность $x_n \in X$, $n \geq 1$.

Рассматривая x_n как одноточечное множество $\{x_n\}$, мы можем ввести слабый верхний предел последовательности множеств $\{x_n\}$, $n \geq 1$.

О п р е д е л е н и е 2.1. Слабым верхним пределом последовательности $\{x_n\}$, $n \geq 1$, называется множество

$$\omega\text{-}\text{Ls}_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = \{x \in X; x = \omega\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}, n_1 < n_2 < \dots n_k \dots\}.$$

Если последовательность $x_n \in X$, $n \geq 1$, относительно компактна, то из теоремы Эберлейна — Шмульяна следует, что множество $\omega\text{-}\text{Ls}_{n \rightarrow \infty} \{x_n\}$ не пусто.

В дальнейшем H — сепарабельное гильбертово пространство.

Оператор $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightrightarrows H$ называется *монотонным*, если для любых $(x_i, y_i) \in \text{gr } A$, $i = 1, 2$, имеет место неравенство $\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \geq 0$.

Монотонный оператор называется *максимально монотонным*, если его график не является собственным подмножеством графика другого монотонного оператора. Следующие свойства максимально монотонных операторов можно найти в [1].

Если $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightrightarrows H$ — максимально монотонный оператор, то множество Ax , $x \in \mathcal{D}(A)$, есть замкнутое и выпуклое подмножество пространства H , его график $\text{gr } A$ — замкнутое подмножество пространства $H \times H$, замыкание $\overline{\mathcal{D}(A)}$ в H множества $\mathcal{D}(A)$ — замкнутое

выпуклое подмножество пространства H . Для любого $x \in \mathcal{D}(A)$ существует элемент $A^0x \in Ax$ минимальной нормы, т. е. $\|A^0x\| = \min\{\|y\|; y \in Ax\}$.

Если $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightrightarrows H$ — максимально монотонный оператор, то для любого $\lambda > 0$ существуют однозначные операторы

$$J_\lambda(A) = (I + \lambda A)^{-1}, \quad A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda(A)), \quad (2.2)$$

определенные на H , которые называются *резольвентой* и *аппроксимацией Иосиды оператора* A . В (2.2) $I : H \rightarrow H$ — тождественный оператор.

Семейство $A(t) : \mathcal{D}(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$, $t \in T$, максимально монотонных операторов называется *измеримым* [9], если измеримым является многозначное отображение $t \mapsto \text{gr } A(t)$.

Пусть $A_n : \mathcal{D}(A_n) \subset H \rightrightarrows H$, $n \geq 1$, и $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightrightarrows H$ — максимально монотонные операторы.

О п р е д е л е н и е 2.2 [10]. Последовательность A_n , $n \geq 1$, максимально монотонных операторов называется G -сходящейся к максимально монотонному оператору A , если для любых $(x, y) \in \text{gr } A$ существует последовательность $(x_n, y_n) \in \text{gr } A_n$, $n \geq 1$, сходящаяся к (x, y) в пространстве $H \times H$.

G -сходимость последовательности A_n , $n \geq 1$, к A обозначается через $A_n \xrightarrow{G} A$, $n \rightarrow \infty$ [10].

3. Предварительные сведения

Пусть Y — метрическое пространство, X — сепарабельное банахово пространство и $F : Y \rightrightarrows X$ — многозначное отображение с выпуклыми замкнутыми значениями.

Утверждение 3.1 [11]. Если отображение $F : Y \rightrightarrows \omega$ - X слабо полунепрерывно сверху, то оно имеет слабо секвенциально замкнутый график. Если отображение F имеет слабо секвенциально замкнутый график и для любой точки $y_0 \in Y$ существует окрестность $V(y_0)$ точки y_0 такая, что множество $F(V(y_0)) = \{\cup F(y); y \in V(y_0)\}$ относительно слабо компактно, то отображение $F : Y \rightrightarrows \omega$ - X слабо полунепрерывно сверху.

Утверждение 3.2. Пусть последовательность $f_n(\cdot) \in L^1(T, H)$, $n \geq 1$, слабо сходится в $f(\cdot)$. Если для почти всех $t \in T$ множество $\{\cup f_n(t), n \geq 1\} \subset X$ относительно слабо компактно, то

$$f(t) \in \overline{\text{co}} \omega\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \{f_n(t)\} \text{ п.в.}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение вытекает из утверждения 4.7.44 в [12]. $\square$

В дальнейшем H — сепарабельное гильбертово пространство.

Утверждение 3.3 [1]. Пусть $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightrightarrows H$ — максимально монотонный оператор. Тогда

$$1) \quad \|J_\lambda(A)x - J_\lambda(A)y\| \leq \|x - y\|, \quad x, y \in H, \quad \lambda > 0; \quad (3.1)$$

$$2) \quad \|A_\lambda x - A_\lambda y\| \leq \frac{1}{\lambda} \|x - y\|, \quad x, y \in H, \quad \lambda > 0; \quad (3.2)$$

$$3) \quad \|A_\lambda x\| \leq \|A^0x\|, \quad x \in \mathcal{D}(A). \quad (3.3)$$

Теорема 3.1. Пусть $A(t) : \mathcal{D}(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$, $t \in T$, — семейство максимально монотонных операторов. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) семейство $A(t)$, $t \in T$, измеримо;
- 2) отображение $t \mapsto J_\lambda(A(t))x$ измеримо для любых $\lambda > 0$ и $x \in H$;
- 3) отображение $t \mapsto J_{\lambda_0}(A(t))x$ измеримо для любых $x \in H$ при некотором $\lambda_0 > 0$.

Доказательство. Утверждения теоремы вытекают из теоремы 2 [9, с. 83]. $\square$

Теорема 3.2. Пусть $A_n : \mathcal{D}(A_n) \subset H \rightrightarrows H$, $n \leq 1$, $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightrightarrows H$ максимально монотонные операторы. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $A_n \xrightarrow{G} A$, $n \rightarrow \infty$;
- 2) $J_\lambda(A_n)x \rightarrow J_\lambda(A)x$, $n \rightarrow \infty$, в H для каждого $x \in H$ и каждого $\lambda > 0$;
- 3) $J_{\lambda_0}(A_n)x \rightarrow J_{\lambda_0}(A)x$, $n \rightarrow \infty$, в H для каждого $x \in H$ при некотором $\lambda_0 > 0$.

Доказательство. Теорема вытекает из утверждения 3.60 [10, с. 361]. $\square$

Утверждение 3.4. Пусть $A_n : \mathcal{D}(A_n) \subset H \rightrightarrows H$, $n \leq 1$, $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightrightarrows H$ — максимально монотонные операторы и $A_n \xrightarrow{G} A$, $n \rightarrow \infty$. Если последовательность $(x_n, y_n) \in \text{gr } A_n$, $n \geq 1$, сходится к (x, y) в $H \times \omega\text{-}H$, то $(x, y) \in \text{gr } A$.

Доказательство. Утверждение вытекает из утверждения 3.59 [10, с. 361]. $\square$

Утверждение 3.5. Пусть $A^i : \mathcal{D}(A^i) \subset H \rightrightarrows H$, $i = 1, 2$, — максимально монотонные операторы и $\text{dis}(A^1, A^2)$ — псевдорасстояние (1.11), по Владимирову, между A^1 и A^2 . Тогда

$$\text{haus}(\mathcal{D}(A^1), \mathcal{D}(A^2)) \leq \text{dis}(A^1, A^2), \quad (3.4)$$

$$\|J_\lambda(A^1)x - J_\lambda(A^2)y\|^2 \leq \|x - y\| + 2\lambda(1 + \|A_\lambda^1 x\| + \|A_\lambda^2 y\|) \text{dis}(A^1, A^2), \quad x, y \in H, \quad \lambda > 0. \quad (3.5)$$

Доказательство. Неравенство (3.4) вытекает из леммы 3.1 [2], а неравенство (3.5) — из леммы 4 [13]. $\square$

Пусть $\mathcal{K} \subset C(T, H)$ — компактное множество. Тогда множество

$$\mathcal{R}(\mathcal{K}) = \{\cup x(t); t \in T, x(\cdot) \in \mathcal{K}\} \subset H$$

является компактом в H .

Предположим, что

$$\mathcal{R}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{D}(A). \quad (3.6)$$

Утверждение 3.6. Пусть выполняются гипотезы $H(U)$. Тогда существует непрерывное отображение $g : \mathcal{K} \rightarrow L^1(T, H)$ такое, что

$$g(x)(t) \in U(t, x(t)) \text{ п.в.}, \quad (3.7)$$

$$\|g(x)(t)\| \leq l_U(t)(1 + \|x(t)\|) \text{ п.в.}, \quad x(\cdot) \in \mathcal{K}. \quad (3.8)$$

Доказательство утверждения 3.6 дословно повторяет доказательство леммы 5.3 в [14] с заменой пространства H на компакт $\mathcal{K}$, а пространства $L^2(T, H)$ — на $L^1(T, H)$. $\square$

Пусть выполняются гипотезы $H(V)$, тогда из неравенства (1.6) следует, что будет определено многозначное отображение $\tilde{V} : T \times \mathcal{R}(\mathcal{K}) \rightrightarrows H$,

$$\tilde{V}(t, x) = V(t, x) \cap l_V(t)(1 + \|x\|)\overline{B} \quad (3.9)$$

с замкнутыми выпуклыми значениями.

Пусть

$$\mathcal{G}_{\tilde{V}}(x) = \{v(\cdot) \in L^1(T, H); v(t) \in \tilde{V}(t, x(t)) \text{ п.в.}\}, \quad x(\cdot) \in \mathcal{K}. \quad (3.10)$$

Утверждение 3.7. Пусть выполняются гипотезы $H(V)$. Тогда $\mathcal{G}_{\tilde{V}}(x)$ для любого $x(\cdot) \in \mathcal{K}$ является непустым выпуклым слабо компактным множеством, а отображение $x(\cdot) \mapsto \mathcal{G}_{\tilde{V}}(x)$ слабо непрерывно сверху из $\mathcal{K}$ в $\omega\text{-}L^1(T, H)$. Для любого $v(\cdot) \in \mathcal{G}_{\tilde{V}}(x)$ имеет место включение

$$v(x)(t) \in V(t, x(t)) \text{ п.в.} \quad (3.11)$$

Доказательство. Утверждение доказывается аналогично доказательству подобной леммы 5.4 в [14] с использованием утверждения 3.1, а вместо леммы Мазура для слабо сходящихся последовательностей используется утверждение 3.2. $\square$

4. Основополагающие результаты

Следующая теорема — одна из основополагающих при доказательстве теоремы 1.1.

Теорема 4.1. Пусть выполняются гипотезы $H(A)$. Тогда для любой абсолютно непрерывной функции $u : T \rightarrow H$, $u(0) = x_0$, и любого $f(\cdot) \in L^1(T, H)$ существует абсолютно непрерывная функция

$$x_u(f) : T \rightarrow H, \quad x_u(f)(0) = x_0, \quad x_u(f)(t) \in D(A(t, u(t))), \quad t \in T, \quad (4.1)$$

являющаяся единственным решением включения

$$-\dot{x}_u(f)(t) \in A(t, u(t))x_u(f)(t) + f(t) \text{ п.в.}, \quad (4.2)$$

производная которой удовлетворяет неравенству

$$\|\dot{x}_u(f)(t)\| \leq |\dot{\beta}(t)| + L\|\dot{u}(t)\| + 2m(t)(1 + \|x_U(f)(t)\| + \|u(t)\|) + 2\|f(t)\| \text{ п.в.} \quad (4.3)$$

Доказательство. Из неравенства (1.4) и теоремы 4.1 [5] следует, что множество $D(A(t, u))$, $t \in T$, $u \in H$, является замкнутым и выпуклым. Пусть $u : T \rightarrow H$, $u(0) = x_0$, — абсолютно непрерывная функция. Рассмотрим семейство максимально монотонных операторов $\tilde{A}(t) = A(t, u(t))$ с областью определения $D(\tilde{A}(t)) = D(A(t, u(t)))$, $t \in T$. Тогда теорема 4.1 является конкретизацией теоремы 4.3 [5] для включения

$$-\dot{x}(t) \in \tilde{A}(t)x(t) + f(t), \quad (4.4)$$

$x(0) = x_0 \in D(\tilde{A}(0))$, $f(\cdot) \in L^1(T, H)$.

Из гипотез $H(A)$ 1), 2) и теорем 3.1, 3.2 следует, что при $\lambda > 0$ функция

$$t \mapsto J_\lambda(A(t, u))x, \quad x, u \in H, \text{ измерима,} \quad (4.5)$$

а функция

$$u \mapsto J_\lambda(A(t, u))x, \quad x \in H, \quad t \in T, \text{ непрерывна.} \quad (4.6)$$

Из (4.6) и (3.1) вытекает, что функция

$$(x, u) \mapsto J_\lambda(A(t, u))x, \quad t \in T, \text{ непрерывна.} \quad (4.7)$$

Тогда из (4.5), (4.7) мы получаем, что функция $t \mapsto J_\lambda(A(t, u(t)))x = J_\lambda(\tilde{A}(t))x$, $x \in H$, измерима. Поэтому согласно теореме 3.2 семейство максимально монотонных операторов $\tilde{A}(t)$, $t \in T$, является измеримым. Из (1.4) следует, что существует $\tilde{m}(\cdot) \in L^2(T, \mathbb{R}^+)$, при котором справедливо неравенство

$$\|\tilde{A}^0(t)\| \leq \tilde{m}(t)(1 + \|x\|) \text{ п.в.,} \quad x \in D(\tilde{A}(t)).$$

Так как $D(\tilde{A}(t))$ есть замкнутое выпуклое множество, то будет определен процесс выметания (*sweeping process*) [15]

$$-\dot{x}(t) \in \mathcal{N}(D(\tilde{A}(t)))x(t) + \varphi(t), \quad (4.8)$$

$x(0) = x_0 \in D(\tilde{A}(0))$, $\varphi(\cdot) \in L^1(T, H)$, где $\mathcal{N}(D(\tilde{A}(t))y)$ — нормальный конус в смысле выпуклого анализа множества $D(\tilde{A}(t))$ в точке $y \in D(\tilde{A}(t))$, $t \in T$.

Из (1.5), (2.1) следует, что

$$\text{haus}(D(\tilde{A}(t)), D(\tilde{A}(s))) \leq |b(t) - b(s)|, \quad s \leq t, \quad s, t \in T,$$

где $b : T \rightarrow \mathbb{R}$ — абсолютно непрерывная функция

$$b(t) = \beta(t) + L \int_0^t \|\dot{u}(\tau)\| d\tau, \quad t \in T.$$

Согласно следствию 3.2 [5] для любого $\varphi(\cdot) \in L^1(T, H)$ включение (4.8) имеет единственное решение $x(\varphi)(\cdot)$, $x(\varphi)(0) = x_0$, удовлетворяющее неравенству

$$\|\dot{x}(\varphi)(t)\| \leq |\dot{b}(t)| + 2\|\varphi(t)\| \quad \text{п.в.} \quad (4.9)$$

Поэтому выполняются все предположения, относящиеся к семейству операторов $\tilde{A}(t)$, $t \in T$, при которых справедлива теорема 4.3 [5]; согласно данной теореме включение (4.4) имеет единственное решение. Это решение является решением включения (4.2).

Что же касается неравенства (4.3), то оно вытекает из неравенств (4.9), (1.4) и теоремы 4.2 в [5], в которой построены равномерные аппроксимации $x_\lambda(\cdot)$, $\lambda > 0$ решения включения (4.4). Эти аппроксимации удовлетворяют неравенству

$$\|\dot{x}_\lambda(t)\| \leq |\dot{\beta}(t)| + L\|\dot{u}(t)\| + 2m(t)(1 + \|x_\lambda(t)\| + \|u(t)\|) + 2\|f(t)\| \quad \text{п.в.}$$

и равномерно по t сходятся к решению включения (4.4) при $\lambda \rightarrow 0$. Поэтому справедливо неравенство (4.3).

Теорема доказана.

Обозначим через $AC(T, H)$ пространство абсолютно непрерывных функций $x : T \rightarrow H$.

Пусть

$$S = \{u(\cdot) \in AC(T, H); u(0) = x_0, \|\dot{u}(t)\| \leq \dot{\rho}(t) \quad \text{п.в.}\}, \quad (4.10)$$

$$S(L^1) = \{f(\cdot) \in L^1(T, H); \|f(t)\| \leq l(t)(1 + \rho(t)) \quad \text{п.в.}\}, \quad (4.11)$$

где $\rho(t)$ — решение уравнения (1.7).

Множество S является выпуклым, замкнутым, равностепенно непрерывным подмножеством пространства $C(T, H)$, а $S(L^1)$ — выпуклым, метризуемым, компактным подмножеством пространства $\omega\text{-}L^1(T, H)$.

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество решений включения (4.2) с $u(\cdot) \in S$ и $f(\cdot) \in S(L^1)$, которое не пусто согласно теореме 4.1.

Лемма 4.1. *Имеет место включение*

$$\mathcal{M} \subset S \quad (4.12)$$

и $\mathcal{M}$ является относительно компактным подмножеством пространства $C(T, H)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u(\cdot) \in S$ и $f(\cdot) \in S(L^1)$. Из (4.10), (4.11) и (4.3) вытекает неравенство

$$\|\dot{x}_u(f)(t)\| \leq |\dot{\beta}(t)| + L\dot{\rho}(t) + 2m(t)(1 + \|x_u(f)(t)\|) + 2l(t)(1 + \rho(t)). \quad (4.13)$$

Вычитая из неравенства (4.13) неравенство (1.7), мы получим

$$\|\dot{x}_u(f)(t)\| - \dot{\rho}(t) \leq 2m(t)(\|x_u(f)(t)\| - \rho(t)) \quad \text{п.в.}$$

Поэтому

$$\|x_u(f)(t)\| - \rho(t) \leq \int_0^t 2m(s)(\|x_u(f)(s)\| - \rho(s))ds, \quad t \in T.$$

Из этого неравенства с помощью хорошо известных рассуждений мы приходим к неравенству

$$\|x_u(f)(t)\| \leq \rho(t), \quad t \in T. \quad (4.14)$$

Из (4.13), (4.14) и (1.7) имеем

$$\|\dot{x}_u(f)(t)\| \leq \dot{\rho}(t) \text{ п.в.} \quad (4.15)$$

Из этого неравенства и (4.10) вытекает включение (4.12).

Пусть

$$\mathcal{M}(t) = \{\cup x_u(f)(t); x_u(f)(\cdot) \in \mathcal{M}\}, \quad S(t) = \{\cup u(t); u(\cdot) \in S\}.$$

Из (4.10), (4.12) и (4.1) следует, что

$$\mathcal{M}(t) \subset D(A(t, S(t)) \cap S(t) \neq \emptyset, \quad t \in T.$$

Из этого включения, (4.10) и гипотезы $H(A)_S$ вытекает, что для любого $t \in T$ множество $\mathcal{M}(t)$, $t \in T$, относительно компактно и, следовательно, согласно теореме Арцела — Асколи $\mathcal{M}$ является относительно компактным подмножеством в $C(T, H)$.

Лемма доказана.

Пусть $\overline{\text{co}}\mathcal{M}$ — замкнутая выпуклая оболочка множества $\mathcal{M}$, которая является выпуклым компактом в $C(T, H)$, и справедливо включение

$$\mathcal{M} \subset \overline{\text{co}}\mathcal{M} \subset S. \quad (4.16)$$

Обозначим через $\mathcal{L} : \overline{\text{co}}\mathcal{M} \times S(L^1) \rightarrow AC(T, H)$ оператор, который элементам $u(\cdot) \in \overline{\text{co}}\mathcal{M}$, $f(\cdot) \in S(L^1)$ ставит в соответствие единственное решение включения (4.2), т. е.

$$x(\cdot) = \mathcal{L}(u, f). \quad (4.17)$$

Теорема 4.2. Оператор $\mathcal{L}$ является непрерывным из $\overline{\text{co}}\mathcal{M} \times \omega\text{-}S(L^1)$ в $\mathcal{M}$.

Доказательство. Включение

$$\mathcal{L}(u, f) \in \mathcal{M}, \quad u(\cdot) \in \overline{\text{co}}\mathcal{M}, \quad f(\cdot) \in S(L^1), \quad (4.18)$$

следует из включения (4.16) и определения множества $\mathcal{M}$.

Пусть последовательность $u_n(\cdot) \in \overline{\text{co}}\mathcal{M}$, $n \geq 1$, сходится к $u(\cdot)$ в $C(T, H)$, а последовательность $f_n(\cdot) \in S(L^1)$, $n \geq 1$, — к $f(\cdot)$ в $\omega\text{-}L^1(T, H)$ и

$$x_n(\cdot) = \mathcal{L}(u_n, f_n), \quad n \geq 1, \quad x(\cdot) = \mathcal{L}(u, f). \quad (4.19)$$

Из (4.15), (4.18), (4.19) и леммы 4.1 вытекает, что существует последовательность $x_k(\cdot) = x_{n_k}(\cdot)$, $k \geq 1$, такая, что

$$x_k(\cdot) \rightarrow y(\cdot) \text{ в } C(T, H), \quad (4.20)$$

$$\dot{x}_k(\cdot) \rightarrow \dot{y}(\cdot) \text{ в } \omega\text{-}L^1(T, H). \quad (4.21)$$

Тогда из (4.1), (4.2), (4.15), (4.11) следует

$$u_k(\cdot) \rightarrow u(\cdot) \text{ в } C(T, H), \quad (4.22)$$

$$f_k(\cdot) \rightarrow f(\cdot) \text{ в } \omega\text{-}L^1(T, H), \quad (4.23)$$

$$-\dot{x}_k(t) - f_k(t) \in A(t, u_k(t))x_k(t) \text{ п.в.,}$$

$$\|\dot{x}_k(t) + f_k(t)\| \leq \dot{\rho}(t) + l(t)(1 + \rho(t)) \text{ п.в.,} \quad (4.24)$$

$$x_k(t) \in D(A(t, u_k(t))), \quad t \in T. \quad (4.25)$$

Из (1.5), (2.1), (4.22) следует, что $D(A(t, u_k(t)))$ сходится к $D(A(t, u(t)))$, $t \in T$, в метрике Хаусдорфа. Поэтому согласно (4.25), (4.20)

$$y(t) \in D(A(t, u(t))), \quad t \in T. \quad (4.26)$$

Из гипотезы $H(A)$ 2), определения 2.2 и (4.22) следует, что

$$A(t, u_k(t)) \xrightarrow{G} A(t, u(t)), \quad k \rightarrow \infty, \quad t \in T. \quad (4.27)$$

Обозначим

$$v_k(t) = -\dot{x}_k(t) - f_k(t), \quad v(t) = -\dot{y}(t) - f(t). \quad (4.28)$$

Ввиду (4.21), (4.23)

$$v_k(\cdot) \rightarrow v(\cdot) \text{ в } \omega\text{-}L^1(T, H). \quad (4.29)$$

Из (4.24) следует, что множество $\omega\text{-}\text{Ls}_{k \rightarrow \infty} \{v_k(t)\}$ не пусто при почти всех $t \in T$. Согласно (4.27), (4.20) и утверждению 3.4

$$\omega\text{-}\text{Ls}_{k \rightarrow \infty} \{v_k(t)\} \subset A(t, u(t))y(t) \text{ п.в.}$$

Так как множество $A(t, u(t))x(t)$ выпукло и замкнуто, то

$$\overline{\text{co}} \omega\text{-}\text{Ls}_{k \rightarrow \infty} \{v_k(t)\} \subset A(t, u(t))y(t) \text{ п.в.}$$

Из этого включения, (4.28), (4.29) и утверждения 3.2 вытекает

$$-\dot{y}(t) \in A(t, u(t))y(t) + f(t) \text{ п.в.} \quad (4.30)$$

В соответствии с (4.26), (4.30) мы получаем, что $y(\cdot) = \mathcal{L}(u, f)$. Поскольку включение (4.2) имеет единственное решение $x(\cdot) = \mathcal{L}(u, f)$, то $x(\cdot) = y(\cdot)$.

Таким образом, мы показали, что если последовательность $u_n(\cdot) \rightarrow u(\cdot)$, $n \geq 1$, в $C(T, H)$, а последовательность $f_n(\cdot) \rightarrow f(\cdot)$ в $\omega\text{-}L^1(T, H)$, то существует подпоследовательность $x_k(\cdot) = x_{n_k}(\cdot) = \mathcal{L}(u_k, f_k)$, $k \geq 1$, сходящаяся к $x(\cdot) = \mathcal{L}(u, f)$. Если мы предположим, что сама последовательность $x_n(\cdot)$, $n \geq 1$, не сходится к $x(\cdot)$, то, рассуждая от противного и учитывая, что включение (4.2) имеет единственное решение $x(\cdot) = \mathcal{L}(u, f)$, мы придем к противоречию. Тем самым оператор $\mathcal{L}(u, f)$ является непрерывным из $\overline{\text{co}}\mathcal{M} \times \omega\text{-}S(L^1)$ в $\mathcal{M}$.

Теорема доказана.

5. Доказательство теоремы 1.1

Из теоремы 4.2 следует, что множество

$$\mathcal{K} = \{\mathcal{L}(u, f); u(\cdot) \in \overline{\text{co}}\mathcal{M}, f(\cdot) \in S(L^1)\} \quad (5.1)$$

является компактным подмножеством пространства $C(T, H)$, для которого имеет место включение (3.6). Поэтому на множестве $\mathcal{K}$ будут определены отображение $g : \mathcal{K} \rightarrow L^1(T, H)$ и многозначное отображение $\mathcal{G}_{\tilde{V}} : \mathcal{K} \rightrightarrows \omega\text{-}L^1(T, H)$ со свойствами, установленными в утверждениях 3.6, 3.7.

Определим многозначное отображение $\mathcal{F} : \mathcal{K} \rightrightarrows \omega\text{-}L^1(T, H)$

$$\mathcal{F}(x) = g(x) + \mathcal{G}_{\tilde{V}}(x), \quad (5.2)$$

значениями которого являются выпуклые слабо компактные множества. Из (5.1), (4.18), (4.16) и (4.14) вытекает, что $\|x(t)\| \leq \rho(t)$, $t \in T$, для любого $x(\cdot) \in \mathcal{K}$. Из этого неравенства, (3.8), (3.9), (3.10) и (1.8) мы получим неравенство

$$\|f(t)\| \leq l(t)(1 + \rho(t)) \text{ п.в., } f(\cdot) \in \mathcal{F}(x).$$

Воспользовавшись этим неравенством и (4.11), мы приходим к включению

$$\mathcal{F}(x) \subset S(L^1), \quad x(\cdot) \in \mathcal{K}. \quad (5.3)$$

Из свойств отображений $g, \mathcal{G}_{\tilde{V}}$, установленных в утверждениях 3.6, 3.7, вытекает, что отображение $\mathcal{F} : \mathcal{K} \rightrightarrows \omega\text{-}S(L^1)$ имеет слабо секвенциально замкнутый график. Тогда из (5.3) и утверждения 3.1 следует, что отображение $\mathcal{F} : \mathcal{K} \rightrightarrows \omega\text{-}S$ является слабо полунепрерывным сверху с выпуклыми, слабо компактными значениями. Рассмотрим многозначное отображение

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{L}) : \overline{\text{co}} \mathcal{M} \times \omega\text{-}S(L^1) &\rightrightarrows \omega\text{-}S(L^1), \\ \mathcal{F}(\mathcal{L})(u, f) &= \mathcal{F}(\mathcal{L}(u, f)), \end{aligned} \quad (5.4)$$

где $\mathcal{L} : \overline{\text{co}} \mathcal{M} \times \omega\text{-}S(L^1) \rightarrow \mathcal{K}$ — оператор (4.17).

Из теоремы 4.2 следует, что многозначное отображение $\mathcal{F}(\mathcal{L}(u, f))$ является слабо полунепрерывным сверху с выпуклыми слабо компактными значениями. Обозначим через Y пространство

$$Y = C(T, H) \times \omega\text{-}L^1(T, H).$$

Возьмем множество

$$Z = \overline{\text{co}} \mathcal{M} \times \omega\text{-}S(L^1) \subset Y,$$

которое является выпуклым компактным подмножеством пространства Y .

Пусть

$$\Phi(z) = \mathcal{L}(z) \times \mathcal{F}(\mathcal{L})(z), \quad z(\cdot) = (u(\cdot), f(\cdot)). \quad (5.5)$$

Рассматривая отображение $\mathcal{L}(u, f)$ как многозначное отображение, значениями которого являются одноточечные множества, и учитывая (4.16), (5.1), (4.18), мы получим, что

$$\Phi(z) \subset Z, \quad z(\cdot) \in Z.$$

Тем самым будет определено многозначное отображение $\Phi : Z \rightrightarrows Z$ с выпуклыми компактными значениями, которое имеет секвенциально замкнутый график в топологии пространства Y . Так как Z является выпуклым метризуемым компактом в топологии пространства Y , то согласно утверждению 3.1 отображение $\Phi : Z \rightrightarrows Z$ полунепрерывно сверху. Воспользовавшись теоремой 1 [6], мы получим, что отображение Φ имеет неподвижную точку $z^*(\cdot) \in Z$, т.е.

$$z^*(\cdot) \in \Phi(z^*), \quad z^*(\cdot) = (u^*(\cdot), f^*(\cdot)).$$

Из этого включения, (5.4), (5.5) вытекает

$$u^*(\cdot) = \mathcal{L}(u^*, f^*), \quad f^*(\cdot) \in \mathcal{F}(\mathcal{L})(u^*, f^*). \quad (5.6)$$

Из (5.6), (5.4), (5.2) мы получаем

$$f^*(\cdot) \in \mathcal{F}(u^*), \quad f^*(\cdot) \in g(u^*) + \mathcal{G}_{\tilde{V}}(u^*).$$

Следовательно, существует $f_{\tilde{V}}^*(u^*) \in \mathcal{G}_{\tilde{V}}(u^*)$ такое, что

$$f^*(\cdot) = g(u^*) + f_{\tilde{V}}^*(u^*). \quad (5.7)$$

Из (3.7), (3.11) вытекают включения

$$g(u^*)(t) \in U(t, u^*(t)), \quad f_{\tilde{V}}(u^*)(t) \in V(t, u^*(t)) \quad \text{п.в.} \quad (5.8)$$

Пусть

$$x^*(\cdot) = \mathcal{L}(u^*, f^*) \quad (5.9)$$

есть решение включения (4.2). Так как включение (4.2) имеет единственное решение, из (5.6) вытекает равенство

$$x^*(\cdot) = u^*(\cdot). \quad (5.10)$$

Следовательно,

$$x^*(\cdot) = \mathcal{L}(x^*, f^*). \quad (5.11)$$

Воспользовавшись (4.2), (5.10), (5.11), мы получим

$$-x^*(t) \in A(t, x^*(t))x^*(t) + f^*(t) \quad \text{п.в.}$$

$$x^*(0) = x_0, \quad x^*(t) \in D(A(t, x^*(t))), \quad t \in T.$$

Из (5.7)–(5.10) и определения 1.1 следует, что пара $(x^*(f^*)(\cdot), f^*(\cdot))$, $x^*(f^*)(\cdot) = x^*(\cdot)$, является решением включения (P) . Что же касается неравенств (1.9), (1.10), то они вытекают из включений $x^*(\cdot) \in \overline{\text{co}}\mathcal{M}$, $f^*(\cdot) \in S(L^1)$ из (4.10), (4.11).

Теорема доказана.

Следствие 1.1 вытекает из теоремы 1.1. Для этого необходимо доказать, что имеет место неравенство (1.5) и справедливы гипотезы $H(A)$ 1), 2). Неравенство (1.5) вытекает из (1.11), (3.4) и (2.1).

При фиксированном $u \in H$ измеримость семейства операторов $A(t, u)$, $t \in T$, следует из теоремы 5.1 [5]. Тем самым справедлива гипотеза $H(A)$ 1).

Пусть $t \in T$, $x \in H$, $\lambda > 0$ фиксированы, последовательность $u_n \in H$, $n \geq 1$, сходится к u и $C = \sup\{\|u_n\|, n \geq 1\}$. Возьмем $y \in D(A(t, u))$. Воспользовавшись неравенствами (1.4), (3.2), (3.3), мы получим

$$\|A_\lambda(t, u_n)x\| \leq \frac{1}{\lambda}\|x - y\| + m(t)(1 + \|y\| + C), \quad n \geq 1.$$

Используя это неравенство и (3.5), получим

$$\|J_\lambda(A(t, u_n))x - J_\lambda(A(t, u))x\|^2 \leq R\|u_n - u\|, \quad (5.12)$$

где

$$R = 2\lambda \left[\left(1 + \frac{1}{\lambda}\|x - y\| + m(t)(1 + \|y\| + C) \right) + \|A_\lambda(t, u)x\| \right] \cdot L.$$

Из неравенства (5.12) следует, что последовательность $J_\lambda(A(t, u_n))x$, $n \geq 1$, сходится к $J_\lambda(A(t, u))x$. Поэтому согласно теореме 3.2 имеет место сходимость $A(t, u_n) \xrightarrow{G} A(t, u)$, $n \rightarrow \infty$. Значит, справедлива гипотеза $H(A)$ 2). Поэтому следствие вытекает из теоремы 1.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brezis H.** Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. North-Holland, Amsterdam-London: Elsevier, 1973. 183 p.
2. **Vladimirov A.A.** Nonstationary dissipative evolution equations in a Hilbert space // Nonlinear Anal.: Theory, Method & Appl. 1991. Vol. 17, no. 6. P. 499–518. doi: 10.1016/0362-546X(91)90061-5
3. **Selamnia F., Azzam-Laouir D., Monteiro Marques M.D.P.** Evolution problems involving state-dependent maximal monotone operators // Appl. Anal. 2022. Vol. 101, no. 1. P. 297–313. doi: 10.1080/00036811.2020.1738401

4. **Amiour F., Sene M., Haddad T.** Existence Results for State-Dependent Maximal Monotone Differential Inclusions: Fixed Point Approach // *Numer. Funct. Analysis Optimiz.* 2022. Vol. 43, no. 7. P. 1–22. doi: 10.1080/01630563.2022.2059675
5. **Толстоногов А.А.** Теоремы сравнения для эволюционных включений с максимально монотонными операторами. L^2 -теория // *Мат. сб.* 2023. Т. 214, № 6. С. 110–135. doi: 10.4213/sm9736
6. **Fan K.** Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1952. Vol. 38. P. 121–126.
7. **Le B.K.** Well-posedness and nonsmooth Lyapunov pairs for state-dependent maximal monotone differential inclusions // *Optimization.* 2020. Vol. 69, no. 6. P. 1187–1217. doi: 10.1080/02331934.2019.1686504
8. **Le B.K.** On a class of Lur'e dynamical systems with state-dependent set-valued feedback // *Set-Valued and Variational Analysis.* 2020. Vol. 28, no. 1. P. 537–557. doi: 10.1007/s11228-020-00530-8
9. **Attouch H.** Families d'opérateurs maximax monotone et mesurabilité // *Ann. Math. Pura Appl.* 1979. Vol. 120, no. 4. P. 35–111.
10. **Attouch H.** Variational convergence for functions and operators. Boston–London–Melbourne: Pitman Advanced Publishing program, 1984. 423 p.
11. **Shui-Hung Hou.** On property (Q) and other semicontinuity properties of multifunctions // *Pacific J. Math.* 1982. Vol. 103, no. 2. P. 39–56.
12. **Denkowski Z., Migorski S., Papageorgiou N.S.** An introduction to nonlinear analysis: theory. NY: Kluwer Acad., Plenum Publ., 2003. doi: 10.1007/978-1-4419-9158-4
13. **Kunze M., Monteiro Marques M.D.P.** BV solutions to evolution problems with time dependent domains // *Set-valued Anal.* 1994. Vol. 5. P. 57–72. doi: 10.1023/A:1008621327851
14. **Tolstonogov A.A.** Upper semicontinuous convex-valued selectors of a Nemytskii operator with nonconvex values and evolution inclusions with maximal monotone operators // *J. Math. Anal. Appl.* 2023. Vol. 526, no. 1. Art. no. 127197. doi: 10.1016/j.jmaa.2023.127197
15. **Moreau J.J.** Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space // *J. Diff. Equat.* 1997. Vol. 26, no. 3. P. 347–374. doi: 10.1016/0022-0396(77)90085-7

Поступила 4.04.2024

После доработки 15.05.2024

Принята к публикации 20.05.2024

Толстоногов Александр Александрович
 чл.-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, профессор
 заведующий отделением
 Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
 Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова
 Сибирского отделения Российской академии наук (ИДСТУ СО РАН),
 г. Иркутск
 e-mail: alexander.tolstonogov@gmail.com

REFERENCES

1. Brézis H. *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, Amsterdam, North-Holland, 1973, 183 p. ISBN: 0720427053.
2. Vladimirov A.A. Nonstationary dissipative evolution equations in a Hilbert space. *Nonlinear Anal.: Theory, Method & Appl.*, 1991, vol. 17, no. 6, pp. 499–518. doi: 10.1016/0362-546X(91)90061-5
3. Selamnia F., Azzam-Laouir D., Monteiro Marques M.D.P. Evolution problems involving state-dependent maximal monotone operators. *Appl. Anal.*, 2022, vol. 101, no. 1, pp. 297–313. doi: 10.1080/00036811.2020.1738401
4. Amiour F., Sene M., Haddad T. Existence results for state-dependent maximal monotone differential inclusions: Fixed point approach. *Numer. Funct. Anal. Optimiz.*, 2022, vol. 43, no. 7, pp. 838–859. doi: 10.1080/01630563.2022.2059675
5. Tolstonogov A.A. Comparison theorems for evolution inclusions with maximal monotone operators. L^2 -theory. *Sbornik: Mathematics*, 2023, vol. 214, no. 6, pp. 853–877. doi: 10.4213/sm9736e

6. Fan K. Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.*, 1952, vol. 38, pp. 121–126.
7. Le B.K. Well-posedness and nonsmooth Lyapunov pairs for state-dependent maximal monotone differential inclusions. *Optimization*, 2020, vol. 69, no. 6, pp. 1187–1217. doi: 10.1080/02331934.2019.1686504
8. Le B.K. On a class of Lur'e dynamical systems with state-dependent set-valued feedback. *Set-valued Variat. Anal.*, 2020, vol. 28, no. 1, pp. 537–557. doi: 10.1007/s11228-020-00530-8
9. Attouch H. Families d'opérateurs maximax monotone et mesurabilité. *Ann. Math. Pura Appl.*, 1979, vol. 120, no. 4, pp. 35–111.
10. Attouch H. *Variational convergence for functions and operators*, Boston–London–Melbourne, Pitman Advanced Publ. Prog., 1984, 423 p. ISBN-10: 0273085832.
11. Shui-Hung Hou. On property (Q) and other semicontinuity properties of multifunctions. *Pacific J. Math.*, 1982, vol. 103, no. 2, pp. 39–56.
12. Denkowski Z., Migórski S., Papageorgiou N.S. *An introduction to nonlinear analysis: theory*. NY, Kluwer Acad., Plenum Publ., 2003, 690 p. doi: 10.1007/978-1-4419-9158-4
13. Kunze M., Monteiro Marques M.D.P. BV solutions to evolution problems with time-dependent domains. *Set-valued Variat. Anal.*, 1997, vol. 5, pp. 57–72. doi: 10.1023/A:1008621327851
14. Tolstonogov A.A. Upper semicontinuous convex-valued selectors of a Nemytskii operator with nonconvex values and evolution inclusions with maximal monotone operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 2023, vol. 526, no. 1, art. no. 127197. doi: 10.1016/j.jmaa.2023.127197
15. Moreau J.J. Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space. *J. Diff. Equat.*, 1977, vol. 26, no. 3, pp. 347–374. doi: 10.1016/0022-0396(77)90085-7

Received April 4, 2024

Revised May 15, 2024

Accepted May 20, 2024

Alexander Alexandrovich Tolstonogov, Corresponding member of RAS, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033 Russia, e-mail: alexander.tolstonogov@gmail.com.

Cite this article as: A. A. Tolstonogov. Evolution inclusions with state-dependent maximal monotone operators. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 241–254.