

УДК 517.977

ОБОВЩЕННАЯ ФОРМУЛА ХОПФА ДЛЯ ФУНКЦИИ ЦЕНЫ В ПОЗИЦИОННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ “МАЛЬЧИК И КРОКОДИЛ”

Н. Н. Субботина, А. С. Родин

В работе предлагается новая формула минимаксного решения краевой задачи Коши для уравнения Гамильтона — Якоби в случае, когда гамильтониан зависит от времени и градиента по фазовой переменной минимаксного решения. Эта формула является обобщением формулы Хопфа. Показано на конкретном примере, что эта формула справедлива для минимаксного решения уравнения Гамильтона — Якоби в задаче Коши, которая возникает в позиционной дифференциальной игре “мальчик и крокодил”. Предложенная формула описывает функцию цены в этой дифференциальной игре.

Ключевые слова: позиционная дифференциальная игра, функция цены, уравнение Гамильтона — Якоби, формула Хопфа, производная по направлению, минимаксное решение.

N. N. Subbotina, A. S. Rodin. Generalized Hopf formula for the value function in the positional differential game “Boy and Crocodile”.

The paper proposes a new formula for the minimax solution to the Cauchy boundary value problem for the Hamilton–Jacobi equation in the case when the Hamiltonian depends on time and the gradient in the phase variable of the minimax solution. This formula is a generalization of the Hopf formula. It is shown using a specific example that this formula is true for the minimax solution of the Hamilton–Jacobi equation in the Cauchy problem, which arises in the positional differential game “Boy and Crocodile.” The proposed formula describes the value function in this differential game.

Keywords: positional differential game, value function, Hamilton–Jacobi equation, Hopf formula, directional derivative, minimax solution.

MSC:34H05, 49N45

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-3-229-240

Введение

Теория позиционных дифференциальных игр, созданная Н. Н. Красовским и его учениками более полувека назад [1; 2], получила мощное развитие за прошедшие годы. Она насчитывает обширнейшую библиографию. Одной из ветвей развития этой теории стала теория обобщенных, минимаксных решений уравнений в частных производных первого порядка [3], которые описывают функцию цены антагонистической позиционной дифференциальной игры. Функция цены играет ключевую роль в теории игр, она определяет баланс возможностей игроков-антагонистов и позволяет конструировать оптимальные стратегии противоборствующих игроков. Как правило, такая функция может быть построена только численно. Аналитические формулы для нее получены только в очень редких случаях.

В работе предлагается новая формула минимаксного решения краевой задачи Коши для уравнения Гамильтона — Якоби в случае, когда гамильтониан зависит от времени и градиента по фазовой переменной. Эта формула является обобщением известной формулы Хопфа. Показано, что эта формула справедлива для минимаксного решения уравнения Гамильтона — Якоби в задаче Коши, которая возникает в позиционной дифференциальной игре “мальчик и крокодил”. Предложенная формула описывает функцию цены в этой дифференциальной игре.

1. Позиционная дифференциальная игра “мальчик и крокодил”

Рассмотрим позиционную дифференциальную игру “мальчик и крокодил”. Ее динамика в приведенном виде выглядит следующим образом:

$$\dot{x} = (T - t) \cdot u - v, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0; T], \quad u, v \in [-1; 1]. \quad (1.1)$$

Рассмотрим $(t_0, x_0) \in [0; T] \times \mathbb{R}$ и измеримые управления $u(\cdot): [t_0; T] \rightarrow [-1; 1]$, $v(\cdot): [t_0; T] \rightarrow [-1; 1]$. Качество порожденной этими управлениями траектории $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot), v(\cdot)) : [t_0; T] \rightarrow \mathbb{R}$, $x(t_0) = x_0$, системы (1.1) оценим с помощью терминальных функционалов платы: $\sigma(x(T; t_0, x_0, u(\cdot), v(\cdot))) = \sigma(x(T))$, где

$$\sigma(x) = \sigma_1(x) = \frac{x^2}{2}, \quad (1.2)$$

$$\sigma(x) = \sigma_2(x) = \max \left\{ \frac{x^2}{2}, \frac{(1/3)^2}{2} \right\}. \quad (1.3)$$

Целью игрока u (крокодила) является минимизация этого функционала, а игрока v (мальчика) — максимизация. Первый функционал отвечает условию точной поимки, а второй — поимке в ε -окрестности, $\varepsilon = 1/3$.

Введем множества позиционных стратегий обоих игроков:

$$\tilde{U} = \{[0; T] \times \mathbb{R} \ni (t, x) \rightarrow u(t, x) \in [-1; 1]\},$$

$$\tilde{V} = \{[0; T] \times \mathbb{R} \ni (t, x) \rightarrow v(t, x) \in [-1; 1]\}.$$

Будем сопоставлять стратегии $U \in \tilde{U}$ — функцию $(t, x) \rightarrow u(t, x)$, а стратегии $V \in \tilde{V}$ — функцию $(t, x) \rightarrow v(t, x)$. Введем разбиение Δ полуинтервалами $[\tau_i; \tau_{i+1})$ множества $[t_0; T]$, $t_0 \in [0; T]$, $i = \{0, 1, \dots\}$, $\tau_0 = t_0$.

Назовем ломаной Эйлера для начальной позиции $(t_0, x_0) \in [0; T] \times \mathbb{R}$

$$x_\Delta(t) = x_\Delta(t, t_0, x_0, U, v(t)), \quad \text{где } v(t) = v_i \in [-1; 1] \quad \text{при } t \in [\tau_i; \tau_{i+1}),$$

абсолютно непрерывное решение дифференциального уравнения

$$\dot{x}_\Delta(t) = (T - t)u(\tau_i, x_\Delta(\tau_i)) - v_i, \quad t \in [\tau_i; \tau_{i+1}), \quad i = \{0, 1, \dots\}, \quad \tau_0 = t_0.$$

Аналогично рассмотрим как ломаную Эйлера для начальной позиции $(t_0, x_0) \in [0; T] \times \mathbb{R}$

$$x_\Delta(t) = x_\Delta(t, t_0, x_0, u(t), V), \quad \text{где } u(t) = u_i \in [-1; 1] \quad \text{при } t \in [\tau_i; \tau_{i+1}),$$

абсолютно непрерывное решение дифференциального уравнения

$$\dot{x}_\Delta(t) = (T - t)u_i - v(\tau_i, x_\Delta(\tau_i)), \quad t \in [\tau_i; \tau_{i+1}), \quad i = \{0, 1, \dots\}, \quad \tau_0 = t_0.$$

Напомним определения оптимальных гарантированных результатов из классов $\tilde{U}$, $\tilde{V}$, а вместе с тем и оптимальных стратегий $U^0 \in \tilde{U}$ и $V^0 \in \tilde{V}$:

$$\Gamma_1^0(t_0, x_0) = \lim_{\text{diam}(\Delta) \rightarrow 0} \sup_{v(\cdot)} \sigma(x_\Delta(T, t_0, x_0, U^0, v(t))) = \inf_{U \in \tilde{U}} \lim_{\text{diam}(\Delta) \rightarrow 0} \sup_{v(\cdot)} \sigma(x_\Delta(T, t_0, x_0, U, v(t)));$$

$$\Gamma_2^0(t_0, x_0) = \lim_{\text{diam}(\Delta) \rightarrow 0} \inf_{u(\cdot)} \sigma(x_\Delta(T, t_0, x_0, u(t), V^0)) = \sup_{V \in \tilde{V}} \lim_{\text{diam}(\Delta) \rightarrow 0} \inf_{u(\cdot)} \sigma(x_\Delta(T, t_0, x_0, u(t), V)).$$

Здесь $\text{diam}(\Delta)$ есть диаметр разбиения Δ .

Если в точке $(t_0, x_0) \in [0; T] \times \mathbb{R}$ существуют $\Gamma_1^0(t_0, x_0)$, $\Gamma_2^0(t_0, x_0)$ и совпадают, то игра имеет седловую точку $\{U^0, V^0\}$, а значение

$$\Gamma_1^0(t_0, x_0) = \Gamma_2^0(t_0, x_0) = \varphi(t_0, x_0) = \text{Val}(t_0, x_0)$$

называется ценой игры для точки (t_0, x_0) . Отображение $[0, T] \times \mathbb{R} \ni (t_0, x_0) \rightarrow \varphi(t_0, x_0) \in \mathbb{R}$ называется функцией цены дифференциальной игры.

В работе [4] было доказано, что дифференциальная игра “мальчик и крокодил” (1.1), (1.2) имеет седловую точку, и построена функция цены $(t_0, x_0) \rightarrow \text{Val}_1(t_0, x_0) : [0; 2] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ этой игры. Цена имеет вид

$$\text{Val}_1(t_0, x_0) = \begin{cases} \frac{\left(|x_0| + t_0 - \frac{t_0^2}{2}\right)^2}{2}, & \text{если } t_0 \in [1; 2]; \\ \max \left\{ \frac{\left(|x_0| + t_0 - \frac{t_0^2}{2}\right)^2}{2}; \frac{1}{8} \right\}, & \text{если } t_0 \in [0; 1]. \end{cases} \quad (1.4)$$

2. Краевая задача для уравнения Гамильтона — Якоби

Рассмотрим следующую краевую задачу Коши для уравнения Гамильтона — Якоби с гамильтонианом $H(t, s)$:

$$D_t \varphi(t, x) + H(t, D_x \varphi(t, x)) = 0, \quad \varphi(T, x) = \sigma(x), \quad (2.1)$$

где $t \in [0; T]$, $x \in \mathbb{R}$.

В дифференциальной игре “мальчик и крокодил” гамильтониан $H(t, s)$ имеет вид

$$\min_{u \in [-1; 1]} \max_{v \in [-1; 1]} (s((T-t)u - v)) = \max_{v \in [-1; 1]} \min_{u \in [-1; 1]} (s((T-t)u - v)) = |s|(t+1-T) = H(t, s).$$

Рассмотрим соответствующие краевые задачи

$$D_t \varphi(t, x) + |D_x \varphi(t, x)|(t - (T-1)) = 0, \quad \varphi(T, x) = \sigma_1(x), \quad (2.2)$$

$$D_t \varphi(t, x) + |D_x \varphi(t, x)|(t - (T-1)) = 0, \quad \varphi(T, x) = \sigma_2(x), \quad (2.3)$$

Здесь функции $\sigma_1(x)$ и $\sigma_2(x)$ описываются равенствами (1.2) и (1.3) соответственно.

Классического решения задача (2.1), как правило, не имеет. Напомним определение обобщенного минимаксного решения этой задачи.

О п р е д е л е н и е 1 [3, с. 73]. Непрерывная функция $\varphi(t, x)$ является *минимаксным решением* краевой задачи Коши уравнения Гамильтона — Якоби (2.1), если выполнены следующие условия:

$$\varphi(T, x) = \sigma(x),$$

$$\inf \{d^- \varphi(t, x; (1, f)) - \langle s, f \rangle + H(t, s) : f \in \mathbb{R}^n\} \leq 0, \quad (2.4)$$

$$\sup \{d^+ \varphi(t, x; (1, f)) - \langle s, f \rangle + H(t, s) : f \in \mathbb{R}^n\} \geq 0 \quad (2.5)$$

для всех $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}^n$.

Здесь

$$d^- \varphi(t, x; (1, f)) = \liminf_{\delta \rightarrow 0, f' \rightarrow f} \frac{\varphi(t + \delta, x + f'\delta) - \varphi(t, x)}{\delta},$$

$$d^+ \varphi(t, x; (1, f)) = \limsup_{\delta \rightarrow 0, f' \rightarrow f} \frac{\varphi(t + \delta, x + f'\delta) - \varphi(t, x)}{\delta}.$$

Согласно общей теории минимаксных решений [3; 5] для рассматриваемых задач (2.2), (2.3) справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Минимаксные решения в задачах (2.2), (2.3) существуют и единственны, они совпадают с функциями цены в дифференциальных играх “мальчик и крокодил” (1.1), (1.2) и (1.1), (1.3) соответственно.

3. Вспомогательные конструкции

Введем следующие вспомогательные конструкции:

$$\sigma^*(s) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \langle x, s \rangle - \sigma(x) \}, \quad (3.1)$$

$$\Psi(t, s) = \sigma^*(s) - \int_t^T H(\tau, s) d\tau \quad \forall t \in [0; T], \quad (3.2)$$

$$\varphi(t, x) = \sup_{s \in \mathbb{R}^n} \{ \langle x, s \rangle - \Psi(t, s) \}, \quad (3.3)$$

$$\bar{\varphi}(t, x) = \max \left\{ \varphi(t, x), \max_{\vartheta \in [t; T]} \min_{y \in \mathbb{R}^n} \varphi(\vartheta, y) \right\}. \quad (3.4)$$

В будущих работах планируется исследовать вопрос о том, что при достаточно общих предположениях о входных данных формула (3.4) определяет минимаксное решение в задаче (2.1).

Данная работа посвящена доказательству того, что формула (3.4) задает минимаксное решение в задачах (2.2) и (2.3) при $T = 2$. Вследствие теоремы 1 эта формула определяет функции цены в задачах “мальчик и крокодил” (1.1), (1.2) и (1.1), (1.3) соответственно.

3.1. Случай $\sigma(x) = \sigma_1(x)$

Для задачи (2.2) функции (3.1)–(3.4) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma^*(s) &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ xs - \frac{x^2}{2} \right\} = \frac{s^2}{2}, \\ \Psi(t, s) &= \sigma^*(s) - \int_t^2 H(\tau, s) d\tau = \frac{s^2}{2} - \int_t^2 (\tau - 1) |s| d\tau = \frac{s^2}{2} - l(t) |s|, \quad l(t) = \left(t - \frac{t^2}{2} \right), \\ \varphi(t, x) &= \sup_{s \in \mathbb{R}} \left\{ xs - \frac{s^2}{2} + l(t) |s| \right\} = \frac{(|x| + l(t))^2}{2}, \\ \bar{\varphi}(t, x) &= \max \left\{ \varphi(t, x), \max_{\vartheta \in [t; 2]} \min_{y \in \mathbb{R}} \varphi(\vartheta, y) \right\} = \max \left\{ \frac{(|x| + l(t))^2}{2}, \max_{\vartheta \in [t; 2]} \frac{l^2(\vartheta)}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $\frac{l^2(t)}{2}$. Ее единственный локальный максимум на промежутке $[0; 2]$ находится в точке $t = 1$. Для $t \in [1; 2]$ точка максимума функции $\max_{\vartheta \in [t; 2]} \frac{l^2(\vartheta)}{2}$ равна $\vartheta = t$, поскольку $D_t \left(\frac{l^2(\vartheta)}{2} \right) = (1 - \vartheta) \leq 0$. Из того что

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in [1; 2] \quad \frac{(|x| + l(t))^2}{2} \geq \frac{l^2(t)}{2},$$

следует: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in [1; 2] \quad \bar{\varphi}(t, x) = \varphi(t, x) = \frac{(|x| + l(t))^2}{2}$.

Для случая, когда $t \in [0; 1]$, имеем $\bar{\varphi}(t, x) = \max \left\{ \frac{(|x| + l(t))^2}{2}, \frac{l^2(1)}{2} \right\}$, так как есть точки $(t, x) \in [0; 1] \times \mathbb{R}$, в которых не выполняется неравенство

$$\frac{(|x| + l(t))^2}{2} \geq \frac{l^2(1)}{2}.$$

Таким образом, получаем

$$\bar{\varphi}(t, x) = \begin{cases} \frac{(|x| + l(t))^2}{2} & \text{при } t \in [1; 2]; \\ \max \left\{ \frac{(|x| + l(t))^2}{2}, \frac{l^2(1)}{2} \right\} & \text{при } t \in [0; 1]. \end{cases}$$

Очевидно, эта функция совпадает с функцией цены игры $\text{Val}_1(t, x)$, $t \in [0; 2]$, $x \in \mathbb{R}$ (1.4).

3.2. Случай $\sigma(x) = \sigma_2(x)$

Покажем, что в этом случае функция $\bar{\varphi}(t, x)$, рассчитанная по формулам (3.1)–(3.4), является минимаксным решением задачи (2.2) и, следовательно, совпадает с функцией цены $\text{Val}_2(t, x)$ в задаче “мальчик и крокодил” (1.1), (1.3).

Рассмотрим следующие функции:

$$\Psi(t, s) = \sigma^*(s) - \int_t^2 H(\tau, s) d\tau \quad \forall t \in [0; 2], \quad \sigma^*(s) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \langle x, s \rangle - \sigma(x) \}.$$

Применительно к задаче (2.3) по функции

$$\sigma(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & \text{если } |x| \geq \frac{1}{3}; \\ \frac{(1/3)^2}{2}, & \text{если } |x| \leq \frac{1}{3}, \end{cases}$$

найдем сопряженную функцию $\sigma^*(s)$.

Для начала введем функцию

$$\sigma_+^*(s) = \sup_{|x| \geq \frac{1}{3}} \left\{ xs - \frac{x^2}{2} \right\} = \sup_{|x| \geq \frac{1}{3}} \left\{ |x| \cdot |s| - \frac{|x|^2}{2} \right\} = \sup_{|x| \geq \frac{1}{3}} \left\{ \frac{|s|^2}{2} - \frac{(|x| - |s|)^2}{2} \right\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\sigma_+^*(s) = \begin{cases} \frac{s^2}{2}, & \text{если } |s| \geq \frac{1}{3}; \\ \frac{1}{3} |s| - \frac{(1/3)^2}{2}, & \text{если } |s| \leq \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Введем также функцию

$$\sigma_-^*(s) = \sup_{|x| \leq \frac{1}{3}} \left\{ xs - \frac{(1/3)^2}{2} \right\} = \sup_{|x| \leq \frac{1}{3}} \left\{ |x| \cdot |s| - \frac{(1/3)^2}{2} \right\} = \frac{1}{3} |s| - \frac{(1/3)^2}{2}.$$

Из того, что $\frac{|s|^2}{2} \geq \frac{1}{3} |s| - \frac{(1/3)^2}{2}$, получаем

$$\sigma^*(s) = \max \{ \sigma_+^*(s), \sigma_-^*(s) \} = \begin{cases} \frac{s^2}{2}, & \text{если } |s| \geq \frac{1}{3}; \\ \frac{1}{3} |s| - \frac{(1/3)^2}{2}, & \text{если } |s| \leq \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Согласно формуле (3.2) вычислим $\Psi(t, s) = \sigma^*(s) - l(t)|s|$, где $l(t) = \left(t - \frac{t^2}{2}\right)$,

$$\Psi(t, s) = \begin{cases} \frac{s^2}{2} - l(t)|s|, & \text{если } |s| \geq \frac{1}{3}; \\ \frac{1}{3}|s| - \frac{(1/3)^2}{2} - l(t)|s|, & \text{если } |s| \leq \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Проанализируем функцию $\varphi(t, x) = \sup_{s \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, s \rangle - \Psi(t, s)\}$,

$$\varphi(t, x) = \max \left\{ \sup_{|s| \geq \frac{1}{3}} \left\{ xs - \frac{s^2}{2} + l(t)|s| \right\}, \sup_{|s| \leq \frac{1}{3}} \left\{ xs + \frac{(1/3)^2}{2} + \left(l(t) - \frac{1}{3}\right)|s| \right\} \right\}. \quad (3.5)$$

Введем функции

$$\varphi_+(t, x) = \sup_{|s| \geq \frac{1}{3}} \tilde{\varphi}_+(t, x, s), \quad \tilde{\varphi}_+(t, x, s) = xs - \frac{s^2}{2} + l(t)|s|.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \sup_{|s| \geq \frac{1}{3}} \left\{ xs - \frac{s^2}{2} + l(t)|s| \right\} &= \sup_{|s| \geq \frac{1}{3}} \left\{ |x| \cdot |s| - \frac{|s|^2}{2} + l(t)|s| \right\} \\ &= \sup_{|s| \geq \frac{1}{3}} \left\{ \frac{(|x| + l(t))^2}{2} - \frac{(|x| - |s| + l(t))^2}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\varphi_+(t, x) = \begin{cases} \frac{(|x| + l(t))^2}{2}, & \text{если } |x| \geq \frac{1}{3} - l(t); \\ \frac{1}{3}(|x| + l(t)) - \frac{(1/3)^2}{2}, & \text{если } |x| \leq \frac{1}{3} - l(t). \end{cases}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\varphi_-(t, x) = \sup_{|s| \leq \frac{1}{3}} \left\{ xs + \frac{(1/3)^2}{2} + \left(l(t) - \frac{1}{3}\right)|s| \right\} = \sup_{|s| \leq \frac{1}{3}} \left\{ |s| \left(|x| + l(t) - \frac{1}{3}\right) + \frac{(1/3)^2}{2} \right\}.$$

Получаем, что

$$\varphi_-(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(|x| + l(t)) - \frac{(1/3)^2}{2}, & \text{если } |x| \geq \frac{1}{3} - l(t); \\ \frac{(1/3)^2}{2}, & \text{если } |x| \leq \frac{1}{3} - l(t). \end{cases}$$

Таким образом,

$$\varphi(t, x) = \max \{\varphi_+(t, x), \varphi_-(t, x)\} = \begin{cases} \frac{(|x| + l(t))^2}{2}, & \text{если } |x| \geq \frac{1}{3} - l(t); \\ \frac{(1/3)^2}{2}, & \text{если } |x| \leq \frac{1}{3} - l(t). \end{cases}$$

Функцию $\varphi(t, x)$ вида (3.5) можно также записать в следующем виде:

$$\varphi(t, x) = \max \left\{ \frac{(|x| + l(t))^2}{2}, \frac{(1/3)^2}{2} \right\}.$$

Рассмотрим неравенство $l(t) = \left(t - \frac{t^2}{2}\right) \leq \frac{1}{3}$. Его решением является $t \in [0; 1 - (1/\sqrt{3})] \cup [1 + (1/\sqrt{3}); 2]$. Получаем, что

$$\varphi(t, x) = \max \left\{ \frac{(|x| + l(t))^2}{2}, \frac{(1/3)^2}{2} \right\}, \quad \text{если } t \in [0; 1 - (1/\sqrt{3})] \cup [1 + (1/\sqrt{3}); 2];$$

$$\varphi(t, x) = \frac{(|x| + l(t))^2}{2}, \quad \text{если } t \in [1 - (1/\sqrt{3}); 1 + (1/\sqrt{3})].$$

Введем функцию $\varphi_0(t)$, $t \in [0; 2]$, вида

$$\varphi_0(t) = \max_{\vartheta \in [t; 2]} \min_{y \in \mathbb{R}} \varphi(\vartheta, y) = \begin{cases} \frac{(1/3)^2}{2}, & \text{если } t \in [1 + (1/\sqrt{3}); 2]; \\ \frac{l^2(t)}{2}, & \text{если } t \in [1; 1 + (1/\sqrt{3})]; \\ \frac{l^2(1)}{2}, & \text{если } t \in [0; 1]. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$\bar{\varphi}(t, x) = \max \{ \varphi(t, x), \varphi_0(t) \} = \max \left\{ \frac{(|x| + l(t))^2}{2}, \frac{(1/3)^2}{2}, \varphi_0(t) \right\}. \quad (3.6)$$

Из того, что $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [1; 2] \quad \frac{(|x| + l(t))^2}{2} \geq \frac{l^2(t)}{2}$, следует: $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [1; 2]$

$$\bar{\varphi}(t, x) = \varphi(t, x) = \max \left\{ \frac{(|x| + l(t))^2}{2}, \frac{(1/3)^2}{2} \right\}.$$

Для случая $t \in [0; 1]$ имеем

$$\bar{\varphi}(t, x) = \max \{ \varphi(t, x), \varphi_0(t) \} = \max \left\{ \frac{(|x| + l(t))^2}{2}, \frac{(1/3)^2}{2}, \varphi_0(t) \right\} = \max \left\{ \frac{(|x| + l(t))^2}{2}, \frac{l^2(1)}{2} \right\},$$

поскольку есть точки $(t, x) \in [0; 1] \times \mathbb{R}$, в которых не выполняется неравенство

$$\frac{(|x| + l(t))^2}{2} \geq \frac{l^2(1)}{2},$$

и при этом $\frac{1}{18} = \frac{(1/3)^2}{2} < \frac{l^2(1)}{2} = \frac{1}{8}$.

Таким образом, функцию $\bar{\varphi}(t, x)$ вида (3.6) можно записать как

$$\bar{\varphi}(t, x) = \begin{cases} \max \left\{ \frac{(|x| + l(t))^2}{2}, \frac{(1/3)^2}{2} \right\} & \text{при } t \in [1; 2]; \\ \max \left\{ \frac{(|x| + l(t))^2}{2}, \frac{l^2(1)}{2} \right\} & \text{при } t \in [0; 1]. \end{cases} \quad (3.7)$$

В случае, когда $t \in [0; 1]$, представим функцию $\bar{\varphi}(t, x) = \max \left\{ \frac{(|x| + l(t))^2}{2}, \frac{l^2(1)}{2} \right\}$ в более удобном виде:

$$\bar{\varphi}(t, x) = \begin{cases} \frac{(|x| + l(t))^2}{2}, & \text{если } |x| \geq l(1) - l(t); \\ \frac{l^2(1)}{2}, & \text{если } |x| \leq l(1) - l(t). \end{cases} \quad (3.8)$$

В случае, когда $t \in [1; 2]$, запишем функцию $\bar{\varphi}(t, x) = \max \left\{ \frac{(|x| + l(t))^2}{2}, \frac{(1/3)^2}{2} \right\}$ как

$$\bar{\varphi}(t, x) = \begin{cases} \frac{(|x| + l(t))^2}{2}, & \text{если } |x| \geq \frac{1}{3} - l(t); \\ \frac{(1/3)^2}{2}, & \text{если } |x| \leq \frac{1}{3} - l(t). \end{cases} \quad (3.9)$$

Далее проверим, что построенная функция $\bar{\varphi}(t, x)$ является минимаксным решением краевой задачи Коши (2.3).

3.3. Производные по направлениям

Вычислим производные по направлениям для построенной функции $\bar{\varphi}(t, x)$.

Рассмотрим на $[0; 2] \times \mathbb{R} \ni (t, x)$ непрерывно дифференцируемые функции:

$$\varphi_1(t, x) = \frac{(x + l(t))^2}{2}, \quad \varphi_2(t, x) = \frac{(-x + l(t))^2}{2}, \quad \varphi_3(t, x) = \frac{(1/3)^2}{2}, \quad \varphi_4(t, x) = \frac{(1/2)^2}{2}.$$

Их производные в точках $(t, x) \in (0; 2) \times \mathbb{R}$ по направлениям $(1, f) \in \mathbb{R}^2$ определяются как

$$d\varphi_i(t, x; (1, f)) = \frac{\partial \varphi_i(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_i(t, x)}{\partial x} f, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

$$d\varphi_1(t, x; (1, f)) = [x + (t - t^2/2)][(1 - t) + f], \quad (3.10)$$

$$d\varphi_2(t, x; (1, f)) = [-x + (t - t^2/2)][(1 - t) - f], \quad (3.11)$$

$$d\varphi_3(t, x; (1, f)) = 0, \quad d\varphi_4(t, x; (1, f)) = 0. \quad (3.12)$$

Введем множества

$$M_1 = \{t \in [(1 + (1/\sqrt{3})); 2], x \geq 1/3 - (t - t^2/2)\} \cup \{t \in [1, (1 + (1/\sqrt{3}))], x \geq 0\} \\ \cup \{t \in [0; 1], x \geq 1/2 - (t - t^2/2)\},$$

$$M_2 = \{t \in [(1 + (1/\sqrt{3})); 2], x \leq -1/3 + (t - t^2/2)\} \cup \{t \in [1, (1 + (1/\sqrt{3}))], x \leq 0\} \\ \cup \{t \in [0; 1], x \leq -1/2 + (t - t^2/2)\},$$

$$M_3 = \{t \in [(1 + (1/\sqrt{3})); 2], |x| \leq 1/3 - (t - t^2/2)\}, \quad M_4 = \{t \in [0; 1], |x| \leq 1/2 - (t - t^2/2)\}.$$

По построению

$$\bar{\varphi}(t, x) = \varphi_i(t, x) \quad \text{при} \quad (t, x) \in M_i, \quad i = 1, 2, 3, 4;$$

$$d\bar{\varphi}(t, x; (1, f)) = d\varphi_i(t, x; (1, f)) \quad \text{при} \quad (t, x) \in \text{int } M_i$$

или

$$\text{при} \quad \bar{\varphi}(t, x) = \varphi_i(t, x) \quad \exists \varepsilon > 0: (t', x') \in \{t + \delta, x + f\delta; 0 < \delta \leq \varepsilon\} \in \text{int } M_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Символ $\text{int } M$ означает внутренность множества M .

Лемма 1. Пусть $\bar{\varphi}(t, x) = \varphi_{i_1}(t, x) = \varphi_{i_2}(t, x)$ в точке $(t, x) \in (0; 2) \times \mathbb{R}$, $(1, f) \in \mathbb{R}^2$, существует $\varepsilon > 0$, такое, что для всех точек $(t', x') \in \{t + \delta, x + f\delta; 0 < \delta \leq \varepsilon\}$ справедливо $\bar{\varphi}(t, x) = \max\{\varphi_{i_1}(t, x), \varphi_{i_2}(t, x)\}$. Тогда

$$d\bar{\varphi}(t, x; (1, f)) = \max_{j=1,2} d\varphi_{i_j}(t, x; (1, f)). \quad (3.13)$$

Доказательство. Действительно,

$$d\bar{\varphi}(t, x; (1, f)) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\bar{\varphi}(t + \delta, x + f\delta) - \bar{\varphi}(t, x)}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \max_{j=1,2} \frac{\varphi_{i_j}(t + \delta, x + f\delta) - \varphi_{i_j}(t, x)}{\delta} \\ = \lim_{\delta \rightarrow 0} \max_{j=1,2} \left[\frac{\partial \varphi_{i_j}(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_{i_j}(t, x)}{\partial x} f + \frac{o_{i_j}(f\delta)}{\delta} \right], \quad \frac{o_{i_j}(f\delta)}{\delta} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0, \quad j = 1, 2.$$

Отсюда следует, что

$$d\bar{\varphi}(t, x; (1, f)) \leq \max_{j=1,2} d\varphi_{i_j}(t, x; (1, f)). \quad (3.14)$$

С другой стороны,

$$\max_{j=1,2} d\varphi_{i_j}(t, x; (1, f)) = \max_{j=1,2} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varphi_{i_j}(t + \delta, x + f\delta) - \varphi_{i_j}(t, x)}{\delta}$$

$$\begin{aligned} &\leq \max_{j=1,2} \lim_{\delta \rightarrow 0} \max_{j=1,2} \frac{\varphi_{i_j}(t + \delta, x + f\delta) - \varphi_{i_j}(t, x)}{\delta} \\ &= \max_{j=1,2} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\bar{\varphi}(t + \delta, x + f\delta) - \bar{\varphi}(t, x)}{\delta} = d\bar{\varphi}(t, x; (1, f)), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\max_{j=1,2} d\varphi_{i_j}(t, x; (1, f)) \leq d\bar{\varphi}(t, x; (1, f)). \quad (3.15)$$

Из (3.14) и (3.15) вытекает справедливость (3.13).

Лемма доказана.

Используя лемму 1 и формулы (3.10)–(3.12), вычислим производные по направлению функции $\bar{\varphi}(t, x)$ в точках из пересечений множеств $M_{i_1} \cap M_{i_2}$, $i_1 \neq i_2$, по направлениям $(1, f) \in \mathbb{R}^2$, для которых существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех точек $(t', x') \in \{t + \delta, x + f\delta; 0 < \delta \leq \varepsilon\}$ справедливо $\bar{\varphi}(t, x) = \max\{\varphi_{i_1}(t, x), \varphi_{i_2}(t, x)\}$. Имеем

$$d\bar{\varphi}(t, x; (1, f)) = \max\{[x + (t - t^2/2)][(1 - t) + f], [-x + (t - t^2/2)][(1 - t) - f]\} \text{ при } (t, x) \in M_1 \cap M_2,$$

$$d\bar{\varphi}(t, x; (1, f)) = \max\{[x + (t - t^2/2)][(1 - t) + f], 0\} \text{ при } (t, x) \in M_1 \cap M_3,$$

$$d\bar{\varphi}(t, x; (1, f)) = \max\{[x + (t - t^2/2)][(1 - t) + f], 0\} \text{ при } (t, x) \in M_1 \cap M_4,$$

$$d\bar{\varphi}(t, x; (1, f)) = \max\{[-x + (t - t^2/2)][(1 - t) - f], 0\} \text{ при } (t, x) \in M_2 \cap M_3,$$

$$d\bar{\varphi}(t, x; (1, f)) = \max\{[-x + (t - t^2/2)][(1 - t) - f], 0\} \text{ при } (t, x) \in M_2 \cap M_4.$$

4. Формула для функции цены и минимаксное решение

Для того чтобы доказать, что функция $\bar{\varphi}(t, x)$ является минимаксным решением задачи (2.3), проверим, что эта функция удовлетворяет определению минимаксного решения [3].

Выполнение краевого условия $\bar{\varphi}(2, x) = \sigma(x) = \sigma_2(x)$ заложено в основу конструкции функции $\bar{\varphi}(t, x)$. Проверим выполнение условий (2.4), (2.5), а именно

$$\inf \{d^- \bar{\varphi}(t, x; (1, f)) - s f + H(t, s) : f \in \mathbb{R}\} \leq 0, \quad (4.1)$$

$$\sup \{d^+ \bar{\varphi}(t, x; (1, f)) - s f + H(t, s) : f \in \mathbb{R}\} \geq 0 \quad (4.2)$$

для всех $(t, x) \in [0; 2] \times \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$.

Так как $\forall (t, x) \in (0; 2) \times \mathbb{R} \quad \forall f \in \mathbb{R}$ определена производная по направлению $d\bar{\varphi}(t, x; (1, f))$ и справедливы равенства $d^- \bar{\varphi}(t, x; (1, f)) = d^+ \bar{\varphi}(t, x; (1, f)) = d\bar{\varphi}(t, x; (1, f))$, то условия (4.1) и (4.2) можно переписать в следующем виде:

$$\inf \{d\bar{\varphi}(t, x; (1, f)) - s f + (t - 1) |s| : f \in \mathbb{R}\} \leq 0, \quad (4.3)$$

$$\sup \{d\bar{\varphi}(t, x; (1, f)) - s f + (t - 1) |s| : f \in \mathbb{R}\} \geq 0 \quad (4.4)$$

для всех $(t, x) \in (0; 2) \times \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$.

Для проверки этих неравенств достаточно показать, что для любой точки $(t, x) \in (0; 2) \times \mathbb{R}$, по любому $s \in \mathbb{R}$ можно подобрать $f \in \mathbb{R}$ таким образом, что выражение

$$w(t, x, s, f) = d\bar{\varphi}(t, x; (1, f)) + r(t, f, s), \quad r(t, f, s) = -s f + (t - 1) |s|$$

обращается в нуль. Воспользуемся полученными формулами для производных по направлению.

- Пусть $(t, x) \in \text{int } M_1$. Здесь $x > 0$, $l(t) = (t - t^2/2) > 0$,

$$w(t, x, s, f) = [x + (t - t^2/2)] [(1 - t) + f] - s f + (t - 1) |s|.$$

Если $s \geq 0$, $r(t, f, s) = |s| [(t - 1) - f]$, то, полагая $f = t - 1$, получим $w(t, x, s, f) = 0$.

Если $s \leq 0$, $r(t, f, s) = |s| [(t - 1) + f]$, то, полагая $f = \frac{[x + l(t) - |s|](t - 1)}{x + l(t) + |s|}$, имеем $w(t, x, s, f) = 0$.

- Пусть $(t, x) \in \text{int } M_2$. Здесь $x < 0$,

$$w(t, x, s, f) = [|x| + (t - t^2/2)] [(1 - t) - f] - s f + (t - 1) |s|.$$

Если $s \leq 0$, $r(t, f, s) = |s| [(t - 1) + f]$, то, полагая $f = 1 - t$, получим $w(t, x, s, f) = 0$.

Если $s \geq 0$, $r(t, f, s) = |s| [(t - 1) - f]$, то, полагая $f = \frac{[|x| + l(t) - |s|](1 - t)}{|x| + l(t) + |s|}$, имеем $w(t, x, s, f) = 0$.

- Если $(t, x) \in \text{int } M_3$ или $(t, x) \in \text{int } M_4$, то $d\bar{\varphi}(t, x; (1, f)) = 0 \forall f \in \mathbb{R}$,

$$w(t, x, s, f) = r(t, f, s).$$

Если $s \geq 0$, $r(t, f, s) = |s| [(t - 1) - f]$, то, полагая $f = t - 1$, получим $w(t, x, s, f) = 0$.

Если $s \leq 0$, $r(t, f, s) = |s| [(t - 1) + f]$, то, полагая $f = (1 - t)$, имеем $w(t, x, s, f) = 0$.

- Пусть $(t, x) \in M_1 \cap M_2$. Тогда $x = 0$, $t \in [1; 1 + (1/\sqrt{3})]$.

Если $s \geq 0$, $r(t, f, s) = |s| [(t - 1) - f]$, то, полагая $f = t - 1 \geq 0$, получим

$$w(t, x, s, f) = [(t - t^2/2)] [(1 - t) + f] + |s| [(t - 1) - f] = 0.$$

Если $s \leq 0$, $r(t, f, s) = |s| [(t - 1) + f]$, то, полагая $f = (1 - t)$, имеем

$$w(t, x, s, f) = [(t - t^2/2)] [(1 - t) - f] + |s| [(t - 1) + f] = 0.$$

- Пусть $(t, x) \in M_1 \cap M_3$ или $(t, x) \in M_1 \cap M_4$. Тогда $x \geq 0$.

Если $s \geq 0$, $r(t, f, s) = |s| [(t - 1) - f]$, то, полагая $f = t - 1$, получим при $t - 1 \geq 0$

$$w(t, x, s, f) = [x + (t - t^2/2)] [(1 - t) + f] + |s| [(t - 1) - f] = 0;$$

при $t - 1 \leq 0$

$$w(t, x, s, f) = r(t, f, s) = 0.$$

Если $s \leq 0$, $r(t, f, s) = |s| [(t - 1) + f]$, то

при $(1 - t) \leq 0$ и $f = (1 - t)$

$$w(t, x, s, f) = r(t, f, s) = 0;$$

при $(1 - t) \geq 0$ и $f = \frac{[x + l(t) - |s|](t - 1)}{x + l(t) + |s|}$

$$w(t, x, s, f) = [x + (t - t^2/2)] [(1 - t) + f] + |s| [(t - 1) + f] = 0.$$

- Пусть $(t, x) \in M_2 \cap M_3$ или $(t, x) \in M_2 \cap M_4$. Тогда $x \leq 0$.

Если $s \leq 0$, $r(t, f, s) = |s| [(t - 1) + f]$, то, полагая $f = (1 - t)$, имеем

при $1 - t \leq 0$

$$w(t, x, s, f) = [|x| + (t - t^2/2)] [(1 - t) - f] + |s| [(t - 1) + f] = 0;$$

при $1 - t \geq 0$

$$w(t, x, s, f) = r(t, f, s) = 0.$$

Если $s \geq 0$, $r(t, f, s) = |s| [(t - 1) - f]$, то при $t - 1 \geq 0$ и $f = t - 1$

$$w(t, x, s, f) = r(t, f, s) = 0;$$

$$\text{при } t - 1 \leq 0 \text{ и } f = \frac{[|x| + l(t) - |s|](1 - t)}{|x| + l(t) + |s|}$$

$$w(t, x, s, f) = [|x| + (t - t^2/2)] [(1 - t) - f] + |s| [(t - 1) - f] = 0.$$

Суммируя вышесказанное, приходим к заключению, что неравенства (4.3), (4.4) для функции $\bar{\varphi}(t, x)$ также выполняются во всех точках $(t, x) \in (0; 2) \times \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$. Согласно теореме 1 и теореме 13.1 из [5] справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Функция $\bar{\varphi}(t, x)$ вида (3.7) или (3.8), (3.9) удовлетворяет всем условиям определения 1. Она является единственным минимаксным решением задачи (2.3) и совпадает с функцией цены позиционной дифференциальной игры “мальчик и крокодил” (1.1), (1.3).*

Заключение

Функция $\bar{\varphi}(t, x)$ вида (3.7), построенная с помощью формул (3.2), (3.3), (3.4), является обобщением формулы Хопфа для минимаксного решения задачи (2.1) для случая, когда гамильтониан не зависит от времени и фазовой переменной, т. е. $H = H(s)$. Классический вариант формулы Хопфа имеет следующий вид:

$$\varphi(t, x) = \sup_{s \in \mathbb{R}^n} \{ \langle x, s \rangle - \Psi(t, s) \}, \quad \Psi(t, s) = \sigma^*(s) - (T - t) H(s).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М: Наука, 1968. 475 с.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Субботин А.И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003. 336 с.
4. Subbotin A.I. Generalization of the main equation of differential game theory // J. Optim. Theory Appl. 1984. Vol. 43, no. 1. P. 103–133.
5. Субботин А. И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.

Поступила 27.05.2024

После доработки 6.06.2024

Принята к публикации 24.06.2024

Субботина Нина Николаевна

д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН

главный науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;

профессор

Уральский федеральный университет

г. Екатеринбург

e-mail: subb@uran.ru

Родин Алексей Семенович

младший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;

ассистент

Уральский федеральный университет

г. Екатеринбург

e-mail: alexey.rodin.ekb@gmail.com

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Motion control theory]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 475 p.
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*. NY, Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8. Original Russian text was published in Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Pozitsionnye differentsial'nye igrы*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
3. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first-order PDEs: the dynamical optimization perspective*, Boston, Birkhäuser, 1994, 332 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0847-1. Translated to Russian under the title *Obobshchennyye resheniya uravneniy v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka. Perspektivy dinamicheskoy optimizatsii*, Moscow, Izhevsk, In-t komp'yuter. issled., 2003, 336 p. ISBN: 5-93972-206-7.
4. Subbotin A.I. Generalization of the main equation of differential game theory. *J. Optim. Theory Appl.*, 1984, vol. 43, no. 1, pp. 103–133.

Received May 27, 2024

Revised June 6, 2024

Accepted June 24, 2024

Nina Nikolaevna Subbotina, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Corresponding Member of RAS, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: subb@uran.ru.

Aleksei Semenovich Rodin, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: alexey.rodin.ekb@gmail.com.

Cite this article as: N. N. Subbotina, A. S. Rodin. Generalized Hopf formula for the value function in the positional differential game “Boy and Crocodile”. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 229–240.