

УДК 517.977

МНОГОКРАТНАЯ ПОИМКА УБЕГАЮЩЕГО В ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ВО ВРЕМЕННЫХ ШКАЛАХ¹

Е. С. Можегова, Н. Н. Петров

В конечномерном евклидовом пространстве рассматривается линейная задача преследования группой преследователей одного убегающего, описываемая в заданной временной шкале линейной системой с простой матрицей. Множество допустимых управлений для каждого участника представляет собой шар единичного радиуса с центром в начале координат, терминальные множества — заданные выпуклые компакты. Преследователи действуют согласно контрстратегиям на основе информации о начальных позициях и предыстории управления убегающего. В терминах начальных позиций и параметров игры получено достаточное условие поимки убегающего заданным числом преследователей. Для дискретных временных шкал получены достаточные условия уклонения.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, убегающий, преследователь, многократная поимка, временная шкала.

E. S. Mozhegova, N. N. Petrov. Multiple capture of an evader in the linear pursuit problem on timescales.

The linear problem of pursuing one evader by a group of pursuers is considered in a finite-dimensional Euclidean space. In a given timescale, the problem is described by a linear system with a simple matrix. The set of admissible controls for each participant is the unit ball centered at the origin. The terminal sets are given convex compact sets. The pursuers use counter-strategies based on information about the initial positions and control history of the evader. Sufficient conditions for the capture of the evader by a given number of pursuers are obtained in terms of the initial positions and parameters of the game. Sufficient evasion conditions are obtained for discrete time scales.

Keywords: differential game, group pursuit, evader, pursuer, multiple capture, timescale.

MSC: 49N75, 49N70, 91A24

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-3-217-228

Введение

При исследовании динамических игр можно выделить методы, ориентированные на построение оптимальных стратегий [1], и методы, нацеленные на гарантированный результат [2]. К таким подходам следует отнести, прежде всего, первый метод Л. С. Понтягина [2] и метод разрешающих функций [3; 4]. Указанные методы обеспечивают достаточные условия завершения игры за конечное время из заданных начальных позиций.

Метод разрешающих функций, предложенный для исследования линейных задач преследования с геометрическими ограничениями, в настоящее время распространен на дифференциальные игры с интегральными ограничениями, с запаздыванием, дифференциальные игры с дробными производными и другие классы дифференциальных игр [5; 6], в том числе на игры, описываемые уравнениями во временных шкалах.

Б. Олбах и С. Хилгер в работах [7; 8] предложили подход к исследованию дифференциальных и разностных уравнений с единых позиций. Оказывается, что некоторым результатам, полученным отдельно для каждой из этих теорий, можно придать больший характер общности, если допустить возможность задания динамических систем на произвольных замкнутых

¹Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания (проект FEWS-2024-0009).

подмножествах $\mathbb{R}$, названных *временными шкалами* (далее ударение проставляться не будет). Временные шкалы находят свое применение при построении различных математических моделей [9;10]. Неантагонистическая игра N лиц во временной шкале рассматривалась в работе [11]; задача простого преследования во временных шкалах — в [12;13], а задача об однократной поимке убегающего — в линейной задаче с простой матрицей в [14]. Задача о многократной поимке убегающего в дискретных квазилинейных играх изучается в [15].

В настоящей работе в заданной временной шкале исследована задача преследования группой преследователей одного убегающего. Получены достаточные условия поимки убегающего заданным числом преследователей. Рассмотрен случай дискретной временной шкалы, для которого получены достаточные условия уклонения. Для решения задачи преследования используется общий метод разрешающих функций. При этом следует отметить, что в случае, когда временная шкала совпадает с $\mathbb{R}^1$, интеграл от разрешающей функции с переменным верхним пределом является функцией, непрерывной по верхнему пределу. При произвольной временной шкале интеграл от разрешающей функции уже может не быть непрерывной функцией. Поэтому в данном случае требуется корректировка разрешающих функций в некоторые моменты времени.

1. Вспомогательные определения и факты

В данном разделе будут изложены базовые факты из теории временных шкал. Все приводимые ниже результаты могут быть найдены, например, в работах [10;16].

О п р е д е л е н и е 1. Непустое замкнутое подмножество $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^1$ такое, что $\sup_{t \in \mathbb{T}} t = +\infty$, называется временной шкалой.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $\mathbb{T}$ — временная шкала. Функция $\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^1$ вида $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} \mid s > t\}$ называется функцией сдвига.

О п р е д е л е н и е 3. Функция $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^1$ называется Δ -дифференцируемой в точке $t \in \mathbb{T}$, если существует число $\gamma \in \mathbb{R}^1$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность W точки t такая, что неравенство $|f(\sigma(t)) - f(s) - \gamma(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$ справедливо для всех $s \in \mathbb{T} \cap W$.

Число γ в этом случае называется Δ -производной функции f в точке t . Δ -производная функции f в точке t будет обозначаться как $f^\Delta(t) = \gamma$.

О п р е д е л е н и е 4. Функция $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^k$, $f(t) = (f_1(t), \dots, f_k(t))$ называется Δ -дифференцируемой в точке $t \in \mathbb{T}$, если все функции $f_1, \dots, f_n$ являются Δ -дифференцируемыми в точке t .

Пусть $\mathbb{T}$ — временная шкала, $E \subset \mathbb{T}$. Обозначим $R(E) = \{t \in E \mid \sigma(t) > t\}$. Тогда множество $R(E)$ не более чем счетно.

О п р е д е л е н и е 5. Множество $E \subset \mathbb{T}$ называется Δ -измеримым, если множество

$$\tilde{E} = E \cup \bigcup_{t \in R(E)} (t, \sigma(t))$$

измеримо по Лебегу.

О п р е д е л е н и е 6. Функция $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^1$ называется Δ -измеримой на Δ -измеримом множестве E , если функция $\tilde{f}$ вида

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & t \in E, \\ f(t_i), & t \in (t_i, \sigma(t_i)), t_i \in R(E), \end{cases}$$

измерима на множестве $\tilde{E}$.

О п р е д е л е н и е 7. Функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}^1$, $E \subset \mathbb{T}$, называется Δ -интегрируемой на Δ -измеримом множестве E , если функция $\tilde{f}$ интегрируема по Лебегу на множестве $\tilde{E}$. Если f является Δ -интегрируемой на множестве E , то определим $\int_E f(s)\Delta s$, полагая

$$\int_E f(s)\Delta s = \int_{\tilde{E}} \tilde{f}d\mu,$$

где μ — мера Лебега.

О п р е д е л е н и е 8. [10, определение 2.1, с. 51] Пусть $f_1, f_2 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^1$, $t_0 \in \mathbb{T}$. Функция $y : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^1$, Δ -дифференцируемая на $\mathbb{T}$, называется решением задачи Коши

$$x^\Delta = f_1(t)x + f_2(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

если $y(t_0) = x_0$ и $y^\Delta(t) = f_1(t)y(t) + f_2(t)$ для всех $t \in \mathbb{T}$.

2. Постановка задачи

Пусть задана некоторая временная шкала $\mathbb{T}$, $t_0 \in \mathbb{T}$.

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(n, 1)$ $n + 1$ лиц (n преследователей $P_1, \dots, P_n$ и убегающего E), которая описывается системой вида

$$z_i^\Delta = a_i z_i + u_i - v, \quad z_i(t_0) = z_i^0, \quad (2.1)$$

где $z_i, z_i^0 \in \mathbb{R}^k$, $u_i, v \in V$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in I = \{1, \dots, n\}$, V — заданный выпуклый компакт $\mathbb{R}$.

Обозначим через $z^0 = \{z_i^0, i \in I\}$ вектор начальных позиций. Считаем, что $z_i^0 \notin M_i$ для всех $i \in I$, где M_i — заданные выпуклые компакты $\mathbb{R}^k$.

Δ -измеримую функцию $v : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^k$ назовем *допустимой*, если $v(t) \in V$ для всех $t \in \mathbb{T}$. *Предысторией* $v_t(\cdot)$ функции v в момент $t \in \mathbb{T}$ будем называть сужение функции v на $[t_0, t) \cap \mathbb{T}$.

О п р е д е л е н и е 9. В игре $\Gamma(n, 1)$ происходит r -кратная поимка (или поимка в случае $r=1$), если существует момент $T_0 > t_0$, $T_0 \in \mathbb{T}$, такой, что для любой допустимой функции $v_t(\cdot)$ найдутся допустимые управления $u_i(t) = u_i(t, z_i^0, v_t(\cdot))$ преследователей P_i , $i \in I$, натуральные числа $i_1, \dots, i_r \in I$ и моменты времени $\tau_1, \dots, \tau_r \in [t_0, T_0] \cap \mathbb{T}$ такие, что $z_{i_p}(\tau_p) \in M_{i_p}$, $p = 1, \dots, r$.

Будем полагать, что $n \geq r$.

О п р е д е л е н и е 10. В игре $\Gamma(n, 1)$ происходит уклонение от встречи, если существует допустимая функция $v(\cdot)$ такая, что для любых допустимых управлений $u_i(t)$ преследователей $P_1, \dots, P_n$ имеет место $z_i(t) \notin M_i$ для всех $i \in I$, $t \in \mathbb{T}$.

З а м е ч а н и е 1. При рассмотрении задачи преследования дифференциальная игра рассматривается в контрстратегиях преследователей, а при рассмотрении задачи уклонения в рассматриваемых условиях существует программная стратегия убегающего, обеспечивающая уклонение.

3. Достаточные условия многократной поимки

Обозначим $\mu(\tau) = \sigma(\tau) - \tau$. Введем в рассмотрение функции

$$e_a(t, s) = \exp \left\{ \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(a) \Delta \tau \right\}, \quad \text{где } \xi_h(z) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + hz)}{h}, & h \neq 0; \\ z, & h = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

$$e_{\ominus a}(t, s) = \frac{1}{e_a(t, s)}.$$

Теорема 1. Пусть существуют непустое множество $I_1 \subset I$ и моменты времени $T_l \in \mathbb{T}$, $l \in I_1$, такие, что

$$e_{a_l}(T_l, t_0)z_l^0 \in M_l \quad \text{для всех } l \in I_1.$$

Тогда в игре $\Gamma(n, 1)$ происходит $|I_1|$ -кратная поимка.

Доказательство. Пусть для всех $l \in I_1$ $e_{a_l}(T_l, t_0)z_l^0 \in M_l$, где $I_1 \subset I$, $I_1 \neq \emptyset$, $T_l \in \mathbb{T}$. Выберем управление преследователей следующим образом: $u_i(t) = v(t)$ для всех $t \in [t_0, T_l]$. Тогда согласно (2.1) получаем

$$z_i(T_l) = e_{a_i}(T_l, t_0)z_i^0 + \int_{t_0}^{T_l} e_{a_i}(T_l, \sigma(s)) (u_i(s) - v(s)) \Delta s = e_{a_i}(T_l, t_0)z_i^0.$$

Следовательно, $z_l(T_l) \in M_l$ для всех $l \in I_1$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Пусть существует непустое множество I_1 , для которого выполнены условия теоремы 1. Если $|I_1| \geq r$, то задача о r -кратной поимке решена. Если $1 \leq |I_1| < r$, то для осуществления r -кратной поимки достаточно, чтобы в игре $\Gamma(n - |I_1|, 1)$ с участием преследователей P_i , $i \in I \setminus I_1$, происходила $r - |I_1|$ -кратная поимка.

Лемма 1. Пусть M, W — выпуклые компакты $\mathbb{R}^k$, $0 \in W$ и

$$\mathcal{Z} = \{\lambda \geq 0 \mid -\lambda M \cap W \neq \emptyset\}.$$

Тогда $\mathcal{Z}$ — выпуклое множество.

Доказательство. Возможны два случая.

1. Пусть $0 \in M$. Тогда $0 \in -\lambda M \cap W$ для всех $\lambda \geq 0$, и поэтому $\mathcal{Z} = [0; +\infty)$.

2. Пусть $0 \notin M$. Отметим, что $0 \in \mathcal{Z}$ в силу того, что $0 \in W$. Возьмем $\lambda > 0$ такое, что $\lambda \in \mathcal{Z}$. Тогда найдется $m \in M$ такое, что $-\lambda m \in W$. Так как множество W выпукло, то для любого $\mu \in [0; 1]$ $-\lambda \mu m = \mu(-\lambda m) + (1 - \mu) \cdot 0 \in W$. Значит, $-(\lambda \mu)M \cap W \neq \emptyset$. Следовательно, $\lambda \mu \in \mathcal{Z}$ для всех $\mu \in [0; 1]$. Поэтому $\mathcal{Z}$ — выпуклое множество.

Лемма доказана.

Пусть $\tau, t \in \mathbb{T}$ и $0 \leq \tau \leq t$. Определим многозначные отображения

$$\mathcal{Z}(z_i^0, v, t, \tau) = \{\lambda \geq 0 \mid -\lambda [e_{a_i}(t, t_0)z_i^0 - M_i] \cap e_{a_i}(t, \sigma(\tau))(V - v) \neq \emptyset\}.$$

Отметим, что $\mathcal{Z}(z_i^0, v, t, \tau) \neq \emptyset$ и в силу леммы 1 выпукло.

Будем считать, что $e_{a_i}(t, t_0)z_i^0 \notin M_i$ для всех $t \in \mathbb{T}$, $i \in I$.

Пусть $N \subset I$. Обозначим через $\Omega_N(p) = \{(i_1, \dots, i_p) : i_\alpha \in N \text{ и попарно различны для всех } \alpha = 1, \dots, p\}$.

Каждому преследователю P_i поставим в соответствие разрешающую функцию

$$\lambda(z_i^0, v, t, \tau) = \sup \{\lambda \mid \lambda \in \mathcal{Z}(z_i^0, v, t, \tau)\}.$$

Пусть далее

$$T_n(z^0) = \min \left\{ t \in \mathbb{T} \mid t > t_0, \inf_{v(\cdot)} \max_{\Lambda \in \Omega_I(r)} \min_{j \in \Lambda} \int_{t_0}^t \lambda(z_j^0, v(s), t, s) \Delta s \geq 1 \right\}. \quad (3.2)$$

Теорема 2. Пусть выполнено условие $T_n(z^0) < +\infty$. Тогда в игре $\Gamma(n, 1)$ происходит r -кратная поимка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $T_0 = T_n(z^0)$ определяется (3.2), а $v(\cdot)$ — допустимое управление убегающего. Определим функции

$$h_i(t) = 1 - \int_{t_0}^t \lambda(z_i^0, v(s), T_0, s) \Delta s.$$

Рассмотрим многозначное отображение

$$\mathcal{U}_i(\tau, v) = \{u_i \in V : e_{a_i}(T_0, \sigma(\tau))(u_i - v) \in -\lambda(z_i^0, v, T_0, \tau)(e_{a_i}(T_0, t_0)z_i^0 - M_i)\}.$$

В соответствии с определением Δ -измеримости [16] и леммой 1.3.7 работы [3] отображение $\mathcal{U}_i(\tau, v)$ — Δ -измеримо по совокупности (τ, v) , а селектор $u_i(\tau, v) = \text{lex min } \mathcal{U}_i(\tau, v)$ является Δ -измеримой функцией по совокупности (τ, v) (см. лемму в 1.3.6 [3]), где $\text{lex min } U$ — точка лексикографического минимума множества U .

Если в момент $\tau \in \mathbb{T}$ выполняется неравенство $h_i(\tau) \geq 0$, то управление преследователя P_i полагаем равным $u_i(\tau) = u_i(\tau, v(\tau))$. Поэтому существуют Δ -измеримые [16] функции $m_i(\tau)$ такие, что справедливо равенство

$$e_{a_i}(T_0, \sigma(\tau))(u_i(\tau) - v(\tau)) = -\lambda(z_i^0, v(\tau), T_0, \tau)(e_{a_i}(T_0, t_0)z_i^0 - m_i(\tau)).$$

Последнее равенство представимо в виде

$$u_i(\tau) = v(\tau) - e_{\ominus a_i}(T_0, \sigma(\tau))\lambda(z_i^0, v(\tau), T_0, \tau)(e_{a_i}(T_0, t_0)z_i^0 - m_i(\tau)).$$

Если $\tau_i \in \mathbb{T}$, $\tau_i \leq T_0$, — первый момент времени, для которого $h_i(\tau_i) = 0$, то считаем, что $\lambda(z_i^0, v(t), T_0, t) = 0$ для всех $t \in \mathbb{T}$, $t > \tau_i$. Тогда согласно (2.1) получаем

$$\begin{aligned} z_i(T_0) &= e_{a_i}(T_0, t_0)z_i^0 - \int_{t_0}^{\tau_i} e_{a_i}(T_0, \sigma(s))e_{\ominus a_i}(T_0, \sigma(s))\lambda(z_i^0, v(s), T_0, s)(e_{a_i}(T_0, t_0)z_i^0 - m_i(s))\Delta s \\ &= e_{a_i}(T_0, t_0)z_i^0 \left(1 - \int_{t_0}^{\tau_i} \lambda(z_i^0, v(s), T_0, s)\Delta s\right) + \int_{t_0}^{\tau_i} \lambda(z_i^0, v(s), T_0, s)m_i(s)\Delta s. \end{aligned}$$

Поскольку $\lambda(z_i^0, v(s), T_0, s)$ — неотрицательная функция по построению и

$$\int_{t_0}^{\tau_i} \lambda(z_i^0, v(s), T_0, s)\Delta s = 1,$$

а $m_i(s) \in M_i$ для любого $s \in [t_0, \tau_i]$, то $z_i(T_0) \in M_i$, $i \in I$.

Пусть $\tau_i \in \mathbb{T}$, $\tau_i \leq T_0$, — первый момент времени, для которого $h_i(\tau_i) < 0$, а для всех $t \in \mathbb{T}$, $t < \tau_i$, выполняется неравенство $h_i(t) > 0$. Будем считать, что $\lambda(z_i^0, v(t), T_0, t) = 0$ для всех $t \in \mathbb{T}$, $t \geq \tau_i$.

Определим число $\tau_i^* = \sup\{t \in \mathbb{T} \mid h_i(t) > 0\}$. Тогда $(\tau_i^*, \tau_i) \cap \mathbb{T} = \emptyset$. Действительно, если бы существовал момент $\tau \in (\tau_i^*, \tau_i) \cap \mathbb{T}$, то выполнялось бы неравенство $h_i(\tau) > 0$, что невозможно в силу определения числа τ_i^* .

Пусть

$$\lambda^*(z_i^0, v(\tau_i^*), T_0, \tau_i^*) = \frac{h_i(\tau_i^*)}{\tau_i - \tau_i^*},$$

$$\tilde{\lambda}(z_i^0, v(s), T_0, s) = \begin{cases} \lambda(z_i^0, v(s), T_0, s), & \text{если } s \in [t_0, \tau_i^*) \cap \mathbb{T}; \\ \lambda^*(z_i^0, v(s), T_0, s), & \text{если } s = \tau_i^*; \\ 0, & \text{если } s \in (\tau_i^*, T_0] \cap \mathbb{T}. \end{cases}$$

С учетом неравенства $\int_{t_0}^{\tau_i} \tilde{\lambda}(z_i^0, v(s), T_0, s) \Delta s = 1 \leq \int_{t_0}^{\tau_i} \lambda(z_i^0, v(s), T_0, s) \Delta s$ получаем, что

$$\lambda^*(z_i^0, v(\tau_i^*), T_0, \tau_i^*) \leq \lambda(z_i^0, v(\tau_i^*), T_0, \tau_i^*).$$

Далее в силу леммы 1 $\lambda^*(z_i^0, v(\tau_i^*), T_0, \tau_i^*) \in \mathcal{Z}(z_i^0, v, T_0, \tau_i^*)$, и поэтому существует $m_i(\tau_i^*)$ такое, что $u_i(\tau_i^*) \in V$, где

$$u_i(\tau_i^*) = v(\tau_i^*) - e_{\ominus a_i}(T_0, \sigma(\tau_i^*)) \lambda^*(z_i^0, v(\tau_i^*), T_0, \tau_i^*) (e_{a_i}(T_0, t_0) z_i^0 - m_i(\tau_i^*)).$$

Тогда

$$\begin{aligned} z_i(T_0) &= e_{a_i}(T_0, t_0) z_i^0 \left(1 - \int_{t_0}^{\tau_i^*} \lambda(z_i^0, v(s), T_0, s) \Delta s - \int_{\tau_i^*}^{\tau_i} \lambda^*(z_i^0, v(s), T_0, s) \Delta s \right) \\ &\quad + \int_{t_0}^{\tau_i^*} \lambda(z_i^0, v(s), T_0, s) m_i(s) \Delta s + \int_{\tau_i^*}^{\tau_i} \lambda^*(z_i^0, v(s), T_0, s) m_i(s) \Delta s \\ &= e_{a_i}(T_0, t_0) z_i^0 \left(h_i(\tau_i^*) - \int_{\tau_i^*}^{\tau_i} \frac{h_i(\tau_i^*)}{\tau_i - \tau_i^*} \Delta s \right) + \int_{t_0}^{\tau_i^*} \lambda(z_i^0, v(s), T_0, s) m_i(s) \Delta s \\ &\quad + \int_{\tau_i^*}^{\tau_i} \lambda^*(z_i^0, v(s), T_0, s) m_i(s) \Delta s = e_{a_i}(T_0, t_0) z_i^0 \cdot 0 + \int_{t_0}^{T_0} \tilde{\lambda}(z_i^0, v(s), T_0, s) m_i(s) \Delta s. \end{aligned}$$

Следовательно, $z_i(T_0) = \int_{t_0}^{T_0} \tilde{\lambda}(z_i^0, v(s), T_0, s) m_i(s) \Delta s \in M_i$ при некотором $i \in I$.

Поскольку величина $T_0 < +\infty$, то для каждой допустимой функции $v(\cdot)$ найдутся момент времени $\tau \in \mathbb{T}$ и множество номеров $\Lambda \in \Omega_I(r)$ такие, что $h_{i_s}(\tau) \leq 0$ для всех $i_s \in \Lambda, s = 1, \dots, r$. Поэтому из доказанного выше следует, что для каждой такой функции $v(\cdot)$ найдутся моменты $\tau_s \in \mathbb{T}, \tau_s \leq T_0$, для которых $z_{i_s}(\tau_s) \in M_{i_s}$ для всех $i_s \in \Lambda, s = 1, \dots, r$. Это означает, что в игре $\Gamma(n, 1)$ происходит r -кратная поимка.

Теорема доказана.

4. Достаточные условия многократной точной поимки

Рассмотрим дифференциальную игру $\Gamma(n, 1)$, заданную системой (2.1), считая, что $a_i \in R, a_i < 0, V = \{v \in \mathbb{R}^k : \|v\| \leq 1\}, M_i \equiv \{0\}$ для всех $i \in I$.

Обозначим через $\text{Int } A$, со A соответственно внутренность и выпуклую оболочку множества $A \subset \mathbb{R}^k$. Введем в рассмотрение функции

$$\lambda(z, v) = \sup\{\lambda \geq 0 \mid -\lambda z \in V - v\}, \quad K(t) = \int_{t_0}^t \Delta s.$$

Лемма 2 (лемма 1, [13]). Пусть m, m_1 — натуральные числа, $m \geq m_1, N = \{1, \dots, m\}, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}^k$. Соответственно

$$0 \in \bigcap_{\Lambda \in \Omega_N(m-m_1+1)} \text{Intco} \{b_j, j \in \Lambda\} \quad (4.1)$$

тогда и только тогда, когда

$$\delta = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega_N(m_1)} \min_{j \in \Lambda} \lambda(b_j, v) > 0.$$

Предположение 1. Для всех $t \in \mathbb{T}$, $i \in I$ справедливы неравенства

$$a_i < 0 \text{ и } 1 + \mu(t)a_i > 0.$$

Лемма 3. Пусть выполнено предположение 1. Тогда

$$e_a(t, t_0) \leq e^{aK(t)}$$

для всех $t \in \mathbb{T}$.

Доказательство. Из условий леммы вытекает, что $\mu(t)a \in (-1; 0]$ для всех $t \in \mathbb{T}$. Поэтому для всех $t \in \mathbb{T}$ справедливо неравенство $\ln(1 + \mu(t)a) \leq \mu(t)a$. Следовательно, если $\mu(t) \neq 0$, то согласно (3.1) справедливо неравенство $\xi_{\mu(t)}(a) \leq a$.

Если $\mu(t) = 0$, то $\xi_{\mu(t)}(a) = a$. Значит, для всех $t \in \mathbb{T}$ верно $\xi_{\mu(t)}(a) \leq a$. Из последнего неравенства с учетом (3.1) получаем $e_a(t, t_0) \leq e^{aK(t)}$.

Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть выполнено предположение 1, m, m_1 — натуральные числа, $m \geq m_1$ и $N = \{1, \dots, m\}$, $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}^k$ таковы, что выполняется условие (4.1). Тогда существует момент времени $\tau \in \mathbb{T}$ такой, что для любой допустимой функции $v(\cdot)$ найдется множество номеров $\Lambda \in \Omega_N(m_1)$, для которого

$$\int_{t_0}^{\tau} e_{\ominus a_i}(\sigma(s), t_0) \lambda(b_j, v(s)) \Delta s \geq 1$$

для всех $j \in \Lambda$.

Доказательство. Пусть $v(\cdot)$ — произвольное допустимое управление убегающего E . Тогда

$$\max_{\Lambda \in \Omega_N(m_1)} \min_{j \in \Lambda} \int_{t_0}^t e_{\ominus a_i}(\sigma(s), t_0) \lambda(b_j, v(s)) \Delta s \geq \max_{\Lambda \in \Omega_N(m_1)} \int_{t_0}^t \min_{j \in \Lambda} e_{\ominus a_i}(\sigma(s), t_0) \lambda(b_j, v(s)) \Delta s. \quad (4.2)$$

Для любых неотрицательных чисел γ_Λ ($\Lambda \in \Omega_N(m_1)$) имеет место неравенство

$$\max_{\Lambda \in \Omega_N(m_1)} \gamma_\Lambda \geq \frac{1}{C_m^{m_1}} \sum_{\Lambda \in \Omega_N(m_1)} \gamma_\Lambda, \text{ где } C_m^{m_1} = \frac{m!}{m_1!(m - m_1)!}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \max_{\Lambda \in \Omega_N(m_1)} \int_{t_0}^t \min_{j \in \Lambda} e_{\ominus a_i}(\sigma(s), t_0) \lambda(b_j, v(s)) \Delta s &\geq \frac{1}{C_m^{m_1}} \int_{t_0}^t \sum_{\Lambda \in \Omega_N(m_1)} \min_{j \in \Lambda} e_{\ominus a_i}(\sigma(s), t_0) \lambda(b_j, v(s)) \Delta s \\ &\geq \frac{1}{C_m^{m_1}} \int_{t_0}^t \max_{\Lambda \in \Omega_N(m_1)} \min_{j \in \Lambda} e_{\ominus a_i}(\sigma(s), t_0) \lambda(b_j, v(s)) \Delta s. \end{aligned}$$

В силу леммы 2 справедливо неравенство $\max_{\Lambda \in \Omega_N(m_1)} \min_{j \in \Lambda} \lambda(b_j, v) \geq \delta > 0$ для всех $v \in V$. Следовательно, из (4.2) получаем

$$\max_{\Lambda \in \Omega_N(m_1)} \min_{j \in \Lambda} \int_{t_0}^t e_{\ominus a_i}(\sigma(s), t_0) \lambda(b_j, v(s)) \Delta s \geq \frac{\delta}{C_m^{m_1}} \int_{t_0}^t e_{\ominus a_i}(\sigma(s), t_0) \Delta s. \quad (4.3)$$

Согласно лемме 3 выполняется соотношение

$$\int_{t_0}^t e_{\ominus a_i}(\sigma(s), t_0) \Delta s \geq \int_{t_0}^t e^{-a_i K(\sigma(s))} \Delta s.$$

Имеем

$$\int_{t_0}^t e^{-a_i K(\sigma(s))} \Delta s = \int_{t_0}^t e^{-a_i(\sigma(s)-t_0)} \Delta s = e^{a_i t_0} \int_{t_0}^t e^{-a_i \sigma(s)} \Delta s$$

и

$$\int_{t_0}^t e^{-a_i \sigma(s)} \Delta s \xrightarrow[t \in \mathbb{T}, t \rightarrow +\infty]{} +\infty,$$

поэтому из неравенства (4.3) выводим, что существует момент времени $\tau \in \mathbb{T}$ такой, что для любой допустимой функции $v(\cdot)$ справедливо неравенство

$$\max_{\Lambda \in \Omega(J)} \min_{j \in \Lambda} \int_{t_0}^{\tau} e_{\ominus a_i}(\sigma(s), t_0) \lambda(b_j, v(s)) \Delta s \geq 1,$$

откуда следует справедливость утверждения леммы.

Лемма доказана.

Теорема 3. Пусть выполнено предположение 1, $M_i = \{0\}$ для всех $i \in I$ и

$$0 \in \bigcap_{\Lambda \in \Omega_I(n-r+1)} \text{Intco} \{z_j^0, j \in \Lambda\}. \quad (4.4)$$

Тогда в игре $\Gamma(n, 1)$ происходит r -кратная поимка.

Доказательство. Пусть $v(\cdot)$ — допустимое управление убегающих. Определим функции

$$h_i(t) = 1 - \int_{t_0}^t e_{\ominus a_i}(\sigma(s), t_0) \lambda(z_i^0, v(s)) \Delta s.$$

Предположим преследователю P_i строить свое управление следующим образом.

Если в момент $t \in \mathbb{T}$ выполняется неравенство $h_i(t) \geq 0$, то полагаем $u_i(t) = v(t) - \lambda(z_i^0, v(t)) z_i^0$. Если $\tau_i \in \mathbb{T}$ — первый момент времени, для которого $h_i(\tau_i) = 0$, то считаем, что $\lambda(z_i^0, v(t)) = 0$ для всех $t \in \mathbb{T}, t > \tau_i$. Тогда из (2.1) получаем

$$z_i(t) = e_{a_i}(t, t_0) z_i^0 \left(1 - \int_{t_0}^t e_{\ominus a_i}(\sigma(s), t_0) \lambda(z_i^0, v(s)) \Delta s \right) = e_{a_i}(t, t_0) z_i^0 h_i(t)$$

и поэтому $z_i(\tau_i) = 0$.

Пусть $\tau_i \in \mathbb{T}$ — первый момент времени, для которого $h_i(\tau_i) < 0$, а для всех $t \in \mathbb{T}, t < \tau_i$, выполняется неравенство $h_i(t) > 0$. Определим число

$$\tau_i^* = \sup\{t \in \mathbb{T} \mid h_i(t) > 0\}.$$

Тогда $(\tau_i^*, \tau_i) \cap \mathbb{T} = \emptyset$. Действительно, если бы существовал момент $\tau \in (\tau_i^*, \tau_i) \cap \mathbb{T}$, то выполнялось бы неравенство $h_i(\tau) > 0$, что невозможно в силу определения числа τ_i^* . Полагаем в этом случае

$$u_i(\tau_i) = v(\tau_i) - \lambda^*(z_i^0, v(\tau_i)) z_i^0, \quad \text{где} \quad \lambda^*(z_i^0, v(\tau_i)) = \frac{e_{a_i}(\tau_i, t_0) h_i(\tau_i^*)}{\tau_i - \tau_i^*}.$$

Отметим, что в данном случае $\lambda^*(z_i^0, v(\tau_i)) \leq \lambda(z_i^0, v(\tau_i))$, и поэтому $u_i(\tau) \in V$. Тогда

$$\begin{aligned} z_i(\tau_i) &= e_{a_i}(\tau_i, t_0) z_i^0 \left(1 - \int_{t_0}^{\tau_i^*} e_{\ominus a_i}(\sigma(s), t_0) \lambda(z_i^0, v(s)) \Delta s - \int_{\tau_i^*}^{\tau_i} e_{\ominus a_i}(\sigma(s), t_0) \lambda^*(z_i^0, v(s)) \Delta s \right) \\ &= e_{a_i}(\tau_i, t_0) z_i^0 \left(h_i(\tau_i^*) - \int_{\tau_i^*}^{\tau_i} \frac{e_{\ominus a_i}(\sigma(s), t_0) e_{a_i}(\tau_i, t_0) h_i(\tau_i^*)}{(\tau_i - \tau_i^*)} \Delta s \right) = 0. \end{aligned}$$

Из леммы 4 следует, что существует момент времени $\tau \in \mathbb{T}$ такой, что для каждой допустимой функции $v(\cdot)$ найдется множество номеров $\Lambda \in \Omega_I(r)$ такое, что $h_i(\tau) \leq 0$ для всех $i \in \Lambda$. Поэтому из доказанного выше следует, что для каждой подобной функции $v(\cdot)$ найдутся моменты $\tau_i \in \mathbb{T}$, для которых $z_i(\tau_i) = 0$ для всех $i \in \Lambda$. Это и означает, что в игре $\Gamma(n, 1)$ происходит r -кратная поимка.

Теорема доказана.

5. Задача преследования в дискретной временной шкале

Рассмотрим дифференциальную игру $\Gamma(n, 1)$, заданную в разд. 2, во временной шкале $\mathbb{T} = \{t_0 + \tau p \mid p \in \mathbb{Z}, p \geq 0, t_0, \tau \in \mathbb{R}^+\}$. Тогда для произвольной точки $t \in \mathbb{T}$: $\sigma(t) = t + \tau$, $\mu(t) = \tau$, а система (2.1) после преобразований приобретает вид

$$z_i(t + \tau) = (1 + a_i \tau) z_i(t) + (u_i(t) - v(t)) \tau, \quad z_i(t_0) = z_i^0. \quad (5.1)$$

Будем считать, что $V = D_1(0)$, а $M_i = D_{\varepsilon_i}(0)$ — замкнутые шары радиуса $\varepsilon_i \geq 0$ с центром в начале координат и $z_i^0 \notin M_i$ для всех $i \in I$.

Решение (5.1) как решение неоднородного линейного рекуррентного уравнения определяется по формуле

$$z_i(t_l) = z_i^0 A_i^l + \sum_{p=0}^{l-1} A_i^{l-1-p} (u_i(t_p) - v(t_p)) \tau, \quad (5.2)$$

где $A_i = 1 + a_i \tau$, $l = \frac{t - t_0}{\tau}$, причем $l \in \mathbb{Z}, l > 0$, $t_p = t_0 + \tau p$ и $t_p \in \mathbb{T}$ для всех $p \in \mathbb{Z}, p \geq 0$.

Прямым следствием теоремы 3 является

Теорема 4. Пусть $a_i < 0$, $A_i > 0$, $M_i = \{0\}$ для всех $i \in I$ и выполнено условие (4.4). Тогда в игре $\Gamma(n, 1)$ происходит r -кратная поимка.

Кроме того, в случае $|A_i| < 1$ для всех $i \in I$ получаем, что $|A_i|^l \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} 0$. Пусть $\varepsilon_i > 0$ для всех $i \in I$. Тогда найдется натуральное число l_0 , при котором $\|z_i^0 A_i^{l_0}\| < \varepsilon_i$ для всех $i \in I$. Таким образом, если $M_i = D_{\varepsilon_i}(0)$ для всех $i \in I$, то преследователи P_i осуществят r -кратную поимку убегающего E , полагая $u_i(t) = v(t)$, где $i \in \Omega_I(r)$, $r \leq n$.

Лемма 5. Если $0 \notin \text{Intco} \{D_{\varepsilon_1}(z_1^0), \dots, D_{\varepsilon_n}(z_n^0)\}$, то существует вектор v_0 , $\|v_0\| = 1$, такой, что $(z_i^0, v_0) \leq -\varepsilon_i$ для всех $i \in I$.

Доказательство. Из условия леммы следует, что существует вектор $v_0 \in V$, $\|v_0\| = 1$, такой, что $(p_i, v_0) \leq 0$ для всех $p_i \in D_{\varepsilon_i}(z_i^0)$, $i \in I$. Поэтому $c(D_{\varepsilon_i}(z_i^0), v_0) \leq 0$, где $c(A, \varphi)$ — опорная функция множества A . Так как $c(D_{\varepsilon_i}(z_i^0), v_0) = (z_i^0, v_0) + \varepsilon_i \|v_0\|$, то получаем справедливость утверждения леммы.

Лемма доказана.

Теорема 5. Пусть $A_i \geq 1$ для всех $i \in I$ и $0 \notin \text{Intco} \{D_{\varepsilon_1}(z_1^0), \dots, D_{\varepsilon_n}(z_n^0)\}$. Тогда в игре $\Gamma(n, 1)$ происходит уклонение от встречи.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что существует вектор $v_0 \in V$, $\|v_0\| = 1$, такой, что $(z_i^0, v_0) \leq -\varepsilon_i$ для всех $i \in I$ (см. лемму 5).

Зададим управление убегающего E , полагая, что $v(t_p) = v_0$ для всех $p \in \mathbb{Z}, p \geq 0$. Пусть $u_i(\cdot)$ — произвольные функции на $[t_0, t_p] \cap \mathbb{T}$ для всех p и такие, что $\|u_i(t_p)\| \leq 1$.

Обозначим $Q_i^l = \sum_{p=0}^{l-1} \frac{\tau}{A_i^{p+1}}$. Соответственно из (5.2) получим

$$z_i(t_l) = A_i^l \left(z_i^0 + \sum_{p=0}^{l-1} \frac{u_i(t_p)}{A_i^{p+1}} \tau - v_0 Q_i^l \right). \quad (5.3)$$

Поскольку $\tau > 0$ и $A_i \geq 1$, то $Q_i^l \neq 0$ для всех $l \in \mathbb{N}$, $i \in I$. Определим функции $\hat{u}_i(t_l) = \frac{1}{Q_i^l} \sum_{p=0}^{l-1} \frac{u_i(t_p)}{A_i^{p+1}} \tau$. Тогда $\|\hat{u}_i(t_l)\| \leq 1$. Из (5.3) получаем $z_i(t_l) = A_i^l (z_i^0 + Q_i^l \hat{u}_i(t_l) - v_0 Q_i^l)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|z_i(t_l)\| &\geq |A_i^l| \left(\|z_i^0 - v_0 Q_i^l\| - |Q_i^l| \right) = |A_i^l| \left(\sqrt{\|z_i^0\|^2 - 2|Q_i^l|(z_i^0, v_0) + |Q_i^l|^2} - |Q_i^l| \right) \\ &> \sqrt{\varepsilon_i^2 + 2|Q_i^l|\varepsilon_i + |Q_i^l|^2} - |Q_i^l| = \varepsilon_i + |Q_i^l| - |Q_i^l| = \varepsilon_i, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

Теорема 6. Пусть $A_i > 1$ для всех $i \in I$. Тогда существуют числа $c_i > 0$ такие, что для всех z_i^0 , таких что $\|z_i^0\| \geq c_i$ для всех $i = 1, \dots, n$, в игре $\Gamma(n, 1)$ происходит уклонение от встречи.

Доказательство. Полагаем, управление убегающего равно нулю: $v(t) = 0$. Тогда из (5.2) имеем

$$z_i(t_l) = A_i^l z_i^0 + \sum_{p=0}^{l-1} A_i^{l-1-p} u_i(t_p) \tau.$$

Поскольку $u_i(t_p) \in V$ для всех $i \in I$, $p \in \mathbb{Z}, p \geq 0$, то

$$\|z_i(t_l)\| \geq A_i^l \|z_i^0\| - \sum_{p=0}^{l-1} A_i^{l-1-p} \tau = A_i^l \|z_i^0\| - \frac{A_i^l - 1}{A_i - 1} \tau.$$

Докажем, что для каждого $i \in I$ найдется число $c_i > 0$, такое, что если $\|z_i^0\| > c_i$, то $\|z_i(t_l)\| > \varepsilon_i$ для всех натуральных l . Это и будет означать, что в игре $\Gamma(n, 1)$ происходит уклонение от встречи.

Рассмотрим неравенство

$$A_i^l \|z_i^0\| - \frac{A_i^l - 1}{A_i - 1} \tau > \varepsilon_i, \text{ или } \|z_i^0\| > B_i(l) = \frac{(A_i^l - 1)\tau + (A_i - 1)\varepsilon_i}{A_i^l(A_i - 1)}.$$

Так как для всех $i \in I$, $l \in \mathbb{N}$ $B_i(l) \geq 0$ и $\lim_{l \rightarrow +\infty} B_i(l) = \frac{\tau}{A_i - 1}$, то существуют $d_i > 0$, такие что $B_i(l) \leq d_i$ для всех натуральных l . Взяв в качестве $c_i = d_i$, получим требуемое.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Том 2. М.: Наука, 1988. 575 с.
3. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992. 384 с.
4. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 198 с.
5. Саматов Б.Т. Задача преследования-убегания при интегрально-геометрических ограничениях на управления преследователя // Автоматика и телемеханика. 2013. Вып. 7. С. 17–28.
6. Чикрий А.А., Чикрий Г.Ц. Матричные разрешающие функции в игровых задачах динамики // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 324–333.
7. Aulbach B., Hilger S. Linear dynamic processes with inhomogeneous time scale // Nonlinear dynamics and quantum dynamical systems. Contributions to the international seminar ISAM-90, Gaussig (GDR) / eds. G.A. Leonov, V. Reitmann, W. Timmermann. Berlin: Akademie-Verlag, 1990. Vol. 59. P. 9–20. doi: 10.1515/9783112581445-002.
8. Hilger S. Analysis on measure chains – a unified approach to continuous and discrete calculus // Results in Mathematics. 1990. Vol. 18. P. 18–56. doi: 10.1007/BF03323153
9. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S. Impulsive differential equations and Inclusions. NY: Hindawi Publ., 2006. 381 p. doi: 10.1155/9789775945501
10. Bohner M., Peterson A. Advances in dynamic equations on time scales. Boston: Birkhäuser, 2003. 348 p. doi: 10.1007/978-0-8176-8230-9
11. Martins N., Torres D. Necessary conditions for linear noncooperative N -player delta differential games on time scales // Discus. Math., Differ. Inclus., Control and Optimiz. 2011. Vol. 31, no. 1. P. 23–37. doi: 10.7151/dmdico.1126
12. Петров Н.Н. Задача простого группового преследования с фазовыми ограничениями во временных шкалах // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30, вып. 2. С. 249–258. doi: 10.35634/vm200208
13. Petrov N.N. Multiple capture of a given number of evaders in the problem of simple pursuit with phase restrictions on timescales // Dyn. Games Appl. 2022. Vol. 12, no. 2. P. 632–642. doi: 10.1007/s13235-021-00387-y
14. Можегова Е.С. Об одной задаче группового преследования во временных шкалах // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33, вып. 1. С. 130–140. doi: 10.35634/vm230109
15. Чикрий А.В. О множественной поимке убегающего // Теорія оптимальних рішень. 2009. № 8. С. 56–60.
16. Cabada A., Vivero D.R. Expression of the Lebesgue Δ -integral on time scales as a usual Lebesgue integral; application to the calculus of Δ -antiderivatives // Math. Comp. Modelling. 2006. Vol. 43, no. 1–2. P. 194–207. doi: 10.1016/j.mcm.2005.09.028

Поступила 12.03.2024

После доработки 15.05.2024

Принята к публикации 20.05.2024

Можегова Елена Сергеевна

аспирант

Удмуртский государственный университет

г. Ижевск

e-mail: mozhegovaelena@yandex.ru

Петров Николай Никандрович

д-р физ.-мат. наук, профессор

ведущий науч. сотрудник

Удмуртский государственный университет

г. Ижевск

e-mail: kma3@list.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*. NY, Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8. This book is substantially revised version of the monograph: Krasovskii N.N., Subbotin A.I., *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Pontryagin L.S. *Izbrannye nauchnye trudy, II* [Selected scientific works, II]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 575 p. ISBN: 5-02-14410-X.
3. Chikrii A.A. *Conflict-controlled processes*. Dordrecht, Springer, 1997, 404 p. doi: 10.1007/978-94-017-1135-7. Original Russian text published in Chikrii A. A. *Konfliktno upravlyaemye processy*, Kiev, Naukova Dumka Publ., 1992, 384 p.
4. Grigorenko N.L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* [Mathematical methods of control a few dynamic processes]. Moscow, Moscow State Univ. Publ., 1990, 198 p. ISBN: 5-211-00954-1.
5. Samatov B.T. The pursuit-evasion problem under integral-geometric constraints on pursuer controls. *Autom. Remote Control*, 2013, vol. 74, no. 7, pp. 1072–1081. doi: 10.1134/S0005117913070023
6. Chikrii A.A., Chikrii G.T. Matrix resolving functions in game problems of dynamics. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 291, suppl. 1, pp. S56–S65. doi: 10.1134/S0081543815090047
7. Aulbach B., Hilger S. Linear dynamic processes with inhomogeneous time scale. In: “Nonlinear dynamics and quantum dynamical systems”. *Contributions to the international seminar ISAM-90, Gaussig (GDR), March 19–23, 1990*, G.A. Leonov, V. Reitmann, W. Timmermann (eds.), Ser. Math. Res., vol. 59, Berlin, Akademie-Verlag, 1990, pp. 9–20. doi: 10.1515/9783112581445-002
8. Hilger S. Analysis on measure chains — a unified approach to continuous and discrete calculus. *Results in Math.*, 1990, vol. 18, pp. 18–56. doi: 10.1007/BF03323153
9. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S. *Impulsive differential equations and inclusions*, NY, Hindawi Publ., 2006, 381 p. doi: 10.1155/9789775945501
10. Bohner M., Peterson A. *Advances in dynamic equations on time scales*, Boston, Birkhäuser, 2003, 348 p. doi: 10.1007/978-0-8176-8230-9
11. Martins N., Torres D. Necessary conditions for linear noncooperative N -player delta differential games on time scales. *Discus. Math., Differ. Inclus., Control and Optimiz.*, 2011, vol. 31, no. 1, pp. 23–37. doi: 10.7151/dmdico.1126
12. Petrov N.N. The problem of simple group pursuit with phase constraints in time scales. *Vestnik Udmurt. Un-ta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, no. 2, pp. 249–258 (in Russian). doi: 10.35634/vm200208
13. Petrov N.N. Multiple capture of a given number of evaders in the problem of simple pursuit with phase restrictions on timescales. *Dyn. Games Appl.*, 2022, vol. 12, no. 2, pp. 632–642. doi: 10.1007/s13235-021-00387-y
14. Mozhegova E.S. On a group pursuit problem on time scales. *Vestnik Udmurt. Un-ta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, no. 1, pp. 130–140 (in Russian). doi: 10.35634/vm230109
15. Chikrii A.A. On multiple capture of the evader. *Teoriya optimal'nykh reshenii*, 2009, no. 8, pp. 56–60.
16. Cabada A., Vivero D.R. Expression of the Lebesgue Δ -integral on time scales as a usual Lebesgue integral; application to the calculus of Δ -antiderivatives. *Math. Comp. Modelling*, 2006, vol. 43, no. 1–2, pp. 194–207. doi: 10.1016/j.mcm.2005.09.028

Received March 12, 2024

Revised May 15, 2024

Accepted May 20, 2024

Funding Agency: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. FEWS-2024-0009).

Elena Sergeevna Mozhegova, doctoral student, Udmurt State University, Izhevsk, 426034 Russia, e-mail: mozhegovalena@yandex.ru.

Nikolai Nikandrovich Petrov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Udmurt State University, Izhevsk, 426034, Russia, e-mail: kma3@list.ru.

Cite this article as: E. S. Mozhegova, N. N. Petrov. Multiple capture of an evader in the linear pursuit problem on timescales. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 217–228.