УДК 517.929

**К ВОПРОСУ О ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ
ДОСТИЖИМЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЦЕЛЕВЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ
ДЛЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ
С НЕПРЕРЫВНЫМ И ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ¹**

В. П. Максимов

Для широкого класса линейных систем с последействием рассматривается задача о достижимости заданной системы целевых значений при полиэдральных ограничениях на управление. Цель управления задается конечной системой линейных функционалов ℓ_i , $i = 1, \dots, N$. С учетом этого в работе используется более точный термин “ ℓ -достижимость”. Общий вид функционалов позволяет охватить в качестве частных случаев терминальные, многоточечные, интегральные целевые условия и их линейные комбинации. Для рассматриваемого класса систем задача об ℓ -достижимости сводится к варианту проблемы моментов. Одна из особенностей рассматриваемой задачи заключается в учете случайных возмущений элементов моментной матрицы. Эти возмущения приводят к искажению нижних и верхних по включению аппроксимаций множества ℓ -достижимости. Для получения гарантированного результата предлагаются специальные процедуры, позволяющие строить программные управления со следующими свойствами. Во-первых, реализация таких управлений приводит к траекториям, на которых целевые функционалы принимают достижимые значения. Во-вторых, вычисление достижимых значений удается сопровождать гарантированными оценками погрешностей, связанных с возмущениями элементов моментной матрицы. При этом каждой координате вектора целевых значений сопоставляется не только отрезок возможных значений, но и соответствующая плотность вероятности их распределения. Последнее свойство позволяет дать погрешностям вероятностные характеристики.

Ключевые слова: задачи управления, непрерывно-дискретные системы с последействием, управление с ограничениями, множества достижимости.

V. P. Maksimov. On the error of calculating the attainable values of objective functionals for control systems with continuous and discrete times.

For a wide class of linear systems with aftereffect, the problem of attaining target values by a given system is considered under polyhedral constraints on the control. The aim of the control is set by a finite system of linear functionals ℓ_i , $i = 1, \dots, N$; this is why the more precise term “ ℓ -attainability” is used in the paper. The general form of the functionals makes it possible to consider terminal, multipoint, and integral target conditions and their linear combinations as special cases. For the class of systems under consideration, the problem of ℓ -attainability is reduced to a variant of the moment problem. One of the features of this problem is the account of random disturbances in elements of the moment matrix. These disturbances result in the distortion of the lower and upper (by inclusion) approximations of the ℓ -attainable set. To obtain a guaranteed result, special procedures are proposed, which allow one to build open-loop controls with the following properties. First, the implementation of such controls produces trajectories on which the objective functionals take attainable values. Second, the calculation of attainable values is accompanied by guaranteed estimates of the errors associated with disturbances of elements of the moment matrix. In this case, each coordinate of the vector of target values corresponds not only to an interval of feasible values but also to the corresponding probability density of their distribution. The latter property allows one to give probabilistic characteristics to the errors.

Keywords: control problems, continuous–discrete systems with aftereffect, control with constraints, attainable sets.

MSC: 34F05, 34K06, 34K34, 34K35

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-3-207-216

1. Введение

В настоящей работе для широкого класса линейных систем с последействием рассматривается задача о достижимости заданной системы целевых значений при полиэдральных огра-

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00517, <https://rscf.ru/project/22-21-00517/>.

ничениях на управление. Цель управления задается конечной системой линейных функционалов ℓ_i , $i = 1, \dots, N$. Имея это в виду, мы используем более точный термин “ ℓ -достижимость”. Общий вид функционалов позволяет охватить в качестве частных случаев терминальные, многоточечные, интегральные целевые условия и их линейные комбинации. Для рассматриваемого класса систем задача об ℓ -достижимости сводится к варианту проблемы моментов, фундаментальная роль которой в исследовании задач управления линейными системами описана Н.Н.Красовским в классической монографии [1]. Одна из особенностей рассматриваемой задачи заключается в учете случайных возмущений элементов моментной матрицы. Эти возмущения приводят к искажению нижних и верхних по включению аппроксимаций множества ℓ -достижимости. В силу этого для получения гарантированного результата требуются специальные процедуры, позволяющие строить программные управления, реализация которых приводит к траекториям, на которых 1) целевые функционалы принимают достижимые значения и 2) вычисление таких значений удается сопровождать гарантированными оценками погрешностей, связанных с возмущениями элементов моментной матрицы. При этом каждой координате вектора целевых значений сопоставляется не только отрезок возможных значений, но и соответствующая плотность вероятности их распределения, что позволяет дать погрешностям вероятностные характеристики.

Несмотря на значительное число работ отечественных и зарубежных авторов, посвященных различным аспектам исследования множеств достижимости, активность специалистов в этой сфере не убывает и круг рассматриваемых вопросов как в части фундаментальной теории, так и в части приложений продолжает расширяться. В обзоре [2] дано описание современного состояния проблем конструктивной аппроксимации множеств достижимости для непрерывных и гибридных систем. В центре внимания находятся методы, основанные преимущественно на распространении множеств. Начиная с набора начальных состояний, эти методы итеративно распространяют последовательность множеств в соответствии с динамикой системы. Отдельный раздел этой работы посвящен некоторым классам множеств, удобных для компьютерной реализации описываемых алгоритмов. Обсуждаются примеры успешного применения анализа достижимости к актуальным прикладным задачам.

Все большее внимание привлекают задачи достижимости с неполной информацией. Так, в работе [3] рассматриваются задачи достижимости и построения оценок множеств достижимости для линейных систем с дискретным временем и неопределенностями в начальных условиях, матрицах коэффициентов и аддитивных воздействиях. Неопределенности стеснены заданными параллелепипедозначными, интервальными и интегральными неквадратичными ограничениями соответственно. Предлагаются способы построения параметризованных семейств внешних и внутренних полиэдральных оценок множеств достижимости в виде политопов специального типа. На их основе строятся внешние параллелепипедозначные и внутренние параллелотопозначные оценки. Все оценки находятся по явным формулам из систем рекуррентных соотношений.

Авторы статьи [4] исследуют проблему стохастической достижимости для линейных систем с аддитивной стохастической неопределенностью, стремясь при этом вычислить максимальную вероятность того, что состояния достигнут целевого набора в конечное время. Используются методы, основанные на выборке, и предлагается нижняя граница количества сценариев, гарантирующих, что эта оценка дает заниженное приближение. Из-за вероятностного характера методов сама гарантия занижения является вероятностной и может быть использована для удовлетворения предписанного вероятностного уровня достоверности. Для уменьшения вычислительной сложности предлагается использовать разбиение Вороного при проверке ограничений. Авторы предлагают систематический подход к отбору репрезентативных ячеек и поиска компромисса между количеством ячеек, необходимым для обеспечения точности, и вычислительными затратами.

Особое внимание уделяется компромиссу между точностью описания множества достижимости и временем, затрачиваемым на решение этой задачи. Так, в работе [5] используются

методы машинного обучения для разработки алгоритмов на основе запросов для приближенного, но в режиме реального времени решения проблемы достижимости. В частности, показано, что с помощью обучающего набора предварительно решенных двухточечных краевых задач можно классифицировать достижимые с учетом затрат множества, используя либо локально взвешенную линейную регрессию, либо механизм опорных векторов. При этом ошибки классификации порядка 10 процентов в среднем достигаются за время меньше на 4 порядка по сравнению с точными методами.

В ряде актуальных прикладных задач, например в робототехнике, требуется строить удовлетворительное приближение для множеств достижимости в реальном времени, одно из решений этой проблемы связано с применением параллельных вычислений. Отметим работу [6], в которой исследуется эффективность применения технологии параллельных вычислений на многопроцессорных системах с общей памятью для задач приближенного построения множеств достижимости нелинейных управляемых систем в конечномерном евклидовом пространстве. В рамках исследования предложен параллельный алгоритм, основанный на пошаговой вычислительной схеме с использованием узлов “кубических” сеток для аппроксимации множеств. Предложенный алгоритм предназначен для проведения расчетов на ЭВМ архитектуры SMP и решает вопросы разделения задачи на отдельные подзадачи, синхронизации работы параллельных частей алгоритма и равномерного распределения нагрузки между процессорами. Численное моделирование примеров на ЭВМ с двумя 4-ядерными процессорами с использованием предложенного в статье параллельного алгоритма показало высокую эффективность применения технологии параллельных вычислений для расчета множеств достижимости сеточными методами.

В статье [7] предлагается новый сеточный алгоритм построения множеств достижимости нелинейных управляемых систем. Основная идея предложенного алгоритма состоит в том, чтобы вычислять граничные точки с максимально возможной точностью.

Сложность исследования задач достижимости приводит к попыткам привлечь методы стохастического моделирования и методы глубокого машинного обучения. Примером может служить работа [8]. В этой статье предлагается простой, но эффективный подход, основанный на выборке, для выполнения анализа достижимости произвольных динамических систем. Ключевая новая идея здесь состоит в использовании теории случайных множеств, чтобы дать строгую интерпретацию предлагаемого метода и доказать, что он возвращает множества, которые гарантированно сходятся к выпуклой оболочке достижимых множеств. Кроме того, используются новые результаты по глубокому обучению и предлагается новый подход к составительной выборке, чтобы повысить надежность алгоритма и ускорить его сходимость. Авторы демонстрируют, что разработанный метод быстрее и менее консервативен, чем ранее известные, а также представляют результаты анализа приближенной достижимости для нейронных сетей и робастной оптимизации траекторий многомерных нелинейных систем с неопределенной размерностью.

Сложность построения аппроксимаций множеств достижимости существенно зависит от характера ограничений на фазовые и управляющие переменные. Среди работ, предлагающих алгоритмы для разнотипных ограничений, отметим работу [9], в которой рассматривается задача приближенного построения множеств достижимости линейной управляемой системы, когда управляющее воздействие стеснено одновременно геометрическим и несколькими интегральными ограничениями. Предлагается вариант перехода от непрерывной к дискретной системе путем равномерного разбиения временного отрезка и замены управлений на шаге разбиения их средними значениями. Доказана сходимость множества достижимости аппроксимирующей системы к множеству достижимости исходной системы в хаусдорфовой метрике при стремлении шага дискретизации к нулю, получена оценка скорости сходимости. Предложен алгоритм построения границы множеств достижимости, основанный на решении семейства задач конического программирования.

Отдельное направление связано с параметризацией исследуемого семейства систем управ-

ления и изучением зависимости от параметра множеств достижимости и интегральных воронок [3; 10].

Следует отметить устойчивую тенденцию разработки и сравнительного анализа компьютерного инструментария для исследования задач достижимости (см., например, [11] и [12]).

2. Постановка задачи

При описании рассматриваемой непрерывно-дискретной системы управления мы следуем обозначениям работы [13].

Фиксируем отрезок $[0, T] \subset \mathbb{R}$. Через $L^n = L^n[0, T]$ обозначим пространство суммируемых функций $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|y\|_{L^n} = \int_0^T |y(s)|_n ds$, где $|\cdot|_n$ — норма в пространстве $\mathbb{R}^n$; $L_2^n = L_2^n[0, T]$ — пространство суммируемых с квадратом функций $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^r$, в котором скалярное произведение определено равенством $(u, v) = \int_0^T u'(s)v(s) ds$, $(\cdot)'$ — символ транспонирования.

Пространство $AC^n = AC^n[0, T]$ — пространство абсолютно непрерывных функций $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{AC^n} = \|\dot{x}\|_{L^n} + |x(0)|_n$.

Для определения значений дискретного аргумента фиксируем множество $J = \{t_0, t_1, \dots, t_\mu\}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_\mu = T$. Пространство фазовых компонент с дискретным временем $FD^\nu(\mu) = FD^\nu\{t_0, t_1, \dots, t_\mu\}$ определяется как пространство функций $z : J \rightarrow \mathbb{R}^\nu$ с нормой

$$\|z\|_{FD^\nu(\mu)} = \sum_{i=0}^{\mu} |z(t_i)|_\nu.$$

Рассмотрим систему управления

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathcal{T}_{11}x + \mathcal{T}_{12}z + Fu, \\ z &= \mathcal{T}_{21}x + \mathcal{T}_{22}z + Gu, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где линейные ограниченные вольтерровы операторы $\mathcal{T}_{ij}$, $i, j = 1, 2$, определены следующими соотношениями.

- Оператор $\mathcal{T}_{11}$ действует из AC^n в L^n ,

$$(\mathcal{T}_{11}x)(t) = \int_0^t K^1(t, s)\dot{x}(s) ds + A^1(t)x(0), \quad t \in [0, T].$$

Здесь элементы $k_{ij}^1(t, s)$ ядра $K^1(t, s)$ удовлетворяют условию $\mathcal{K}$: $k_{ij}^1(t, s)$, $i, j = 1, \dots, n$, измеримы на множестве $0 \leq s \leq t \leq T$, и существует суммируемая неотрицательная функция $\kappa(\cdot) \in L^1[0, T]$, такая что $|k_{ij}^1(t, s)| \leq \kappa(t)$, $t \in [0, T]$, $i, j = 1, \dots, n$; $(n \times n)$ -матрица A^1 имеет суммируемые на $[0, T]$ элементы.

- Оператор $\mathcal{T}_{12}$ действует из $FD^\nu(\mu)$ в L^n ,

$$(\mathcal{T}_{12}z)(t) = \sum_{\{j: t_j \leq t\}} B_j^1(t)z(t_j), \quad t \in [0, T],$$

элементы матриц B_j^1 , $j = 0, \dots, \mu$, суммируемы на $[0, T]$.

- Оператор $\mathcal{T}_{21}$ действует из AC^n в $FD^\nu(\mu)$,

$$(\mathcal{T}_{21}x)(t_i) = \int_0^{t_i} K_i^2(s)\dot{x}(s) ds + A_i^2x(0), \quad i = 0, 1, \dots, \mu,$$

элементы матриц K_i^2 измеримы и ограничены в существенном на $[0, T]$, A_i^2 , $i = 0, 1, \dots, \mu$, — постоянные $(\nu \times n)$ -матрицы.

- Оператор $\mathcal{T}_{22}$ действует из $FD^\nu(\mu)$ в $FD^\nu(\mu)$,

$$(\mathcal{T}_{22}z)(t_i) = \sum_{j=0}^{i-1} B_{ij}^2 z(t_j), \quad i = 1, \dots, \mu,$$

B_{ij}^2 — постоянные $(\nu \times \nu)$ -матрицы.

Операторы F и G , отвечающие за реализацию управляющих воздействий, определены следующим образом. Оператор $F : L_2^r \rightarrow L^n$ линеен, ограничен и вольтерров. Напомним, что оператор F является вольтерровым, если для каждого $\tau \in (0, T)$ равенство $(Fu)(t) = 0$, $t \in [0, \tau]$, имеет место для всех $u \in L_2^r$, таких что $u(t) = 0$ на $[0, \tau]$. Оператор $G : L_2^r \rightarrow FD^\nu(\mu)$ — линейный ограниченный и вольтерров. Всякий такой оператор имеет представление

$$(Gu)(t_i) = \int_0^{t_i} G_i(s) u(s) ds,$$

где $G_i(s)$, $i = 1, \dots, \mu$, — $(\nu \times r)$ -матрицы с квадратично суммируемыми элементами.

Без ограничения общности считаем нулевым заданное начальное состояние системы (2.1):

$$x(0) = 0, \quad z(0) = 0. \tag{2.2}$$

Для задания цели управления используется линейный ограниченный вектор-функционал $\ell : AC^n \times FD^\nu(\mu) \rightarrow \mathbb{R}^N$, который будем называть целевым. Общий вид такого вектор-функционала определяется равенством

$$\ell(x, z) = \Psi x(0) + \int_0^T \Phi(s) \dot{x}(s) ds + \sum_{i=0}^{\mu} \Gamma_i z(t_i),$$

где Ψ — постоянная $(N \times n)$ -матрица, $(N \times n)$ -матрица Φ имеет измеримые и ограниченные в существенном элементы, Γ_i — постоянные $(N \times \nu)$ -матрицы.

Цель управления задается как достижение заданного вектора целевых значений $\beta \in \mathbb{R}^N$ на траекториях системы (2.1), удовлетворяющих начальным условиям (2.2):

$$\ell(x, z) = \beta \tag{2.3}$$

под действием *допустимых* управлений, т. е. управлений $u \in L_2^r$, удовлетворяющих системе ограничений в виде системы линейных неравенств

$$\Lambda u(t) \leq \gamma, \quad t \in [0, T]. \tag{2.4}$$

Здесь Λ и γ — заданные постоянные $(N \times r)$ -матрица и $(N \times 1)$ -вектор соответственно. Всюду ниже предполагается, что множество $\mathcal{V}$ решений линейной системы неравенств $\Lambda u \leq \gamma$ непусто и ограничено.

Множеством ℓ -достижимости в задаче (2.1), (2.3), (2.4) называется множество всех таких β , для каждого из которых найдется допустимое управление, порождающее траекторию, на которой целевой вектор-функционал принимает значение β . Обозначим это множество через S . Точное построение этого множества требует точного решения бесконечного числа экстремальных задач, поэтому на практике приходится довольствоваться его нижними аппроксимациями $\underline{S}$ и верхними аппроксимациями $\overline{S}$: $\underline{S} \subset S \subset \overline{S}$.

Использование представления решения системы (2.1) с помощью ее оператора Коши [13] и представления целевого вектор-функционала ℓ позволяет свести задачу об ℓ -достижимости (2.1), (2.3), (2.4) к обобщенной проблеме моментов [14, с. 370–371]:

$$\mu(u) \equiv \int_0^T M(t)u(t) dt = \beta, \quad u(t) \in \mathcal{V}, \quad t \in [0, T], \quad (2.5)$$

в которой требуется найти множество всех правых частей β , достижимых на допустимых управлениях. Элементы моментной $(N \times r)$ -матрицы $M(t)$ выражаются через элементы оператора Коши, операторов F, G и целевого вектор-функционала ℓ ; соотношения, определяющие эти элементы и обоснование проводимых преобразований представлены в [15;16]. Отметим, что даже в случае, когда для элементов моментной матрицы получены точные аналитические выражения, как, например, для непрерывно-дискретных систем с дискретной памятью (см. [17]), реальные вычисления связаны с погрешностями округлений и необходимостью численного интегрирования. Фактически это означает, что элементы моментной матрицы известны приближенно. Имея это в виду, в дальнейших рассуждениях мы используем представление моментной матрицы $M(t)$ задачи (2.5) в виде

$$M(t) = M_0(t) + \Delta M(t),$$

где матрица $M_0(t)$ известна точно и допускает точное вычисление значений вектор-функционала $\mu_0(u) = \int_0^T M_0(t)u(t) dt$ на кусочно постоянных управлениях $u(t)$, а $\Delta M(t)$ играет роль аддитивного возмущения моментной матрицы и определяет возмущение $\Delta\mu(u) = \int_0^T \Delta M(t)u(t) dt$ вектор-функционала $\mu_0(u)$. Считаем, что возмущение $\Delta M(t)$ аккумулирует случайные возмущения, которым подвергаются параметры системы управления, и ошибки, возникающие при приближенном построении оператора Коши.

Ниже вектор-функционалы μ_0 и $\Delta\mu$ рассматриваются на нижней аппроксимации (внутренней оценке) множества ℓ -достижимости, полученной, как это описано в работе [16], в классе кусочно постоянных управлений, соответствующем разбиению $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_K = T$ основного отрезка $[0, T]$. В нашем случае это множество строится по моментной матрице $M_0(t)$ и по построению является выпуклым многогранником; обозначим его через $\mathcal{P}_0$, с известными угловыми точками ρ_k , $k = 1, \dots, m$. Этим угловым точкам соответствуют управления $u_k(t) = \sum_{j=1}^K \varkappa_j^k \chi_j(t)$, где $\chi_j(t)$ — характеристическая функция промежутка $[\tau_{j-1}, \tau_j]$. Обозначим через ω_k^ρ , $k = 1, \dots, m$, барицентрические координаты точки $\rho \in \mathcal{P}_0$: $\rho = \sum_{i=1}^m \omega_k^\rho \rho_k$. Для управления $u^\rho(t)$, соответствующего этой линейной комбинации, имеем

$$u^\rho(t) = \sum_{i=1}^m \omega_k^\rho u_k(t) = \sum_{i=1}^m \omega_k^\rho \sum_{j=1}^K \varkappa_j^k \chi_j(t). \quad (2.6)$$

Отсюда для возмущения $\Delta\mu(u^\rho)$ получаем

$$\Delta\mu(u^\rho) = \int_0^T \Delta M(t) u^\rho(t) dt = \sum_{j=1}^K \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \Delta M(t) dt \left\{ \sum_{k=1}^m \omega_k^\rho \varkappa_j^k \right\}. \quad (2.7)$$

Определим $(N \times r)$ -матрицу Ξ_j равенством $\Xi_j = \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \Delta M(t) dt$. Ниже всюду будем предполагать, что элементы ξ_j^{ik} этой матрицы — независимые случайные величины, распределенные равномерно на известных отрезках $[a_j^{ik}, b_j^{ik}]$. Это предположение можно считать естественным, если иметь в виду значительное число вычислений при построении элементов моментной

матрицы $M(t)$, связанных по необходимости с округлениями числовых значений. Подробное обсуждение вопросов о распределении ошибок округлений можно найти в книге [18] (теорема 2, с. 287, гипотеза, с. 290).

Задача состоит в описании погрешностей, возникающих при вычислении значений целевого вектор-функционала с учетом возмущений моментной матрицы.

3. Основная теорема

Возвращаясь к представлению (2.7) и обозначая выражение в фигурных скобках через $\alpha_j(\rho)$, запишем (2.7) в виде

$$\Delta\mu(u^\rho) = \sum_{j=1}^K \Xi_j \alpha_j(\rho).$$

Каждая компонента вектора $\Delta\mu(u^\rho)$ представляет собой линейную комбинацию независимых равномерно распределенных случайных величин. Используя теорему 4.1 [19], можно найти ее плотность вероятности $f^i(\cdot)$ и ее конечный носитель — отрезок $[a_i, b_i]$.

Для того чтобы воспользоваться этой теоремой, дадим явное представление упомянутой линейной комбинации. Для i -й компоненты вектора $\Delta\mu(u^\rho)$ имеем

$$(\Delta\mu(u^\rho))_i = \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^r \xi_j^{ik} \alpha_j^k(\rho).$$

Занумеруем все слагаемые этой двойной суммы с помощью единого символа q по следующему правилу: начинаем с $j = 1$ и нумеруем по k присваивая q значения $1, \dots, r$, затем для $j = 2$ нумеруем по k , присваивая q значения $r + 1, \dots, 2r$, и так далее, заканчивая для $j = K$ присвоением q значения $K \cdot r$. При этом сами последовательно занумерованные случайные величины ξ_j^{ik} обозначаем через d_i^q , а коэффициенты при них — $\varphi_i^q(\rho)$, $q = 1, \dots, K \cdot r$. При этом подразумевается, что правило перенумерации относится и к отрезкам $[a_j^{ik}, b_j^{ik}]$, на которых равномерно распределены ξ_j^{ik} . В результате $(\Delta\mu(u^\rho))_i$ принимает вид

$$(\Delta\mu(u^\rho))_i = \sum_{q=1}^{K \cdot r} \varphi_i^q(\rho) d_i^q, \tag{3.1}$$

где $d_i^q \sim U[a_i^q, b_i^q]$ (здесь и ниже запись $\xi \sim U[a, b]$ означает принадлежность случайной величины ξ равномерному распределению на отрезке $[a, b]$). Представим d_i^q в виде $d_i^q = (b_i^q - a_i^q)c_i^q + a_i^q$, где $c_i^q \sim U[0, 1]$. Подставляя это выражение в (3.1), получаем для $(\Delta\mu(u^\rho))_i$ представление в виде суммы линейной комбинации случайных величин, распределенных равномерно на отрезке $[0, 1]$, и детерминированного числа

$$(\Delta\mu(u^\rho))_i = \sum_{q=1}^{N \cdot r} \varphi_i^q(\rho)(b_i^q - a_i^q)c_i^q + \sigma_i(\rho), \tag{3.2}$$

где

$$\sigma_i(\rho) = \sum_{q=1}^{N \cdot r} \varphi_i^q(\rho)a_i^q. \tag{3.3}$$

Для каждого $y_1 \in \mathbb{R}$ определим в $\mathbb{R}^{N \cdot r - 1}$ полиэдральное множество $\mathcal{M}_i(y_1, \rho)$:

$$\mathcal{M}_i(y_1, \rho) = \left\{ (y_2, \dots, y_{N \cdot r})' \in \mathbb{R}^{N \cdot r - 1} : 0 \leq y_q \leq 1, q = 2, \dots, N; \right. \\ \left. \frac{1}{\varphi_i^1(\rho)(b_i^1 - a_i^1)} y_1 - 1 \leq \sum_{q=2}^{N \cdot r} \frac{\varphi_i^q(\rho)(b_i^q - a_i^q)}{\varphi_i^1(\rho)(b_i^1 - a_i^1)} y_q \leq \frac{1}{\varphi_i^1(\rho)(b_i^1 - a_i^1)} y_1 \right\}. \tag{3.4}$$

При условии $\varphi_i^1(\rho) \neq 0$ в силу теоремы 4.1 [19] плотность вероятности i -й компоненты возмущения $(\Delta\mu(u^\rho))_i$, соответствующая точке $\rho \in \mathcal{P}$, функция $f_i(y_1, \rho)$, определяется равенством

$$f_i(y_1, \rho) = \frac{\mathbf{V}^{N \cdot r - 1}[\mathcal{M}_i(y_1 - \sigma_i(\rho), \rho)]}{|\varphi_i^1(\rho)|(b_i^1 - a_i^1)}, \quad (3.5)$$

где $\mathbf{V}^{N \cdot r - 1}[\mathcal{M}]$ — мера Лебега множества $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{N \cdot r - 1}$.

Следует отметить, что требование $\varphi_i^1(\rho) \neq 0$ носит формальный характер, если это условие не выполняется, следует перенумеровать коэффициенты при случайных величинах, присвоив индекс 1 коэффициенту, не равному нулю. Допущение, что таковой не найдется, означает полное отсутствие случайных возмущений.

Теорема 1. Пусть функции $f_i(\cdot, \rho)$, $i = 1, \dots, N$, — плотности вероятности, определенные равенством (3.5), где множество $\mathcal{M}_i$ определено равенством (3.4) по представлению (3.2), (3.3), и $I_i(\rho) = [a_i(\rho), b_i(\rho)]$ — их конечные носители.

Тогда для каждого $\rho \in \mathcal{P}_0$ значения $\tilde{\rho}$ целевого вектор-функционала ℓ , соответствующие управлению u^ρ (2.6), могут быть найдены с покомпонентной погрешностью Δ_i в пределах промежутка $I_i(\rho)$ для его i -й компоненты: $\tilde{\rho}_i = \rho_i + \Delta_i$, $\Delta_i \in [a_i(\rho), b_i(\rho)]$. При этом для любого $[\alpha_i(\rho), \beta_i(\rho)] \subset I_i(\rho)$ имеет место равенство

$$P(\Delta_i \in [\alpha_i(\rho), \beta_i(\rho)]) = \int_{\alpha_i(\rho)}^{\beta_i(\rho)} f_i(s, \rho) ds. \quad (3.6)$$

Доказательство. Конечность отрезка $[a_i(\rho), b_i(\rho)]$ для каждого $i = 1, \dots, N$ и каждого $\rho \in \mathcal{P}_0$ следует из определяющего функцию $f_i(\cdot, \rho)$ равенства (3.5). ℓ -достижимость приближенных значений $\tilde{\rho}_i$ вытекает из допустимости управления u^ρ , нацеленного на значение ρ по невозмущенной моментной матрице M_0 . Равенство (3.6) следует из определения функции $f_i(\cdot, \rho)$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
2. Althoff M., Freshe G., Girard A. Set propagation techniques for reachability analysis // Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems. 2021. Vol. 4. P. 369–395. doi: 1146/annurev-control-071420-08194
3. Kostousova E.K. On polyhedral estimation of reachable sets in the “extended” space for discrete-time systems with uncertain matrices and integral constraints // Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.). 2021. Vol 313, suppl. 1. P. S140–S154. doi: 10.1134/S0081543821030159
4. Sartipizadeh H., Vinod A.P., Açikmeşe B., Oishi M. Voronoi partition-based scenario reduction for fast sampling-based stochastic reachability computation of linear systems // Proc. 2019 American Control Conference (ACC). IEEE, 2019. P. 37–44. doi: 10.23919/ACC.2019.8814354
5. Allen R.E., Clark A.A., Starek J.A., Pavone M. A machine learning approach for real-time reachability analysis // IEEE/RSJ Intern. Conf. on Intelligent Robots and Systems. 2014. P. 2202–2208. doi: 10.1109/IROS.2014.6942859
6. Зимовец А.А., Матвийчук А.Р. Параллельный алгоритм приближенного построения множеств достижимости нелинейных управляемых систем // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютер. науки. 2015. Т. 25, № 4. С. 459–472.
7. Зимовец А.А., Матвийчук А.Р. Сеточный алгоритм построения множеств достижимости с улучшенной аппроксимацией границы // Челябин. физ.-мат. журн. 2021. Т. 6, № 1. С. 9–21. doi: 10.47475/2500-0101-2021-16101
8. Lew T., Pavone M. Sampling-based reachability analysis: a random set theory approach with adversarial sampling // Proc. of the 2020 Conf. on Robot Learning, Proc. of Machine Learning Research / eds. Jens Kober, Fabio Ramos, Claire Tomlin. 2021. Vol. 155. P. 2055–2070.

9. **Зыков И.В.** Приближенное вычисление множеств достижимости линейных управляемых систем при разнотипных ограничениях на управление // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. ун-та. 2022. Т. 60. С. 16–33. doi: 10.35634/2226-3594-2022-60-02
10. **Ушаков В.Н., Ершов А.А.** Множества достижимости и интегральные воронки зависящих от параметра дифференциальных включений // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 499. С. 49–53. doi: 10.31857/S2686954321040159
11. **Meyer P.-J., Devonport A., Arcak M.** Tira: toolbox for interval reachability analysis // Proc. of the 22nd ACM Internat. Conf. on Hybrid Systems: Computation and Control. 2019. P. 224–229. doi: 10.1145/3302504.3311808
12. **Immler F., Althoff M., Benet L., et al.** ARCH-COMP19 category report: Continuous and hybrid systems with nonlinear dynamics // EPIc Ser. in Computing. 6th Internat. Workshop on Applied Verification of Continuous and Hybrid Systems. 2019. Vol. 61. P. 41–61. doi: 10.29007/m75b
13. **Максимов В.П.** On the ℓ -attainability sets of continuous discrete functional differential systems // IFAC PapersOnLine. 2018. Vol. 51, no. 32. P. 310–313. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.401
14. **Крейн М.Г., Нудельман А.А.** Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973. 552 с.
15. **Максимов В.П.** The structure of the Cauchy operator to a linear continuous-discrete functional differential system with aftereffect and some properties of its components // Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki. 2019. Vol. 29, no. 1. P. 40–51. doi: 10.20537/vm190104
16. **Максимов В.П.** Непрерывно-дискретные динамические модели // Уфим. мат. журн. 2021. Т. 13, № 3. С. 97–106. doi: 10.13108/2021-13-3-95
17. **Максимов В.П.** О внутренних оценках множеств достижимости для непрерывно-дискретных систем с дискретной памятью // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 3. P. 141–151. doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-3-141-151
18. **Воеводин В.В.** Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977. 305 с.
19. **Максимов В.П.** К вероятностному описанию ансамбля траекторий непрерывно-дискретной системы управления с неполной информацией // Вестн. российских ун-в. Математика. 2023. Т. 28, № 143. С. 256–267. doi:10.20310/2686-9667-2023-28-143-256-267

Поступила 11.04.2024

После доработки 1.05.2024

Принята к публикации 6.05.2024

Максимов Владимир Петрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор
Пермский государственный национальный исследовательский университет
г. Пермь
e-mail: maksimov@econ.psu.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Motion control theory]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 476 pp.
2. Althoff M., Freshe G., Girard A. Set propagation techniques for reachability analysis. *Ann. Rev. Contr., Robot., Autonom. Syst.*, 2021, vol. 4, pp. 369–395. doi: 10.1146/annurev-control-071420-081941
3. Kostousova E.K. On polyhedral estimation of reachable sets in the “extended” space for discrete-time systems with uncertain matrices and integral constraints. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl. 1)*, 2021, vol 313, suppl. 1, pp. S140–S154. doi: 10.1134/S0081543821030159
4. Sartipzadeh H., Vinod A.P., Açikmeşe B., Oishi M. Voronoi partition-based scenario reduction for fast sampling-based stochastic reachability computation of linear systems. In: *Proc. 2019 American Control Conf. (ACC)*, IEEE, 2019, pp. 37–44. doi: 10.23919/ACC.2019.8814354
5. Allen R.E., Clark A.A., Starek J.A., Pavone M. A machine learning approach for real-time reachability analysis. In: *2014 IEEE/RSJ Inter. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, IEEE, 2014, pp. 2202–2208. doi: 10.1109/IROS.2014.6942859

6. Zimovets A.A., Matviichuk A.R. A parallel algorithm for constructing approximate attainable sets of nonlinear control systems. *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2015, vol. 25, no. 4, pp. 459–472 (in Russian).
7. Zimovets A.A., Matviichuk A.R. A grid-based algorithm for constructing attainability sets with improved boundary approximation. *Chelyab. Phys. Math. J.*, 2021, vol. 6, iss. 1, pp. 9–21 (in Russian). doi: 10.47475/2500-0101-2021-16101
8. Lew T., Pavone M. Sampling-based reachability analysis: a random set theory approach with adversarial sampling. In: *Proc. 4th Conf. on Robot Learning CoRL 2020*, (eds.) Jens Kober, Fabio Ramos, Claire Tomlin, *Proc. of Machine Learning Research*, Cambridge MA, USA, 2021, vol. 155, pp. 2055–2070.
9. Zykov I.V. Approximate calculation of reachable sets for linear control systems with different control constraints. *Izv. In-ta Mat. Inf. Udmurt. Gos. Un-ta*, 2022, vol. 60, pp. 16–33 (in Russian). doi: 10.35634/2226-3594-2022-60-02
10. Ushakov V.N., Ershov A.A. Reachable sets and integral funnels of differential inclusions depending on a parameter. *Dokl. Math.*, 2021, vol. 104, no. 1, pp. 200–204. doi: 10.1134/S1064562421040153
11. Meyer P.-J., Devonport A., Arcak M. TIRA: toolbox for interval reachability analysis. In: *Proc. of the 22nd ACM Inter. Conf. Hybrid Syst.: Comput. Control.*, 2019, pp. 224–229. doi: 10.1145/3302504.3311808
12. Immler F., Althoff M., Benet L., et al. ARCH-COMP19 category report: Continuous and hybrid systems with nonlinear dynamics. In: *EPiC Ser. Comput. 6th Inter. Workshop Appl. Verific. Contin. Hybrid Systems*, 2019, vol. 61, pp. 41–61. doi: 10.29007/m75b
13. Maksimov V.P. On the ℓ -attainability sets of continuous discrete functional differential systems. In: *Proc. 17th IFAC Workshop on Control Appl. Optimiz. CAO, IFAC PapersOnLine*, Yekaterinburg, Russia, 2018, vol. 51, iss. 32, pp. 310–313. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.401
14. Krein M.G., Nudel'man A.A. *The Markov moment problem and extremal problems*, Providence, R.I., Amer. Math. Soc., 1977, 417 p. ISBN: 978-0-8218-4500-4. Original Russian text published in Krein M. G., Nudel'man A. A., *Problemy momentov Markova i ekstremal'nye zadachi*, Moscow, Nauka Publ., 1973, 552 p.
15. Maksimov V.P. The structure of the Cauchy operator to a linear continuous-discrete functional differential system with aftereffect and some properties of its components. *Vest. Udmurt. Un-ta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, no. 1, pp. 40–51. doi: 10.20537/vm190104
16. Maksimov V.P. Continuous-discrete dynamic models. *Ufa Math. J.*, 2021, vol. 13, no. 3, pp. 95–103. doi:10.13108/2021-13-3-95
17. Maksimov V.P. On internal estimates of reachable sets for continuous–discrete systems with discrete memory. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 141–151 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-3-141-151
18. Voevodin V.V. *Vychislitel'nyye osnovy lineynoy algebry* [Computational foundations of linear algebra], Moscow, Nauka Publ., 1977, 304 p.
19. Maksimov V.P. To probabilistic description of an ensemble of trajectories to a continuous-discrete control system with incomplete information. *Vestn. Ross. Un-tov. Matematika*, 2023, vol. 28, no. 143, pp. 126–267. doi:10.20310/2686-9667-2023-28-143-256-267

Received April 11, 2024

Revised May 1, 2024

Accepted May 6, 2024

Funding Agency: The work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00517), <https://rscf.ru/project/22-21-00517/>.

Vladimir Petrovich Maksimov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Perm State University, Perm, 614068 Russia, e-mail: maksimov@econ.psu.ru.

Cite this article as: V. P. Maksimov. On the error of calculating the reachable values of objective functionals for control systems with continuous and discrete times. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 207–216.