ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 3 2024

УДК 517.2, 519.63

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЙ СДВИГ В ЗАДАЧЕ ОТСЛЕЖИВАНИЯ ВОЗМУЩЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩЕГО ДВУХФАЗНУЮ ЗАДАЧУ СТЕФАНА

В. И. Максимов, Ю. С. Осипов

Исследуется задача отслеживания неизвестного негладкого по времени распределенного возмущения параболического включения, описывающего двухфазную задачу Стефана. Задача сводится к проблеме позиционного управления некоторой, подобранной подходящим образом, вспомогательной системой. Управление в последней, конструируемое по результатам неточных измерений решений заданного включения, а также вспомогательной системы, отслеживает в среднем квадратичном неизвестное возмущение. Указываются два алгоритма решения задачи, устойчивые к помехам и погрешностям вычислений. Алгоритмы основаны на соответствующей модификации известного в теории гарантированного управления принципа экстремального сдвига Н.Н. Красовского.

Ключевые слова: отслеживание возмущений, параболическое включение.

V. I. Maksimov, Yu. S. Osipov. Extremal shift in the problem of tracking a disturbance in a parabolic inclusion describing the two-phase Stefan problem.

The problem of tracking an unknown nonsmooth in time distributed disturbance of a parabolic inclusion describing the two-phase Stefan problem is studied. The problem is reduced to the problem of open-loop control of some appropriately chosen auxiliary system. The control in this system tracks the unknown disturbance in the mean square, and its construction is based on the results of inaccurate measurements of solutions to the given inclusion and to the auxiliary system. Two algorithms for solving the problem that are stable to noise and calculation errors are presented. The algorithms are based on an appropriate modification of Krasovskii's principle of extremal shift known in the theory of guaranteed control.

Keywords: disturbance tracking, parabolic inclusion.

MSC: 34A34, 93C20

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-3-191-206

1. Введение

Управляемые системы с неопределенностями возникают во многих практически важных задачах. Наличие различного типа неопределенностей приводит к дефициту информации, что, в свою очередь, является толчком к развитию теории гарантирующего управления по принципу обратной связи. Цель такой теории — обеспечение заданного качества управляемого процесса при наличии того или иного рода неполноты информации. Одной из важных в теории гарантирующего управления является задача слежения, решение которой значительно усложняется в условиях дефицита информации. В классической задаче слежения необходимо сконструировать закон формирования управления заданной системой, обеспечивающий отслеживание решением этой системы решения другой, часто называемой эталонной, системы. Задача существенно усложняется, во-первых, в случае, когда речь идет о системе с распределенными параметрами и, во-вторых, когда наряду с решением эталонной системы необходимо отследить неизвестное возмущение.

В настоящее время имеется разнообразие подходов к исследованию задач управления в условиях неполноты информации. Так, в случае, когда возмущение трактуется как управление некоторой противоборствующей стороны, задача отслеживания решения может быть решена с помощью известного в теории позиционных дифференциальных игр метода стабильных дорожек [1; 2]. Среди других подходов к исследованию задач управления системами с возмущениями можно выделить, например, теорию робастного управления [3], метод управления, основанный на наблюдении за возмущениями (DOBC–метод) [4], метод активного подавления возмущений (ADRC–метод) [5] и т. д. Одним из интенсивно развивающихся в настоящее время является метод управления с интерактивным обучением (ILC–метод) [6; 7]. И это далеко не полный список.

В данной работе обсуждается задача отслеживания изменяющегося во времени негладкого распределенного возмущения, действующего на параболическое включение, используемого для формализации двухфазной задачи Стефана. Суть последней состоит в организации процесса отслеживания возмущения при условии, что в дискретные (достаточно частые) моменты неточно измеряется, с ошибкой, решение включения. Рассматриваемая задача близка к задачам, исследуемым в рамках теории некорректных задач [8–10]. Для ее решения мы применяем подход, предложенный в [11] и развитый в работах [12–16]. Согласно этому подходу алгоритм отслеживания возмущения представляет по своей сути алгоритм управления по принципу обратной связи некоторой вспомогательной динамической системой, часто называемой моделью; управление в которой строится на базе текущих измерений решений как системы, подверженной влиянию возмущения, так и модели. При этом построенное управление в модели (при его реализация во времени) приближает неизвестное возмущение. В данной статье, продолжающей отмеченные выше исследования, приводятся два алгоритма решения указанной выше задачи для распределенной системы, используемой при формализации двухфазной задачи Стефана.

В работе приняты обозначения: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ, $n = 2, 3$, Δ — оператор Лапласа, отображение $\beta(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ переводит ограниченные множества в ограниченные и является максимально монотонным со следующими свойствами: $0 \in \beta(0)$,

$$(\beta(r) - \beta(s))(r - s) \geq \omega |r - s|^2 \quad \forall\, r, s \in \mathbb{R}, \quad \omega > 0, \tag{1.1}$$

символ $|\cdot|$ означает модуль числа, $H = L_2(\Omega), V = H_0^1(\Omega)$ и $V^* = H^{-1}(\Omega)$ — стандартные соболевские пространства, $W^{1,2}(T; H) = \{x(\cdot) \in L_2(T; H) \colon x_t(\cdot) \in L_2(T; H)\}$, $\nabla x(\eta)$ — градиент функции $x(\eta)$, $\nabla x(\eta) \nabla y(\eta) = \sum_{j=1}^n x_{\eta_j}(\eta) y_{\eta_j}(\eta)$, индекс t внизу означает производную функции по этому аргументу. Далее мы работаем со значениями функции β, которые могут быть либо точками, либо множествами. Из контекста будет ясно, с каким типом значений мы работаем в каждом конкретном случае.

Пусть задано семейство разбиений

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}$$

промежутка T на полуинтервалы $[\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$, $\tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta$, $\delta = \delta(h)$, $\tau_{h,0} = 0$, $\tau_{h,m_h} = \vartheta$.

2. Постановка задачи. Метод решения

На промежутке времени $T = [0, \vartheta], \vartheta \in (0, +\infty)$ рассматривается дифференциальное включение

$$\begin{aligned} &\beta(y(t,\eta))_t - \Delta y(t,\eta) \ni u(t,\eta), && (t,\eta) \in T \times \Omega, \\ &y(t,\sigma) = 0, && (t,\sigma) \in T \times \Gamma, \\ &y(0,\eta) = y_0(\eta), && \eta \in \Omega. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Включение (2.1) используется для формализации двухфазной задачи Стефана (см., например, [17–19]) в случае, когда

$$\beta(r) = \begin{cases} c_1 r, & r < 0, \\ [0, c_2], & r = 0, \\ c_3 r + c_2, & r > 0. \end{cases}$$

Следуя [18; 19], пару функций $\{y(\cdot), v(\cdot)\}$, $y(\cdot) = y(\cdot; v_0, u(\cdot))$, $v(\cdot) = v(\cdot; v_0, u(\cdot))$, удовлетворяющую соотношениям

$$
\begin{aligned}
&v_t(t,\eta) - \Delta y(t,\eta) = u(t,\eta), && (t,\eta) \in T \times \Omega,\\
&y(t,\sigma) = 0, && (t,\sigma) \in T \times \Gamma,\\
&v(t,\eta) \in \beta(y(t,\eta)), && (t,\eta) \in T \times \Omega,\\
&v(0,\eta) = v_0(\eta) \in \beta(y_0(\eta)), && \eta \in \Omega,
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

будем называть решением включения (2.1), если

$$
y(\cdot) \in W^{1,2}(T; H) \cap L_2(T; V), \quad v(\cdot) \in W^{1,2}(T; V^*) \cap L_\infty(T; H).
$$

Скалярные произведения в пространствах V и V^* определяются следующим образом:

$$
(x, y)_V = \int\limits_\Omega \{x(\eta)y(\eta) + \nabla x(\eta)\nabla y(\eta)\} d\eta \quad \forall x, y \in V,
$$

$$
(x, y)_{V^*} = -\langle \Delta^{-1} x, y\rangle_{V\times V^*} \quad \forall x, y \in V^*,
$$

где символ $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V\times V^*}$ означает двойственность пространств V и V^*. Здесь оператор Δ действует из пространства $H_0^1(\Omega)$ в сопряженное $H^{-1}(\Omega)$ (канонический изоморфизм $H_0^1(\Omega)$ на $H^{-1}(\Omega)$). Ниже, как это обычно принято, мы используем свойство троек Гельфанда:

$$
(v, u)_H = \langle v, u\rangle_{V\times V^*} \quad \forall\, u \in H \subset V^*, \quad v \in V \subset H.
$$

Таким образом, двойственность между V и V^* равносильна скалярному произведению в пространстве H.

Имеет место

Теорема 1 [18, с. 152]. *Если $\eta \to v_0(\eta) \in L_2(\Omega)$ и $y_0(\eta) = \beta^{-1}(v_0(\eta)) \in H_0^1(\Omega)$, то для любых $u(\cdot), v(\cdot) \in L_2(T; L_2(\Omega))$ существует единственное решение включения* (2.1).

Следует отметить, что при выполнении неравенства (1.1) функция β^{-1} однозначная и липшицевая. Поэтому, полагая, что $y_0(\eta)$ удовлетворяет условию теоремы 1, можно сделать вывод: каждой паре $u(\cdot), v(\cdot)$ из $L_2(T; H)$ отвечает единственное решение включения (2.1).

Задача слежения состоит в следующем. Имеется включение (2.1), на которое действует возмущение стесненное мгновенными ограничениями

$$
u(\cdot) \in P(\cdot) = \{u(\cdot) \in L_2(T; H) : u(t) \in P \ \text{ при п.в. } \ t \in T\}.
$$

Здесь $P \subset H$ — выпуклое, ограниченное и замкнутое множество. Промежуток T разбит на полуинтервалы $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \in [0 : m-1]$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$, $\tau_0 = 0$, $\tau_m = \vartheta$. В узловых точках этих полуинтервалов τ_i измеряются (с ошибкой) состояния $v(\tau_i)$, т. е. вычисляются функции $\xi_i^h \in V^*$:

$$
|v(\tau_i) - \xi_i^h|_{V^*} \le h. \tag{2.3}
$$

Параметр $h \in (0,1)$ задает уровень погрешности вычисления. В начальный момент полагаем $\xi_0^h = v_0$. Требуется организовать процесс отслеживания возмущения $u(\cdot)$, используя в качестве входной информации результаты неточного измерения $v(\tau_i)$.

Для решения задачи введем вспомогательную систему (модель), описываемую следующими соотношениями:

$$
\begin{aligned}
&w_t^h(t,\eta) - \Delta z^h(t,\eta) = u^h(t,\eta), && (t,\eta) \in T \times \Omega,\\
&z^h(t,\sigma) = 0, && (t,\sigma) \in T \times \Gamma,\\
&w^h(t,\eta) \in \beta(z^h(t,\eta)), && (t,\eta) \in T \times \Omega,\\
&w^h(0,\eta) = v_0(\eta) \in \beta(y_0(\eta)), && \eta \in \Omega.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Таким образом, по своей структуре модель — это копия (2.1), но имеется одно отличие. В модели функция $u^h(\cdot)$ является управлением, которое необходимо формировать по принципу обратной связи, с тем чтобы при $h \to 0$ имела место сходимость $u^h(\cdot) \to u(\cdot)$ в $L_2(T; H)$.

Управление $u^h(\cdot)$ в модели будем формировать по правилу

$$u^h(t) = u_i^h(\tau_i, \xi_i^h, w^h(\tau_{h,i})) \quad \text{при} \quad t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1}), \quad i \in [0 : m_h - 1]. \tag{2.5}$$

3. Первый алгоритм решения задачи

Приведем алгоритм решения рассматриваемой задачи. Фиксируем некоторую функцию $\alpha = \alpha(h) : (0,1) \to (0,1)$, $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$. Элементы u_i^h зададим следующим образом:

$$u_i^h = \arg\min\{(w^h(\tau_i) - \xi_i^h, u)_{V^*} + \alpha |u|_H^2 : u \in P\}, \tag{3.1}$$

где $\alpha = \alpha(h)$.

Работа алгоритма разбивается на $m_h - 1$ однотипных шагов. Прежде всего фиксируем погрешность h, число $\alpha = \alpha(h)$ и разбиение $\Delta = \Delta_h = \{\tau_i\}_{i=0}^m$ ($\tau_i = \tau_{h,i}$, $m = m_h$). Во время i-го шага, который выполняется на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$, сначала находим приближенное значение фазового состояния $v(\tau_i)$, т. е. определяем $\xi_i^h \in V^*$, удовлетворяющий (2.3). После этого, используя величины $w^h(\tau_i)$ и ξ_i^h, согласно (2.5), (3.1) вычисляем управление u^h в модели (2.4). Затем наряду с решением $\{w^h(t), z^h(t)\}$ модели на отрезке времени $t \in [0, \tau_i]$ определяем решение $\{w^h(t), z^h(t)\}$ на следующем полуинтервале $t \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$, т. е. осуществляем корректировку памяти. Процедура формирования $u^h(\cdot)$ заканчивается в момент ϑ.

Ниже нам понадобится следующая теорема.

Теорема 2 ([19, с. 125], предложение 1.3). *При выполнении условий теоремы* 1 *имеют место сходимости*

$$y(\cdot; v_0, u_j(\cdot)) \to y(\cdot; v_0, u(\cdot)) \quad \text{в} \quad C(T; H),$$

$$v(\cdot; v_0, u_j(\cdot)) \to v(\cdot; v_0, u(\cdot)) \quad \text{в} \quad C(T; V^*),$$

если $u_j(\cdot) \to u(\cdot)$ слабо в $L_2(T; H)$ при $j \to \infty$. Для любой функции $u(\cdot) \in L_2(T; H)$ верны оценки

$$|y_t(\cdot; v_0, u(\cdot))|_{L_2(T;H)} + |y(\cdot; v_0, u(\cdot))|_{L_\infty(T;V)} \le b_1(1 + |u(\cdot)|_{L_2(T;H)}),$$

$$|v_t(\cdot; v_0, u(\cdot))|_{L_2(T;V^*)} + |v(\cdot; v_0, u(\cdot))|_{L_\infty(T;H)} \le b_2(1 + |u(\cdot)|_{L_2(T;H)}),$$

где $b_j = b_j(|y_0|_V, |v_0|_H)$, $j = 1, 2$.

Заметим, что встречающиеся в настоящей работе постоянные b_j, d_j, c_j, C_j зависят от структуры системы (2.1) и не зависят от h, α, ε, δ, $u(\cdot)$.

Имеет место

Теорема 3. *Справедливы неравенства*

$$\varepsilon_*(t) + \omega \int_0^t |z^h(\tau) - y(\tau)|_H^2 d\tau \le d_1(h + \delta + \alpha) \quad \text{при п.в.} \quad t \in T, \tag{3.2}$$

$$\int_0^\vartheta |u^h(t)|_H^2 dt \le \int_0^\vartheta |u(t)|_H^2 dt + d_2 \alpha^{-1}(h + \delta), \tag{3.3}$$

где $\varepsilon_*(t) = 1/2 |w^h(t) - v(t)|_{V^*}^2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычитая (2.2) из (2.4) и умножив (скалярно в V^*) полученное выражение на разность $w^h(t) - v(t)$, получим

$$(w_t^h(t) - v_t(t), w^h(t) - v(t))_{V^*} + I_0(t) = I_1(t), \tag{3.4}$$

где $I_0(t) = (\Delta(z^h(t) - y(t)), w^h(t) - v(t))_{V^*}$, $I_1(t) = (w^h(t) - v(t), u^h(t) - u(t))_{V^*}$. Учитывая вид скалярного произведения в пространстве V^*, заключаем, что верно равенство

$$I_0(t) = (z^h(t) - y(t), w^h(t) - v(t))_H.$$

Также, имея ввиду (1.1), устанавливаем неравенство

$$\omega |z^h(t) - y(t)|_H^2 \le I_0(t). \tag{3.5}$$

Из (3.4), в соответствии с (3.5), выводим оценку

$$\begin{aligned} \varepsilon_*(t) - \varepsilon_*(\tau_i) + \omega \int_{\tau_i}^{t} |y(\tau) - z^h(\tau)|_H^2 d\tau + \alpha \int_{\tau_i}^{t} \{|u^h(\tau)|_H^2 - |u(\tau)|_H^2\} d\tau \\ \le J_i(t) + \alpha \int_{\tau_i}^{t} \{|u^h(\tau)|_H^2 - |u(\tau)|_H^2\} d\tau + \phi_i^h(t), \end{aligned} \tag{3.6}$$

где $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i \in [0 : m-1]$,

$$J_i(t) = \int_{\tau_i}^{t} (w^h(\tau_i) - v(\tau_i), u^h(\tau) - u(\tau))_{V^*} d\tau, \quad \phi_i^h(t) = c_1(t - \tau_i) \int_{\tau_i}^{t} \{|w_\tau^h(\tau)|_{V^*} + |v_\tau(\tau)|_{V^*}\} d\tau.$$

В силу (2.3) при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$

$$J_i(t) \le \int_{\tau_i}^{t} (w^h(\tau_i) - \xi_i^h, u^h(\tau) - u(\tau))_{V^*} d\tau + c_2(t - \tau_i) h. \tag{3.7}$$

В свою очередь, согласно теореме 2

$$\sum_{i=0}^{m_h - 1} \phi_i^h(\tau_{i+1}) \le c_3 \delta. \tag{3.8}$$

В этом случае из (3.6), учитывая (3.7), (3.8), а также правило выбора управления $u^h(\cdot)$ (см. (2.5) и (3.1)), получаем ($i \in [0 : m]$)

$$\varepsilon_*(\tau_i) + \omega \int_0^{\tau_i} |y(t) - z^h(t)|_H^2 dt + \alpha \int_0^{\tau_i} \{|u^h(t)|_H^2 - |u(t)|_H^2\} dt \le c_4(\delta + h).$$

Отсюда следуют оценки (3.2), (3.3).

Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть* $\alpha(h) \to 0, (h + \delta(h))\alpha^{-1}(h) \to 0$ *при* $h \to 0$. *Тогда имеет место сходимость*

$$u^h(\cdot) \to u(\cdot) \ \text{в}\ L_2 = L_2(T; H) \quad \text{при} \ \ h \to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы мы опустим. Оно аналогично доказательству приведенной ниже теоремы 8. $\square$

Установим оценку скорости сходимости алгоритма. В дальнейшем нам понадобится

Лемма 1 [13, с. 29]. *Пусть заданы две функции: $t \to a(t) \in L_2(T; W^*)$ и $t \to b(t) \in W$, $t \in T$, причем $b(\cdot)$ является функцией с ограниченной вариацией. Если верны неравенства*

$$\Big|\int_0^t a(\tau)d\tau\Big|_{W^*} \le \varepsilon, \quad |b(t)|_W \le d, \quad t \in T,$$

то справедлива оценка

$$\int_0^\vartheta \langle b(t), a(t)\rangle_{W\times W^*}\, d\tau \le \varepsilon(\mathrm{var}_T b(t) + d).$$

Здесь W — банахово пространство с нормой $|\cdot|_W$; символ $\mathrm{var}_T b(t)$ означает полную вариацию функции $b(t)$ на промежутке T, а символ $\langle\cdot,\cdot\rangle_{W\times W^*}$ — двойственность между W^* и W.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4 и функция $t \to u(t) \in V$ при $t \in T$ является функцией с ограниченной вариацией. Тогда справедлива следующая оценка скорости сходимости алгоритма:*

$$\int_0^\vartheta |u(t) - u^h(t)|^2_{V^*}\, dt \le C_1\big\{(\delta + \alpha + h)^{1/2} + (h + \delta)\alpha^{-1}\big\}. \tag{3.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что каково бы ни было $v \in V$, справедливо равенство

$$(\Delta(y(t) - z^h(t)), v)_{V^*} = (y(t) - z(t), v)_H \quad (t \in T).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^t (u(\tau) - u^h(\tau))\, d\tau\Big|_{V^*} &= \sup_{v\in V, |v|_V\le 1}\Big\langle v, \int_0^t \{v_\tau(\tau) - w^h_\tau(\tau) - \Delta(y(\tau) - z^h(\tau))\}\, d\tau\Big\rangle_{V\times V^*} \\ &\le |v(t) - w^h(t)|_{V^*} + \sup_{v\in V, |v|_V\le 1}\bigg(\int_0^t (y(\tau) - z^h(\tau))d\tau, v\bigg)_H.\end{aligned} \tag{3.10}$$

В силу непрерывности вложения пространства V в пространство H найдется такое число $d_* > 0$, что при всех $x \in V$

$$|x|_H \le d_*|x|_V.$$

Значит, $d_*^{-1}|x|_H \le |x|_V$; в таком случае

$$\begin{aligned}\sup_{v\in V, |v|_V\le 1}\bigg(\int_0^t (y(\tau) - z^h(\tau))d\tau, v\bigg)_H &\le \sup_{v\in H, |v|_H\le d_*}\bigg(\int_0^t (y(\tau) - z^h(\tau))d\tau, v\bigg)_H \\ &= d_*\Big|\int_0^t (y(\tau) - z^h(\tau))d\tau\Big|_H.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Из (3.10), учитывая (3.11), получаем

$$\Big|\int_0^t (u(\tau) - u^h(\tau))d\tau\Big|_{V^*} \le |v(t) - w^h(t)|_{V^*} + d_*\int_0^t |y(\tau) - z^h(\tau)|_H d\tau. \tag{3.12}$$

В свою очередь, из (3.12), (3.2) выводим

$$\Big|\int\limits_0^t (u(\tau)-u^h(\tau))d\tau\Big|_{V^*} \le C_2(\delta+h+\alpha)^{1/2}, \quad t\in T.$$

Воспользовавшись неравенством (3.3), имеем

$$\begin{aligned} |u(\cdot)-u^h(\cdot)|^2_{L_2(T;H)} &\le 2|u(\cdot)|^2_{L_2(T;H)} - 2\int\limits_0^\vartheta (u(\tau),u^h(\tau))_H\,d\tau + d_2(h+\delta)\alpha^{-1} \\ &= 2\int\limits_0^\vartheta \langle u(\tau),u(\tau))-u^h(\tau)\rangle_{V\times V^*}\,d\tau + d_2(h+\delta)\alpha^{-1}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

В силу леммы 1 из (3.13) получаем (3.9).

Теорема доказана.

4. Второй алгоритм решения задачи

Прежде чем перейти к описанию второго алгоритма решения рассматриваемой задачи, приведем некоторые вспомогательные построения. Символом $\beta_\varepsilon:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ обозначим аппроксимацию Иосиды отображения β, т. е.

$$\beta_\varepsilon(r)=\frac{r-(1+\varepsilon\beta)^{-1}r}{\varepsilon}\in\beta((1+\varepsilon\beta)^{-1}r)\ \ \forall r\in\mathbb{R}.$$

По поводу свойств такой аппроксимации монотонных отображений см., например, работы [18–20]. Следуя [18], введем регуляризацию β следующего вида:

$$\beta^\varepsilon(r)=\int\limits_R \beta_\varepsilon(r-\varepsilon^2\sigma)\rho(\sigma)\,d\sigma, \quad r\in\mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Здесь $\rho:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — множитель Фридрихса, т.е. функция со свойствами

$$\rho(\cdot)\in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \rho(r)\ge 0, \quad \rho(-r)=\rho(r),$$

$$\rho(r)=0 \ \text{ для } \ |\rho|\ge 1, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho(r)\,dr=1,$$

$$\beta_\varepsilon(z)=dj_\varepsilon(z)/dz, \quad j_\varepsilon(z)=\inf\{|z-w|^2/2\varepsilon+j(w):w\in\mathbb{R}\}$$

($j_\varepsilon(z)$ — аппроксимация Иосиды функции $j(z)$).

Отметим некоторые свойства функции β^ε, которые нетрудно проверить. Эта функция а) липшицева с постоянной Липшица ε^{-1}, б) сильно монотонна и радиально непрерывна в) существует обратная функция, которая также липшицева и сильно монотонна. Оператор $B^\varepsilon:H\to H$ вида $B^\varepsilon(x)(\eta)=\beta^\varepsilon(x(\eta)),\eta\in\Omega$, является потенциальным.

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} &\beta^\varepsilon(y^\varepsilon(t,\eta))_t-\Delta y^\varepsilon(t,\eta)=u(t,\eta), && (t,\eta)\in T\times\Omega, \\ &y^\varepsilon(t,\sigma)=0, && (t,\sigma)\in T\times\Gamma, \\ &\beta^\varepsilon(y^\varepsilon(0,\eta))=v_0(\eta), && \eta\in\Omega. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Имеет место

Теорема 6 ([19, с. 129], лемма 2.1). *Для любых $u(\cdot) \in L_2(T;H)$, $v_0(\eta) \in L_2(\Omega)$ существует единственное решение*

$$t \to y^\varepsilon(t; v_0, u(\cdot)) \in W^{1,2}(T;H) \cap L_\infty(T;V),$$

$$t \to v^\varepsilon(t; v_0, u(\cdot)) = \beta^\varepsilon(y^\varepsilon(t; v_0, u(\cdot))) \in W^{1,2}(T;V^*) \cap L_\infty(T;H)$$

уравнения (4.2). *Кроме того,*

$$y^{\varepsilon_j}(\cdot; v_0, u_j(\cdot)) \to y(\cdot; v_0, u(\cdot)) \quad \text{сильно в} \quad C(T;H),$$

$$y_t^{\varepsilon_j}(\cdot; v_0, u_j(\cdot)) \to y_t(\cdot; v_0, u(\cdot)) \quad \text{слабо в} \quad L_2(T;H),$$

$$v^{\varepsilon_j}(\cdot; v_0, u_j(\cdot)) \to v(\cdot; v_0, u(\cdot)) \quad \text{сильно в} \quad C(T;V^*),$$

$$v_t^{\varepsilon_j}(\cdot; v_0, u_j(\cdot)) \to v_t(\cdot; v_0, u(\cdot)) \quad \text{слабо в} \quad L_2(T;V^*),$$

если $\varepsilon_j \to 0$, $u_j(\cdot) \to u(\cdot)$ слабо в $L_2(T;H)$ при $j \to \infty$.

Лемма 2. *Пусть $\omega > 1$, тогда можно указать такое положительное число $C = C(v_0, P(\cdot))$, что равномерно по всем $\varepsilon \in (0,1)$ и $u(\cdot) \in P(\cdot)$ верны неравенства*

$$|\beta^\varepsilon(y^\varepsilon(t; v_0, u(\cdot))) - v(t; v_0, u(\cdot))|_{V^*} \le C\varepsilon^{1/2} \quad \text{при} \quad t \in T,$$

$$\int_0^\vartheta |y^\varepsilon(t; v_0, u(\cdot)) - y(t; v_0, u(\cdot))|_H^2 \, dt \le C\varepsilon.$$

Здесь $\{v(\cdot : v_0, u(\cdot)), y(\cdot; v_0, u(\cdot))\}$ — решение системы (2.2).

Доказательство. Фиксируем два числа $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$. Наряду с уравнением (4.2) рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} &\beta^\mu(y(t,\eta))_t - \Delta y(t,\eta) = u(t,\eta), && (t,\eta) \in T \times \Omega, \\ &y(t,\sigma) = 0, && (t,\sigma) \in T \times \Gamma, \\ &\beta^\mu(y(0,\eta)) = v_0(\eta), && \eta \in \Omega. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Уравнение (4.3) получается из (4.2), если заменить число ε числом μ. Символами $y^\varepsilon(t)$ и $y^\mu(t)$ обозначим решения уравнений (4.2) и (4.3) соответственно. Вычтем (4.3) из (4.2) и полученное выражение умножим скалярно (в V^*) на разность $\beta^\varepsilon(y^\varepsilon(t)) - \beta^\mu(y^\mu(t))$. Будем иметь

$$(\beta^\varepsilon(y^\varepsilon(t)) - \beta^\mu(y^\mu(t)), \beta^\varepsilon(y^\varepsilon(t))_t - \beta^\mu(y^\mu(t))_t) + I_t = 0, \tag{4.4}$$

где $I_t = (\Delta(y^\varepsilon(t,\eta) - y^\mu(t,\eta)), \beta^\varepsilon(y^\varepsilon(t,\eta)) - \beta^\mu(y^\mu(t,\eta)))_{V^*}$. Заметим, что справедливо равенство

$$I_t = (y^\varepsilon(t) - y^\mu(t), \beta^\varepsilon(y^\varepsilon(t)) - \beta^\mu(y^\mu(t)))_H = |y^\varepsilon(t) - y^\mu(t)|_H^2 + I_{\varepsilon,\mu}(t), \tag{4.5}$$

где

$$I_{\varepsilon,\mu}(t) = (y^\varepsilon(t) - y^\mu(t), \gamma^\varepsilon(y^\varepsilon(t)) - \gamma^\mu(y^\mu(t)))_H,$$

$$\gamma^\varepsilon(y^\varepsilon(t)) = \beta^\varepsilon(y^\varepsilon(t)) - y^\varepsilon(t), \ \gamma^\mu(y^\mu(t)) = \beta^\mu(y^\mu(t)) - y^\mu(t).$$

Рассмотрим величину $I_{\varepsilon,\mu}(t)$. Пусть

$$\tilde{\beta}^\varepsilon(r) = \beta^\varepsilon(r) - \int_{-\infty}^{\infty} \beta_\varepsilon(-\varepsilon^2\tau)\rho(\tau)d\tau - \beta_\varepsilon(0).$$

Справедливо неравенство ([18, с. 75], формула (3.47))

$$|\tilde{\beta}^{\varepsilon}(r) - \beta_{\varepsilon}(r)| \leq 2\varepsilon \quad \forall\, r \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что функция $\beta_{\varepsilon}(r)$ липшицива с константой Липшица ε^{-1}. Поэтому имеет место соотношение

$$\left|\beta_{\varepsilon}(0) - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \beta_{\varepsilon}(-\varepsilon^2\tau)\rho(\tau)d\tau\right| = \left|\int\limits_{-1}^{1} [\beta_{\varepsilon}(0) - \beta_{\varepsilon}(-\varepsilon^2\tau)]\rho(\tau)d\tau\right| \leq \varepsilon.$$

Следовательно, $|\beta_{\varepsilon}(r) - \beta^{\varepsilon}(r)| \leq 2\varepsilon \;\; \forall\, r \in \mathbb{R}$. В таком случае

$$|\gamma^{\varepsilon}(r) - \gamma_{\varepsilon}(r)| \leq 2\varepsilon \quad \forall r \in \mathbb{R}, \tag{4.6}$$

где $\gamma(r) = \beta(r) - r$. Обозначим $J_{\varepsilon}^{\gamma} r = (1 + \varepsilon\gamma)^{-1} r$. В силу равенства $r - \varepsilon\gamma_{\varepsilon}(r) = J_{\varepsilon}^{\gamma} r$ при п.в. $t \in T$ справедливо соотношение $y^{\varepsilon}(t) - y^{\mu}(t) = \varepsilon\gamma_{\varepsilon}(y^{\varepsilon}(t)) - \mu\gamma_{\mu}(y^{\mu}(t)) + J_{\varepsilon}^{\gamma} y^{\varepsilon}(t) - J_{\mu}^{\gamma} y^{\mu}(t)$. Поэтому

$$(\gamma_{\varepsilon}(y^{\varepsilon}(t)) - \gamma_{\mu}(y^{\mu}(t)), y^{\varepsilon}(t) - y^{\mu}(t))_H$$
$$= (\gamma_{\varepsilon}(y^{\varepsilon}(t)) - \gamma_{\mu}(y^{\mu}(t)), \varepsilon\gamma_{\varepsilon}(y^{\varepsilon}(t)) - \mu\gamma_{\mu}(y^{\mu}(t)))_H + \psi(t),$$

где $\psi(t) = (\gamma_{\varepsilon}(y^{\varepsilon}(t)) - \gamma_{\mu}(y^{\mu}(t)), J_{\varepsilon}^{\gamma} y^{\varepsilon}(t) - J_{\mu}^{\gamma} y^{\mu}(t))_H$. Ввиду неравенства $\omega > 1$ и (1.1) имеем

$$(\gamma(r) - \gamma(s))(r - s) \geq (\omega - 1)|r - s|^2 \geq 0.$$

В свою очередь, согласно включению $\gamma_{\varepsilon}(r) \in \gamma(J_{\varepsilon}^{\gamma} r)$

$$\psi(t) \geq 0 \;\; \text{при п.в.} \;\; t \in T.$$

Отсюда при п.в. $t \in T$ имеет место неравенство

$$(\gamma_{\varepsilon}(y^{\varepsilon}(t)) - \gamma_{\mu}(y^{\mu}(t)), y^{\varepsilon}(t) - y^{\mu}(t))_H \geq (\gamma_{\varepsilon}(y^{\varepsilon}(t)) - \gamma_{\mu}(y^{\mu}(t)), \varepsilon\gamma_{\varepsilon}(y^{\varepsilon}(t)) - \mu\gamma_{\mu}(y^{\mu}(t)))_H. \tag{4.7}$$

Проверим равномерную ограниченность множества

$$Y(\cdot) = \{y^{\mu}(\cdot; v_0, u(\cdot))\colon \mu \in (0,1), u(\cdot) \in P(\cdot)\}$$

в метрике пространства $C(T; H)$. Предполагая противное заключаем, что найдутся последовательности чисел $\mu_j \to 0$, $K_j \to +\infty$ при $j \to \infty$ и управлений $u_j(\cdot) \in P(\cdot)$ со свойством

$$\sup_{t \in T} |y^{\mu_j}(t; v_0, u_j(\cdot))|_H \geq K_j. \tag{4.8}$$

Не нарушая общности, считаем

$$u_j(\cdot) \to u_*(\cdot) \;\; \text{слабо в} \;\;\; L_2(T; H) \;\; \text{при} \;\; j \to \infty.$$

Тогда ввиду выпуклости и замкнутости множества $P(\cdot)$: $u_*(\cdot) \in P(\cdot)$. Кроме того, в силу теоремы 6

$$y^{\mu_j}(\cdot; v_0, u_j(\cdot)) \to y(\cdot; v_0, u_*(\cdot)) \;\; \text{в} \;\; C(T; H) \;\; \text{при} \;\; j \to \infty. \tag{4.9}$$

Значит, найдется $K_* \in (0, +\infty)$ такое, что $\sup_{t \in T} |y(t; v_0, u_*(\cdot))|_H \leq K_*$. Последнее неравенство ввиду (4.9) противоречит (4.8). Ограниченность множества $Y(\cdot)$ установлена. Как известно, аппроксимация Иосиды обладает свойством $|\beta_{\varepsilon}(r)| \leq |\beta^0(r)| \;\forall\, r \in \mathbb{R}$, где $\beta^0(r) = \inf\{|y|\colon y \in \beta(r)\}$. В таком случае из (4.6), (4.7) выводим

$$I_{\varepsilon,\mu}(t) \geq -c(\mu + \varepsilon), \tag{4.10}$$

где постоянная c не зависит от $u(\cdot), h, \varepsilon$ и μ. Таким образом, проинтегрировав (4.4) и воспользовавшись (4.5)–(4.10), будем иметь

$$|\beta^\varepsilon(y^\varepsilon(t)) - \beta^\mu(y^\mu(t))|^2_{V^*} + \int_0^t |y^\varepsilon(\tau) - y^\mu(\tau)|^2_H \, d\tau \le c(\mu + \varepsilon). \tag{4.11}$$

Осталось перейти в неравенстве (4.11) к пределу (при $\mu \to 0$) и воспользоваться теоремой 3.

Лемма доказана.

Численные методы решения параболических уравнений разработаны значительно лучше методов решения параболических включений, тем более не разрешенных относительно производной. Поэтому естественно попытаться использовать в качестве модели не саму копию включения (2.1), а ее некоторую аппроксимацию. Ниже мы так и поступим, взяв в качестве модели аппроксимацию, предложенную в работах [18;19]. Заметим, что в монографии [20] приведен численный способ решения включения (2.1), основанный на методе конечных элементов.

Фиксируем функцию $\varepsilon = \varepsilon(h) \in (0,1)$, $\varepsilon(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Перейдем к описанию второго алгоритма решения рассматриваемой задачи. Этот алгоритм аналогичен описанному выше, т. е. последовательность действий при его реализации та же самая, что и в первом алгоритме. Но имеются два отличия. Во-первых, в качестве модели возьмем уравнение

$$\begin{aligned}
&\beta^\varepsilon(y^{\varepsilon,h}(t,\eta))_t - \Delta y^{\varepsilon,h}(t,\eta) = u^h(t,\eta), && (t,\eta) \in T \times \Omega,\\
&y^{\varepsilon,h}(t,\sigma) = 0, && (t,\sigma) \in T \times \Gamma,\\
&\beta^\varepsilon(y^{\varepsilon,h}(0,\eta)) = v_0(\eta), && \eta \in \Omega,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

где $\varepsilon = \varepsilon(h)$. Во-вторых, отображение $\mathcal{U}_h$ зададим следующим образом:

$$\mathcal{U}_h(p_i^h) = \arg\min\{(\beta^\varepsilon(y^{\varepsilon,h}(\tau_i)) - \xi_i^h, u)_{V^*} + \alpha|u|^2_H : u \in P\}. \tag{4.13}$$

Всюду ниже полагаем $\omega > 1$.

Теорема 7. *Справедливы неравенства*

$$\tilde{\varepsilon}(t) + \omega \int_0^t |J_\varepsilon y^{\varepsilon,h}(\tau) - J_\varepsilon y^\varepsilon(\tau)|^2_H d\tau \le d_3(h + \delta + \alpha + \varepsilon^{1/2}), \quad t \in T, \tag{4.14}$$

$$\int_0^\vartheta |u^h(t)|^2_H dt \le \int_0^\vartheta |u(t)|^2_H dt + d_4\alpha^{-1}(h + \delta + \varepsilon^{1/2}), \tag{4.15}$$

где

$$\tilde{\varepsilon}(t) = 1/2|\beta^\varepsilon(y^{\varepsilon,h}(t)) - \beta^\varepsilon(y^\varepsilon(t))|^2_{V^*}, \tag{4.16}$$

$y^\varepsilon(\cdot)$ *— решение уравнения* (4.2), $y^{\varepsilon,h}(\cdot)$ *— решение уравнения* (4.12), $J_\varepsilon y^\varepsilon(\tau) = (1+\varepsilon\beta)^{-1}y^\varepsilon(\tau)$, $J_\varepsilon y^{\varepsilon,h}(\tau) + (1+\varepsilon\beta)^{-1}y^{\varepsilon,h}(\tau)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычтем (4.2) из (4.12) и полученное выражение умножим (скалярно в V^*) на разность $\beta^\varepsilon(y^{\varepsilon,h}(t)) - \beta^\varepsilon(y^\varepsilon(t))$. Будем иметь

$$\big(\beta^\varepsilon(y^{\varepsilon,h}(t))_t - \beta^\varepsilon(y^\varepsilon(t))_t, \beta^\varepsilon(y^{\varepsilon,h}(t)) - \beta^\varepsilon(y^\varepsilon(t))\big)_{V^*} + J_t = J_1(t), \tag{4.17}$$

где

$$J_t = \big(\Delta(y^{\varepsilon,h}(t) - y^\varepsilon(t)), \beta^\varepsilon(y^{\varepsilon,h}(t)) - \beta^\varepsilon(y^\varepsilon(t))\big)_{V^*},$$

$$J_1(t) = \big(u^h(t) - u(t), \beta^\varepsilon(y^{\varepsilon,h}(t)) - \beta^\varepsilon(y^\varepsilon(t))\big)_{V^*}.$$

Заметим, что справедливо равенство

$$J_t = \big(y^{\varepsilon,h}(t) - y^\varepsilon(t), \beta^\varepsilon(y^{\varepsilon,h}(t)) - \beta^\varepsilon(y^\varepsilon(t))\big)_H.$$

Далее, имеем $J_t \geq \big(y^{\varepsilon,h}(t) - y^\varepsilon(t), \beta_\varepsilon(y^{\varepsilon,h}(t)) - \beta_\varepsilon(y^\varepsilon(t))\big)_H - 4\varepsilon|y^{\varepsilon,h}(t) - y^\varepsilon(t)|_H$. Для всякого максимально монотонного оператора $\beta^{(1)}(\cdot) : H \to H$ справедливо равенство

$$\big(x - y, \beta_\varepsilon^{(1)}(x) - \beta_\varepsilon^{(1)}(y)\big)_H = q_1 + q_2 \quad \forall x, y, \in H, \tag{4.18}$$

где $\beta_\varepsilon^{(1)}$ — аппроксимация Иосиды $\beta^{(1)}$,

$$J_\varepsilon^{(1)}x = (I + \varepsilon\beta^{(1)})^{-1}x, \quad q_1 = \big(J_\varepsilon^{(1)}x - J_\varepsilon^{(1)}y, \beta_\varepsilon^{(1)}(x) - \beta_\varepsilon^{(1)}(y)\big)_H,$$

$$q_2 = \big((x - J_\varepsilon^{(1)}x) - (y - J_\varepsilon^{(1)}y), \beta_\varepsilon^{(1)}(x) - \beta_\varepsilon^{(1)}(y)\big)_H.$$

Если оператор $\beta^{(1)}(\cdot)$ обладает свойством

$$\big(\beta^{(1)}(x) - \beta^{(1)}(y), x - y\big)_H \geq \omega|x - y|_H^2 \quad (\omega > 0) \ \ \forall x, y \in H,$$

то в силу включения $\beta_\varepsilon^{(1)}(x) \in \beta^{(1)}(J_\varepsilon^{(1)}x)$ справедливо неравенство $q_1 \geq \omega|J_\varepsilon^{(1)}x - J_\varepsilon^{(1)}y|_H^2$. В свою очередь, ввиду того, что $\beta_\varepsilon^{(1)}(x) = (x - J_\varepsilon^{(1)}(x))\varepsilon^{-1}$, $q_2 \geq 0$. Таким образом, учитывая последние два неравенства, а также равенство (4.18) и неравенство (1.1), получаем

$$J_t \geq \omega|J_\varepsilon y^{\varepsilon,h}(t) - J_\varepsilon y^\varepsilon(t)|_H^2 - 4\varepsilon|y^{\varepsilon,h}(t) - y^\varepsilon(t)|_H \ \text{ при п.в. } \ t \in T. \tag{4.19}$$

Далее, имеем при п.в. $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$

$$|\beta^\varepsilon(y^{\varepsilon,h}(t)) - \beta^\varepsilon(y^{\varepsilon,h}(\tau_i))|_{V^*} \leq \int_{\tau_i}^{t} |\beta^\varepsilon(y^{\varepsilon,h}(\tau))_\tau|_{V^*} d\tau. \tag{4.20}$$

В свою очередь, в силу (4.20) и леммы 2 при п.в. $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$

$$J_1(t) \leq (u^h(t) - u(t), \beta^\varepsilon(y^{\varepsilon,h}(t)) - v(t))_{V^*} + c_1\varepsilon^{1/2} \tag{4.21}$$

$$\leq (u^h(t) - u(t), \beta^\varepsilon(y^{\varepsilon,h}(\tau_i)) - v(\tau_i))_{V^*} + c_2\int_{\tau_i}^{t} \{|\beta^\varepsilon(y^{\varepsilon,h}(\tau))_\tau|_{V^*} + |v_\tau(\tau)|_{V^*}\} d\tau + c_1\varepsilon^{1/2}.$$

Заметим, что для любого $v \in V^*$ при п.в. $t \in T$ справедливо равенство

$$(\beta^\varepsilon(y^{\varepsilon,h}(t))_t, v)_{V^*} = (y^{\varepsilon,h}(t), v)_H + (u^h(t), v)_{V^*}.$$

Поэтому при п.в. $t \in T$

$$|\beta^\varepsilon(y^{\varepsilon,h}(t))_t|_{V^*} \leq c_3\{|y^{\varepsilon,h}(t)|_H + |u^h(t)|_H\}. \tag{4.22}$$

Учитывая (4.22), ограниченность (в $L_2(T; H)$) множества $P(\cdot)$, лемму 2 и теорему 2, заключаем, что справедливо неравенство

$$\int_0^\vartheta |\beta^\varepsilon(y^{\varepsilon,h}(t))_t|_{V^*}^2 dt \leq c_4 + c_5\int_0^\vartheta |y^{\varepsilon,h}(t)|_H^2 dt \leq c_6. \tag{4.23}$$

Из (4.17) согласно (4.16), (4.19), (4.21), (4.23) устанавливаем оценку

$$\begin{gathered}\tilde{\varepsilon}(t)-\tilde{\varepsilon}(\tau_i)+\omega\int\limits_{\tau_i}^{t}|J_\varepsilon y^{\varepsilon,h}(\tau)-J_\varepsilon y^{\varepsilon}(\tau)|_H^2d\tau+\alpha\int\limits_{\tau_i}^{t}\{|u^h(\tau)|_H^2-|u(\tau)|_H^2\}d\tau\\ \leq 4\varepsilon\int\limits_{\tau_i}^{t}|y^{\varepsilon,h}(\tau)-y^{\varepsilon}(\tau)|_Hd\tau\tilde{J}_i(t)+\alpha\int\limits_{\tau_i}^{t}\{|u^h(\tau)|_H^2-|u(\tau)|_H^2\}d\tau\\ +\tilde{\phi}_i^h(t)\ \text{ при п.в. }\ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\end{gathered}\tag{4.24}$$

где

$$\tilde{J}_i(t)=\int\limits_{\tau_i}^{t}(\beta^\varepsilon(y^{\varepsilon,h}(\tau_i))-\xi_i^h,u_i^h-u(\tau))_{V^*}d\tau,$$

$$\tilde{\phi}_i^h(t)=c_7(t-\tau_i)\int\limits_{\tau_i}^{t}\{|\beta^\varepsilon(y^{\varepsilon,h}(\tau))_\tau|_{V^*}+|v_\tau(\tau)|_{V^*}\}d\tau+c_8(t-\tau_i)(h+\varepsilon^{1/2}),\quad t\in[\tau_i,\tau_{i+1}].$$

В свою очередь, в силу той же теоремы, а также (4.23)

$$4\varepsilon\int\limits_0^{\vartheta}|y^{\varepsilon,h}(t)-y^\varepsilon(t)|_Hdt+\sum_{i=0}^{m_h-1}\tilde{\phi}_i^h(\tau_{i+1})\leq c_9(\delta+h+\varepsilon^{1/2}).\tag{4.25}$$

В данном случае, из (4.24), учитывая (4.25), а также правило выбора управления $u^h(\cdot)$ (см. (2.5) и (4.13)), выводим справедливое при всех $i\in[0:m]$ неравенство

$$\tilde{\varepsilon}(\tau_i)+\omega\int\limits_0^{\tau_i}|J_\varepsilon y^{\varepsilon,h}(t)-J_\varepsilon y^\varepsilon(t)|_H^2dt+\alpha\int\limits_0^{\tau_i}\{|u^h(t)|_H^2-|u(t)|_H^2\}dt\leq c_{10}(\delta+h+\varepsilon^{1/2}).\tag{4.26}$$

Из (4.26) следуют оценки (4.14), (4.15).

Теорема доказана.

Теорема 8. *Пусть* $\alpha(h)\to 0$, $\delta(h)\to 0$, $(h+\delta(h)+\varepsilon^{1/2}(h))\alpha^{-1}(h)\to 0$ *при* $h\to 0$. *Тогда имеет место сходимость*

$$u^h(\cdot)\to u(\cdot)\ \textit{в}\ L_2=L_2(T;H)\ \ \textit{при}\ \ h\to 0.$$

Доказательство. Покажем, что, какова бы ни была последовательность чисел $h_j\to 0+$ при $j\to\infty$, а также последовательность элементов $\xi_i^{h_j}$ со свойствами (2.3) (в (2.3) мы полагаем $h=h_j$), имеет место сходимость

$$u^{h_j}(\cdot)\to u(\cdot)\text{ в }L_2\ \text{ при }\ j\to\infty.$$

Здесь и ниже управления $u^{h_j}(\cdot)$ определяются согласно (2.5), (4.13), где полагается $h=h_j$. Предполагая противное, заключаем: найдется подпоследовательность последовательности $u^{h_j}(\cdot)$ (для простоты обозначаем ее тем же символом, т. е. $u^{h_j}(\cdot)$) такая, что

$$u^{h_j}(\cdot)\to u_0(\cdot)\ \text{ слабо в }\ L_2\ \text{ при }\ j\to\infty,\tag{4.27}$$

$$u_0(\cdot)\neq u(\cdot).\tag{4.28}$$

Пусть $q^j(t) = z^j(t) - \tilde{y}^{\varepsilon_j}(t)$, $p^j(t) = w^j(t) - \tilde{v}^{\varepsilon_j}(t)$, где $\tilde{v}^{\varepsilon_j}(t) = \beta^{\varepsilon_j}(\tilde{y}^{\varepsilon_j}(t))$, $w^j(t) = \beta^{\varepsilon(h_j)}(y^{\varepsilon(h_j),h_j}(t))$ и $z^j(t) = y^{\varepsilon(h_j),h_j}(t)$ — решение уравнения (4.12) при $h = h_j$, а $\tilde{y}^{\varepsilon_j}(\cdot)$ — решение уравнения

$$\begin{aligned}
&\beta^{\varepsilon_j}(y^{\varepsilon_j}(t,\eta))_t - \Delta y^{\varepsilon_j}(t,\eta) = u_0(t,\eta), && (t,\eta)\in T\times\Omega,\\
&y^{\varepsilon_j}(t,\sigma) = 0, && (t,\sigma)\in T\times\Gamma, \qquad (4.29)\\
&\beta^{\varepsilon}(y^{\varepsilon}(0,\eta)) = v_0(\eta), && \eta\in\Omega.
\end{aligned}$$

Пусть также $\{v^0(\cdot), y^0(\cdot)\}$ — решение системы

$$\begin{aligned}
&v^0_t(t,\eta) - \Delta y^0(t,\eta) = u_0(t,\eta), && (t,\eta)\in T\times\Omega,\\
&y^0(t,\sigma) = 0, && (t,\sigma)\in T\times\Gamma,\\
&v^0(t,\eta) \in \beta(y^0(t,\eta)), && (t,\eta)\in T\times\Omega,\\
&v^0(0,\eta) = v_0(\eta) \in \beta(y_0(\eta)), && \eta\in\Omega.
\end{aligned}$$

В силу теоремы 6

$$\tilde{v}^{\varepsilon_j}(\cdot) \to v^0(\cdot) \ \text{ в } \ C(T:V^*), \qquad (4.30)$$

$$\tilde{y}^{\varepsilon_j}(\cdot) \to y^0(\cdot) \ \text{ в } \ C(T;H) \ \text{ при } \ j\to\infty.$$

Вычтем (4.29) из (4.12) (в (4.12) мы полагаем $h = h_j$). После этого умножим (скалярно в V^*) полученную разность на $p^j(t)$. Будем иметь

$$d\tilde{\varepsilon}^j(t)/dt + \tilde{I}^j_{1t} \le \tilde{I}^j_{2t} \ \text{ при п.в. } \ t\in T, \qquad (4.31)$$

где

$$\tilde{\varepsilon}^j(t) = 1/2|p^j(t)|^2_{V^*}, \quad \tilde{I}^j_{1t} = \int\limits_0^t (q^j(\tau), p^j(\tau))_H d\tau, \quad \tilde{I}^j_{2t} = \int\limits_0^t (u^{h_j}(\tau) - u_0(\tau), w^j(\tau) - \tilde{v}^{\varepsilon_j}(\tau))_{V^*}\, d\tau.$$

Учитывая монотонность функции $\beta^{\varepsilon}(\cdot)$, заключаем, что верно неравенство

$$\tilde{I}^{h_j}_{1t} \ge 0 \ \text{ при п.в. } \ t\in T. \qquad (4.32)$$

Кроме того, $\tilde{I}^j_{2t} \le I^j_{3t} + I^j_{4t}$. Здесь

$$I^j_{3t} = \int\limits_0^t (w^j(\tau) - v^0(\tau), u^{h_j}(\tau) - u_0(\tau))_{V^*} d\tau, \quad I^j_{4t} = \int\limits_0^t (\tilde{v}^{\varepsilon_j}(\tau) - v^0(\tau), u^{h_j}(\tau) - u_0(\tau))_{V^*} d\tau.$$

Согласно (4.30)

$$\sup_{t\in T} I^j_{4t} \to 0 \ \text{ при } \ j\to\infty. \qquad (4.33)$$

Рассмотрим I^j_{3t}. Имеем

$$I^j_{3t} = \int\limits_0^t (w^j(\tau) - v(\tau), u^{h_j}(\tau) - u_0(\tau))_{V^*} d\tau + \int\limits_0^t (v(\tau) - y^0(\tau), u^{h_j}(\tau) - u_0(\tau))_{V^*} d\tau.$$

В силу теоремы 7 (см. (4.14), (4.16)), а также сходимости $\beta^{\varepsilon_j}(y^{\varepsilon_j}(t)) \to v(t)$ в $C(T;V^*)$ при $j\to\infty$ получаем

$$w^j(\cdot) \to v(\cdot) \ \text{ в } \ C(T;V^*) \ \text{ при } \ j\to\infty. \qquad (4.34)$$

Тогда

$$\sup_{t\in T}|I^j_{3t}| \to 0 \ \text{ при } \ j\to\infty. \tag{4.35}$$

Этот факт вытекает из слабой сходимости последовательности функций $u^{h_j}(\cdot)$ к $u_0(\cdot)$ (см. (4.27)). В таком случае из (4.31)–(4.35) следует

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\sup_{t\in T}\tilde{\varepsilon}^j(t)\to 0.$$

Отсюда, учитывая (4.34), (4.30), устанавливаем справедливость равенств

$$\sup_{t\in T}|v^0(t)-v(t)|_{V^*}=0.$$

Ввиду свойств графа β из этого равенства получаем $y^0(\cdot)=y(\cdot)$. Поэтому $u_0(\cdot)=u(\cdot)$. Последнее противоречит (4.27), (4.28). Следовательно,

$$u^{h_j}(\cdot)\to u(\cdot) \ \text{ слабо в } L_2 \text{ при } \ j\to\infty. \tag{4.36}$$

Ввиду известного свойства слабого предела из (4.36) вытекает неравенство

$$\underline{\lim_{j\to\infty}}\,|u^{h_j}(\cdot)|_{L_2}\ge|u(\cdot)|_{L_2}. \tag{4.37}$$

Кроме того, в силу (4.15) имеет место оценка $|u^{h_j}(\cdot)|^2_{L_2}\le|u(\cdot)|^2_{L_2}+d_2(h+\delta(h)+\varepsilon^{1/2}(h))\alpha^{-1}(h)$. В таком случае

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\,|u^{h_j}(\cdot)|_{L_2}\le|u(\cdot)|_{L_2}. \tag{4.38}$$

Значит (см. (4.37), (4.38)), $\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}\,|u^{h_j}(\cdot)|_{L_2}\le|u(\cdot)|_{L_2}\le\underline{\lim\limits_{j\to\infty}}\,|u^{h_j}(\cdot)|_{L_2}$. Отсюда следует сходимость

$$|u^{h_j}(\cdot)|_{L_2}\to|u(\cdot)|_{L_2} \ \text{ при } \ j\to\infty. \tag{4.39}$$

Учитывая (4.36) и (4.39), заключаем

$$u^{h_j}(\cdot)\to u(\cdot) \text{ в } L_2 \ \text{ при } \ j\to\infty.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
3. **Поляк Б.Т., Щербаков П.С.** Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.
4. **Chen W.H., Yang J., Guo L., Li H.** Disturbance-observer-basedcontrol and related methods: an overview // IEEE Trans. Ind. Electron. 2015. Vol. 63, no. 2. P. 1083–1095. doi: 10.1109/TIE.2015.2478397
5. **Yuan Y., Wang Z., Yu V., Guo L., Yang H.** Active disturbance rejection control for a pneumatic motion platform subject to actuator saturation: An extended state observer approach // Automatica. 2019. Vol. 108. P. 353–361. doi: 10.1016/j.automatica.2019.05.056
6. **Hätönen J., Owens D.H., Feng K.** Basis functions and parameter optimization in high-order iterative learning control // Automatica. 2006. Vol. 42, iss. 2. P. 287–294.
7. **Yu M., Chai S.** Adaptive iterative learning control for discrete-time nonlinear systems with multiply iteration-varying high-order internal models // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2021. Vol. 31, no. 1. P. 7390–7408. doi: 10.1002/rnc.5690
8. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 286 с.
9. **Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.** Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука, 1980. 286 с.

10. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 200 с. doi: 10.1515/9783110944822
11. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
12. **Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.** Основы метода динамической регуляризации. М.: МГУ, 1999. 237 с.
13. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Динамические обратные задачи для параболических систем // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, no. 5. С. 579–597. doi: 10.1007/BF02754222
14. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: УрО РАН, 2011. 292 с.
15. **Osipov Yu.S., Pandolfi L., Maksimov V.I.** Problems of dynamic reconstruction and robust boundary control: the case od Dirichlet boundary conditions // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2001. Vol. 9, no. 2. P. 149–162. doi: 10.1515/jiip.2001.9.2.149
16. **Osipov Yu.S., Maksimov V.I.** On dynamical input reconstruction in a distributed second order equation // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2021. Vol. 29, no. 5. P. 707–719. doi: 10.1515/jiip-2021-0004
17. **Brezis H.** Probl’emes unilat‘eraux // J. Math. Pures Appl. 1972. Vol. 51. P. 1–168.
18. **Barbu V.** Optimal control of variational inequalities. Pitman, 1984. 298 p.
19. **Tiba D.** Optimal control of nonsmooth distributed parameter systems. Berlin: Springer Verlag, 1991. doi: 10.1007/BFb0085564
20. **Neittaanmaki N., Tiba D.** Optimal control of nonlinear parabolic systems. NY: Marcel Dekker, 1994. 424 p.

Поступила 27.05.2024
После доработки 7.06.2024
Принята к публикации 10.06.2024

Максимов Вячеслав Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Осипов Юрий Сергеевич
академик РАН,
д-р физ.-мат. наук, профессор,
главный науч. сотрудник
Математический институт имени В. А. Стеклова;
зав. кафедрой
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
г. Москва
e-mail: osipov@pran.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* NY, Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text was published in Krasovskii N. N., Subbotin A. I., *Pozitsionnye differentsial’nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Krasovskiy N.N. *Upravleniye dinamicheskoy sistemoy. Zadacha o minimume garantirovannogo rezul’tata* [Dynamic system control. Minimum guaranteed result problem]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 520 p.
3. Polyak B.T., Shcherbakov P.S. *Robastnaya ustoychivost’ i upravleniye* [Robust stability and control]. Moscow, Nauka Publ., 2002, 303 p. ISBN: 5-02-002561-5 .
4. Chen W.H., Yang J., Guo L., Li H. Disturbance-observer-basedcontrol and related methods: an overview. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 2015, vol. 63, iss. 2, pp. 1083–1095. doi: 10.1109/TIE.2015.2478397

5. Yuan Y., Wang Z., Yu V., Guo L., Yang H. Active disturbance rejection control for a pneumatic motion platform subject to actuator saturation: An extended state observer approach. *Automatica*, 2019, vol. 107, pp. 353–361. doi: 10.1016/j.automatica.2019.05.056
6. Hätönen J., Owens D.H., Feng K. Basis functions and parameter optimization in high-order iterative learning control. *Automatica*, 2006, vol. 42, iss. 2, pp. 287–294. doi: 10.1016/j.automatica.2005.05.025
7. Yu M., Chai S. Adaptive iterative learning control for discrete-time nonlinear systems with multiply iteration-varying high-order internal models. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 2021, vol. 31, no. 15, pp. 7390–7408. doi: 10.1002/rnc.5690
8. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Methods for solutions of ill-posed problems.* Transl. from the 2nd Russian ed., New York, Wiley, 1977, 258 p. ISBN: 0470991240 . Original Russian text published in Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach*, Moscow, Nauka Publ., 1979, 285 p.
9. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. *Ill-posed problems of mathematical physics and analysis.* Provodence, Amer. Math. Soc., 1986, 290 p. ISBN: 978-1-4704-4478-5 . Original Russian text published in Lavrent'ev M. M., Romanov V. G., Shishatskii S. P. *Nekorrektnye zadachi matematicheskoi fiziki i analiza*, Moscow, Nauka Publ., 1980, 286 p.
10. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of linear ill-posed problems and its applications.* In: *Inverse and ill-posed problems series*, vol. 36. Utrecht etc., VSP, 2002, 281 p. doi: 10.1515/9783110944822 . Original Russian text published in Ivanov V. K., Vasin V. V., Tanana V. P. *Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya.* Moscow, Nauka Publ., 1978, 206 p.
11. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. *Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions.* London, Gordon and Breach, 1995, 625 p. ISBN: 978-2881249440 .
12. Osipov Yu.S., Vasil'ev F.P., Potapov M.M. *Osnovy metoda dinamicheskoi regulyarizatsii* [Foundations of method of dynamic regularization]. Moscow, Moscow State Univ., 1999, 237 p. ISBN: 5-211-04085-6 .
13. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I. Dynamic inverse problems for parabolic systems. *Differ. Equ.*, 2000, vol. 36, iss. 5, pp. 643–661. doi: 10.1007/BF02754222
14. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I. *Metody dinamicheskogo vosstanovleniya vkhodov upravlyaemykh sistem* [Methods for dynamic reconstruction of inputs of control systems]. Yekaterinburg, Ural Branch of RAS Publ., 2011, 292 p.
15. Osipov Yu.S., Pandolfi L., Maksimov V.I. Problems of dynamic reconstruction and robust boundary control: the case od Dirichlet boundary conditions. *J. Inverse and Ill-Posed Problems*, 2001, vol. 9, no. 2, pp. 149–162. doi: 10.1515/jiip.2001.9.2.149
16. Osipov Yu.S., Maksimov V.I. On dynamical input reconstruction in a distributed second order equation. *J. Inverse and Ill-Posed Problems*, 2021, vol. 29, no. 5, pp. 707–719. doi: 10.1515/jiip-2021-0004
17. Brezis H. Probl'emes unilat'eraux. *J. Math. Pures Appl.*, 1972, vol. 51, pp. 1–168.
18. Barbu V. *Optimal control of variational inequalities.* Pitman Advanced Pub. Program, 1984, 298 p. ISBN: 0273086294 .
19. Tiba D. *Optimal control of nonsmooth distributed parameter systems.* Berlin, Springer-Verlag, 1990, 160 p. doi: 10.1007/BFb0085564
20. Neittaanmaki N., Tiba D. *Optimal control of nonlinear parabolic systems. Theory, algorithms and applications.* Marcel Dekker Pub., 1994, 424 p. ISBN: 0824790812 .

Received May 27, 2024
Revised June 7, 2024
Accepted June 10, 2024

Vyacheslav Ivanovich Maksimov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: maksimov@imm.uran.ru .

Yury Sergeyevich Osipov, RAS Academician, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Steklov Mathematical Institute of RAS; Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia,
e-mail: yriyosipov@hotmail.com .

Cite this article as: V. I. Maksimov, Yu. S. Osipov. Extremal shift in the problem of tracking a disturbance in a parabolic inclusion describing the two-phase Stefan problem. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 191–206 .