ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 3 2024

УДК 519.83

РАВНОВЕСИЕ В МОДЕЛИ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ НА РЫНКЕ ПАССАЖИРСКИХ ПЕРЕВОЗОК[1]

В. В. Мазалов, Е. Н. Коновальчикова

Рассматривается теоретико-игровая модель ценообразования на рынке городского общественного транспорта. Предполагается, что в качестве игроков в модели выступают транспортные компании, обслуживающие маршруты городского общественного транспорта, а распределение пассажиров по маршрутам осуществляется с помощью спецификации Хотеллинга. Исследуется равновесие по Нэшу в игре ценообразования на рынке транспортных услуг. Представлены результаты численного моделирования на примере транспортной системы г. Петрозаводска.

Ключевые слова: равновесие Нэша, рынок транспортных услуг, спецификация Хотеллинга.

V. V. Mazalov, E. N. Konovalchikova. Equilibrium in a pricing model for a public transport market.

A game-theoretic model of pricing in an urban public transport market is considered. It is assumed that the players in the model are transport companies serving urban public transport routes, and the distribution of passengers along the routes is subject to the Hotelling specification. The study focuses on the Nash equilibrium in the pricing game in the transport services market. The results of numerical modeling are presented using the example of the transport system in the city of Petrozavodsk.

Keywords: Nash equilibrium, public transport market, Hotelling specification.

MSC: 91A10

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-3-182-190

Введение

Общественный транспорт является одним из важных инструментом обеспечения комфортной городской среды. Качественное функционирование общественного транспорта зависит от многих факторов, таких как комфорт и безопасность внутри транспортного средства, длительность и протяженность маршрута, физическая и ценовая доступность транспортных услуг для населения, а также эффективность транспортной сети и наличие какой-либо вспомогательной инфраструктуры. Поэтому исследование транспортных систем и их моделирование имеют огромное практическое значение и позволяют определить оптимальные оценки параметров транспортной системы, при которых эти системы будут стабильно функционировать. В качестве ключевого подхода к изучению транспортных систем применяется теоретико-игровое моделирование. Классической теоретико-игровой концепцией в теории транспортных потоков считается концепция равновесия Вардропа [1]. В ее основе лежат гипотеза, что любая транспортная система достигает равновесного состояния через некоторый промежуток времени, и два принципа распределения транспортных потоков. Первый принцип гласит, что время в пути на всех существующих маршрутах одинаково для всех участников дорожного движения и меньше времени в пути любого участника дорожного движения в случае изменения его маршрута. Согласно второму принципу среднее время в пути сводится к минимуму. Строгая

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-20015, проводимого совместно с органами власти Республики Карелия с финансированием из Фонда венчурных инвестиций Республики Карелия (ФВИ РК), https://rscf.ru/project/22-11-20015/.

математическая формулировка этих принципов была впервые предложена Бекманом [2]. Первоначальные идеи Вардропа впоследствии были расширены требованием, согласно которому не только время в пути, но и общие затраты участников дорожного движения на всех маршрутах одинаковы и минимальны. Такой подход был использован в ряде работ (см. [3–5]). Кроме того, при анализе транспортных систем значительное внимание уделено ограниченно рациональным пассажирам. Различные подходы к ограниченной рациональности в транспортных задачах представлены в работах [6–8].

Помимо моделирования транспортных потоков большое внимание при анализе транспортных систем направлено на исследование конкуренции между транспортными компаниями, в том числе на поиск оптимальных стратегий ценообразования. В статье [9] анализируются эффекты поведенческой неоднородности пассажиров пригородных поездов в транспортных потоках по разным маршрутам на рынке, где транспортные фирмы конкурируют друг с другом, предоставляя пассажирам заменяемые маршруты. В публикации [10] предложена оптимальная модель планирования интермодальных грузовых перевозок для минимизации общих транспортных расходов, в которой цена услуги определяется как сумма эксплуатационных расходов и целевой нормы прибыли транспортных операторов при различных транспортных сценариях. Проблема ценообразования на рынке железнодорожного транспорта была изучена в статье [11]. В данной статье также рассматривается игра ценообразования на рынке транспортных услуг, в которой в качестве игроков выступают две транспортные компании, обслуживающие разные маршруты городского общественного транспорта. Предполагаются, что маршруты неоднородны, т. е. отличаются видом используемого транспорта, частотой движения и другими характеристиками, важными для пассажиров. Основная задача компаний состоит в установлении стоимости проезда с целью максимизации их прибыли. Отличие нашей постановки заключается в специальном виде функции полезности пассажиров, которая определяется с помощью спецификации Хотеллинга [12].

Статья организована следующим образом. В первом разделе описана теоретико-игровая модель рынка транспортных услуг и найдены оптимальные стратегии ценообразования. Во втором разделе представлены результаты численного моделирования на примере транспортной системы г. Петрозаводска. В заключении приведены основные результаты.

1. Модель рынка транспортных услуг

Рассмотрим рынок общественного транспорта, на котором две компании, **1** и **2**, на двух разных маршрутах обслуживают группу пассажиров общей численностью m, желающих добраться из пункта A в пункт B. Конкурирующие компании **1** и **2** устанавливают стоимость проезда p_1 и p_2 соответственно. Согласно своим предпочтениям маршрут **1** выбирают m_1 пассажиров, а маршрут **2** — m_2 пассажиров. Каждый маршрут i характеризуется количеством автобусов n_i, вместимостью автобусов c_i и затратами на обслуживание автобусов g_i $(i = 1, 2)$. Поскольку $\dfrac{m_i}{n_i} \leqslant c_i$, то максимальное количество пассажиров, перевозимых i-м маршрутом, удовлетворяет условию $m_i = c_i\, n_i$. Более того, конкурирующие маршруты имеют одинаковый по величине положительный сетевой эффект для обоих маршрутов, равный θ.

Предполагается, что предпочтения пассажиров равномерно распределены на единичном интервале $[0, 1]$. Основной характеристикой предпочтений пассажира является значение $x \in [0, 1]$. Если $x < \dfrac{1}{2}$, то это значит, что пассажир предпочитает маршрут **1**, если же $x > \dfrac{1}{2}$, то пассажир выбирает маршрут **2**. Пассажиры руководствуются функцией полезности, которая определяется с помощью спецификации Хотеллинга и учитывает сетевой эффект, создаваемый маршрутами. Таким образом, для любого пассажира с предпочтением x функции полезности при выборе маршрутов **1** или **2** имеют вид

$$u_1(x) = v_1 + \theta n_1 - p_1 - xt, \quad u_2(x) = v_2 + \theta n_2 - p_2 - (1 - x)t.$$

Первое слагаемое в функциях полезности представляет собой фиксированную часть общей полезности для пассажиров, которая не зависит от местоположения пассажира и количества пассажиров на выбранном маршруте. Второе слагаемое определяет значение сетевого эффекта, связанное с интенсивностью движения на маршруте, поскольку чем больше пассажиров выбирает данный маршрут, тем больше транспорта используют транспортные компании для их перевозки. Третье слагаемое представляет стоимость проезда, а последнее слагаемое отвечает за уровень дискомфорта пассажиров в пути, который зависит от перераспределения пассажиров между маршрутами и длины маршрутов t.

Таким образом, приходим к некооперативной игре двух лиц, где целевыми функциями являются прибыли компаний на данных маршрутах, имеющие вид

$$\Pi_1 = m_1 p_1 - g_1 n_1 = m_1 p_1 - g_1 \frac{m_1}{c_1} = m_1 \Big(p_1 - \frac{g_1}{c_1} \Big), \tag{1.1}$$

$$\Pi_2 = m_2 p_2 - g_2 n_2 = m_2 p_2 - g_2 \frac{m_2}{c_2} = m_2 \Big(p_2 - \frac{g_2}{c_2} \Big). \tag{1.2}$$

Цель компании состоит в максимизации прибыли, поэтому устанавливаются такие цены для пассажиров, которые дают равновесие в данной игре.

З а м е ч а н и е. В предложенной модели для принятия решения пассажиры используют целевые функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$, которые учитывают фиксированную полезность для пассажиров, значение сетевого эффекта, связанного с интенсивностью движения, стоимость проезда и уровень дискомфорта. Однако в модели может быть включено время в пути, тогда последние слагаемые функций полезности будут записаны как $x\,t_1$ и $(1-x)\,t_2$, где t_1 и t_2 — время пути на первом и втором маршрутах. Последнее усложнит выражения для равновесия, но принципиально вид равновесия не изменится. В ряде исследований, в том числе и работах авторов, используются функции полезности на разных маршрутах в виде $p_1 + \dfrac{1}{c_1 - x}$ и $p_2 + \dfrac{1}{c_2 - (1-x)}$, где второе слагаемое означает время обслуживания на соответствующем маршруте. Однако в новой модели основной акцент сделан на взаимосвязи сетевого эффекта и стоимости обслуживания пассажиров.

Поскольку в данной модели предполагается, что в равновесии все пассажиры выберут один из маршрутов, то пассажира, не отдающего предпочтения ни одному из маршрутов, можно определить из уравнения $u_1(x) = u_2(x)$, решение которого имеет вид

$$x = \frac{1}{2} + \frac{\theta\,(n_1 - n_2) + (p_2 - p_1) + (v_1 - v_2)}{2t}.$$

Таким образом, доли пассажиров, выбирающих первый либо второй маршрут, определяются следующим образом:

$$\frac{m_1}{m} = \frac{1}{2} + \frac{\theta\,(n_1 - n_2) + (p_2 - p_1) + (v_1 - v_2)}{2t},$$

$$\frac{m_2}{m} = \frac{1}{2} - \frac{\theta\,(n_1 - n_2) + (p_2 - p_1) + (v_1 - v_2)}{2t}.$$

Учитывая, что $m_i = c_i\, n_i$ и $m_1 + m_2 = m$, из первого уравнения выводим

$$\frac{m_1}{m} = \frac{1}{2} + \frac{\theta \Big(\frac{m_1}{c_1} - \frac{m_2}{c_2} \Big) + (p_2 - p_1) + (v_1 - v_2)}{2t}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\theta \Big(\frac{m_1}{c_1} - \frac{m - m_1}{c_2} \Big) + (p_2 - p_1) + (v_1 - v_2)}{2t},$$

откуда находим

$$m_1\Big(\frac{1}{m}-\frac{\theta(c_1+c_2)}{2tc_1c_2}\Big)=\frac{1}{2}-\frac{\theta m}{2tc_2}+\frac{(p_2-p_1)+(v_1-v_2)}{2t}.$$

Таким образом, количество пассажиров на первом маршруте определяется как

$$m_1=\Big(\frac{1}{2}-\frac{\theta m}{2tc_2}+\frac{(p_2-p_1)+(v_1-v_2)}{2t}\Big)\Big(\frac{1}{m}-\frac{\theta(c_1+c_2)}{2tc_1c_2}\Big)^{-1}. \tag{1.3}$$

Аналогично из второго уравнения вытекает количество пассажиров на втором маршруте:

$$m_2=\Big(\frac{1}{2}-\frac{\theta m}{2tc_1}-\frac{(p_2-p_1)+(v_1-v_2)}{2t}\Big)\Big(\frac{1}{m}-\frac{\theta(c_1+c_2)}{2tc_1c_2}\Big)^{-1}. \tag{1.4}$$

Соответственно формулам (1.3) и (1.4) функции полезности компаний (1.1) и (1.2) примут следующий вид:

$$\Pi_1=\Big(p_1-\frac{g_1}{c_1}\Big)\Big(\frac{1}{2}-\frac{\theta m}{2tc_2}+\frac{(p_2-p_1)+(v_1-v_2)}{2t}\Big)\Big(\frac{1}{m}-\frac{\theta(c_1+c_2)}{2tc_1c_2}\Big)^{-1},$$

$$\Pi_2=\Big(p_2-\frac{g_2}{c_2}\Big)\Big(\frac{1}{2}-\frac{\theta m}{2tc_1}-\frac{(p_2-p_1)+(v_1-v_2)}{2t}\Big)\Big(\frac{1}{m}-\frac{\theta(c_1+c_2)}{2tc_1c_2}\Big)^{-1}.$$

Обе функции полезности вогнутые. Для поиска равновесия по Нэшу запишем условия первого рода $\frac{\partial\Pi_1}{\partial p_1}=0$ и $\frac{\partial\Pi_2}{\partial p_2}=0$, т. е.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Pi_1}{\partial p_1}&=\Big(\frac{1}{m}-\frac{\theta(c_1+c_2)}{2tc_1c_2}\Big)^{-1}\Big(\frac{1}{2}-\frac{\theta m}{2tc_2}+\frac{(p_2-p_1)+(v_1-v_2)}{2t}+\Big(p_1-\frac{g_1}{c_1}\Big)\Big(-\frac{1}{2t}\Big)\Big)\\&=\Big(\frac{1}{m}-\frac{\theta(c_1+c_2)}{2tc_1c_2}\Big)^{-1}\Big(\frac{1}{2}-\frac{\theta m}{2tc_2}+\frac{(p_2-2p_1)+(v_1-v_2)}{2t}+\frac{g_1}{2c_1t}\Big)=0,\\\frac{\partial\Pi_2}{\partial p_2}&=\Big(\frac{1}{m}-\frac{\theta(c_1+c_2)}{2tc_1c_2}\Big)^{-1}\Big(\frac{1}{2}-\frac{\theta m}{2tc_1}-\frac{(p_2-p_1)+(v_1-v_2)}{2t}+\Big(p_2-\frac{g_2}{c_2}\Big)\Big(-\frac{1}{2t}\Big)\Big)\\&=\Big(\frac{1}{m}-\frac{\theta(c_1+c_2)}{2tc_1c_2}\Big)^{-1}\Big(\frac{1}{2}-\frac{\theta m}{2tc_1}-\frac{(2p_2-p_1)+(v_1-v_2)}{2t}+\frac{g_2}{2c_2t}\Big)=0.\end{aligned}$$

Равновесные цены находятся из системы уравнений

$$\begin{cases}\frac{1}{2}-\frac{\theta m}{2tc_2}+\frac{(p_2-2p_1)+(v_1-v_2)}{2t}+\frac{g_1}{2c_1t}=0,\\\frac{1}{2}-\frac{\theta m}{2tc_1}-\frac{(2p_2-p_1)+(v_1-v_2)}{2t}+\frac{g_2}{2c_2t}=0,\end{cases}$$

откуда получаем

$$\begin{cases}p_2-2p_1=-t+\frac{\theta m}{c_2}-(v_1-v_2)-\frac{g_1}{c_1},\\2p_2-p_1=t-\frac{\theta m}{c_1}-(v_1-v_2)+\frac{g_2}{c_2}.\end{cases}$$

Из данной системы выводим равновесные цены:

$$p_1^*=t-\frac{\theta m}{3c_1}-\frac{2\theta m}{3c_2}-\frac{v_1-v_2}{3}+\frac{g_2}{3c_2}+\frac{2g_1}{3c_1}, \tag{1.5}$$

$$p_2^*=t-\frac{2\theta m}{3c_1}-\frac{\theta m}{3c_2}-\frac{v_1-v_2}{3}+\frac{2g_2}{3c_2}+\frac{g_1}{3c_1}. \tag{1.6}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *В игре ценообразования на рынке транспортных услуг равновесные ценовые стратегии имеют вид* (1.5) *и* (1.6) *при условии, что* $2tc_1c_2 > \theta m(c_1 + c_2)$.

Заметим, что оба маршрута могут использовать один вид транспортного средства. В этом случае они будут идентичными, поскольку затраты на обслуживания и максимальная вместимость транспортного средства будут совпадать, т. е. $g_1 = g_2 = g$ и $c_1 = c_2 = c$. Следовательно, маршруты должны устанавливать одинаковые равновесные цены, имеющие вид

$$p_1^* = p_2^* = t - \frac{\theta m}{c} + \frac{g}{c} - \frac{v_1 - v_2}{3}.$$

Равновесные количества пассажиров, пользующихся идентичными маршрутами, будут вычисляться по формулам

$$m_1^* = \frac{mc}{2(tc - \theta m)}\Big(t - \frac{\theta m}{c} + (v_1 - v_2)\Big) \quad \text{и} \quad m_2^* = \frac{mc}{2(tc - \theta m)}\Big(t - \frac{\theta m}{c} - (v_1 - v_2)\Big),$$

а количества транспортных средств, требующихся для обслуживания двух идентичных маршрутов, — по формулам

$$n_1^* = \frac{m_1}{c} = \frac{m}{2(tc - \theta m)}\Big(t - \frac{\theta m}{c} + (v_1 - v_2)\Big) \quad \text{и} \quad n_2^* = \frac{m_2}{c} = \frac{m}{2(tc - \theta m)}\Big(t - \frac{\theta m}{c} - (v_1 - v_2)\Big).$$

Выигрыши идентичных маршрутов в этом случае соответственно определяем как

$$\Pi_1^* = \frac{mc}{2(tc - \theta m)}\Big(t - \frac{\theta m}{c} + (v_1 - v_2)\Big)\Big(t - \frac{\theta m}{c} + \frac{v_1 - v_2}{3}\Big),$$

$$\Pi_2^* = \frac{mc}{2(tc - \theta m)}\Big(t - \frac{\theta m}{c} - (v_1 - v_2)\Big)\Big(t - \frac{\theta m}{c} + \frac{v_1 - v_2}{3}\Big).$$

Более того, из равенства фиксированной полезности для пассажиров ($v_1 = v_2$) следует равенство равновесных цен, количества пассажиров и транспортных средств на маршрутах, а также выигрышей маршрутов, т. е.

$$p_1^* = p_2^* = t - \frac{\theta m}{c} + \frac{g}{c}, \quad m_1^* = m_2^* = \frac{m}{2}, \quad n_1^* = n_2^* = \frac{m}{2c}, \quad \Pi_1^* = \Pi_2^* = \frac{m}{2}\frac{(tc - \theta m)}{c}.$$

В случае одинакового количества пассажиров, идентичных маршрутов и известных параметров задачи наблюдается отрицательная линейная зависимость прибыли от положительного сетевого эффекта θ.

Теперь рассмотрим случай с различными положительными сетевыми эффектами θ_1 и θ_2 при использовании соответственно маршрутов **1** и **2**. В этом случае функции полезности при выборе маршрутов **1** или **2** для любого пассажира с местоположением x соответственно вычисляем как

$$u_1(x) = v_1 + \theta_1 n_1 - p_1 - xt, \quad u_2(x) = v_2 + \theta_2 n_2 - p_2 - (1 - x)t.$$

Функции прибыли для обоих маршрутов остаются прежними, т. е. равными (1.1) и (1.2). При различных сетевых эффектах θ_1 и θ_2 распределение пассажиров по маршрутам получает следующие значения:

$$m_1 = \Big(\frac{1}{2} - \frac{\theta_1 m}{2tc_2} + \frac{(p_2 - p_1) + (v_1 - v_2)}{2t}\Big)\Big(\frac{1}{m} - \frac{\theta_1 c_1 + \theta_2 c_2}{2tc_1c_2}\Big)^{-1},$$

$$m_2 = \Big(\frac{1}{2} - \frac{\theta_2 m}{2tc_1} - \frac{(p_2 - p_1) + (v_1 - v_2)}{2t}\Big)\Big(\frac{1}{m} - \frac{\theta_1 c_1 + \theta_2 c_2}{2tc_1c_2}\Big)^{-1}.$$

Таким образом, в случае различных положительных сетевых эффектов равновесные цены маршрутов удовлетворяют следующей теореме.

Теорема 2. *В игре ценообразования на рынке транспортных услуг с различными положительными сетевыми эффектами θ_1 и θ_2 равновесные ценовые стратегии имеют вид*

$$p_1^* = t - \frac{\theta_2 m}{3c_1} - \frac{2\theta_1 m}{3c_2} - \frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{g_2}{3c_2} + \frac{2g_1}{3c_1},$$

$$p_2^* = t - \frac{2\theta_2 m}{3c_1} - \frac{\theta_1 m}{3c_2} - \frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{2g_2}{3c_2} + \frac{g_1}{3c_1},$$

при условии $m(\theta_1 c_1 + \theta_2 c_2) < 2tc_1c_2$.

2. Численное моделирование

Предложенная модель рынка городского общественного транспорта была применена к определению оптимальных ценовых стратегий на примере транспортной системы г. Петрозаводска. Согласно данным 2GIS пассажирские перевозки осуществляются 17 автобусными и 6 троллейбусными маршрутами. К основным их отличиям относятся тип и максимальная вместимость используемого транспортного средства, а также стоимость проезда. Для моделирования были выбраны два маршрута городского транспорта: автобусный маршрут №5 и троллейбусный маршрут №1. Для обслуживания автобусного маршрута №5 используются транспортные средства с максимальной вместимостью 49 человек. Троллейбусные маршруты обслуживаются транспортными средствами с пассажировместимостью 107 человек. Оба маршрута имеют общую часть траектории движения от остановки A до остановки B протяженностью 3220 метров. Численность жителей, пользующихся остановкой A, составляет 4344 человек. Для определения оптимальных ценовых стратегий на обоих маршрутах предположим, что пассажиропоток осуществляется только в одном направлении от остановки A до остановки B. Кроме этого, будем считать затраты на обслуживание автобусов больше, чем затраты на обслуживание троллейбусов. Для численного моделирования использовалась система компьютерной алгебры Wolfram Mathematica 12.0.0.

В табл. 1 приведены результаты численного моделировании в ситуации с равными положительными сетевыми эффектами θ на пассажиров, для которых, в свою очередь, значения полезностей v_1 и v_2 могут быть одинаковыми и могут различаться. Согласно результатам моделирования пассажиры распределяются по маршрутам практически поровну, поэтому для перевозки пассажиров по маршруту №5 потребуется 44 автобусов, а по маршруту №1 — 20 троллейбусов. Независимо от фиксированной полезности пассажиров стоимость проезда на первом маршруте всегда больше, чем на втором маршруте. Однако разница в стоимости несущественна. Также стоимость зависит от величины θ: чем больше этот эффект, тем стоимость

Т а б л и ц а 1

Маршруты с равными сетевыми эффектами[2]

v_1	v_2	n_1	n_2	m_1	m_2	p_1	p_2	Π_1	Π_2
$\theta = 1,\ g_1 = 30,\ g_2 = 20$									
1	2	44	20	2178	2166	3163.52	3147.36	$6.88914 \cdot 10^6$	$6.81645 \cdot 10^6$
2	1	44	20	2177	2167	3164.19	3148.03	$6.88624 \cdot 10^6$	$6.82223 \cdot 10^6$
2	2	44	20	2177	2167	3163.85	3147.69	$6.88769 \cdot 10^6$	$6.81934 \cdot 10^6$
$\theta = 0.1,\ g_1 = 30,\ g_2 = 20$									
1	2	44	20	2173	2171	3214.48	3212.73	$6.98411 \cdot 10^6$	$6.97405 \cdot 10^6$
2	1	44	20	2172	2172	3215.14	3213.4	$6.98122 \cdot 10^6$	$6.97984 \cdot 10^6$
2	2	44	20	2172	2172	3214.81	3213.07	$6.98267 \cdot 10^6$	$6.97694 \cdot 10^6$

[2] В примере цены указаны в условных единицах. Если в качестве условных единиц выбрать копейки, то полученные результаты моделирования соответствуют ценам в г. Петрозаводске.

Таблица 2

Маршруты с разными сетевыми эффектами

v_1	v_2	n_1	n_2	m_1	m_2	p_1	p_2	Π_1	Π_2
$\theta_1 = 1,\ \theta_2 = 2,\ g_1 = 30,\ g_2 = 20$									
1	2	45	19	2189	2155	3133.97	3088.26	$6.85737 \cdot 10^6$	$6.65632 \cdot 10^6$
2	1	45	19	2187	2157	3134.64	3088.93	$6.85446 \cdot 10^6$	$6.66207 \cdot 10^6$
2	2	45	19	2188	2156	3134.3	3088.59	$6.85591 \cdot 10^6$	$6.65919 \cdot 10^6$
$\theta_1 = 2,\ \theta_2 = 1,\ g_1 = 30,\ g_2 = 20$									
1	2	45	20	2173	2171	3136.46	3133.83	$6.81562 \cdot 10^6$	$6.80171 \cdot 10^6$
2	1	45	20	2173	2171	3136.46	3133.83	$6.81562 \cdot 10^6$	$6.80171 \cdot 10^6$
2	2	45	20	2173	2172	3136.79	3134.16	$6.81417 \cdot 10^6$	$6.8046 \cdot 10^6$

проезда ниже. Объяснение этому простое: от значения положительного эффекта θ на пассажиров зависит, готовы ли они терпеть неудобства, связанные с низкой интенсивностью работы общественного транспорта, или нет.

В случае различных сетевых эффектов θ_1 и θ_2 для обоих маршрутов стоимость проезда в равновесии уменьшится по сравнению с равными эффектами, но стоимость проезда на автобусном маршруте также остается больше стоимости проезда на троллейбусном маршруте. Помимо этого результаты численного моделирования, представленные в табл. 2, показывают различие в стоимости проездов на обоих маршрутах в зависимости от размера θ_1 и θ_2: стоимость проезда на маршруте с большим значением θ больше, чем на маршруте с меньшим значением.

Заключение

В данной статье предложена теоретико-игровая модель ценообразования на рынке общественного транспорта, где в качестве игроков выступают разные транспортные компании, обслуживающие маршруты. Предполагается, что маршруты отличаются видом используемого транспортного средства и сетевым эффектом, зависящим от устанавливаемых цен на проезд. Основная задача маршрутов заключается в определении стоимости проезда таким образом, чтобы максимизировать прибыли компаний, которые зависят от количества пассажиров и затрат на эксплуатацию транспортного средства. Распределение пассажиров по маршрутам осуществляется согласно спецификации Хотеллинга.

Было найдено равновесие в игре ценообразования на дуопольном рынке транспортных услуг и проведено численное моделирование на примере транспортной системы г. Петрозаводска. В дальнейшем предполагается расширение предложенной модели ценообразование на рынке пассажирских перевозок для большего количества транспортных компаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Wardrop J.G.** Some theoretical aspects of road traffic research // Proceedings of the Institution of Civil Engineers. 1952. Vol. 2, no. 3. P. 325–378.
2. **Beckmann M.J., McGuire C.B., Winsten C.B.** Studies in the economics of transportation. New Haven, CT: Yale University Press, 1956. 359 p.
3. **Lien J.W., Mazalov V.V., Melnik A.V., Zheng J.** Wardrop equilibrium for networks with the BPR latency function // Discrete Optimization and Operations Research (DOOR 2016) / eds. Y. Kochetov, M. Khachay, V. Beresnev, E. Nurminski, P. Pardalos. Cham: Springer, 2016. (Ser. Lect. Notes Comp. Sci. (LNTCS); vol. 9869). doi: 10.1007/978-3-319-44914-2_4

4. **Mazalov V.V., Melnik A.V.** Equilibrium prices and flows in the passenger traffic problem // International Game Theory Review. 2016. Vol 18, no. 1. Art. no. 1650001. doi: 10.1142/S0219198916500018
5. **Bure V.M., Mazalov V.V., Melnik A.V. and Plaksina N.V.** Passenger traffic evaluation and price formation on the transportation services market // Advances in Operations Research 2015. P. 1–10. doi: 10.1155/2015/163495
6. **Di X., He X., Guo X., Liu H.X.** Braess paradox under the boundedly rational user equilibria // Transportation Research Part B: Methodological. 2014. Vol. 67. P. 86–108. doi: 10.1016/j.trb.2014.04.005
7. **Di X., Liu H.X.** Boundedly rational route choice behavior: A review of models and methodologies, Transportation Research Part B: Methodological. 2016. Vol. 85. P. 142–179. doi:10.1016/j.trb.2016.01.002
8. **Sun C., Cheng L., Ma J.** Travel time reliability with boundedly rational travelers // Transportmetrica A: Transport Sci. 2018. Vol. 14, no. 3. P. 210–229. doi: 10.1080/23249935.2017.1368733
9. **Lien J.W., Mazalov V.V., Zheng J.** Pricing equilibrium of transportation systems with behavioral commuters // J. Dynamics and Games. 2020. Vol. 7, no. 4. P. 335–350. doi: 10.3934/jdg.2020026
10. **Li L., Lin X., Negenborn R.R., Schutter B.D.** Pricing intermodal freight transport services: a cost-plus-pricing strategy // Computational Logistics: Proc. 6th Internat. Conf. on Comput. Logistics (ICCL'15) / eds. F. Corman, S. Voß, R. Negenborn. Cham, Switzerland: Springer, 2015. P. 541–556. (Ser. Lect. Notes Comp. Sci. (LNTCS)). doi: 10.1007/978-3-319-24264-4_37
11. **Lin D.Y., Fang J.H., Huang K.L** Passenger assignment and pricing strategy for a passenger railway transportation system // Transportation Letters. 2019. Vol. 11, no. 6. P. 320–331. doi: 10.1080/19427867.2017.1343764
12. **Hotelling H.** Stability in competition // Economic J. 1929. Vol. 39. P. 41–57.

Поступила 22.04.2024
После доработки 12.06.2024
Принята к публикации 17.06.2024

Мазалов Владимир Викторович
д-р физ.-мат. наук, профессор
руководитель лаборатории
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН
г. Петрозаводск
e-mail: vlmazalov@yandex.ru

Ковальчикова Елена Николаевна
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Отдел комплексных научных исследований КарНЦ РАН
г. Петрозаводск
e-mail: konovalchikova_en@mail.ru

REFERENCES

1. Wardrop J.G. Some theoretical aspects of road traffic research. *Proc. Inst. Civil Engineers*, 1952, vol. 2, no. 3, pp. 325–378.
2. Beckmann M.J., McGuire C.B., Winsten C.B. *Studies in the economics of transportation*, New Haven, Yale Univer. Press, 1956, 359 p.
3. Lien J.W., Mazalov V.V., Melnik A.V., Zheng J. Wardrop equilibrium for networks with the BPR latency function. In: *Int. Conf. Discrete Optimization and Operations Research (DOOR 2016)*, (eds.) Y. Kochetov., M. Khachay, V. Beresnev, E. Nurminski, P. Pardalos, Cham, Springer, 2016, Ser. Lect. Notes in Comp. Sci. (LNTCS), vol. 9869, pp. 37–49. doi: 10.1007/978-3-319-44914-2_4
4. Mazalov V.V., Melnik A.V. Equilibrium prices and flows in the passenger traffic problem. *Int. Game Theory Review*, 2016, vol. 18, no. 1, art. no. 1650001. doi: 10.1142/S0219198916500018

5. Bure V.M., Mazalov V.V., Melnik A.V., Plaksina N.V. Passenger traffic evaluation and price formation on the transportation services market. *Advances in Operations Research*, 2015, pp. 1–10. doi: 10.1155/2015/163495
6. Di X., He X., Guo X., Liu H.X. Braess paradox under the boundedly rational user equilibria. *Transportation Research. Part B: Methodological*, 2014, vol. 67, pp. 86–108. doi: 10.1016/j.trb.2014.04.005
7. Di X., Liu H.X. Boundedly rational route choice behavior: A review of models and methodologies. *Transportation Research Part B: Methodological*, 2016, vol. 85, pp. 142–179. doi:10.1016/j.trb.2016.01.002
8. Sun C., Cheng L., Ma J. Travel time reliability with boundedly rational travelers. *Transportmetrica A: Transport Sci.*, 2018, vol. 14, no. 3, pp. 210–229. doi: 10.1080/23249935.2017.1368733
9. Lien J.W., Mazalov V.V., Zheng J. Pricing equilibrium of transportation systems with behavioral commuters. *J. Dynamics and Games*, 2020, vol. 7, no. 4, pp. 335–350. doi: 10.3934/jdg.2020026
10. Li L., Lin X., Negenborn R.R., Schutter B.D. Pricing intermodal freight transport services: A cost-plus-pricing strategy. In: *Proc. 6th Int. Conf. Computational Logistics (ICCL'15)*, eds. F. Corman, S. Voß, R. Negenborn, Cham, Switzerland, Springer, 2015, pp. 541–556, Ser. Lect. Notes Comp. Sci. (LNTCS). doi: 10.1007/978-3-319-24264-4_37
11. Lin D.Y., Fang J.H., Huang K.L. Passenger assignment and pricing strategy for a passenger railway transportation system. *Transp. Letters*, 2019, vol. 11, no. 6, pp. 320–331. doi: 10.1080/19427867.2017.1343764
12. Hotelling H. Stability in competition. *Economic J.*, 1929, vol. 39, no. 153, pp. 41–57.

Received April 22, 2024
Revised June 12, 2024
Accepted June 17, 2024

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-11-20015) jointly with the authorities of the Republic of Karelia with financing from the Venture Investment Fund of the Republic of Karelia, https://rscf.ru/project/22-11-20015/.

Vladimir Viktorovich Mazalov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre of RAS, Petrozavodsk, 185910, Russia,
e-mail: vlmazalov@yandex.ru .

Elena Nikolaevna Konovalchikova, Cand. Phys.-Math. Sci., Department of Multidisciplinary Scientific, Karelian Research Centre of RAS, Petrozavodsk, 185910, Russia,
e-mail: konovalchikova_en@mail.ru .

Cite this article as: V. V. Mazalov, E. N. Konovalchikova. Equilibrium in a pricing model for a public transport market. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 182–190 .