

УДК 517.9

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ В МОДЕЛИ
СТАЦИОНАРНОЙ РЕАКЦИИ-КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ****А. И. Короткий, Ю. В. Стародубцева**

Исследуются прямая и обратная задачи для модели стационарной реакции-конвекции-диффузии. Прямая задача состоит в нахождении обобщенного или сильного решения соответствующей краевой задачи при всех заданных параметрах модели. Указываются условия обобщенной или сильной разрешимости прямой задачи, приводятся априорные оценки на решения, установлена непрерывная зависимость того или иного решения прямой задачи от ряда параметров в различных метриках. Обратная задача состоит в нахождении априори неизвестного коэффициента поглощения в среде, характеризующего поглощение некоторой субстанции (или сток тепла) в химическом процессе. Дополнительной информацией для решения обратной задачи является результат измерения потока субстанции (или потока тепла) на доступной части границы области, где протекает процесс. Доказано, что обратная задача некорректна. Приведены примеры, показывающие, что обратная задача неустойчива по отношению к возмущению измеряемой величины и может иметь несколько решений. Для решения обратной задачи предложен вариационный метод, основанный на минимизации некоторого подходящего функционала невязки (целевого функционала). Исследованы экстремальные свойства задачи минимизации функционала невязки. Найдена явная аналитическая формула для вычисления градиента функционала невязки и выписаны соответствующие сопряженная система и система оптимальности. Указано несколько устойчивых итерационных методов минимизации функционала невязки. Проведено численное моделирование решения обратной задачи.

Ключевые слова: уравнение реакции-конвекции-диффузии, прямая задача, обратная задача, функционал невязки, вариационный метод, градиент функционала, сопряженная система, градиентные методы минимизации.

A. I. Korotkii, Yu. V. Starodubtseva. Reconstruction of the absorption coefficient in a model of stationary reaction–convection–diffusion.

Direct and inverse problems for the stationary reaction–convection–diffusion model are studied. The direct problem is to find a generalized or strong solution to the corresponding boundary value problems for all given model parameters. Conditions for generalized or strong solvability of the direct problem are given, a priori estimates for solutions are presented, and a continuous dependence of a solution to the direct problem on a number of parameters is established in various metrics. The inverse problem consists of finding the a priori unknown absorption coefficient of a medium, which characterizes the absorption of some substance (or heat sink) in a chemical process. Additional information for solving the inverse problem is the result of measuring the substance (or heat) flow on the accessible part of the boundary of the region where the process takes place. It is proved that the inverse problem is ill-posed. Examples are given showing that the inverse problem is unstable under the disturbance of the measured quantity and may have several solutions. To solve the inverse problem, a variational method based on the minimization of some suitable residual functional (objective functional) is proposed. The extremal properties of the problem of minimizing the residual functional are studied. An explicit analytical formula is found for calculating the gradient of the residual functional, and the corresponding adjoint system and optimality system are written. Several stable iterative methods for minimizing the residual functional are proposed. Numerical modeling of the solution to the inverse problem is carried out.

Keywords: reaction–convection–diffusion equation, direct problem, inverse problem, residual functional, functional gradient, adjoint system, variational method, gradient minimization methods.

MSC: 35Q30, 76D05, 76T10, 76T15

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-3-166-181

Введение

Параметры, входящие в математическую модель, являются важными характеристиками явлений или процессов, описываемых этой моделью. Знание полного набора параметров модели позволяет провести адекватное моделирование тех или иных явлений. Однако полный набор параметров модели не всегда бывает известен. Возникает необходимость в определении

недостающих параметров тем или иным способом. Последние из упомянутых задач называются обратными.

В работе изучаются прямая и обратная задачи для модели стационарной реакции-конвекции-диффузии. Прямая задача состоит в нахождении решения соответствующей краевой задачи при всех известных параметрах модели. Обратная задача заключается в определении некоторых априори неизвестных параметров модели по некоторым известным (измеренным) дополнительным данным о решении прямой задачи. Такого рода известными данными являются результаты измерения состояния модели на некоторой части границы области ее задания, где прямое измерение возможно. Математическая постановка прямой задачи приводит к краевой задаче для эллиптического уравнения второго порядка. Математическая постановка обратной задачи приводит к обобщенной задаче Коши для эллиптического уравнения, которая, как правило, некорректна.

Для прямой задачи вводится понятие обобщенного (сильного) решения, доказываются его существование и единственность. Установлено, что прямая задача корректно поставлена, найдены некоторые априорные оценки на решение и доказана непрерывная зависимость решения от некоторых параметров модели.

Доказано, что обратная задача некорректно поставлена, она может иметь несколько решений и неустойчива по отношению к возмущению измеряемых величин. Описываются вариационный метод и алгоритм решения обратной задачи [1–3]. Приводятся результаты численного моделирования решения обратной задачи.

Работа продолжает исследования [4–6].

1. Постановка задачи

Охарактеризуем кратко содержательную сторону задачи. В некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m = 2, 3$, содержащей неоднородную сплошную среду, рассматривается установившееся (стационарное) распределение температуры (или концентрации какого-либо вещества в среде). Математическая модель распределения температуры (концентрации) в области Ω представляет собой краевую задачу для безразмерного уравнения реакции-конвекции-диффузии [7–10]

$$L T \equiv \operatorname{div} (k \nabla T) - (\mathbf{u}, \nabla T) - q T = f, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.1)$$

$$T = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma = \partial\Omega, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ — точка пространства $\mathbb{R}^m$; $\mathbf{u} = (u_1(\mathbf{x}), \dots, u_m(\mathbf{x}))$ — вектор скорости движения среды в точках $\mathbf{x}$ области Ω ; $T = T(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, — температура (концентрация рассматриваемого вещества) среды в области Ω ; $k = k(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, — коэффициент теплопроводности (диффузии) среды в области Ω ; $q = q(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, — коэффициент поглощения в точках области Ω , характеризующий скорость поглощения соответствующей субстанции в среде или сток тепла (вещества) в результате химических превращений; $f = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, — объемная плотность образования или стока тепла (вещества) в области Ω .

Пусть на границе Γ области Ω задана некоторая ее регулярная часть $\Gamma_1 \subset \Gamma$, $\operatorname{mes} \Gamma_1 > 0$. Допустим, что на участке границы Γ_1 возможно прямое измерение (наблюдение) потока тепла (потока вещества) среды, заключенной в области Ω (рис. 1):

$$\xi = k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (1.3)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали в точках границы Γ .

Задача состоит в том, чтобы по указанным измерениям (наблюдениям) определить априори неизвестный коэффициент поглощения q в области Ω . Данную задачу далее будем называть обратной задачей.

Кроме этой задачи в статье будет рассматриваться задача, которую условимся называть прямой задачей. Она состоит в нахождении распределения температуры (концентрации) T в области Ω в результате решения краевой задачи (1.1), (1.2) при любых заданных допустимых параметрах модели $k, \mathbf{u}, q, f$.

Далее для краткости и определенности, рассуждая о содержательной стороне задачи, в работе будем упоминать только температуру.

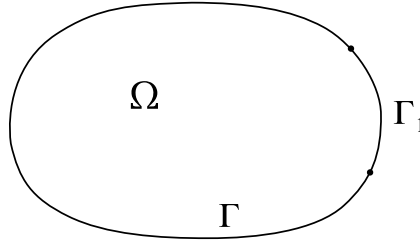


Рис. 1. Модельная область и ее граница.

Уточним постановки прямой и обратной задач. Будем считать, что Ω является ограниченной областью в $\mathbb{R}^m$, имеет достаточно гладкую границу (например, класса C^2 [11, с. 30; 12, с. 72,73; 13, с. 9; 14, с. 67]) или удовлетворяет следующим трем условиям из [11]: условию 1 [11, с. 212, 30]; условию 2 [11, с. 212] и условию $\mathfrak{R}$ [11, с. 222]. Часть Γ_1 границы Γ считается открытой и регулярной на Γ [10, с. 28].

Далее будут использоваться пространства Лебега $L_p(\Omega)$, $L_p(\Gamma)$, $L_p(\Gamma_1)$, $p \geq 1$, пространства Соболева $W_p^l(\Omega)$, $p \geq 1$, $l \geq 1$, [9–15], а также их векторные аналоги $\mathbf{L}_p(\Omega)$, $\mathbf{L}_p(\Gamma)$, $\mathbf{L}_p(\Gamma_1)$, $\mathbf{W}_p^l(\Omega)$, нормы в которых определяются обычным образом [9, с. 41, 112; 11, с. 467; 12, с. 62]. Кроме того, будут использоваться гильбертовы пространства [9, с. 41, 112; 10; 11, с. 467]

$$\mathbf{H}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) : \mathbf{u} = 0 \text{ на } \Gamma, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega\},$$

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in W_2^1(\Omega) : v = 0 \text{ на } \Gamma\},$$

$$H_0^2(\Omega) = \{v \in W_2^2(\Omega) : v \in H_0^1(\Omega)\}.$$

Отметим, что в подпространстве $\mathbf{H}(\Omega)$ пространства $\mathbf{W}_2^1(\Omega)$ можно ввести новое скалярное произведение

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{H}(\Omega)} = \int_{\Omega} [(\nabla u_1, \nabla w_1) + \dots + (\nabla u_m, \nabla w_m)] dx,$$

которое порождает новую норму $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{H}(\Omega)}$, эквивалентную исходной норме [9, с. 41, 112; 11, с. 69, 467; 12, с. 62]

$$C_1 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}_2^1(\Omega)}^2 \leq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 \leq C_2 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}_2^1(\Omega)}^2, \quad 0 < C_1 = \text{const} \leq C_2 = \text{const} < +\infty;$$

в подпространстве $H_0^1(\Omega)$ пространства $W_2^1(\Omega)$ можно ввести новое скалярное произведение

$$\langle v, w \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (\nabla v, \nabla w) dx,$$

которое порождает новую норму $\|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \langle v, v \rangle_{H_0^1(\Omega)}$, эквивалентную исходной норме [11, с. 69; 12, с. 62]

$$C_3 \|v\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leq \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C_4 \|v\|_{W_2^1(\Omega)}^2, \quad 0 < C_3 = \text{const} \leq C_4 = \text{const} < +\infty;$$

в подпространстве $H_0^2(\Omega)$ пространства $W_2^2(\Omega)$ можно ввести новое скалярное произведение

$$\langle v, w \rangle_{H_0^2(\Omega)} = \langle Lv, Lw \rangle_{L_2(\Omega)},$$

которое порождает новую норму $\|v\|_{H_0^2(\Omega)}^2 = \langle v, v \rangle_{H_0^2(\Omega)}$, эквивалентную исходной норме [11, гл. 3, §7–9, §11; 12, гл. 2, §6]

$$C_5 \|v\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \leq \|v\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \leq C_6 \|v\|_{W_2^2(\Omega)}^2, \quad 0 < C_5 = \text{const} \leq C_6 = \text{const} < +\infty;$$

в подпространстве $H_0^2(\Omega)$ пространства $W_2^2(\Omega)$ можно ввести новое скалярное произведение

$$[v, w]_{H_0^2(\Omega)} = \langle L^0 v, L^0 w \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad L^0 v \equiv \text{div}(k \nabla v) - (\mathbf{u}, \nabla v),$$

которое порождает новую норму $\|v\|_{H_0^2(\Omega)}^2 = [v, v]_{H_0^2(\Omega)}$, эквивалентную исходной норме [11, гл. 3, §7–9, §11; 12, гл. 2, §6]

$$C_7 \|v\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \leq \|v\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \leq C_8 \|v\|_{W_2^2(\Omega)}^2, \quad 0 < C_7 = \text{const} \leq C_8 = \text{const} < +\infty.$$

Константы C_1 – C_8 не зависят от допустимых значений параметров k , $\mathbf{u}$, q , f .

Пусть далее для определенности

$$k \in C^1(\overline{\Omega}), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\Omega), \quad q \in Q, \quad f \in L_2(\Omega),$$

$$0 < \mu_1 \leq k(\mathbf{x}) \leq \mu_2, \quad \mathbf{x} \in \overline{\Omega}, \quad \mu_1 = \text{const} \leq \mu_2 = \text{const};$$

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^m} \leq \mu_3, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mu_3 = \text{const} \geq 0;$$

$$Q = \{q \in L_\infty(\Omega) : 0 \leq q(\mathbf{x}) \leq \mu_4, \mathbf{x} \in \Omega\}, \quad \mu_4 = \text{const} \geq 0.$$

Все рассматриваемые в работе числовые величины и пространства считаются вещественными, измеримость и интегрируемость понимаются по Лебегу, определения используемых пространств имеются в [9–15].

При указанных условиях на параметры краевой задачи (1.1), (1.2) она может не иметь классического решения. Обобщенное решение краевой задачи (1.1), (1.2) из пространства $H_0^1(\Omega)$ приемлемо для постановки прямой задачи, но неприемлемо для постановки обратной задачи из-за возможного отсутствия подходящего следа (1.3). Представляется, что обобщенное (сильное) решение краевой задачи (1.1), (1.2) из пространства $H_0^2(\Omega)$ будет приемлемым для постановки и решения прямой и обратной задач.

Напомним [11, гл. 3, §4; 12, гл. 2, §2], что обобщенным решением краевой задачи (1.1), (1.2) называется функция $T \in H_0^1(\Omega)$, которая для любой функции $g \in H_0^1(\Omega)$ удовлетворяет интегральному равенству

$$\int_{\Omega} k(\nabla T, \nabla g) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} T(\mathbf{u}, \nabla g) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} q T g d\mathbf{x} - \int_{\Omega} f g d\mathbf{x}. \quad (1.4)$$

Сильным решением краевой задачи (1.1), (1.2) из пространства $H_0^2(\Omega)$ назовем функцию $T \in H_0^2(\Omega)$, которая почти всюду в Ω удовлетворяет уравнению (1.1), или, что равносильно, LT и f совпадают как элементы пространства $L_2(\Omega)$, или, что равносильно, $\langle LT, v \rangle_{L_2(\Omega)} = \langle f, v \rangle_{L_2(\Omega)}$ для любой функции $v \in L_2(\Omega)$ [9–13]. Иногда, чтобы уточнить, что соответствующее равенство выполняется почти всюду или в $L_2(\Omega)$, мы используем символ $\cong$. Граничное условие (1.2) будет выполняться в силу принадлежности решения пространству $H_0^2(\Omega)$. Для любой функции $T \in H_0^2(\Omega)$ на Γ_1 существует след (1.3) из пространства $L_2(\Gamma_1)$ [11, гл. 2, §2; 12, гл. 1, §8; 10; 13].

Ясно, что сильное решение задачи (1.1), (1.2) из пространства $H_0^2(\Omega)$ будет являться также обобщенным решением этой краевой задачи из пространства $H_0^1(\Omega)$.

Прямая задача состоит в нахождении сильного решения $T \in H_0^2(\Omega)$ краевой задачи (1.1), (1.2) при заданных допустимых параметрах k , $\mathbf{u}$, q , f .

Поскольку далее будет важна зависимость решения прямой задачи от параметра $q \in Q$, то это решение иногда будем обозначать символом $T = T[q]$.

Уточним детали обратной задачи. Пусть γ — оператор взятия следа $\gamma(\xi(T))$ на Γ_1 для потока $\xi(T) = k \partial T / \partial n$ функции $T \in H_0^2(\Omega)$. Оператор $\gamma: H_0^2(\Omega) \ni T \rightarrow \gamma(\xi(T)) \in L_2(\Gamma_1)$ линеен и вполне непрерывен [11, гл. 2, §2; 12, гл. 1, §8]. Множество всех допустимых коэффициентов Q выпукло, ограничено, замкнуто и, следовательно, слабо компактно в $L_2(\Omega)$. Пусть $\Xi = \{\gamma(\xi(T[q])): q \in Q\}$ — множество всех возможных следов на Γ_1 от потоков $\xi(T)$ для $T \in T[Q]$. Это множество компактно в $L_2(\Gamma_1)$. Введем в рассмотрение оператор

$$A: L_2(\Omega) \supset Q \ni q \longrightarrow A(q) = \xi(T[q]) \in \Xi \subset L_2(\Gamma_1). \quad (1.5)$$

Обратная задача состоит в решении нелинейного операторного уравнения $A(q) = \xi$.

2. Сильная разрешимость и устойчивость прямой задачи

Теорема 2.1. Краевая задача (1.1), (1.2) имеет единственное сильное решение $T \in H_0^2(\Omega)$, для которого справедливо равенство

$$\int_{\Omega} k(\nabla T, \nabla T) dx + \int_{\Omega} q T^2 dx + \int_{\Omega} f T dx = 0$$

и справедливы априорные оценки

$$\|T\|_{W_2^1(\Omega)} \leq (\mu_1 C_3)^{-1} \|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad \|T\|_{W_2^2(\Omega)} \leq C_5^{-1/2} \|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Если последовательность $\{q_n\} \subset Q$ слабо в $L_2(\Omega)$ сходится к элементу $q_0 \in Q$, то $T[q_n] \rightarrow T[q_0]$ сильно в $H_0^1(\Omega)$ и слабо в $H_0^2(\Omega)$. Множество $T[Q]$ компактно в $H_0^1(\Omega)$ и слабо компактно в $H_0^2(\Omega)$. Если последовательность $\{q_n\} \subset Q$ сильно в $L_2(\Omega)$ сходится к элементу $q_0 \in Q$, то $T[q_n] \rightarrow T[q_0]$ сильно в $H_0^2(\Omega)$.

Доказательство. Утверждение о сильной разрешимости и единственности сильного решения, а также априорные оценки в $W_2^1(\Omega)$ и $W_2^2(\Omega)$ доказаны в [11, гл. 3, § 4, 9; 12, гл. 2, § 3, 7]. Эта часть теоремы может быть доказана также с помощью теоремы Лакса — Мильграма [16, с. 386], в которой билинейная и линейная формы на $H_0^2(\Omega)$ определяются соответственно как

$$B(v, w) = \langle Lv, w \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad F(v) = \langle f, v \rangle_{L_2(\Omega)}.$$

Априорная оценка для решения в пространстве $W_2^1(\Omega)$, слабо→сильная непрерывность оператора $L_2(\Omega) \supset Q \ni q \rightarrow T[q] \in T[Q] \subset H_0^1(\Omega)$ и компактность множества $T[Q]$ в $H_0^1(\Omega)$ доказаны в [6] (теорема 2.1).

Докажем оставшиеся недоказанными части теоремы. Из второго энергетического неравенства для эллиптических операторов

$$C_5 \|T[q]\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \leq \langle LT[q], LT[q] \rangle_{L_2(\Omega)} = \|f\|_{L_2(\Omega)}^2$$

следуют априорная оценка для решения в пространстве $W_2^2(\Omega)$ и ограниченность множества $T[Q]$ в $H_0^2(\Omega)$ (по любой из эквивалентных норм).

Пусть задана произвольная последовательность $\{q_n\} \subset Q$, слабо в $L_2(\Omega)$ сходящаяся к элементу $q_0 \in Q$. Докажем, что $T[q_n] \rightarrow T[q_0]$ слабо в $(H_0^2(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{W_2^2(\Omega)})$. Последовательность $\{T[q_n]\}$ ограничена в гильбертовом пространстве $(H_0^2(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{W_2^2(\Omega)})$, поэтому из нее можно выделить подпоследовательность $\{T[q_{n_p}]\}$, которая слабо в $(H_0^2(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{W_2^2(\Omega)})$ сходится к некоторому элементу $T_0 \in H_0^2(\Omega)$. Тогда $T[q_{n_p}] \rightarrow T_0$ сильно в $H_0^1(\Omega)$ при $p \rightarrow \infty$ и, так как $T_0 \in H_0^2(\Omega)$, T_0 будет одновременно и обобщенным, и сильным решением краевой

задачи (1.1), (1.2). Отсюда вытекает, что $T_0 = T[q_0]$. В силу единственности обобщенного или сильного решения краевой задачи (1.1), (1.2) получаем, что для самой последовательности $T[q_n] \rightarrow T[q_0]$ сильно в $H_0^1(\Omega)$ и слабо в $(H_0^2(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{W_2^2(\Omega)})$. Поскольку оператор

$$L_2(\Omega) \supset Q \ni q \longrightarrow T[q] \in T[Q] \subset W_2^2(\Omega)$$

слабо $\rightarrow$ слабо непрерывен, то образ $T[Q]$ слабо компактного множества Q при таком отображении слабо компактен в $H_0^2(\Omega)$. Из теоремы о компактном вложении $H_0^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ [11, с. 77; 12, с. 64, 68, 81, 84] следует, что множество $T[Q]$ компактно в $H_0^1(\Omega)$.

Осталось проверить, что $T[q_n] \rightarrow T[q_0]$ сильно в $H_0^2(\Omega)$, если последовательность $\{q_n\} \subset Q$ сильно в $L_2(\Omega)$ сходится к элементу $q_0 \in Q$. Это утверждение достаточно доказать для какой-нибудь одной из эквивалентных норм в $H_0^2(\Omega)$, и тогда оно будет верно для любой другой эквивалентной нормы. Остановимся сначала на пространстве $(H_0^2(\Omega), [\cdot, \cdot]_{H_0^2(\Omega)})$. Поскольку из сильной сходимости следует слабая сходимост, то, фактически повторяя рассуждения, проведенные выше для пространства $(H_0^2(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{W_2^2(\Omega)})$, получаем, что $T[q_n] \rightarrow T[q_0]$ слабо в $(H_0^2(\Omega), [\cdot, \cdot]_{H_0^2(\Omega)})$. Для сильной сходимости $T[q_n] \rightarrow T[q_0]$ в $(H_0^2(\Omega), [\cdot, \cdot]_{H_0^2(\Omega)})$ теперь достаточно убедиться в сходимости норм $\|T[q_n]\|_{H_0^2(\Omega)} \rightarrow \|T[q_0]\|_{H_0^2(\Omega)}$, так как в гильбертовом пространстве из слабой сходимости и сходимости норм следует сильная сходимост. Справедливо равенство

$$\|T[q_n]\|_{H_0^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (L^0 T[q_n])^2 dx = \int_{\Omega} (q_n T[q_n] + f)^2 dx,$$

и поскольку $q_n T[q_n] \rightarrow q_0 T[q_0]$ сильно в $L_2(\Omega)$, то при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\int_{\Omega} (q_n T[q_n] + f)^2 dx \rightarrow \int_{\Omega} (q_0 T[q_0] + f)^2 dx = \int_{\Omega} (L^0 T[q_0])^2 dx = \|T[q_0]\|_{H_0^2(\Omega)}^2.$$

Значит,

$$\|T[q_n]\|_{H_0^2(\Omega)} \rightarrow \|T[q_0]\|_{H_0^2(\Omega)}.$$

Теорема доказана.

Приведем пример, показывающий, что из слабой сходимости коэффициентов, вообще говоря, не следует сильной сходимости решений.

Пример 2.1. Уточним параметры модели. Пусть $m = 2$, $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, $k = 1$, $u = 0$, $f = 1$, $q \in Q$, $\mu_4 = 1$. Допустим, что $\{q_n\} \subset Q$ слабо, но не сильно в $L_2(\Omega)$ сходится к элементу $q_0 = 0$ и при этом $T[q_n] \rightarrow T[q_0]$ сильно в $H_0^2(\Omega)$. Тогда $q_n T[q_n] \rightharpoonup T[q_n] - 1 \rightarrow 0$ сильно в $L_2(\Omega)$ и $T[q_n] \rightarrow T[q_0]$ в $C(\overline{\Omega})$. Поскольку $T[q_0] \neq 0$, то при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ имеем $0 < \|T[q_n]\|_C^{-1} \leq 2/(\|T[q_0]\|_C)$. Тогда из неравенства $q_n^2 = (q_n T[q_n])^2 T[q_n]^{-2} \leq (q_n T[q_n])^2 4/(\|T[q_0]\|_C^2)$ следует, что $q_n \rightarrow q_0$ сильно в $L_2(\Omega)$. Это невозможно, т. е. предположение о том, что $T[q_n] \rightarrow T[q_0]$ сильно в $H_0^2(\Omega)$, не верно. Что и требовалось показать.

Теорема 2.2. Единственное сильное решение T краевой задачи (1.1), (1.2) является единственной точкой глобального минимума квадратичного функционала $E(v) = B(v, v) - 2F(v)$ на множестве $H_0^2(\Omega)$; здесь $B(v, w) = \langle Lv, w \rangle_{L_2(\Omega)}$, $F(v) = \langle f, v \rangle_{L_2(\Omega)}$. Функционал E дифференцируем по Фреше в любой точке пространства $H_0^2(\Omega)$. Дифференциал Фреше в точке $v \in H_0^2(\Omega)$ имеет вид $D_F(v, h) = 2B(v, h) - 2F(h)$. В точке глобального минимума $v_* = T$ справедливо вариационное уравнение Эйлера — Лагранжа $B(T, v) = F(v) \forall v \in H_0^2(\Omega)$. Всякая минимизирующая функционал E на множестве $H_0^2(\Omega)$ последовательность $\{v_k\}$ сильно в $H_0^2(\Omega)$ сходится к точке минимума $v_* \in H_0^2(\Omega)$, причем имеет место оценка

$$\|v_k - v_*\|_{H_0^2(\Omega)}^2 = B(v_k - v_*) \leq E(v_k) - E_*, \quad E_* = \min \{E(v) : v \in H_0^2(\Omega)\}.$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.2 из [6].

Теорема 2.3. Для любых $q_1 \in Q$ и $q_2 \in Q$ справедливы оценки

$$\|T[q_1] - T[q_2]\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \nu_1 \|q_1 - q_2\|_{L_2(\Omega)},$$

$$\|T[q_1] - T[q_2]\|_{H_0^2(\Omega)} \leq \nu_2 \|q_1 - q_2\|_{L_2(\Omega)},$$

где

$$\nu_1 = \frac{\varkappa}{\mu_1 (C_3 C_5)^{1/2}} \|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad \nu_2 = \mu_4 \nu_1 C_3^{-1/2} + \varkappa C_5^{-1/2} \|f\|_{L_2(\Omega)},$$

$\varkappa$ — константа из теоремы вложения $W_2^2(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, $\|T\|_{C(\overline{\Omega})} \leq \varkappa \|T\|_{W_2^2(\Omega)}$ [12, с. 84].

Доказательство. Выведем первую оценку. Из равенства (1.4), записанного для $T = T[q_1]$, вычтем равенство (1.4), записанное для $T = T[q_2]$, и положим $g = T[q_1] - T[q_2]$. После простых преобразований и оценок получим

$$\begin{aligned} \mu_1 \|T[q_1] - T[q_2]\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq - \int_{\Omega} (q_1 T[q_1] - q_2 T[q_2]) (T[q_1] - T[q_2]) dx \\ &= - \int_{\Omega} q_1 (T[q_1] - T[q_2])^2 dx - \int_{\Omega} (q_1 - q_2) T[q_2] (T[q_1] - T[q_2]) dx \\ &\leq - \int_{\Omega} (q_1 - q_2) T[q_2] (T[q_1] - T[q_2]) dx \leq \max_{x \in \overline{\Omega}} |T[q_2]| \int_{\Omega} |q_1 - q_2| |T[q_1] - T[q_2]| dx \\ &\leq \max_{x \in \overline{\Omega}} |T[q_2]| \|q_1 - q_2\|_{L_2(\Omega)} \|T[q_1] - T[q_2]\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq \varkappa \|T[q_2]\|_{W_2^2(\Omega)} \|q_1 - q_2\|_{L_2(\Omega)} \|T[q_1] - T[q_2]\|_{W_2^1(\Omega)} \\ &\leq \varkappa C_5^{-1/2} \|f\|_{L_2(\Omega)} \|q_1 - q_2\|_{L_2(\Omega)} C_3^{-1/2} \|T[q_1] - T[q_2]\|_{H_0^1(\Omega)} \\ \Rightarrow \mu_1 \|T[q_1] - T[q_2]\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq \varkappa (C_5 C_3)^{-1/2} \|f\|_{L_2(\Omega)} \|q_1 - q_2\|_{L_2(\Omega)} \\ \Rightarrow \|T[q_1] - T[q_2]\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq \nu_1 \|q_1 - q_2\|_{L_2(\Omega)}, \\ \nu_1 &= \frac{\varkappa}{\mu_1 (C_3 C_5)^{1/2}} \|f\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Выведем вторую оценку. Из равенства (1.1), записанного для $T = T[q_1]$, вычтем равенство (1.1), записанное для $T = T[q_2]$, результат умножим на $v = L^0(T[q_1] - T[q_2])$ и проинтегрируем по области Ω :

$$\begin{aligned} \|T[q_1] - T[q_2]\|_{H_0^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} L^0(T[q_1] - T[q_2]) L^0(T[q_1] - T[q_2]) dx \\ &= \int_{\Omega} (q_1 T[q_1] - q_2 T[q_2]) L^0(T[q_1] - T[q_2]) dx \\ &= \int_{\Omega} q_1 (T[q_1] - T[q_2]) L^0(T[q_1] - T[q_2]) dx + \int_{\Omega} (q_1 - q_2) T[q_2] L^0(T[q_1] - T[q_2]) dx \\ &\leq \mu_4 \int_{\Omega} |T[q_1] - T[q_2]| |L^0(T[q_1] - T[q_2])| dx + \|T[q_2]\|_C \int_{\Omega} |q_1 - q_2| |L^0(T[q_1] - T[q_2])| dx \\ &\leq \mu_4 \|T[q_1] - T[q_2]\|_{L_2(\Omega)} \|L^0(T[q_1] - T[q_2])\|_{L_2(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varkappa \|T[q_2]\|_{W_2^2(\Omega)} \|q_1 - q_2\|_{L_2(\Omega)} \|L^0(T[q_1] - T[q_2])\|_{L_2(\Omega)} \\
& \implies \| [T[q_1] - T[q_2]] \|_{H_0^2(\Omega)} = \|L^0(T[q_1] - T[q_2])\|_{L_2(\Omega)} \\
& \leq \mu_4 \|T[q_1] - T[q_2]\|_{L_2(\Omega)} + \varkappa \|T[q_2]\|_{W_2^2(\Omega)} \|q_1 - q_2\|_{L_2(\Omega)} \\
\implies & \| [T[q_1] - T[q_2]] \|_{H_0^2(\Omega)} \leq \mu_4 \|T[q_1] - T[q_2]\|_{W_2^1(\Omega)} + \varkappa C_5^{-1/2} \|f\|_{L_2(\Omega)} \|q_1 - q_2\|_{L_2(\Omega)} \\
& \leq \mu_4 \nu_1 C_3^{-1/2} \|q_1 - q_2\|_{L_2(\Omega)} + \varkappa C_5^{-1/2} \|f\|_{L_2(\Omega)} \|q_1 - q_2\|_{L_2(\Omega)} \\
& \implies \| [T[q_1] - T[q_2]] \|_{H_0^2(\Omega)} \leq \nu_2 \|q_1 - q_2\|_{L_2(\Omega)}, \\
& \nu_2 = \mu_4 \nu_1 C_3^{-1/2} + \varkappa C_5^{-1/2} \|f\|_{L_2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

3. Некорректность (неустойчивость) обратной задачи

Покажем неустойчивость обратной задачи по отношению к малым возмущениям результата наблюдения (измерения) $\xi \in \Xi$. Для этого достаточно показать, что оператор (1.5) не может иметь непрерывного обратного оператора. Действительно, пусть оператор A имеет непрерывный обратный оператор A^{-1} . Тогда, с одной стороны, $A^{-1}(A) = E$, с другой стороны, единичный оператор E должен быть вполне непрерывным, поскольку оператор A вполне непрерывен, а оператор A^{-1} непрерывен. Однако единичный оператор не может быть вполне непрерывным. Следовательно, предположение о том, что оператор A имеет непрерывный обратный оператор A^{-1} , неверно. Отсюда следует неустойчивость обратной задачи по отношению к малым возмущениям наблюдаемых величин.

Проиллюстрируем неустойчивость обратной задачи на примере.

Пример 3.1. Уточним параметры модели. Пусть $m = 2$, $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, $k = 1$, $u = 0$, $f = 1$, $k_4 = 2$, $\Gamma_1 = \{(x_1, 1) : 0 < x_1 < 1\}$. Пусть элемент $q_0 \in Q$ и последовательность $\{q_n\} \subset Q$ таковы, что $q_n \rightarrow q_0$ слабо в $L_2(\Omega)$, но не сильно в $L_2(\Omega)$. Например, можно положить $q_0 = 1$, $q_n = 1 + \sin(\pi n x_1)$. По теореме 2.1 $T[q_n] \rightarrow T[q_0]$ слабо в $W_2^2(\Omega)$, а в силу полной непрерывности оператора взятия следа γ имеем $\xi_n = \gamma T[q_n] \rightarrow \xi_0 = \gamma T[q_0]$ в $L_2(\Gamma_1)$. Таким образом, из того, что результат измерения потока тепла ξ_n может оказаться близок в метрике пространства $L_2(\Gamma_1)$ к некоторому измерению ξ_0 , не следует, что коэффициент q_n будет близок к коэффициенту q_0 в метрике пространства $L_2(\Omega)$, поскольку $\|q_n - q_0\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{2}/2 \not\rightarrow 0$. Это означает, что обратная задача неустойчива по отношению к малым возмущениям результатов измерения.

Сформулируем получившиеся результаты в виде теоремы.

Теорема 3.1. Обратная задача некорректна, она не может иметь непрерывного обратного оператора к оператору A , она неустойчива по отношению к возмущению измеряемой величины.

4. О единственности решения обратной задачи

Прежде всего заметим, обратная задача разрешима тогда и только тогда, когда $\xi \in \Xi$. Оказывается, что при заданном $\xi \in \Xi$ обратная задача может иметь несколько решений. Приведем пример.

Пример 4.1. Уточним параметры модели. Пусть $m = 2$, $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, $k = 1$, $u = 0$, $f = 0$, $q \in Q$, $\Gamma_1 = \{(x_1, 1) : 0 < x_1 < 1\}$. Ясно, что $T[Q] = \{0\}$ и $\Xi = \{0\}$. Таким образом, нулевому следу потока $\xi = 0$ соответствует целое множество коэффициентов $q \in Q$, для каждого из которых $\gamma(\xi(T[q])) = 0$. Что и требовалось показать.

Опишем класс моделей, для которых обратные задачи имеют единственное решение.

Пример 4.2. Пусть $m = 2$, $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, $k = 1$, $\mathbf{u} = 0$, $q \in Q$, $\Gamma_1 = \{(x_1, 1) : 0 < x_1 < 1\}$. Измерения потока производятся на Γ_1 .

Пусть

$$f = \sigma \omega(x_1), \quad \sigma = \text{const} > 0; \quad \omega''(x_1) = -\lambda^2 \omega(x_1), \quad 0 < x_1 < 1; \quad \omega(0) = 0 = \omega(1);$$

$$q = \text{const} \in [0, \mu_4]; \quad \eta^2 = q + \lambda^2.$$

Тогда решение прямой задачи представимо как

$$T = \omega(x_1) W(x_2); \quad W''(x_2) = \eta^2 W(x_2) + \sigma, \quad 0 < x_2 < 1; \quad W(0) = 0 = W(1). \quad (4.1)$$

Ясно, что решение краевой задачи из (4.1) имеет вид

$$W(x_2) = C_1 \exp(\eta x_2) + C_2 \exp(-\eta x_2) - \frac{\sigma}{\eta^2},$$

$$C_1 = \frac{\sigma(\exp \eta - 1)}{\eta^2(\exp 2\eta - 1)}, \quad C_2 = \frac{\sigma(\exp 2\eta - \exp \eta)}{\eta^2(\exp 2\eta - 1)}.$$

Отсюда находим

$$W'(1) = \frac{\sigma(\exp \eta - 1)^2}{\eta(\exp 2\eta - 1)}. \quad (4.2)$$

Обозначим правую часть в (4.2) символом $\Upsilon(\eta)$. Исследуем зависимость функции $\Upsilon = \Upsilon(\eta)$ от $\eta \in (0, +\infty)$. Она положительна на этом промежутке и строго монотонно убывает на нем в силу того, что $\Upsilon'(\eta) < 0$, $\eta \in (0, +\infty)$. Кроме того, $\lim_{\eta \rightarrow +0} \Upsilon(\eta) = +\infty$, $\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \Upsilon(\eta) = +0$.

Следовательно, каково бы ни было число $\Upsilon_0 \in (0, +\infty)$, найдется единственное число $\eta_0 \in (0, +\infty)$ такое, что $\Upsilon(\eta_0) = \Upsilon_0$. В частности, каково бы ни было число $\Upsilon_0 \in \Upsilon(\Theta)$, где $\Theta = [\lambda, \sqrt{\mu_4 + \lambda^2}]$, найдется единственное число $q_0 \in [0, \mu_4]$ такое, что $\Upsilon(\sqrt{q_0 + \lambda^2}) = \Upsilon_0$. Это означает, что обратная задача в условиях примера имеет единственное решение.

Сформулируем получившиеся результаты в виде теоремы.

Теорема 4.1. Обратная задача может иметь несколько решений. В условиях примера 4.2 обратная задача имеет единственное решение.

5. Вариационный метод решения обратной задачи

Для решения обратной задачи воспользуемся вариационным методом [1–3]. Преобразуем исходную обратную задачу в экстремальную задачу на минимум некоторого подходящего функционала.

Приведем некоторые эвристические соображения, позволяющие сформулировать обратную задачу как некоторую вариационную задачу. Пусть наблюдаемый след $\xi_* \in \Xi$ соответствует некоторому коэффициенту реакции $q_* \in Q$, т. е. $\xi_* = k \partial T[q_*]/\partial \mathbf{n}$. Рассмотрим неотрицательный функционал невязки (целевой функционал)

$$J(q) = \|A(q) - \xi_*\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 = \int_{\Gamma_1} \left(k \frac{\partial T[q]}{\partial \mathbf{n}} - \xi_* \right)^2 d\Gamma.$$

Данный функционал примет нулевое значение при $q = q_*$. С другой стороны, всякий элемент $q^* \in Q$, на котором функционал невязки получит нулевое значение, можно принять за решение обратной задачи. Итак, искомый коэффициент $q_* \in Q$ является минимизирующим элементом вариационной задачи

$$J(q) \rightarrow \inf : q \in Q. \quad (5.1)$$

Таким образом, от решения исходной обратной задачи можно перейти к решению вариационной задачи (5.1)

Сформулируем некоторый результат о минимизации функционала (5.1).

Теорема 5.1. *Вариационная задача (5.1) имеет на множестве Q хотя бы одну точку минимума. Множество Q_* всех точек минимума функционала J на множестве Q слабо компактно в пространстве $L_2(\Omega)$. Всякая минимизирующая последовательность задачи (5.1) слабо в пространстве $L_2(\Omega)$ сходится к множеству Q_* . В условиях примера 4.2 функционал J имеет на Q единственную точку минимума.*

Доказательство. Утверждения теоремы опираются на теорему Вейерштрасса о достижимости точек минимума непрерывным функционалом на компактном множестве [17, с. 502, 505]. Следует только учесть, что множество Q компактно в слабой топологии пространства $L_2(\Omega)$, а функционал J непрерывен на Q в слабой топологии этого пространства. Остальные утверждения теоремы доказываются аналогично [17, с. 505].

Теорема доказана.

6. Нахождение градиента целевого функционала и сопряженной задачи

Вычислим градиент функционала невязки J . Дадим аргументу $q \in Q$ допустимое приращение h : $q+h \in Q$. Найдем приращение функционала $J(q+h) - J(q)$ и выделим в нем главную линейную часть. Преобразуем приращение функционала:

$$\begin{aligned} J(q+h) - J(q) &= \left\| k \frac{\partial T[q+h]}{\partial \mathbf{n}} - \xi_* \right\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 - \left\| k \frac{\partial T[q]}{\partial \mathbf{n}} - \xi_* \right\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \\ &= 2 \left\langle k \frac{\partial T[q+h]}{\partial \mathbf{n}} - k \frac{\partial T[q]}{\partial \mathbf{n}}, k \frac{\partial T[q]}{\partial \mathbf{n}} - \xi_* \right\rangle_{L_2(\Gamma_1)} + \left\| k \frac{\partial T[q+h]}{\partial \mathbf{n}} - k \frac{\partial T[q]}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \\ &= 2 \left\langle k \frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}}, k \frac{\partial T[q]}{\partial \mathbf{n}} - \xi_* \right\rangle_{L_2(\Gamma_1)} + A, \\ 0 \leq A &= \left\| k \frac{\partial (T[q+h] - T[q])}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \leq \lambda \|T[q+h] - T[q]\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \leq \kappa_1 \|h\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \kappa_1 = \lambda \nu_2^2, \\ A &= o(\|h\|_{L_2(\Omega)}). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Разность решений $z = T[q+h] - T[q]$ удовлетворяет краевой задаче

$$\operatorname{div}(k \nabla z) - (\mathbf{u}, \nabla z) - qz - hT[q] - hz = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (6.2)$$

$$z = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Умножим (6.2) на пробную скалярную функцию $w = w(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, результат проинтегрируем по области Ω , воспользуемся формулой интегрирования по частям, формулами Грина и учтем граничные условия для z и свойства векторной функции $\mathbf{u}$. В результате получим

$$\int_{\Omega} z (\operatorname{div}(k \nabla w) + (\mathbf{u}, \nabla w) - qw) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} hT[q]w d\mathbf{x} - \int_{\Omega} hzw d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} k \frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}} w d\Gamma = 0. \quad (6.3)$$

Пусть функция w удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}(k \nabla w) + (\mathbf{u}, \nabla w) - qw = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (6.4)$$

и граничным условиям

$$w = 2 \left(k \frac{\partial T[q]}{\partial \mathbf{n}} - \xi_* \right), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (6.5)$$

$$w = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_1. \quad (6.6)$$

Систему (6.4)–(6.6) назовем сопряженной задачей к задаче (1.1), (1.2). Поскольку далее будет важна зависимость решения сопряженной задачи от параметра $q \in Q$, то это решение иногда будем обозначать символом $w = w[q]$.

Из (6.3)–(6.6) следует

$$\int_{\Gamma_1} k \frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}} w d\Gamma = \int_{\Gamma_1} k \frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}} 2 \left(k \frac{\partial T[q]}{\partial \mathbf{n}} - \xi_* \right) d\Gamma = \int_{\Omega} h T[q] w d\mathbf{x} + \int_{\Omega} h z w d\mathbf{x} = \int_{\Omega} h T[q] w d\mathbf{x} + B,$$

$$0 \leq |B| = \left| \int_{\Omega} h z w d\mathbf{x} \right| \leq \|w\|_{L_{\infty}(\Omega)} \nu_1 \|h\|_{L_2(\Omega)}^2 = \kappa_2 \|h\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \kappa_2 = \nu_1 \|w\|_{L_{\infty}(\Omega)},$$

или

$$\begin{aligned} 0 \leq |B| &= \left| \int_{\Omega} h z w d\mathbf{x} \right| \leq \int_{\Omega} |h z w| d\mathbf{x} \leq \|h\|_{L_2(\Omega)} \|z w\|_{L_2(\Omega)} = \|h\|_{L_2(\Omega)} \left(\int_{\Omega} (z w)^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \\ &= \|h\|_{L_2(\Omega)} \left(\int_{\Omega} z (z w^2) d\mathbf{x} \right)^{1/2} \leq \|h\|_{L_2(\Omega)} \left(\|z\|_{L_2(\Omega)} \|z w^2\|_{L_2(\Omega)} \right)^{1/2} \\ &\leq \|h\|_{L_2(\Omega)} C_3^{-1/2} \nu_1^{1/2} \|h\|_{L_2(\Omega)}^{1/2} \left(\|z w^2\|_{L_2(\Omega)} \right)^{1/2} = C_3^{-1/2} \nu_1^{1/2} \|h\|_{L_2(\Omega)}^{3/2} \left(\|z w^2\|_{L_2(\Omega)} \right)^{1/2} \\ &\leq C_3^{-1/2} \nu_1^{1/2} \|h\|_{L_2(\Omega)}^{3/2} \|z\|_{C(\bar{\Omega})}^{1/2} \|w\|_{L_4(\Omega)} \leq C_3^{-1/2} \nu_1^{1/2} \|h\|_{L_2(\Omega)}^{3/2} \kappa^{1/2} C_5^{-1/2} \|z\|_{H_0^2(\Omega)}^{1/2} \|w\|_{L_4(\Omega)} \\ &\leq (C_3 C_5)^{-1/2} \nu_1^{1/2} \kappa^{1/2} \|h\|_{L_2(\Omega)}^{3/2} \nu_2^{1/2} \|h\|_{L_2(\Omega)}^{1/2} \|w\|_{L_4(\Omega)} = \kappa_3 \|h\|_{L_2(\Omega)}^2, \\ \kappa_3 &= (C_3 C_5)^{-1/2} (\nu_1 \nu_2)^{1/2} \kappa^{1/2} \|w\|_{L_4(\Omega)}, \\ B &= o(\|h\|_{L_2(\Omega)}). \end{aligned}$$

Тогда из равенства (6.1) вытекает

$$J(q+h) - J(q) = \int_{\Omega} h T[q] w d\mathbf{x} + o(\|h\|_{L_2(\Omega)}), \quad (6.7)$$

точнее,

$$J(q+h) - J(q) = \int_{\Omega} h T[q] w d\mathbf{x} + \kappa_4 \|h\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad (6.8)$$

$$\kappa_4 = \kappa_4(w) = \text{const}(w) > 0.$$

Таким образом, градиент целевого функционала вычисляется по формуле

$$\nabla J(q) = T[q] w[q],$$

где $w = w[q]$ — решение сопряженной задачи (6.4)–(6.6).

Прямая и сопряженная задачи обладают следующим свойством.

Теорема 6.1. Для любого элемента $q \in Q$ выполняется равенство

$$\int_{\Gamma_1} k \frac{\partial T[q]}{\partial \mathbf{n}} w[q] d\Gamma = \int_{\Omega} f w[q] d\mathbf{x}.$$

Доказательство. Умножим уравнение (1.1) на решение $w = w[q]$ сопряженной краевой задачи (6.4)–(6.6), результат проинтегрируем по области Ω . Перебросим все производные на функцию w , воспользовавшись формулой интегрирования по частям и формулами Грина. Учитывая граничные условия для $T[q]$ и $w[q]$, свойства векторной функции $\mathbf{u}$ и равенство (6.4), получим равенство из формулировки теоремы.

Теорема доказана.

7. Необходимое условие минимума функционала невязки

Из (6.7) и (6.8) вытекает следующее условие минимума функционала невязки на Q , которое сформулируем в виде теоремы.

Теорема 7.1. *Для минимизирующего элемента $q_* \in Q_*$ и любого элемента $q \in Q$ выполняется неравенство*

$$\langle \nabla J(q_*), q - q_* \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} T[q_*] w[q_*] (q - q_*) dx \geq 0.$$

Необходимое условие минимума функционала невязки можно представить в форме интегрального принципа минимума

$$\int_{\Omega} T[q_*] w[q_*] q_* dx = \min \left\{ \int_{\Omega} T[q_*] w[q_*] q dx : q \in Q \right\}$$

или в виде локального принципа минимума

$$T[q_*](x) w[q_*](x) q_*(x) = \min \left\{ T[q_*](x) w[q_*](x) s : s \in [0, \mu_4] \right\}, \quad x \in \Omega.$$

8. Методы минимизации функционала невязки

Для решения вариационной задачи (5.1) часто применяются градиентные методы [3; 17; 18]. Классическая формула градиентного спуска имеет вид [17, гл. 8, § 4; 3, § 2.6]

$$q^{(n+1)} = q^{(n)} - \lambda^{(n)} \nabla J(q^{(n)}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.1)$$

где $q^{(0)}$ — начальное приближение; $\lambda^{(n)}$ — шаг спуска по минус градиенту; $\nabla J(q^{(n)})$ — градиент функционала J в точке $q^{(n)}$.

Различные способы выбора шага спуска описаны в [17, гл. 5, § 1; 3, § 2.6]. Учитывая (6.8), при использовании градиентного метода наискорейшего спуска шаг спуска вычисляется по формуле [17, с. 540; 3, с. 62]

$$\lambda^{(n)} = \frac{1}{2 \kappa_4^{(n)}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.2)$$

Согласно градиентному методу минимальных ошибок шаг спуска можно вычислять по формуле [3, с. 62]

$$\lambda^{(n)} = \frac{J(q^{(n)})}{\|\nabla J(q^{(n)})\|_{L_2(\Omega)}^2} \quad (\nabla J(q^{(n)}) \neq 0), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.3)$$

Из теорем 2.1, 2.3 и результатов работы [19] следует, что градиент функционала невязки удовлетворяет условию Липшица

$$\begin{aligned} \|\nabla J(q_1) - \nabla J(q_2)\|_{L_2(\Omega)} &\leq \|w[q_1] (T[q_1] - T[q_2])\|_{L_2(\Omega)} + \|T[q_2] (w[q_1] - w[q_2])\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq \|w[q_1]\|_{L_2(\Omega)} \|T[q_1] - T[q_2]\|_{C(\overline{\Omega})} + \|T[q_2]\|_{C(\overline{\Omega})} \|w[q_1] - w[q_2]\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq \left(\overline{C}_1 \|f\|_{L_2(\Omega)} + \overline{C}_2 \|k \frac{\partial T[q_1]}{\partial \mathbf{n}} - \xi_*\|_{L_2(\Gamma_1)} \right) \kappa \|T[q_1] - T[q_2]\|_{W_2^2(\Omega)} \\ &\quad + \kappa \|T[q_2]\|_{W_2^2(\Omega)} \|w[q_1] - w[q_2]\|_{L_2(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\leq (\overline{C}_1 \|f\|_{L_2(\Omega)} + \overline{C}_2 [k_2 \lambda C_6^{1/2} C_5^{-1/2} \|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\xi_*\|_{L_2(\Gamma_1)}]) \varkappa C_5^{-1/2} \nu_2 \|q_1 - q_2\|_{L_2(\Omega)} \\ + \varkappa C_5^{-1/2} \|f\|_{L_2(\Omega)} \Upsilon \|q_1 - q_2\|_{L_2(\Omega)} \leq \Lambda \|q_1 - q_2\|_{L_2(\Omega)}.$$

В случае липшицева градиента шаг спуска можно выбирать из условия [17, с. 540]

$$0 < \varepsilon_0 \leq \lambda^{(n)} \leq \frac{2}{\Lambda + 2\varepsilon}, \quad (8.4)$$

где ε_0 и ε — положительные числа, являющиеся параметрами метода.

При использовании градиентного метода (8.1) в любом из вариантов (8.2)–(8.4) выбора шага спуска при любом начальном приближении $q^{(0)} \in Q$ последовательность $\{J(q^{(n)})\}$ монотонно убывает и сходится к некоторому неотрицательному числу. В случае наискорейшего спуска дополнительно $\|\nabla J(q^{(n)})\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0$ и $q^{(n)} \rightarrow Q_*$ в $L_2(\Omega)$.

9. Численное моделирование решения обратной задачи

Для численного моделирования задачи (5.1) рассмотрим случай $m = 2$, $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, $k = 1$, $\mathbf{u} = 0$, $f = -1$, $0 \leq q \leq 2$, $\Gamma_1 = \{(x_1, 1) : 0 < x_1 < 1\}$.

Пусть требуется восстановить функцию

$$q_* = q_*(x_1) = 1 + \frac{1}{2} \sin(2\pi x_1).$$

В качестве начального приближения принималась функция $q^{(0)} = q^{(0)}(x_1) = 1$, $0 < x_1 < 1$. Результаты измерений зашумлялись равномерно распределенной случайной величиной

$$\xi(x_1) = \xi_*(x_1) + 10^{-5} \text{rand}(x_1), \quad -1 < \text{rand}(x_1) < 1, \quad x_1 \in [0, 1].$$

Для численного моделирования решения обратной задачи были разработаны программные коды в пакете OpenFOAM. В области Ω строилась сетка из 10^4 прямоугольных ячеек. Для аппроксимации краевых задач (1.1), (1.3) и (6.4)–(6.6) применялся метод конечных объемов. Шаг спуска в методе градиентного спуска выбирался в виде (8.3).

На рис. 2 представлены графики функций $q_* = q_*(x_1)$, $0 < x_1 < 1$; $T_* = T[q_*](\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$; $\xi_* = \xi_*(x_1)$, $0 < x_1 < 1$.

На рис. 3 на вертикальных осях откладываются: невязка $J_n = J(q^{(n)})$, квадрат нормы градиента $\nabla_n = \|\nabla J(q^{(n)})\|_{L_2(\Omega)}^2$, и погрешность $\delta_n = \|q^{(n)} - q_*\|_{L_2(\Omega)}$. На горизонтальных осях откладываются номера итераций. Построенные приближения доставляют решение обратной задаче менее чем за 15 итераций с относительной погрешностью ≈ 0.0036 ($\delta_n/\|q_*\|_{L_2(\Omega)}$). Время расчетов 100 итераций на одном ядре Intel Xeon 2.2 ГГц равно 3 с. Далее итерационный процесс на данной сетке стабилизируется и не приводит к заметному уменьшению погрешности восстановления. При дальнейшем измельчении сетки погрешность вычислений уменьшается.

Далее представлены результаты решения обратной задачи по восстановлению функции

$$q_* = q_*(x_1, x_2) = 1 + \frac{1}{2} \sin(4\pi x_1).$$

В качестве начального приближения принималась функция $q^{(0)} = 1$. Результаты измерений зашумлялись равномерно распределенной случайной величиной

$$\xi(x_1) = \xi_*(x_1) + 10^{-3} \text{rand}(x_1), \quad -1 < \text{rand}(x_1) < 1, \quad x_1 \in [0, 1].$$

Для решения вариационной задачи (5.1) применялся метод проекции градиента:

$$q^{(n+1)} = Pr(q^{(n)} - \lambda^{(n)} \nabla J(q^{(n)})), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

шаг спуска в градиентном методе выбирался следующим образом: $\lambda^{(n)} = \frac{\max |q^{(n)}|}{\max |\nabla J(q^{(n)})|}$.

На рис. 4 на вертикальных осях откладываются: невязка $J_n = J(q^{(n)})$, норма градиента $\nabla_n = \|\nabla J(q^{(n)})\|_{L_2(\Omega)}$, погрешность $\delta_n = \|q^{(n)} - q_*\|_{L_2(\Omega)}$. На горизонтальных осях откладываются номера итераций. Графики при расчетах с зашумленными данными изображены пунктирными линиями. Построенные приближения доставляют решение обратной задаче менее чем за 150 итераций с относительной погрешностью ≈ 0.085 ($\delta_n / \|q_*\|_{L_2(\Omega)}$). Время расчетов 300 итераций на одном ядре AMD Ryzen 2.3 ГГц равно 11 мин. Далее итерационный процесс на данной сетке стабилизируется и не приводит к заметному уменьшению погрешности восстановления. При дальнейшем измельчении сетки погрешность вычислений уменьшается.

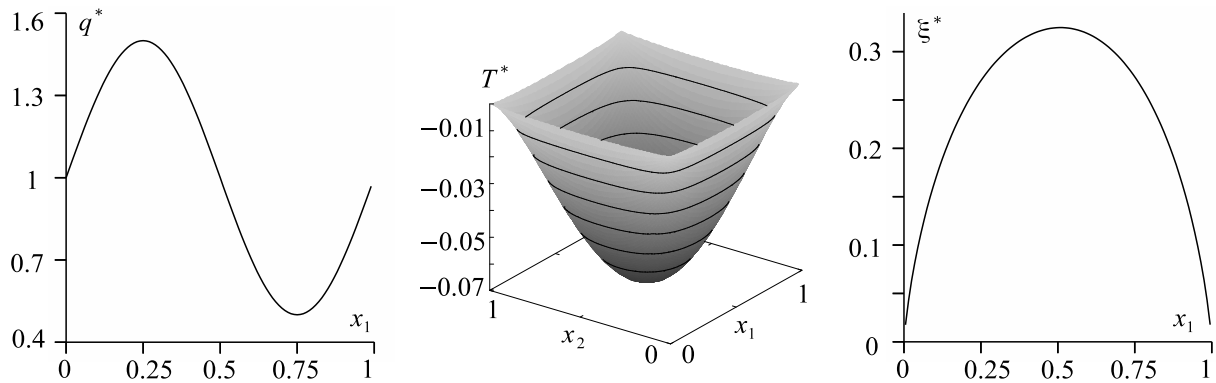


Рис. 2

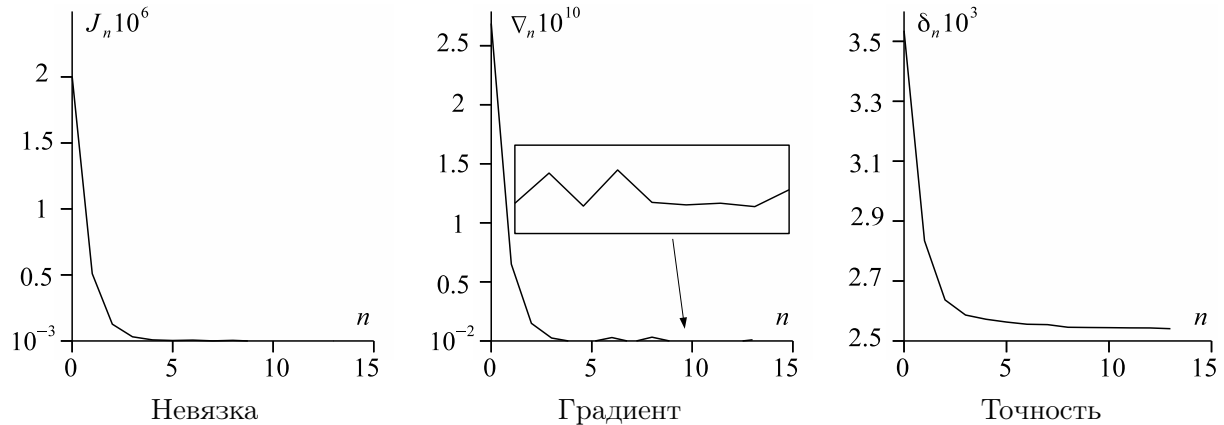


Рис. 3

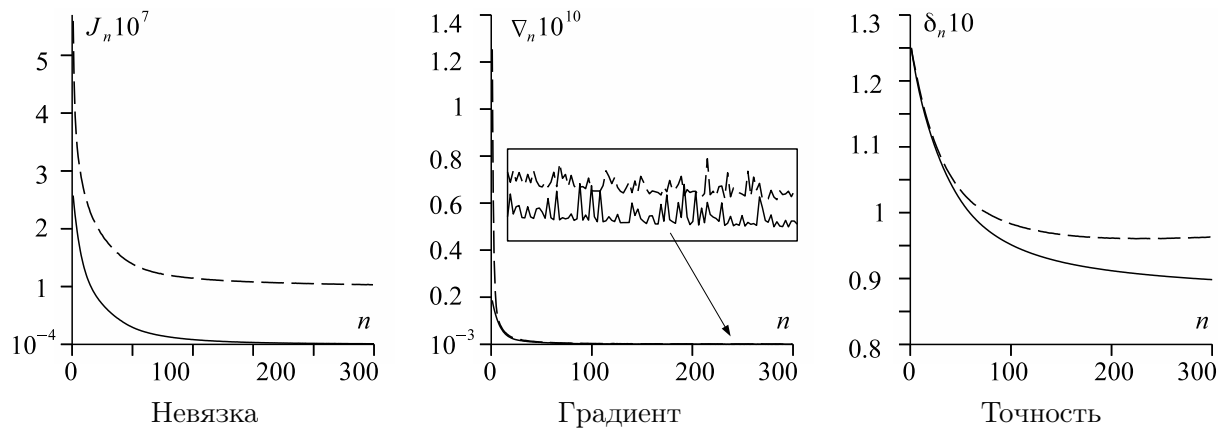


Рис. 4

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
2. Иванов В.К., Васин В.К., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и их приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
3. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. 457 с.
4. Короткий А.И., Ковтунов Д.А. Реконструкция граничных режимов в обратной задаче тепловой конвекции высоковязкой жидкости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 2. С. 88–97.
5. Короткий А.И., Цепелев И.А., Исмаил-Заде А.Т. Ассимиляция данных о свободной поверхности потока жидкости для нахождения ее вязкости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, № 2. С. 143–157. doi: 10.21538/0134-4889-2022-28-2-143-157
6. Короткий А.И., Цепелев И.А. Ассимиляция граничных данных для восстановления коэффициента поглощения в модели стационарной реакции-конвекции-диффузии // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 2. С. 87–103. doi: 10.21538/0134-4889-2023-29-2-87-103
7. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961, 652 p.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
9. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: ФМ, 1961. 203 с.
10. Алексеев Г.В., Терешко Д.А. Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008. 365 с.
11. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
12. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
13. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 392 с.
14. Adams R.A. Sobolev spaces. New York: Academic Press, 1975. 268 p.
15. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 336 с.
16. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 590 с.
17. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
18. Nocedal J., Wright S.J. Numerical Optimization. New York: Springer, 1999. 664 p.
19. Короткий А.И., Литвиненко А.Л. Разрешимость одной смешанной краевой задачи для стационарной модели реакции-конвекции-диффузии // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 1. С. 106–120. doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-106-120

Поступила 26.05.2024

После доработки 10.06.2024

Принята к публикации 17.06.2024

Короткий Александр Илларионович

д-р физ.-мат. наук, профессор

зав. отделом

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: korotkii@imm.uran.ru

Стародубцева Юлия Владимировна

канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: starodubtsevayv@yandex.ru

REFERENCES

1. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. *Solutions of Ill-Posed Problems*. Winston and Sons, Washington DC, 1977, 137 p. ISBN:0470991240. Original Russian text published in Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach*, Moscow: Nauka Publ., 1979, 288 p.

2. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of Linear Ill-Posed Problems and its Applications*. Utrecht: VSP Publ., 2002. 281 p. ISBN 10: 906764367X. Original Russian text published in Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ih prilozheniya*, Moscow: Nauka Publ., 1978, 206 p.
3. Kabanikhin S.I. *Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications*. Walter de Gruyter, 2011 459 p. ISBN: 3110224011, 9783110224016. Original Russian text published in Kabanikhin S.I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi*, Novosibirsk: Sibirskoe Nauchnoe Izdatel'stvo, 2009, 457 p.
4. Korotkii A.I., Kovtunov D.A. Reconstruction of boundary regimes in the inverse problem of thermal convection of a high-viscosity fluid. *Proc. Steklov Inst. Math*, 2006, vol. 255, suppl. 2. P. 81–92. doi: 10.1134/S0081543806060071
5. Korotkii A.I., Tsepelev I.A., Ismail-Zadeh A.T. Assimilating data on the free surface of a fluid flow to constrain its viscosity. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2022, vol. 319, suppl. 1, pp. S162–S174. doi: 10.1134/S0081543822060141
6. Korotkii A.I., Tsepelev I.A. Assimilation of boundary data for reconstructing absorption coefficient in a model of stationary reaction-convection-diffusion. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2023, vol. 321, suppl. 1, pp. S138–S153. doi: 10.1134/S0081543823030136
7. Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Oxford: Clarendon Press, 1961, 652 p. ISBN: 048664071X.
8. Landau L.D., Lifshitz E. *Fluid mechanics*. Oxford: Pergamon Press, 1987, 539 p. ISBN: 9781483161044. Original Russian text published in Landau L.D., Lifshits E.M. *Gidrodinamika*, Moscow: Nauka Publ., 1986, 736 p.
9. Ladyzhenskaya O.A. *The mathematical theory of viscous incompressible flow*. NY: Gordon and Breach, 1987, 224 p. ISBN: 0677207603. Original Russian text published in Ladyzhenskaya O.A. *Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoi neszhimaemoi zhidkosti*, Moscow: Nauka Publ., 1970, 288 p.
10. Alekseev G.V., Tereshko D.A. *Analiz i optimizatsiya v gidrodinamike vyazkoi zhidkosti* [Analysis and optimization in viscous fluid dynamics]. Vladivostok: Dal'nauka Publ., 2008, 365 p. ISBN 5804410458
11. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. *Linear and quasilinear elliptic equations*. NY, London: Acad. Press, 1968, 495 p.
12. Ladyzhenskaya O.A. *The boundary value problems of mathematical physics*. Berlin, Heidelberg, NY: Springer-Verlag, 1985, 322 p. doi: 10.1007/978-1-4757-4317-3
13. Mikhailov V.P. *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Partial differential equations]. Moscow: Nauka Publ., 1976, 392 p.
14. Adams R.A. *Sobolev spaces*. NY: Acad. Press, 1975, 268 p.
15. Sobolev S.L. *Some application of functional analysis in mathematical physics*. Providence: Amer. Math. Soc., 1991, 286 p. ISBN 5-02-013756-1
16. Rektorys K. *Variatsionnye metody v matematicheskoi fizike i tekhnike* [Variational methods in mathematics, science and engineering]. Moscow: Mir Publ., 1985, 590 p.
17. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii*. Moscow: Faktorial Press, 2002, 824 p. ISBN 5-88688-056-9.
18. Nocedal J., Wright S.J. *Numerical Optimization*. NY: Springer, 1999, 664 p.
19. A.I. Korotkii, A.L. Litvinenko. Solvability of a mixed boundary value problem for a stationary reaction-convection-diffusion model. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 1, pp. 106–120. doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-106-120

Received May 26, 2024

Revised June 10, 2024

Accepted June 17, 2024

Alexander Illarionovich Korotkii, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: korotkii@imm.uran.ru .

Yulia Vladimirovna Starodubtseva, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: starodubtsevayv@yandex.ru .

Cite this article as: A. I. Korotkii, Yu. V. Starodubtseva. Reconstruction of the absorption coefficient in a model of stationary reaction-convection-diffusion. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 166–181 .