

УДК 517.977

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ОСЛАБЛЕННЫМ
ФАЗОВЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ

С. М. Асеев

Рассматривается задача оптимального управления при наличии заданного открытого множества “нежелательных” состояний системы. Постановка данной задачи тесно связана с постановкой стандартной задачи оптимального управления с фазовым ограничением и может рассматриваться как ее ослабление. Изучается связь между этими задачами. Представлены недавно полученные необходимые условия оптимальности первого порядка для рассматриваемой задачи. Приведен иллюстрирующий пример.

Ключевые слова: оптимальное управление, дифференциальное включение, принцип максимума Понтрягина, усиленное включение Эйлера — Лагранжа, фазовое ограничение, разрывный интегрант, зона риска.

S. M. Aseev. An optimal control problem with a relaxed state constraint.

We explore an optimal control problem in the context of a specified open set representing “undesirable” system states. This problem statement is closely linked to the standard optimal control problem with a state constraint and can be viewed as a relaxation of the latter. The interrelation between these problems is examined. The recently derived necessary first-order optimality conditions for the discussed problem are presented. Additionally, an illustrative example is given.

Keywords: optimal control, differential inclusion, Pontryagin’s maximum principle, refined Euler–Lagrange inclusion, state constraint, discontinuous integrand, risk zone.

MSC: 49K15

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-3-14-29

1. Постановка задачи

Пусть заданы локально липшицева функция $\varphi: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, непрерывно дифференцируемая функция $\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$, непустые замкнутые множества M_0 и M_1 из $\mathbb{R}^n$, локально липшицеовое многозначное отображение $F: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ с непустыми выпуклыми компактными значениями, а также такое непустое открытое множество M из $\mathbb{R}^n$, что $G = \mathbb{R}^n \setminus M \neq \emptyset$. Предполагается, что для любого $x \in G$ касательный конус Кларка $T_G(x)$ к замкнутому множеству G в точке x имеет непустую внутренность (см. [1]).

Рассмотрим следующую задачу (P):

$$J(T, x(\cdot)) = \varphi(T, x(0), x(T)) + \int_0^T \lambda(x(t)) \delta_M(x(t)) dt \rightarrow \min, \quad (1.1)$$

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)), \quad (1.2)$$

$$x(0) \in M_0, \quad x(T) \in M_1. \quad (1.3)$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — значение фазовый вектор в момент времени $t \geq 0$, а $\delta_M(\cdot)$ — характеристическая функция множества M , т. е.

$$\delta_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M, \\ 0, & x \notin M. \end{cases}$$

Время окончания процесса управления $T > 0$ в задаче (P) будем считать свободным.

Абсолютно непрерывное решение $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ дифференциального включения (1.2), определенное на некотором интервале $[0, T]$, $T > 0$, будем называть допустимой траекторией в задаче (P) , если оно удовлетворяет концевым ограничениям (1.3). Заметим, что множество допустимых траекторий в задаче (P) не зависит ни от множества M , ни от функций $\varphi(\cdot)$ и $\lambda(\cdot)$, входящих в определение функционала (1.1). Оно полностью определяется дифференциальным включением (1.2) и концевыми ограничениями (1.3). Поэтому допустимую траекторию $x(\cdot)$ в задаче (P) можно рассматривать как допустимую траекторию дифференциального включения (1.2). Допустимая траектория $x_*(\cdot)$, определенная на соответствующем интервале $[0, T_*]$, $T_* > 0$, оптимальна в задаче (P) , если функционал (1.1) принимает на паре $(T_*, x_*(\cdot))$ свое минимальное значение на множестве всех таких пар.

В дальнейшем множество M будем интерпретировать как множество “нежелательных” состояний системы (зона риска), а множество G — как множество ее безопасных состояний (зона безопасности). Положительная функция $\lambda(\cdot)$ характеризует “нежелательность” нахождения допустимых траектории $x(\cdot)$ в различных состояниях x зоны риска M .

В оптимальном управлении рассмотрению ситуации, когда допустимые траектории системы должны находиться в заданном замкнутом множестве G ее безопасных состояний, обычно приводит к постановке следующей задачи с фазовым ограничением (см. гл. 6 [2]).

Задача (Q) :

$$\tilde{J}(T, x(\cdot)) = \varphi(T, x(0), x(T)) \rightarrow \min, \quad (1.4)$$

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)),$$

$$x(t) \in G, \quad t \in [0, T], \quad (1.5)$$

$$x(0) \in M_0, \quad x(T) \in M_1.$$

Здесь все данные в задаче (Q) те же самые, что и в задаче (P) , $G = \mathbb{R}^n \setminus M$. Единственное отличие задачи (Q) от (P) состоит в том, что все ее допустимые траектории $x(\cdot)$ должны удовлетворять дополнительному фазовому ограничению (1.5). Оптимальность допустимой в (Q) траектории $x_*(\cdot)$ понимается стандартным образом, в смысле минимизации функционала (1.4) на множестве всех пар $(T, x(\cdot))$, где $x(\cdot)$ — допустимая в задаче (Q) траектория, а T — соответствующее время окончания процесса управления.

Заметим, что фазовое ограничение (1.5) в задаче (Q) может интерпретироваться как условие строгого неприятия нахождения допустимой траектории $x(\cdot)$ в зоне риска M . Поскольку все допустимые траектории задачи (Q) являются допустимыми в задаче (P) , то последняя может рассматриваться как задача с ослабленным фазовым ограничением.

Наряду с задачами (P) и (Q) будем рассматривать также стандартную задачу оптимального управления для дифференциального включения без фазового ограничения.

Задача (P_0) :

$$\tilde{J}(T, x(\cdot)) = \varphi(T, x(0), x(T)) \rightarrow \min, \quad (1.6)$$

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)),$$

$$x(0) \in M_0, \quad x(T) \in M_1.$$

Здесь все данные в задаче (P_0) те же самые, что и в задаче (P) . Множество допустимых траекторий в задаче (P_0) совпадает с множеством допустимых траекторий в задаче (P) , а оптимальность допустимой в (P_0) траектории $x_*(\cdot)$ понимается в смысле минимизации функционала (1.6) на множестве всех пар $(T, x(\cdot))$, где $x(\cdot)$ — допустимая траектория, а T — соответствующее время окончания процесса управления.

Во многих возникающих в приложениях задачах оптимального управления (в экономике, экологии, при рассмотрении процессов управления техническими системами) нахождение

траекторий системы в множестве ее нежелательных состояний бывает физически возможно, а иногда в силу расположения множеств M_0 и M_1 относительно множества M (например, в случае, когда одно из множеств M_0 или M_1 содержится в M , а другое лежит в $\mathbb{R}^n \setminus M$) даже неизбежно. Данное обстоятельство приводит к необходимости рассмотрения задачи (P) , допускающей нарушение фазовых ограничений. При этом разрывность функции $\delta_M(\cdot)$ по фазовой переменной x в интегральной части функционала (1.1) выводит задачу (P) (в отличие от задачи (Q)) за рамки стандартной теории. А именно, для любого фиксированного $T > 0$ фазовое ограничение (1.5) может быть представлено как ограничение типа неравенства в пространстве непрерывных функций $C([0, T], \mathbb{R}^n)$. Поэтому задача (Q) может рассматриваться как экстремальная задача в банаховом пространстве с ограничениями типа равенств и неравенств (см. [3]). В то же время разрывность характеристической функции $\delta_M(\cdot)$ в (1.1) делает такое сведение в общем случае (без каких-либо априорных предположений о регулярности оптимальной траектории) невозможным и препятствует использованию какой-либо инфинитиземальной техники при получении необходимых условий оптимальности для задачи (P) .

Впервые задача оптимального управления, включающая в свою постановку возможность попадания допустимой траектории $x(\cdot)$ в заданное множество M нежелательных состояний системы, как задача “об оптимальном прохождении через заданное множество” была рассмотрена в работе [4] в предположении, что динамика системы линейная, множество M выпуклое, а рассматриваемая оптимальная траектория удовлетворяет условию регулярности, состоящему в конечности числа моментов времени ее пересечения границы множества M . Кроме того, в [4] предполагалось, что множества начальных состояний M_0 и конечных состояний M_1 не пересекаются с множеством M . В этом случае рассматриваемая задача была сведена к задаче математического программирования и соответствующие необходимые условия оптимальности были получены при помощи общего правила множителей Лагранжа (подробнее см. [4]).

Позднее аналогичная задача минимизации времени движения системы вне заданного замкнутого множества G как “задача минимизации времени кризиса” (со свободным правым концом) рассматривалась в работе [5] в рамках так называемой “теории выживаемости” [6]. Основной результат работы [5] дает описание надграфика функции минимального времени кризиса в терминах ядра выживаемости для некоторой расширенной системы (подробнее см. [5]). Необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина для задачи минимизации времени кризиса были получены в работах [7;8] при выполнении априорных условий регулярности, предполагающих, в частности, что рассматриваемая оптимальная траектория $x_*(\cdot)$ пересекает границу множества M не более чем в конечном числе моментов времени. Отметим, что случай, когда множество M замкнуто, изучался также в работах [9;10].

Основной целью настоящей работы является представление результатов автора последних лет, полученных для задачи (P) в общем случае, без каких-либо априорных предположений о поведении оптимальной траектории.

Дальнейшее изложение организовано следующим образом. В разд. 2 приводятся условия, гарантирующие существования решения в задаче (P) , а также изучается связь этой задачи с задачей оптимального управления с фазовым ограничением (Q) . В разд. 3 приведены необходимые условия оптимальности для задачи (P) , сформулированные в виде усиленного включения Эйлера — Лагранжа и обсуждаются свойства их невырожденности и поточечной нетривиальности. В разд. 4 рассмотрен иллюстрирующий пример.

2. Связь с задачей с фазовым ограничением

Следующее условие характеризует равномерный рост терминальной части функционала (1.1) по переменной T .

$$(A1) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{(x_0, x_1) \in M_0 \times M_1} \varphi(T, x_0, x_1) = \infty.$$

Нетрудно показать, что если выполняется условие $(A1)$ и в задаче (P) существует по крайней мере одна допустимая траектория $\hat{x}(\cdot)$, заданная на соответствующем интервале $[0, \hat{T}]$,

$\hat{T} > 0$, то произвольная допустимая траектория $x(\cdot)$ может рассматриваться как подозрительная на оптимальность в этой задаче только в том случае, когда для соответствующего ей момента времени $T > 0$ окончания процесса управления выполняется неравенство

$$T \leq \tilde{T} = \sup \left\{ \theta > 0: \inf_{(x_0, x_1) \in M_0 \times M_1} \varphi(\theta, x_0, x_1) \leq J(\hat{T}, \hat{x}(\cdot)) \right\}. \quad (2.1)$$

Следующий результат дает условия существования решения в задаче (P).

Теорема 1. Пусть по крайней мере одно из множеств M_0 или M_1 — компакт, $M_0 \cap M_1 = \emptyset$, выполняется условие (A1) и, кроме того, существует по крайней мере одна определенная на соответствующем интервале времени $[0, \hat{T}]$, $\hat{T} > 0$, допустимая траектория $\hat{x}(\cdot)$ в задаче (P). Предположим также, что любая траектория $x(\cdot)$ дифференциального включения (1.2), которая задана на некотором интервале $[\tau_1, \tau_2]$, $0 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq \tilde{T}$, где величина $\tilde{T}$ определяется равенством в (2.1) и удовлетворяет по крайней мере одному из концевых условий $x(\tau_1) \in M_0$ или $x(\tau_2) \in M_1$, может быть продолжена как траектория дифференциального включения (1.2) на весь интервал $[0, \tilde{T}]$. Тогда существует оптимальная допустимая траектория $x_*(\cdot)$ в задаче (P).

Доказательство теоремы 1 основано на использовании условия (A1), свойстве полунепрерывности снизу интегральной части функционала (1.1) и соображениях компактности (подробнее см. [11]). $\square$

Заметим, что если выполняются условия теоремы 1 и, кроме того, существует по крайней мере одна определенная на соответствующем интервале времени $[0, T]$, $T > 0$, допустимая траектория $x(\cdot)$ в задаче (Q), то в силу теоремы Филиппова (Theorem 9.2.i, [12]) в задаче (Q) также существует оптимальная допустимая траектория, которая не обязательно оптимальна в (P).

Для произвольного $\lambda > 0$ обозначим через (P_λ) задачу (P) с постоянной функцией $\lambda(\cdot)$: $\lambda(x) \equiv \lambda$, $x \in \mathbb{R}^n$. Следующий результат показывает, что задача (P_λ) занимает промежуточное положение между задачами (P_0) без фазовых ограничений и задачами (Q) с фазовым ограничением.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1 и, кроме того, существует по крайней мере одна допустимая траектория $\hat{x}(\cdot)$ в задаче (Q). Пусть последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ положительных чисел λ_k такова, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$ ($\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty$) и $\{x_k(\cdot)\}_{k=1}^\infty$ — последовательность оптимальных траекторий $x_k(\cdot)$ в задачах (P_{λ_k}) , каждая из которых определена на соответствующем оптимальном интервале времени $[0, T_k]$, $T_k > 0$. Тогда переходя, если требуется, к подпоследовательности, имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = T_* > 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(\cdot) = x_*(\cdot) \text{ в } C([0, T_*], \mathbb{R}^n), \quad (2.2)$$

где $x_*(\cdot)$ — некоторая оптимальная траектория в задаче (P_0) (в задаче (Q)), а $T_* > 0$ — соответствующее ей оптимальное в этой задаче время.

Доказательство. Для определенности предположим, что M_0 — компакт. Случай, когда компактно множество M_1 , рассматривается аналогично. Согласно теореме 1 для любого k в задаче (P_{λ_k}) существует оптимальная траектория $x_k(\cdot)$, определенная на соответствующем оптимальном интервале $[0, T_k]$, $T_k > 0$. Ввиду компактности одного из множеств M_0 или M_1 и условия $M_0 \cap M_1 = \emptyset$ существует такое $r > 0$, что для любого $k = 1, 2, \dots$ выполняется оценка $r \leq T_k \leq \tilde{T}$, где число $\tilde{T}$ определяется равенством в (2.1). Будем считать, что каждая траектория $x_k(\cdot)$ продолжена на весь интервал $[0, \tilde{T}]$ постоянной по непрерывности, т. е. $x_k(t) = x_k(T_k)$ при $t \in [T_k, \tilde{T}]$.

Далее, в силу продолжимости всех траекторий $x(\cdot)$ дифференциального включения (1.2), определенных на интервалах $[0, \tau] \subset [0, \tilde{T}]$, на весь интервал $[0, \tilde{T}]$ и удовлетворяющих условию $x(0) \in M_0$, множество всех таких траекторий является компактом в пространстве $C([0, \tilde{T}], \mathbb{R}^n)$ непрерывных на отрезке $[0, \tilde{T}]$ функций со значениями в $\mathbb{R}^n$ (см. теорему 3 в § 7 из [13]). Отсюда вытекает, что множество $\{x_k(\cdot)\}_{k=1}^\infty$ предкомпактно в пространстве $C([0, \tilde{T}], \mathbb{R}^n)$. Следовательно, переходя если требуется к подпоследовательности, не ограничивая общности, можно считать, что существует такая допустимая траектория $x_*(\cdot)$ (в задаче (P_λ) для любого $\lambda \geq 0$), определенная на интервале $[0, T_*]$, $r \leq T_* \leq \tilde{T}$, что для нее выполняются равенства (2.2).

Рассмотрим случай $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$. Докажем, что в этом случае траектория $x_*(\cdot)$ оптимальна в задаче (P_0) без фазового ограничения. Предположим, что это не так. Тогда найдутся такие допустимая для дифференциального включения (1.2) траектория $\bar{x}(\cdot)$, определенная на соответствующем интервале $[0, \bar{T}]$, $\bar{T} > 0$, и достаточно малое положительное число $\varepsilon > 0$, что

$$\varphi(\bar{T}, \bar{x}(0), \bar{x}(\bar{T})) + \varepsilon \int_0^{\bar{T}} \delta_M(\bar{x}(\cdot)) dt < \varphi(T_*, x_*(0), x_*(T_*)). \quad (2.3)$$

При всех достаточно больших k $\lambda_k \leq \varepsilon$ и в силу оптимальности траекторий $x_k(\cdot)$ в задаче (P_{λ_k}) имеем

$$\varphi(T_k, \bar{x}_k(0), x_k(T_k)) + \lambda_k \int_0^{T_k} \delta_M(x_k(t)) dt \leq \varphi(\bar{T}, \bar{x}(0), \bar{x}(\bar{T})) + \varepsilon \int_0^{\bar{T}} \delta_M(\bar{x}(\cdot)) dt.$$

Переходя в левой части последнего неравенства к пределу при $k \rightarrow \infty$, ввиду (2.2), предположения, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$, и условия (2.3) получаем противоречие. Таким образом, в этом случае $x_*(\cdot)$ — допустимая оптимальная траектория в задаче (P_0) , а T_* — соответствующее ей оптимальное время.

Рассмотрим теперь случай $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty$. Докажем, что траектория $x_*(\cdot)$ удовлетворяет фазовому ограничению (1.5). Предположим, что это не так. Тогда найдется такие $\tau \in (0, T_*)$ и $\delta > 0$, что $x_*(t) \in M$ при всех $t \in [\tau - \delta, \tau + \delta]$. Согласно (2.2) в этом случае, не ограничивая общности, можно считать, что $x_k(t) \in M$ при всех $t \in [\tau - \delta, \tau + \delta]$. Следовательно, в силу предположения о том, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty$, в данном случае получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\varphi(T_k, x_k(0), x_k(T_k)) + \lambda_k \int_0^{T_k} \delta_M(x_k(t)) dt \right] \rightarrow \infty \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Однако ввиду существования в задаче (Q) с фазовым ограничением допустимой траектории $\hat{x}(\cdot)$ и допустимости этой траектории в задаче (P_{λ_k}) при любом k имеем

$$\varphi(T_k, x_k(0), x_k(T_k)) + \lambda_k \int_0^{T_k} \delta_M(x_k(t)) dt \leq \varphi(\hat{T}, \hat{x}(0), \hat{x}(\hat{T})).$$

Получили противоречие. Таким образом, траектория $x_*(\cdot)$ является допустимой в задаче (Q) .

Докажем теперь, что эта траектория $x_*(\cdot)$ оптимальна в (Q) . Действительно, если это не так, то найдется такая допустимая в (Q) траектория $\bar{x}(\cdot)$, определенная на соответствующем ей интервале $[0, \bar{T}]$, $\bar{T} > 0$, и число $\varepsilon > 0$, что

$$\varphi(\bar{T}, \bar{x}(0), \bar{x}(\bar{T})) + \varepsilon < \varphi(T_*, x_*(0), x_*(T_*)). \quad (2.4)$$

В силу оптимальности траекторий $x_k(\cdot)$ в задачах (P_{λ_k}) и допустимости $\bar{x}(\cdot)$ в этих задачах имеем

$$\varphi(T_k, x_k(0), x_k(T_k)) + \lambda_k \int_0^{T_k} \delta_M(x_k(t)) dt \leq \varphi(\bar{T}, \bar{x}(0), \bar{x}(\bar{T})), \quad (2.5)$$

а согласно (2.2) справедливо равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(T_k, x_k(0), x_k(T_k)) = \varphi(T_*, x_*(0), x_*(T_*))$. Из последнего равенства ввиду (2.5) вытекает неравенство $\varphi(T_*, x_*(0), x_*(T_*)) \leq \varphi(\bar{T}, \bar{x}(0), \bar{x}(\bar{T}))$, что противоречит условию (2.4). Следовательно, траектория $x_*(\cdot)$ в этом случае оптимальна в задаче с фазовым ограничением (Q) . $\square$

Оказывается, что при некоторых дополнительных предположениях при всех достаточно больших значениях λ задачи (P_λ) и (Q) эквивалентны.

Для произвольной точки $\xi \in \partial G$ введем условие, характеризующее возможность уменьшения времени прохождения множества M для допустимой оптимальной траектории $x_\lambda(\cdot)$ в задаче (P_λ) , которая попадает на границу множества G вблизи точки ξ , за счет вариации ее конечных состояний $x_\lambda(0)$ и $x_\lambda(T_\lambda)$ и соответствующего времени T_λ окончания процесса управления.

(A2) Для произвольной точки $\xi \in \partial G$ существуют такие постоянные $\varepsilon > 0$ и $L > 0$, что для любой допустимой оптимальной траектории $x_\lambda(\cdot)$ в задаче (P_λ) , определенной на соответствующем интервале $[0, T_\lambda]$, $T_\lambda > 0$, и удовлетворяющей для некоторого $0 \leq a \leq T_\lambda$ условиям $x_\lambda(a) \in \partial G$, $\|x_\lambda(a) - \xi\| < \varepsilon$ и $\text{meas}\{t \in [0, T]: x_\lambda(t) \in M\} > 0$, существует такая определенная на некотором интервале $[0, \hat{T}]$, $\hat{T} > 0$, допустимая в (P_λ) траектория $\hat{x}(\cdot)$, что выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & |\hat{T} - T_\lambda| + \|\hat{x}(0) - x_\lambda(0)\| + \|\hat{x}(\hat{T}) - x_\lambda(T_\lambda)\| \\ & < L [\text{meas}\{t \in [0, T_\lambda]: x_\lambda(t) \in M\} - \text{meas}\{t \in [0, \hat{T}]: \hat{x}(t) \in M\}]. \end{aligned}$$

Следующее условие представляет собой более сильный вариант условия (A2).

(A3) Существует такая постоянная $L > 0$, что для любой допустимой оптимальной траектории $x_\lambda(\cdot)$ в задаче (P_λ) , определенной на соответствующем интервале $[0, T_\lambda]$, $T_\lambda > 0$, и удовлетворяющей условию $\text{meas}\{t \in [0, T]: x_\lambda(t) \in M\} > 0$, существует такая определенная на некотором интервале $[0, \hat{T}]$, $\hat{T} > 0$, допустимая в (P_λ) траектория $\hat{x}(\cdot)$, что выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & |\hat{T} - T_\lambda| + \|\hat{x}(0) - x_\lambda(0)\| + \|\hat{x}(\hat{T}) - x_\lambda(T_\lambda)\| \\ & < L [\text{meas}\{t \in [0, T_\lambda]: x_\lambda(t) \in M\} - \text{meas}\{t \in [0, \hat{T}]: \hat{x}(t) \in M\}]. \end{aligned}$$

Лемма 1. Пусть выполняется условие (A1) и у дифференциального включения (1.2) существует хотя бы одна допустимая траектория $\hat{x}(\cdot)$, определенная на соответствующем интервале $[0, \hat{T}]$. Предположим также, что хотя бы одно из множеств M_0 или M_1 компактно. Тогда условия (A2) и (A3) эквивалентны.

Доказательство. Из выполнения условия (A3) всегда следует выполнение (A2). Докажем, что в случае выполнения (A1) и компактности одного из множеств M_0 или M_1 из условия (A2) вытекает справедливость (A3). Действительно, в этом случае множество всех допустимых траекторий дифференциального включения (1.2) компактно в пространстве $C([0, \hat{T}], \mathbb{R}^n)$, где $\hat{T}$ определено в (2.1). Для каждой точки $\xi \in \partial G$ обозначим через $\varepsilon_\xi > 0$ и $L_\xi > 0$ соответствующие ей согласно (A2) постоянные. Тогда множество $\tilde{G}$ точек $\xi \in \partial G$, в ε_ξ -окрестностях $\mathbb{O}_\xi$ которых найдется допустимая оптимальная в (P) траектория $x(\cdot)$, попадающая на границу множества G , компактно. Поэтому из семейства окрестностей $\{\mathbb{O}_\xi\}$ можно выбрать конечное покрытие $\{\mathbb{O}_{\xi_i}\}_{i=1}^N$ компакта $\tilde{G}$. Положим $L = \max_{i=1, \dots, N} L_{\xi_i}$. Тогда для

любой допустимой оптимальной траектории $x_\lambda(\cdot)$ в задаче (P_λ) , определенной на соответствующем интервале $[0, T_\lambda]$, $T_\lambda > 0$, и удовлетворяющей условию $\text{meas}\{t \in [0, T]: x_\lambda(t) \in M\} > 0$, обязательно найдется такая точка ξ_i , $i \in \{1, \dots, N\}$, что эта траектория принадлежит границе множества G в ε_{ξ_i} -окрестности точки ξ_i . Поэтому для нее будет выполняться условие (A3) с выбранной постоянной $L > 0$. $\square$

Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 2 и условие (A2). Тогда существует такое $\hat{\lambda} \geq 0$, что для любого $\lambda > \hat{\lambda}$ задачи (P_λ) и (Q) эквивалентны, т. е. множества их допустимых оптимальных траекторий и соответствующие оптимальные значения функционалов совпадают.

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 3 из [11]. $\square$

Следующее условие характеризует управляемость в множестве G допустимых оптимальных траекторий в задаче (P_λ) , пересекающих множество M вблизи точек $\xi \in \partial G$.

(A2') Для произвольной точки $\xi \in \partial G$ существуют такие постоянные $\varepsilon > 0$ и $L > 0$, что для любой допустимой оптимальной траектории $x_\lambda(\cdot)$ в задаче (P_λ) , определенной на некотором интервале $[a, b]$, $0 \leq a < b \leq \tilde{T}$, и удовлетворяющей условиям $x_\lambda(a) \in \partial G$, $\|x_\lambda(a) - \xi\| < \varepsilon$, $x_\lambda(b) \in \partial G$, $\|x_\lambda(b) - \xi\| < \varepsilon$ и лежащей в M при $t \in (a, b)$, существует такая траектория $\hat{x}(\cdot)$ дифференциального включения (1.2), определенная на некотором интервале $[a, c]$, $a < c$, удовлетворяющая условиям $\hat{x}(a) = x(a)$, $\hat{x}(c) = x(b)$, и лежащая в G при $t \in [a, c]$, что выполняется неравенство $c - a < L(b - a)$.

Теорема 4. Пусть $M_0 \subset G$, $M_1 \subset G$ и выполняются условия теоремы 2. Тогда существует такое $\bar{\lambda} > 0$, что для всех $\lambda \geq \bar{\lambda}$ выполнение условия (A2') влечет выполнение условия (A2).

Доказательство. Предположим противное. Тогда согласно лемме 1 найдутся такие последовательность положительных чисел $\{L_N\}_{N=1}^\infty$, $\lim_{N \rightarrow \infty} L_N = \infty$, и последовательность допустимых оптимальных в (P_N) траекторий $\{x_N(\cdot)\}_{N=1}^\infty$, определенных на соответствующих интервалах $[0, T_N]$, $0 < T_N \leq \tilde{T}$, что $\text{meas}\{t: x_N(t) \in M\} > 0$, а для некоторой другой допустимой в (P_N) траектории $\hat{x}_N(\cdot)$, определенной на соответствующем интервале $[0, \hat{T}_N]$, $\hat{T}_N > 0$, выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & |\hat{T}_N - T_N| + \|\hat{x}_N(0) - x_N(0)\| + \|\hat{x}_N(T) - x_N(T_N)\| \\ & \geq L_N [\text{meas}\{t \in [0, T_N]: x_N(t) \in M\} - \text{meas}\{t \in [0, \hat{T}_N]: \hat{x}_N(t) \in M\}]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Поскольку $\text{meas}\{t: x_N(t) \in M\} > 0$, то для любого N найдется такое τ_N , что $x_N(\tau_N) > 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\lim_{N \rightarrow \infty} \tau_N = \tau \in (0, \tilde{T}]$. Далее, в силу теоремы 2, переходя к подпоследовательности, можно считать, что существует такая оптимальная в задаче (Q) траектория $x_*(\cdot)$, определенная на соответствующем интервале $[0, T_*]$, $T_* > 0$, что $\lim_{N \rightarrow \infty} T_N = T_*$ и $\lim_{N \rightarrow \infty} x_N(\cdot) = x_*(\cdot)$ в $C([0, T_*], \mathbb{R}^n)$. Переходя к подпоследовательности, получаем $\lim_{N \rightarrow \infty} x_N(\tau_N) = x_*(\tau)$. Поскольку $x_N(\tau_N) \in M$, то $\xi = x_*(\tau) \in \partial G$. Тогда при всех достаточно больших $N \geq N_\xi$ для каждой траектории $x_N(\cdot)$ на некотором интервале $[a_N, b_N]$, $0 \leq a_N < \tau_N < b_N \leq \tilde{T}$, имеем $x_N(a_N) \in \partial G$, $\|x_N(a) - \xi\| < \varepsilon$, $x_N(b_N) \in \partial G$, $\|x_N(b_N) - \xi\| < \varepsilon$ и $x_N(t) \in M$ при $t \in (a_N, b_N)$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $L > 0$ — постоянные, соответствующие точке ξ ввиду условия (A2'). Тогда существует такая допустимая (P_N) траектория $\hat{x}_N(\cdot)$, определенная на некотором интервале $[a_N, c_N]$, $a_N < c_N$, удовлетворяющая условиям $\hat{x}_N(a) = x_N(a)$, $\hat{x}_N(c) = x_N(b)$, и лежащая в G при $t \in [a_N, c_N]$, что выполняется неравенство

$$c_N - a_N \leq L\|x_N(b_N) - x_N(a_N)\| \leq \hat{L}_N(b_N - a_N).$$

В силу локальной липшицевости многозначного отображения $F(\cdot)$ и сходимости последовательности $\{x_N(\cdot)\}_{N=1}^\infty$ к $x_*(\cdot)$ в $C([0, T_*], \mathbb{R}^n)$ существуют такие натуральное N_ξ и постоянная $\hat{L} \geq 0$, что для любого $N \geq N_\xi$, не ограничивая общности, можно считать, что $\hat{L}_N < \hat{L}$ и, значит, выполняется неравенство $c_N - a_N < \hat{L}(b_N - a_N)$.

Для $N \geq N_\xi$ определим траекторию $\hat{x}_N(\cdot)$ дифференциального включения (1.2) на $[0, \hat{T}_N]$, $\hat{T}_N = T_N + c_N - b_N > 0$, следующим образом:

$$\hat{x}_N(t) = \begin{cases} x_N(t), & t \in [0, a_N], \\ \hat{x}_N(t), & t \in [a_N, c_N], \\ x_N(t + b_N - c_N), & t \in [c_N, T_N + c_N - b_N]. \end{cases}$$

Тогда $\hat{x}_N(0) = x_N(0) \in M_0$, $\hat{x}_N(\hat{T}_N) = x_N(T_N) \in M_1$. Следовательно, так определенная на интервале $[0, \hat{T}_N]$, $\hat{T}_N > 0$, траектория $\hat{x}_N(\cdot)$ дифференциального включения (1.2) является допустимой в задаче (P_N) . В силу определения траектории $\hat{x}(\cdot)$ получаем

$$\begin{aligned} |\hat{T}_N - T_N| + \|\hat{x}_N(0) - x_N(0)\| + \|\hat{x}_N(\hat{T}_N) - x_N(T_N)\| &= c_N - a_N < \hat{L}(b_N - a_N) \\ &= \hat{L} [\text{meas} \{t \in [0, T_N]: x_N(t) \in M\} - \text{meas} \{t \in [0, \hat{T}_N]: \hat{x}_N(t) \in M\}], \end{aligned}$$

что противоречит предположению (2.6). $\square$

В качестве следствия теорем 3 и 4 получаем следующий результат (см. теорему 4 из [11]).

Теорема 5. Пусть выполняются условия теоремы 2, условие $(A2')$ и, кроме того, $M_0 \subset G$ и $M_1 \subset G$. Тогда существует такое $\hat{\lambda} \geq 0$, что для любого $\lambda > \hat{\lambda}$ задачи (P_λ) и (Q) эквивалентны, т. е. множества их оптимальных траекторий и соответствующие оптимальные значения функционалов совпадают.

Доказательство вытекает из теорем 3 и 4. $\square$

3. Необходимые условия оптимальности для задачи (P)

Пусть $x_*(\cdot)$ — оптимальная допустимая траектория в задаче (P) , а $T_* > 0$ — соответствующее ей оптимальное время останова процесса управления.

Определим множества $\tilde{M}_0$ и $\tilde{M}_1$ следующими равенствами:

$$\tilde{M}_0 = \begin{cases} M_0, & \text{если } x_*(0) \in M, \\ M_0 \cap G, & \text{если } x_*(0) \in G, \end{cases} \quad \tilde{M}_1 = \begin{cases} M_1, & \text{если } x_*(T_*) \in M, \\ M_1 \cap G, & \text{если } x_*(T_*) \in G. \end{cases}$$

В дальнейшем через $\hat{\partial}\varphi(T, x_1, x_2)$ будем обозначать предельный субдифференциал локально липшицевой функции $\varphi(\cdot, \cdot, \cdot)$ в точке $(T, x_1, x_2) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, а через $\hat{N}_A(x)$ — предельный конус обобщенных нормалей к замкнутому множеству $A \subset \mathbb{R}^n$ в точке $x \in A$ (см. [14; 15]). Определим гамильтониан $H(F(\cdot), \cdot)$ дифференциального включения (1.2) стандартным образом как опорную функцию многозначного отображения $F(\cdot)$:

$$H(F(x), \psi) = \max_{f \in F(x)} \langle f, \psi \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \psi \in \mathbb{R}^n.$$

Следующий результат представляет собой необходимые условия оптимальности для задачи (P) в форме усиленного включения Эйлера — Лагранжа.

Теорема 6. Пусть $x_*(\cdot)$ — оптимальная допустимая траектория в задаче (P) и $T_* > 0$ — соответствующее ей оптимальное время. Тогда существуют такие постоянная $\psi^0 \geq 0$, абсолютно непрерывная функция $\psi: [0, T_*] \rightarrow \mathbb{R}^n$ и ограниченная регулярная n -мерная борелевская мера η на $[0, T_*]$, что выполняются следующие условия.

- 1) Мера η сосредоточена на множестве $\mathfrak{M} = \{t \in [0, T_*]: x_*(t) \in \partial G\}$. Более того, мера η неположительна на множестве всех непрерывных функций $y: \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ со значениями $y(t) \in T_G(x_*(t))$, $t \in \mathfrak{M}$, т. е.

$$\int_{\mathfrak{M}} y(t) d\eta \leq 0.$$

- 2) При п.в. $t \in [0, T_*]$ выполняется усиленное включение Эйлера — Лагранжа

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) \in \text{conv} \left\{ u: \left(u, \psi(t) + \int_0^t \lambda(x_*(s)) d\eta \right. \right. \\ \left. \left. + \psi^0 \int_0^t \delta_M(x_*(s)) \frac{\partial \lambda(x_*(s))}{\partial x} ds \right) \in \widehat{N}_{\text{graph } F(\cdot)}(x_*(t), \dot{x}_*(t)) \right\}. \end{aligned}$$

- 3) Для $t = T_*$ и любого $t \in [0, T_*)$, являющегося точкой правой аппроксимативной непрерывности функции $\delta_M(x_*(\cdot))$, выполняется условие

$$\begin{aligned} H \left(F(x_*(t)), \psi(t) + \int_0^t \lambda(x_*(s)) d\eta + \psi^0 \int_0^t \delta_M(x_*(s)) \frac{\partial \lambda(x_*(s))}{\partial x} ds \right) \\ - \psi^0 \lambda(x_*(t)) \delta_M(x_*(t)) = H(F(x_*(0)), \psi(0)) - \psi^0 \lambda(x_*(0)) \delta_M(x_*(0)). \end{aligned}$$

- 4) Выполняется условие трансверсальности

$$\begin{aligned} \left(H \left(F(x_*(T_*)), \psi(T_*) + \int_0^{T_*} \lambda(x_*(s)) d\eta + \psi^0 \int_0^{T_*} \delta_M(x_*(s)) \frac{\partial \lambda(x_*(s))}{\partial x} ds \right), \right. \\ \left. \psi(0), -\psi(T_*) - \int_0^{T_*} \lambda(x_*(s)) d\eta - \psi^0 \int_0^{T_*} \delta_M(x_*(s)) \frac{\partial \lambda(x_*(s))}{\partial x} ds \right) \\ \in \psi^0 \hat{\partial} \varphi(T_*, x_*(0), x_*(T_*)) + \{0\} \times \widehat{N}_{\widetilde{M}_0}(x_*(0)) \times \widehat{N}_{\widetilde{M}_1}(x_*(T_*)). \end{aligned}$$

- 5) Выполняется условие нетривиальности

$$\psi^0 + \|\psi(0)\| + \|\eta\| \neq 0.$$

Доказательство теоремы 6 приведено в работе [16]. Данное доказательство основано на использовании различных методов регуляризации [17]. $\square$

Как и многие другие варианты принципа максимума Понтрягина для задач с фазовыми ограничениями (см. [18; 19] и приведенные в этих работах ссылки), теорема 6 включает в свою формулировку борелевскую меру η , которая может иметь ненулевые атомы в начальный и/или конечный моменты времени (если начальное состояние $x_*(0)$ и/или конечное состояние $x_*(T_*)$ оптимальной траектории $x_*(\cdot)$ принадлежит границе множества M). Данное обстоятельство может служить источником так называемого явления “вырождения принципа максимума”, т. е. ситуации, когда произвольная допустимая траектория удовлетворяет принципу максимума (подробнее см. § 2.4, [20]; Sect. 6, [18]; [19; 21–23]). Поэтому важное значение приобретают условия, гарантирующие невырожденность принципа максимума (теоремы 6).

Следующий результат показывает, что в аномальном случае, т. е. при $\psi^0 = 0$ условие 3) теоремы 6 влечет условие (b) из (Theorem 1, [18]) на атомарную составляющую меры η . Это позволяет получить достаточные условия невырожденности теоремы 6 аналогично случаю задач с фазовыми ограничениями (см. [18]).

Лемма 2. Пусть $x_*(\cdot)$ — допустимая траектория в задаче (P) , определенная на интервале $[0, T_*]$, $T_* > 0$, и удовлетворяющая условиям 1)–5) теоремы 6 с сопряженными переменными $\psi^0 = 0$, $\psi(\cdot)$ и мерой η . Тогда для любого $\tau \in [0, T_*]$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} & H\left(F(x_*(\tau)), \psi(\tau) + \int_0^\tau \lambda(x_*(s)) d\eta\right) \\ &= H\left(F(x_*(\tau)), \psi(\tau) + \int_0^\tau \lambda(x_*(s)) d\eta - \lambda(x_*(\tau))\eta(\tau)\right). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Доказательство леммы 2 основано на том, что в случае $\psi^0 = 0$ условие 3) теоремы 6 принимает вид

$$H\left(F(x_*(t)), \psi(t) + \int_0^t \lambda(x_*(s)) d\eta\right) = H(F(x_*(0)), \psi(0))$$

в точке $t = T_*$ и в любой точке $t \in [0, T_*)$, являющейся точкой правой аппроксимативной непрерывности функции $\delta_M(x_*(\cdot))$, и последующем использовании свойств непрерывности функции $H(F(\cdot), \cdot)$ и непрерывности справа функции $t \mapsto \psi(t) + \int_0^t \lambda(x_*(s)) d\eta$. $\square$

Следуя работе [18] будем называть допустимую траекторию $x_*(\cdot)$, заданную на интервале $[0, T_*]$, управляемой в конечных точках $x_*(0)$ и $x_*(T_*)$ относительно множества G , если

$$H(F(x_*(0)), -g_0) > 0 \quad \text{для любого } g_0 \in N_G(x_*(0)) \cap [-\hat{N}_{\widetilde{M}_0}(x_*(0))], \quad g_0 \neq 0,$$

и

$$H(F(x_*(T_*)), g_1) > 0 \quad \text{для любого } g_1 \in N_G(x_*(T_*)) \cap [-\hat{N}_{\widetilde{M}_1}(x_*(T_*))], \quad g_1 \neq 0.$$

Следующие результаты аналогичны достаточным условиям невырожденности и поточечной нетривиальности, полученным в работе [18] для задачи оптимального управления с фазовым ограничением. Их доказательства основаны на лемме 2 и последующем использовании условия (3.1) на атомарную составляющую меры η (подробнее см. [16]).

Теорема 7. Пусть допустимая траектория $x_*(\cdot)$ управляема в конечных точках $x_*(0)$ и $x_*(T_*)$ относительно множества G и удовлетворяет условиям теоремы 6 с сопряженными переменными ψ^0 , $\psi(\cdot)$ и мерой η . Тогда выполняется следующее условие невырожденности:

$$\psi^0 + \text{meas} \left\{ t \in [0, T_*]: \psi(t) + \int_0^t \lambda(x_*(s)) d\eta + \psi^0 \int_0^t \delta_M(x_*(s)) \frac{\partial \lambda(x_*(s))}{\partial x} ds \neq 0 \right\} > 0.$$

Теорема 8. Пусть допустимая траектория $x_*(\cdot)$ управляема в конечных точках $x_*(0)$ и $x_*(T_*)$ относительно множества G и удовлетворяет условиям теоремы 6 с сопряженными переменными ψ^0 , $\psi(\cdot)$ и мерой η . Более того, пусть выполняется условие

$$H(F(x_*(t)), (-1)^i g) > 0 \quad \forall g \in N_G(x_*(t)), \quad t \in (0, T_*), \quad i = 1, 2. \quad (3.2)$$

Тогда

$$\psi^0 + \left\| \psi(t) + \int_0^t \lambda(x_*(s)) d\eta + \psi^0 \int_0^t \delta_M(x_*(s)) \frac{\partial \lambda(x_*(s))}{\partial x} ds \right\| > 0, \quad t \in (0, T_*). \quad (3.3)$$

4. Пример

Применим полученные результаты к следующей задаче (P_λ) :

$$J_\lambda(T, x(\cdot)) = T + \lambda \int_0^T \delta_M(x(t)) dt \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} \dot{x}^1(t) = u^1(t), \\ \dot{x}^2(t) = u^2(t), \end{cases} \quad u(t) \in U = \mathbb{B}^2 = \{u \in \mathbb{R}^2: \|u\| \leq 1\}, \quad (4.1)$$

$$x(0) = x_0 = (-1, 0), \quad x(T) = x_1 = (1, 0).$$

Здесь $\lambda > 0$, $M = \{x \in \mathbb{R}^2: \|x\| < 1\}$, $T > 0$ — свободное время окончания процесса управления.

Положим $G = \mathbb{R}^2 \setminus M = \{x \in \mathbb{R}^2: \|x\| \geq 1\}$ и рассмотрим также соответствующую задачу (Q) с фазовым ограничением (см. разд. 1).

Согласно теореме 1 для любого $\lambda > 0$ существует оптимальная допустимая траектория $x_\lambda(\cdot)$ в задаче (P_λ) . Пусть $T_\lambda > 0$ — соответствующее оптимальное время. Тогда $T_\lambda \leq \pi$. Заметим, что в силу теоремы Филиппова (Theorem 9.2.i, [12]) в задаче (Q) также существует оптимальная допустимая траектория.

Ввиду теоремы 6 существуют такие число $\psi_\lambda^0 \geq 0$, абсолютно непрерывная функция $\psi_\lambda(\cdot) = (\psi_\lambda^1(\cdot), \psi_\lambda^2(\cdot))$ и регулярная двумерная борелевская мера $\eta_\lambda = (\eta_\lambda^1, \eta_\lambda^2)$ на $[0, T_\lambda]$, что выполняются условия 1)–5) теоремы 6.

Правая часть системы (4.1) не зависит от фазового вектора x и $F(x) \equiv \mathbb{B}^2$. Значит, усиленное включение Эйлера — Лагранжа (см. условие 2) в теореме 6) принимает вид

$$\dot{\psi}_\lambda(t) = 0, \quad \psi_\lambda(t) + \lambda \int_0^t d\eta_\lambda \in N_U(\dot{x}_\lambda(t)),$$

где $N_U(\dot{x}_\lambda(t))$ — нормальный конус к множеству U в точке $\dot{x}_\lambda(t) \in U$ в смысле выпуклого анализа. Следовательно, для п.в. $t \in [0, T_\lambda]$ имеем

$$\dot{\psi}_\lambda(t) = 0, \quad \left\langle \psi_\lambda(t) + \lambda \int_0^t d\eta_\lambda, \dot{x}_\lambda(t) \right\rangle = \left\| \psi_\lambda(t) + \lambda \int_0^t d\eta_\lambda \right\|. \quad (4.2)$$

Далее, оптимальная траектория $x_\lambda(\cdot)$ управляема в конечных точках x_0 и x_1 относительно множества G и выполняется условие (3.2). Таким образом, для траектории $x_\lambda(\cdot)$ соответствующие ей согласно теореме 6 сопряженные переменные $\psi_\lambda^0, \psi_\lambda(\cdot)$ ($\psi_\lambda(t) \equiv \psi_\lambda, t \in [0, T_\lambda]$) и мера η_λ удовлетворяют поточечному условию нетривиальности (3.3):

$$\psi_\lambda^0 + \left\| \psi_\lambda + \lambda \int_0^t d\eta_\lambda \right\| > 0, \quad t \in (0, T_\lambda).$$

Нетрудно видеть, что в силу условий 3) и 4) теоремы 6 в этом случае выполняется более сильное условие

$$\psi_\lambda^0 > 0 \quad \text{и} \quad \left\| \psi_\lambda + \lambda \int_0^t d\eta_\lambda \right\| > 0, \quad t \in [0, T_\lambda].$$

Без ограничения общности будем считать, что $\psi_\lambda^0 = 1$. Тогда согласно условиям 3) и 4) теоремы 6 при п.в. $t \in [0, T_\lambda]$ имеем

$$\left\| \psi_\lambda + \lambda \int_0^t d\eta_\lambda \right\| = \left\| \psi_\lambda + \lambda \int_0^{T_\lambda} d\eta_\lambda \right\| = \|\psi_\lambda\| = \psi_\lambda^0. \quad (4.3)$$

Следовательно, $\left\| \psi_\lambda + \lambda \int_0^t d\eta_\lambda \right\| \equiv 1$, $t \in [0, T_\lambda]$, и из второго условия в (4.2) получаем

$$\dot{x}_\lambda(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \psi_\lambda + \lambda \int_0^t d\eta_\lambda, \quad \|\dot{x}_\lambda(t)\| \stackrel{\text{п.в.}}{=} 1. \quad (4.4)$$

Таким образом, оптимальная траектория $x_\lambda(\cdot)$ всегда движется с максимальной по модулю (единичной) скоростью либо вдоль отрезков с вершинами, лежащими на границе множества M , либо вдоль его границы $\partial M = \mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$.

Множество $\mathfrak{M}_\lambda = \{t \in [0, T_\lambda] : x_\lambda(t) \in \mathbb{S}^2\}$ компактно. Поэтому существует не более чем счетное число непересекающихся открытых интервалов времени $\{(\tau_{2i-1}, \tau_{2i})\}_{i=1}^\infty$, $(\tau_{2i-1}, \tau_{2i}) \subset [0, T_\lambda]$ таких, что $\|x_\lambda(t_{2i-1})\| = \|x_\lambda(t_{2i})\| = 1$, и траектория $x_\lambda(\cdot)$ движется вдоль сегмента $[x_\lambda(t_{2i-1}), x_\lambda(t_{2i})]$ с вершинами $x_\lambda(t_{2i-1})$ и $x_\lambda(t_{2i})$, принадлежащими $\mathbb{S}^2$, на каждом интервале $[\tau_{2i-1}, \tau_{2i}] \subset [0, T_\lambda]$. Положим

$$\Delta = T_\lambda - \sum_{i=1}^\infty (\tau_{2i} - \tau_{2i-1}) \geq 0 \quad \text{и} \quad \tilde{\tau}_1 = 0, \quad \tilde{\tau}_2 = (\tau_2 - \tau_1), \quad \tilde{\tau}_{2i-1} = \tilde{\tau}_{2i-2},$$

$$\tilde{\tau}_{2i} = \tilde{\tau}_{2i-1} + (\tau_{2i} - \tau_{2i-1}), \quad i \geq 2.$$

Определим траекторию $\tilde{x}_\lambda(\cdot)$ системы (4.1) следующим образом. На первом интервале времени $[\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2] = [0, \tau_2 - \tau_1]$ траектория $\tilde{x}_\lambda(\cdot)$ движется с единичной (по модулю) скоростью вдоль сегмента $[\tilde{x}_\lambda(\tilde{\tau}_1), \tilde{x}_\lambda(\tilde{\tau}_2)]$ из точки $\tilde{x}_\lambda(\tilde{\tau}_1) = x_0$ в точку $\tilde{x}_\lambda(\tilde{\tau}_2) \in \mathbb{S}^2$. Заметим, что точка $\tilde{x}_\lambda(\tilde{\tau}_2)$ определяется единственным образом величиной $\tilde{\tau}_2 - \tilde{\tau}_1$. На каждом последующем интервале времени $[\tilde{\tau}_{2i-1}, \tilde{\tau}_{2i}]$, $i \geq 2$, траектория $\tilde{x}_\lambda(\cdot)$ определяется аналогично. Она движется с единичной скоростью вдоль сегмента $[\tilde{x}_\lambda(\tau_{2i-1}), \tilde{x}_\lambda(\tau_{2i})]$ с вершинами $\tilde{x}_\lambda(\tau_{2i-1}) \in \mathbb{S}^2$ и $\tilde{x}_\lambda(\tau_{2i}) \in \mathbb{S}^2$. На конечном интервале времени $[T_\lambda - \Delta, T_\lambda]$ траектория $\tilde{x}_\lambda(\cdot)$ движется с единичной скоростью вдоль окружности $\mathbb{S}^2$ из точки $\tilde{x}(T_\lambda - \Delta) = \lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{x}(\tilde{\tau}_i) \in \mathbb{S}^2$ в конечную точку $\tilde{x}(T_\lambda) = x_1$.

Нетрудно видеть, что траектория $\tilde{x}_\lambda(\cdot)$ допустима в задаче (P_λ) . Она переводит систему (4.1) из точки x_0 в точку x_1 за то же самое время T_λ , что и траектория $x_\lambda(\cdot)$. Более того, время движения траектории $\tilde{x}_\lambda(\cdot)$ в множестве M совпадает со временем $T_\lambda - \Delta$ движения в M траектории $x_\lambda(\cdot)$. Отсюда следует оптимальность траектории $\tilde{x}_\lambda(\cdot)$ в задаче (P_λ) . В силу оптимальности траектории $\tilde{x}_\lambda(\cdot)$ система интервалов $\{(\tilde{\tau}_{2i-1}, \tilde{\tau}_{2i})\}_{i=1}^\infty$ содержит только один ненулевой интервал $(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)$ движения в множестве M . Действительно, если траектория $\tilde{x}_\lambda(\cdot)$ имеет два примыкающих ненулевых интервала $(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)$ и $(\tilde{\tau}_2, \tilde{\tau}_3)$, на которых она движется в M , то, заменяя ее движение вдоль сегментов $[\tilde{x}_\lambda(\tilde{\tau}_1), \tilde{x}_\lambda(\tilde{\tau}_2)]$ и $[\tilde{x}_\lambda(\tilde{\tau}_2), \tilde{x}_\lambda(\tilde{\tau}_3)]$ движением с единичной скоростью вдоль сегмента $[\tilde{x}_\lambda(\tilde{\tau}_1), \tilde{x}_\lambda(\tilde{\tau}_3)]$, мы получим новую допустимую траекторию $\hat{x}_\lambda(\cdot)$, которая переводит систему (4.1) из точки x_0 в точку x_1 за время $\hat{T}_\lambda < T_\lambda$ и для которой время движения Δ по границе M то же самое, что и у траектории $\tilde{x}_\lambda(\cdot)$. Однако это противоречит оптимальности траектории $\tilde{x}_\lambda(\cdot)$.

Рассмотрим оптимальную траекторию $\tilde{x}_\lambda(\cdot)$ с интервалом $[0, T_\lambda - \Delta]$, $\Delta \in [0, \pi]$, движения с единичной скоростью вдоль сегмента $[x_0, \tilde{x}(T_\lambda - \Delta)]$, $\tilde{x}(T_\lambda - \Delta) \in \mathbb{S}^2$, и интервалом $[T_\lambda - \Delta, T_\lambda]$ движения с единичной скоростью вдоль окружности $\mathbb{S}^2$ из точки $\tilde{x}(T_\lambda - \Delta)$ в точку x_1 . Для определенности предположим, что траектория движется по часовой стрелке. Непосредственные вычисления дают значение функционала как функции от параметра $\Delta \in [0, \pi]$:

$$J_\lambda(T_\lambda, \tilde{x}_\lambda(\cdot)) = J(\Delta) = \Delta + 2(1 + \lambda) \cos\left(\frac{\Delta}{2}\right).$$

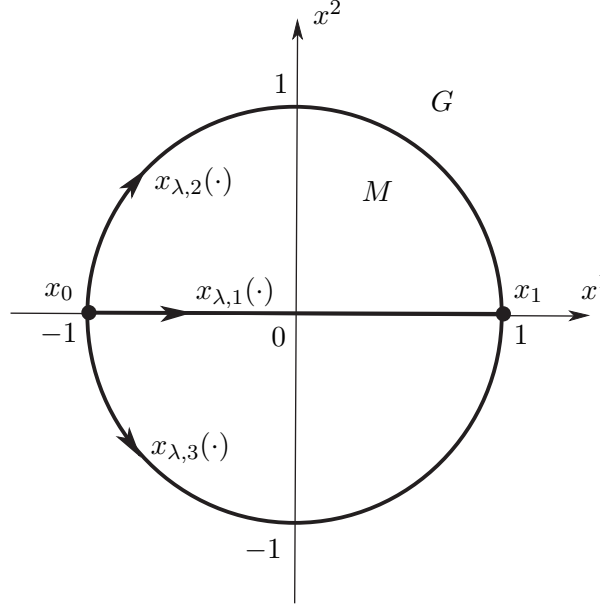


Рис. 1. Оптимальные траектории в задаче (P_λ) , $\lambda = \hat{\lambda}$.

Поскольку для любого $\Delta \in (0, \pi)$ имеем $\frac{d^2}{d\Delta^2}J(\Delta) = -\frac{(1+\lambda)}{2} \sin\left(\frac{\Delta}{2}\right) < 0$, то функция $J(\cdot)$ строго вогнута на $[0, \pi]$. Поэтому она может достигать своего минимального значения только в граничных точках $\Delta = 0$ и $\Delta = \pi$. Значит, $J_\lambda(T_\lambda, \tilde{x}_\lambda(\cdot)) = \min\{2(1+\lambda), \pi\}$.

Следовательно, в случае $0 < \lambda < \frac{\pi}{2} - 1$ имеем $J_\lambda(T_\lambda, \tilde{x}_\lambda(\cdot)) = 2(1+\lambda) < \pi$. В этом случае существует единственная оптимальная допустимая траектория $x_\lambda(t) = (-1+t, 0)$, $t \in [0, T_\lambda^1]$, $T_\lambda^1 = 2$, совпадающая в обеих задачах (P_λ) и (Q) .

В случае $\lambda = \frac{\pi}{2} - 1$ $J_\lambda(T_\lambda, \tilde{x}_\lambda(\cdot)) = \pi$ и в задаче (P_λ) существуют три оптимальных траектории: траектория $x_{\lambda,1}(t) = (-1+t, 0)$, $t \in [0, 2]$, траектория $x_{\lambda,2}(t) = (\cos(\pi-t), \sin(\pi-t))$, $t \in [0, \pi]$, и траектория $x_{\lambda,3}(t) = (\cos(\pi-t), -\sin(\pi-t))$, $t \in [0, \pi]$, симметричная траектории $x_{\lambda,2}(\cdot)$ относительно оси x^1 (см. рис. 1).

В случае $\lambda > \frac{\pi}{2} - 1$ имеем $J_\lambda(T_\lambda, \tilde{x}_\lambda(\cdot)) = \pi$ и в задаче (P_λ) существуют две оптимальные траектории (симметричные друг другу относительно оси x^1): $x_{\lambda,2}(t) = (\cos(\pi-t), \sin(\pi-t))$, $t \in [0, \pi]$, и $x_{\lambda,3}(t) = (\cos(\pi-t), -\sin(\pi-t))$, $t \in [0, \pi]$. Таким образом, $\hat{\lambda} = \frac{\pi}{2} - 1$ — величина, соответствующая утверждению теоремы 3.

Рассмотрим случай $\lambda = \hat{\lambda} = \frac{\pi}{2} - 1$ (см. рис. 1). Первая оптимальная траектория $x_{\lambda,1}(t) = (-1+t, 0)$, $t \in [0, T_\lambda^1]$, $T_\lambda^1 = 2$, движется с единичной скоростью вдоль оси x^1 из точки $x_0 = (-1, 0)$ в точку $x_1 = (1, 0)$. Согласно (4.4) при п.в. $t \in [0, T_\lambda^1]$ имеем $\|\psi_\lambda\| = 1$ и $\psi_\lambda + \lambda \int_0^t d\eta_\lambda = (1, 0)$. Из условия 1) теоремы 6 получаем, что мера η_λ может принимать ненулевые значения только в моменты времени $t = 0$ и $t = T_\lambda$. Непрерывность справа функции $t \mapsto \int_0^t d\eta_\lambda$ в точке 0 влечет равенство $\psi_\lambda + \lambda\eta_\lambda(0) = (1, 0)$. Кроме того, из условия 1) теоремы 6 получаем $\eta_\lambda(0) = \alpha_0(1, 0)$, $\alpha_0 \geq 0$. Значит, $\psi_\lambda^2 = 0$. В силу равенств $\psi_\lambda^1 + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\alpha_0 = 1$ и $|\psi_\lambda^1| = \|\psi_\lambda\| = 1$ возможны только следующие два случая: (i) $\psi_\lambda = (1, 0)$, $\alpha_0 = 0$, и (ii) $\psi_\lambda = (-1, 0)$, $\alpha_0 = \frac{4}{\pi - 2}$. Аналогично ввиду условия 1) теоремы 6 получаем $\eta_\lambda(T_\lambda^1) = \alpha_1(-1, 0)$, $\alpha_1 \geq 0$. Учитывая условие (4.3), в точке $t = T_\lambda$ имеем

$\|\psi_\lambda + \lambda\eta_\lambda(0) + \lambda\eta_\lambda(T_\lambda)\| = \left|1 - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\alpha_1\right| = 1$. Следовательно, либо $\alpha_1 = 0$, либо $\alpha_1 = \frac{4}{\pi - 2}$ независимо от того, какой случай (i) или (ii) реализовался в момент $t = 0$. Таким образом, для первой оптимальной допустимой траектории $x_{\lambda,1}(\cdot)$ теорема 6 допускает ненулевые атомы $\eta_\lambda(0) = \frac{4}{\pi - 2}(1, 0)$ в момент $t = 0$ и $\eta_\lambda(T_\lambda) = -\frac{4}{\pi - 2}(1, 0)$ в конечный момент времени $T_\lambda = 2$ в этом случае. Однако, в силу каждой из теорем 7 и 8 вырождения принципа максимума (теоремы 6) не происходит.

Рассмотрим теперь вторую оптимальную в случае $\lambda = \frac{\pi}{2} - 1$ траекторию $x_{\lambda,2}(t) = (\cos(\pi - t), \sin(\pi - t))$, $t \in [0, T_\lambda^2]$, $T_\lambda^2 = \pi$. Траектория $x_{\lambda,2}(\cdot)$ движется с единичной скоростью вдоль единично окружности $\mathbb{R}^2$ (границы множества M) по часовой стрелке из точки $x_0 = (-1, 0)$ в точку $x_1 = (1, 0)$. Ввиду (4.4) при п.в. $t \in [0, \pi]$ имеем $\psi_\lambda + \lambda \int_0^t d\eta_\lambda = (\sin(\pi - t), -\cos(\pi - t))$.

В силу непрерывности справа функции $t \rightarrow \int_0^t d\eta_\lambda$ в точке 0 имеем $\psi_\lambda + \lambda\eta_\lambda(0) = (0, -1)$. Из условия 1) теоремы 2 получаем, что $\eta_\lambda(0) = \alpha_0(1, 0)$, $\alpha_0 \geq 0$. Следовательно, $\psi_\lambda^2 = -1$. Ввиду (4.3) имеем $\|\psi_\lambda\| = 1$. Поэтому $\psi_\lambda^1 = 0$. Далее, из условия (4.3) вытекает равенство $\left\|\psi_\lambda + \frac{\pi - 2}{2}(\alpha_0, 0)\right\| = \left\|\left(\frac{\pi - 2}{2}\alpha_0, -1\right)\right\| = 1$. Значит, $\alpha_0 = 0$. Аналогично получаем $\eta_\lambda(\pi) = \alpha_1(-1, 0)$, $\alpha_1 \geq 0$. Согласно (4.3) отсюда получаем $\left\|\psi_\lambda - \frac{\pi - 2}{2}(\alpha_1, 0)\right\| = \left\|\left(\frac{\pi - 2}{2}\alpha_1, 1\right)\right\| = 1$. Поэтому $\alpha_1 = 0$. Таким образом, для второй оптимальной в случае $\lambda = \frac{\pi}{2} - 1$ траектории $x_{\lambda,2}(\cdot)$ утверждение теоремы 6 выполняется с мерой η_λ содержащей только непрерывную составляющую. В силу условия (4.4) эта мера η_λ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега μ на $[0, \pi]$ и

$$\frac{d\eta_\lambda^1}{d\mu} = -\cos(\pi - t), \quad \frac{d\eta_\lambda^2}{d\mu} = \sin(\pi - t), \quad t \in [0, \pi],$$

где $\frac{d\eta_\lambda^i}{d\mu}$ — производная Радона — Никодима i -й компоненты η_λ^i меры η_λ относительно меры Лебега μ , $i = 1, 2$. Таким образом, для второй оптимальной в случае $\lambda = \frac{\pi}{2} - 1$ траектории $x_{\lambda,2}(\cdot)$ теорема 6 выполняется с ненулевой мерой η_λ , абсолютно непрерывной относительно меры Лебега μ .

Случай третьей оптимальной при $\lambda = \frac{\pi}{2} - 1$ траектории $x_{\lambda,3}(\cdot)$ рассматривается полностью аналогично случаю траектории $x_{\lambda,2}(\cdot)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rockafellar R. Clarke's tangent cones and the boundaries of closed sets // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 1979. Vol. 3, no. 1. P. 145–154. doi: 10.1016/0362-546X(79)90044-0
2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 р.
3. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 481 с.
4. Пшеничный Б.Н., Очиллов С. О задаче оптимального прохождения через заданную область // Кибернетика и вычисл. техника. 1993. Т. 99. С. 3–8.
5. Doyen L., Saint-Pierre P. Scale of viability and minimal time of crisis // Set-Valued Anal. 1997. Vol. 5, no. 3. P. 227–246.
6. Aubin J.P. Viability theory. Basel: Birkhäuser, 1991. 543 p.
7. Bayen T., Rapaport A. About Moreau–Yosida regularization of the minimal time crisis problem // J. Convex Anal. 2016. Vol. 23, no. 1. P. 263–290.
8. Boumaza K., Bayen T., Rapaport A. Necessary optimality condition for the minimal time crisis relaxing transverse condition via regularization // ESAIM: Contr., Optim. Calc. Variat. 2021. Vol. 27, art. no. 105. doi: 10.1051/cocv/2021102

9. **Асеев С.М., Смирнов А.И.** Необходимые условия оптимальности первого порядка для задачи оптимального прохождения через заданную область // *Нелинейная динамика и управление: сб. ст. Вып. 4.* М.: Физматлит, 2004. С. 179–204.
10. **Смирнов А.И.** Необходимые условия оптимальности для одного класса задач оптимального управления с разрывным интегрантом // *Тр. МИАН.* 2008. Т. 262. С. 222–239.
11. **Асеев С.М.** Об ослаблении фазовых ограничений в задачах оптимального управления // *Тр. МИАН.* 2023. Т. 321. С. 31–44. doi: 10.4213/tm4322
12. **Cesari L.** Optimization — theory and applications. Problems with ordinary differential equations. NY: Springer, 1983. doi: 10.1007/978-1-4613-8165-5
13. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1985. 225 с.
14. **Clarke F.** Functional analysis, calculus of variations and optimal control. London: Springer-Verlag., 2013. 591 p. (Ser. Graduate Texts in Math.; vol. 264). doi: 10.1007/978-1-4471-4820-3
15. **Mordukhovich B.Sh.** Optimal control of difference, differential, and differential–difference inclusions // *J. Math. Sci.* 2000. Vol. 100. P. 2613–2632. doi: 10.1007/BF02672708
16. **Асеев С.М.** Усиленное включение Эйлера — Лагранжа для одной задачи оптимального управления с разрывным интегрантом // *Тр. МИАН.* 2021. Т. 315. С. 34–63. doi: 10.4213/tm4247
17. **Aseev S.M.** Methods of regularization in nonsmooth problems of dynamic optimization // *J. Math. Sci.* 1999. Vol. 94, no. 3. P. 1366–1393. doi: 10.1007/BF02365018
18. **Arutyunov A.V., Aseev S.M.** Investigation of the degeneracy phenomenon of the maximum principle for optimal control problems with state constraints // *SIAM J. Control Optim.* 1997. Vol. 35, no. 3. P. 930–952. doi: 10.1137/S036301299426996X
19. **Vinter R.B.** Optimal Control. Boston: Birkhäuser, 2000. 507 p.
20. **Арутюнов А.В.** Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997. 254 с.
21. **Arutyunov A.V.** Perturbations of extremal problems with constraints and necessary optimality conditions // *J. Sov. Math.* 1991. Vol. 54, no. 6. P. 1342–1400. doi: 10.1007/BF01373649
22. **Arutyunov A.V., Karamzin D.Yu., Pereira F.L.** The maximum principle for optimal control problems with state constraints by R.V. Gamkrelidze: revisited // *J. Optim. Theory Appl.* 2011. Vol. 149, no. 3. P. 474–493. doi: 10.1007/s10957-011-9807-5
23. **Fontes F.A.C.C., Frankowska H.** Normality and nondegeneracy for optimal control problems with state constraints // *J. Optim. Theory Appl.* 2015. Vol. 166, no. 1. P. 115–136. doi: 10.1007/s10957-015-0704-1

Поступила 8.07.2024

После доработки 26.07.2024

Принята к публикации 29.07.2024

Асеев Сергей Миронович
 д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
 главный науч. сотрудник
 Математический институт имени В. А. Стеклова РАН
 e-mail: aseev@mi-ras.ru

REFERENCES

1. Rockafellar R. Clarke's tangent cones and the boundaries of closed sets. *Nonlinear Anal.: Theory, Methods & Appl.*, 1979, vol. 3, no. 1, pp. 145–154. doi: 10.1016/0362-546X(79)90044-0
2. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*. NY, London, Sydney, John Wiley and Sons, Inc., 1962, 360 p. ISBN: 978-0470693810. Original Russian text published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow, Phys. Math. Liter. Publ., 1961, 391 p.
3. Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. *Theory of extremal problems*. NY, Elsevier Sci. Publ., 2009, 459 p. ISBN: 9780080875279. Original Russian text published in Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. *Teoriya ekstremal'nykh zadach*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 480 p.

4. Pshenichnyi B.N., Ochilov S. On the problem of optimal passage through a given domain. *Kibernet. Vychisl. Tekh.*, 1993, vol. 99, pp. 3–8 (in Russian).
5. Doyen L., Saint-Pierre P. Scale of viability and minimal time of crisis. *Set-Valued Anal.*, 1997, vol. 5, no. 3, pp. 227–246.
6. Aubin J.P. *Viability Theory*, Basel, Birkhäuser, 1991, 543 p.
7. Bayen T., Rapaport A. About Moreau—Yosida regularization of the minimal time crisis problem. *J. Convex Anal.*, 2016, vol. 23, no. 1, pp. 263–290.
8. Boumaza K., Bayen T., Rapaport A. Necessary optimality condition for the minimal time crisis relaxing transverse condition via regularization. *ESAIM: Contr., Optim. Calc. Variat.*, 2021, vol. 27, art. 105. doi: 10.1051/cocv/2021102
9. Aseev S.M., Smirnov, A.I. Necessary first-order conditions for optimal crossing of a given region. *Comput. Math. Model.*, 2007, vol. 18, no. 4, pp. 397–419. doi: 10.1007/s10598-007-0034-8
10. Smirnov A.I. Necessary optimality conditions for a class of optimal control problems with discontinuous integrand. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2008, vol. 262, pp. 213–230. doi: 10.1134/S0081543808030176
11. Aseev S.M. Weakening state constraints in optimal control problems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2023, vol. 321, suppl. 1, pp. S24–S36. doi: 10.1134/S0081543823020025
12. Cesari L. *Optimization — theory and applications. Problems with ordinary differential equations*. NY, Springer-Verlag, 1983. doi: 10.1007/978-1-4613-8165-5
13. Filippov A.F. *Differential equations with discontinuous right-hand sides*. Dordrecht, Springer, 1988, 304 p. doi: 10.1007/978-94-015-7793-9. Original Russian text published in Filippov A.F. *Differentsial'nyye uravneniya s razryvnoy pravoy chast'yu*, Moscow, Nauka Publ., Glav. red. fiz.-mat. lit., 1985, 225 p.
14. Clarke F. *Functional analysis, calculus of variations and optimal control. Ser. Graduate texts in mathematics*, (GTM, vol. 264), London, Springer-Verlag, 2013, 591 p. doi: 10.1007/978-1-4471-4820-3
15. Mordukhovich B.Sh. Optimal control of difference, differential, and differential–difference inclusions. *J. Math. Sci.*, 2000, vol. 100, no. 6, pp. 2613–2632. doi: 10.1007/BF02672708
16. Aseev S.M. Refined Euler-Lagrange inclusion for an optimal control problem with discontinuous integrand. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2021, vol. 315, suppl. 1, pp. S27–S55. doi: 10.1134/S0081543821050047
17. Aseev S.M. Methods of regularization in nonsmooth problems of dynamic optimization. *J. Math. Sci.*, 1999, vol. 94, iss. 3, pp. 1366–1393. doi: 10.1007/BF02365018
18. Arutyunov A.V., Aseev S.M. Investigation of the degeneracy phenomenon of the maximum principle for optimal control problems with state constraints. *SIAM J. Contr. Optimiz.*, 1997, vol. 35, no. 3, pp. 930–952. doi: 10.1137/S036301299426996X
19. Vinter R.B. *Optimal Control*. Boston, Birkhäuser, 2000, 507 p. ISBN: 081764075.
20. Arutyunov A.V. *Optimality conditions: abnormal and degenerate problems*, Dordrecht, Springer, 2000, 300 p. doi: 10.1007/978-94-015-9438-7. Original Russian text was published in Arutyunov A.V. *Usloviya ekstremuma. Anormal'nyye i vyrozhdennyye zadachi*, Moscow, Faktorial Publ., 1997, 254 p.
21. Arutyunov A.V. Perturbations of extremal problems with constraints and necessary optimality conditions. *J. Sov. Math.*, 1991, vol. 54, iss. 6, pp. 1342–1400. doi: 10.1007/BF01373649
22. Arutyunov A.V., Karamzin D.Yu., Pereira F.L. The maximum principle for optimal control problems with state constraints by R.V. Gamkrelidze: revisited. *J. Optim. Theory Appl.*, 2011, vol. 149, no. 3, pp. 474–493. doi: 10.1007/s10957-011-9807-5
23. Fontes F.A.C.C., Frankowska, H. Normality and nondegeneracy for optimal control problems with state constraints. *J. Optim. Theory Appl.*, 2015, vol. 166, no. 1, pp. 115–136. doi: 10.1007/s10957-015-0704-1

Received July 8, 2024

Revised July 26, 2024

Accepted July 29, 2024

Sergey Mironovich Aseev, Dr. Phys.-Math. Sci., Corresponding Member of RAS, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991 Russia, e-mail: aseev@mi-ras.ru.

Cite this article as: S. M. Aseev. An optimal control problem with a relaxed state constraint. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 14–29.