ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 3 2024

УДК 517.977.5

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ПРИКЛАДНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

И. Н. Кандоба

Рассматривается задача управления поступательным движением центра масс объекта как материальной точки в поле силы тяжести под действием постоянной по модулю реактивной силы. Реактивная сила действует по направлению одной из осей связанной с объектом подвижной системы координат и инициирует уменьшение массы объекта по известному закону. Относительно поля силы тяжести предполагается, что в любой его точке порождаемое полем гравитационное ускорение определяется одним и тем же вектором. Управление осуществляется путем изменения пространственной ориентации вектора реактивной силы в некоторой неподвижной системе координат. Задача управления заключается в определении программного управления, действующего на некотором промежутке времени, на котором управление удовлетворяет наложенным на него ограничениям и обеспечивает в конечный момент времени достижение центром масс определенной точки на заданной плоскости с выполнением определенных терминальных условий и ряда требований к текущему фазовому состоянию нелинейной динамической системы, описывающей движение. Исследуется подход к решению этой задачи, основанный на решении вспомогательной задачи управления с помощью декомпозиции динамической системы на три более простые системы, каждая из которых описывает одну из составляющих движения центра масс объекта. Для двух из этих систем формулируются специальные задачи оптимального управления, в которых как оптимизируемые функционалы, так и методы вычисления параметров, определяющих решения этих задач, существенно учитывают специфику терминальных условий. Искомое управление в основной задаче определяется в результате реализации итерационной по начальному моменту времени процедуры, на каждом шаге которой без учета фазовых ограничений строится решение вспомогательной задачи. Для управления динамической системой на текущей итерации предлагается использовать комбинацию управления, построенного при решении вспомогательной задачи, и нулевого управления. Приводятся результаты численного моделирования с использованием модельных данных.

Ключевые слова: нелинейная динамическая система, фазовые ограничения, допустимое управление, оптимальное управление.

I. N. Kandoba. On one approach to solving an applied control problem with state constraints.

A control problem is considered for the translational motion of the center of mass of an object as a material point under the action of a constant modulus reactive force in the gravitational field. The reactive force acts in the direction of one of the axes of a moving coordinate system associated with the object and causes a decrease in the mass of the object according to a known law. It is assumed that the gravitational acceleration generated by the gravitational field is described by the same vector at any point. The system is controlled by changing the spatial orientation of the reactive force vector in some fixed coordinate system. The control problem is to find an open-loop control operating over a certain period of time, during which the control satisfies certain constraints and ensures that the center of mass reaches a certain point on a given plane at the terminal time with the fulfillment of certain terminal conditions and a number of requirements for the current state of the nonlinear dynamic system describing the motion. An approach to solving this problem is studied, in which an auxiliary control problem is solved using the decomposition of the dynamic system into three simpler systems, each of which describes one of the components of the motion of the center of mass. For two of these systems, special optimal control problems are formulated, in which both the functionals to be optimized and the methods for calculating the parameters that determine the solutions to these problems significantly take into account the specifics of the terminal conditions. The required control in the main problem is determined as a result of implementing a procedure that is iterative with respect to the initial time. At each step of this procedure, a solution to the auxiliary problem is constructed without taking into account the state constraints. To control a dynamic system at the current iteration, it is proposed to use a combination of the control constructed when solving an auxiliary problem and the zero control. The results of numerical simulation using model data are presented.

Keywords: nonlinear dynamic system, state constraints, admissible control, optimal control.

MSC: 49N90, 93C15

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-3-149-165

Введение

В работе рассматривается задача управления движением объекта под действием реактивной силы и силы тяжести. Управляемое движение объекта описывается нелинейной динамической системой, описывающей поступательное движение центра масс объекта как материальной точки. Искомое программное управление, действующее на некотором промежутке времени, должно удовлетворять наложенным на него ограничениям и обеспечивать достижение центром масс объекта заданной пространственной точки на некоторой плоскости с выполнением ряда требований к текущему фазовому состоянию динамической системы и терминальных условий. Упомянутые плоскость и точку на ней далее будем называть плоскостью и точкой приведения соответственно.

В работе предлагается один подход к решению этой задачи при ряде упрощающих ее предположений. Во-первых, относительно поля силы тяжести предполагается, что в любой точке окрестности точки приведения порождаемое силой тяжести гравитационное ускорение определяется одним и тем же вектором. Во-вторых, эта окрестность содержит точку, задающую начальное пространственное положение центра масс объекта, и от нее вектор силы тяжести направлен в сторону плоскости приведения и ортогонален ей. В-третьих, постоянная по модулю реактивная сила действует по направлению одной из осей связанной с объектом подвижной системы координат и инициализирует изменение массы объекта по известному закону.

Управление движением осуществляется путем изменения пространственной ориентации вектора реактивной силы в неподвижной системе координат с центром в точке приведения. Искомое управление должно удовлетворять геометрическим ограничениям и обеспечивать в конечный момент времени достижение центром масс объекта точки приведения с нулевой скоростью и требуемой пространственной ориентацией вектора реактивной силы. При этом должны выполняться дополнительные ограничения на текущее фазовое состояние динамической системы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим на некотором промежутке времени $[t_{\mathrm{s}}, t_{\mathrm{f}}]$ поступательное движение центра масс объекта (далее — материальной точки) под действием силы тяжести $\mathcal{G}$ и постоянной по модулю реактивной силы $\mathcal{P}$. Заданы начальное пространственное положение $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ материальной точки, а также некоторые плоскость $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ и точка $O \in \Pi$ — плоскость и точка приведения.

Пусть порождаемое силой тяжести гравитационное ускорение $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ в некоторой окрестности $\boldsymbol{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ точки O, которой принадлежит и точка $\boldsymbol{x}^{(0)}$, определяется одним и тем же вектором $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{g}$, а реактивная сила $\mathcal{P}$ действует по направлению одной из осей, связанной с объектом подвижной системы координат. При этом вектор $\boldsymbol{g}$ направлен из точки $\boldsymbol{x}^{(0)}$ в сторону плоскости Π и ортогонален ей.

Неподвижную систему кординат $Oxyz$ с центром в точке O зададим следующим образом. Ось Oy антинаправлена вектору $\boldsymbol{g}$. Ось Ox ортогональна оси Oy и направлена в сторону проекции точки $\boldsymbol{x}^{(0)}$ на плоскость Π. Ось Oz ортогональна Ox и Oy и дополняет эти векторы до правой тройки (рис. 1).

Поступательное движение материальной точки в системе координат $Oxyz$ на промежутке $[t_{\mathrm{s}}, t_{\mathrm{f}}]$ может быть описано уравнениями (см. разд. 2 из [1])

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}, \quad \dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{W}^r(t, m, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\phi}), \quad \dot{m} = -\mu(t), \quad \dot{\vartheta} = U_{\vartheta}, \quad \dot{\psi} = U_{\psi}, \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ — положение и скорость материальной точки; $\boldsymbol{W}^r(t, m, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\phi})$ — ускорение, вызванное действием реактивной силы $\mathcal{P}$; m — масса, сосредоточенная в материальной точке; $\boldsymbol{\phi} = (\vartheta, \psi)^{\top} \in \mathbb{R}^2$ — углы тангажа ϑ и рыскания ψ, которые задают пространственную ориентацию силы $\mathcal{P}$ в $Oxyz$; μ — известная неотрицательная на $[t_{\mathrm{s}}, t_{\mathrm{f}}]$ функция.

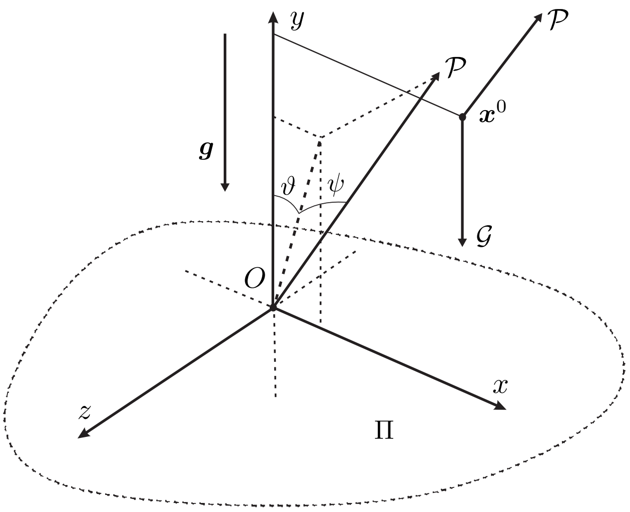

Рис. 1. Неподвижная система координат $Oxyz$. Углы тангажа ϑ и рыскания ψ, определяющие пространственную силы $\mathcal{P}$ в $Oxyz$. Здесь $\vartheta > 0$ и $\psi < 0$.

Здесь угол тангажа ϑ — угол между проекцией вектора силы $\mathcal{P}$ на плоскость Oxy и осью Oy; угол рыскания ψ — угол между вектором силы $\mathcal{P}$ и его проекцией на плоскость Oxy (см. рис. 1). Положительные значения углов ϑ и ψ отсчитываются в соответствующих плоскостях от проекции вектора силы $\mathcal{P}$ против часовой стрелки.

Для системы (1.1) заданы начальные условия

$$\boldsymbol{x}(t_{\mathrm{s}}) = \boldsymbol{x}^{(0)}, \quad \boldsymbol{v}(t_{\mathrm{s}}) = \boldsymbol{v}^{(0)}, \quad m(t_{\mathrm{s}}) = m^{(0)}, \quad \vartheta(t_{\mathrm{s}}) = \vartheta^{(0)}, \quad \psi(t_{\mathrm{s}}) = \psi^{(0)}. \tag{1.2}$$

В качестве управляющих параметров используются скорости U_ϑ и U_ψ изменения углов тангажа ϑ и рыскания ψ соответственно:

$$|U_\vartheta(t)| \le U_\vartheta^{\max}, \quad |U_\psi(t)| \le U_\psi^{\max}, \quad t \in [t_{\mathrm{s}}, t_{\mathrm{f}}]. \tag{1.3}$$

На текущее фазовое состояние системы (1.1) наложены ограничения

$$|\vartheta(t)| \le \vartheta^{\max}, \quad |\psi(t)| \le \psi^{\max}, \quad t \in [t_{\mathrm{s}}, t_{\mathrm{f}}]. \tag{1.4}$$

Для динамической системы (1.1) сформулируем следующую задачу управления.

З а д а ч а 1 (Основная задача). Пусть конечный момент времени t_{f} не зафиксирован. На промежутке времени $[t_{\mathrm{s}}, t_{\mathrm{f}}]$ для управляемой системы (1.1) с заданными начальными условиями (1.2) найти программное управление $\boldsymbol{U} = (U_\vartheta, U_\psi)^\top$ (кусочно-непрерывную на $[t_{\mathrm{s}}, t_{\mathrm{f}}]$ вектор-функцию), которое удовлетворяет условию (1.3) и обеспечивает выполнение фазовых ограничений (1.4) и терминальных условий

$$\|\boldsymbol{x}(t_{\mathrm{f}})\|^2_{\mathbb{R}^3} \le \varepsilon_x^2, \tag{1.5}$$

$$\|\boldsymbol{v}(t_{\mathrm{f}})\|^2_{\mathbb{R}^3} \le \varepsilon_v^2, \tag{1.6}$$

$$\|\boldsymbol{\phi}(t_{\mathrm{f}})\|^2_{\mathbb{R}^2} \le \varepsilon_\phi^2, \tag{1.7}$$

где ε_s, ε_v, ε_ϕ — заданные положительные константы.

Кусочно-непрерывные на $[t_{\mathrm{s}}, t_{\mathrm{f}}]$ вектор-функции $\boldsymbol{U} = (U_\vartheta, U_\psi)^\top$, которые на промежутке $[t_{\mathrm{s}}, t_{\mathrm{f}}]$ удовлетворяют условию (1.3) и обеспечивают выполнение фазовых ограничений (1.4), будем называть допустимыми в задаче 1 управлениями.

2. Общий подход к решению основной задачи управления

Для построения искомого управления в основной задаче 1 предлагается подход, в основе которого лежит решение вспомогательной задачи управления с помощью декомпозиции динамической системы (1.1) на три более простые системы и последовательного решения для двух из них специальных задач оптимального управления. Каждая из этих систем независимо от других описывает динамику определенной части компонент общей фазовой траектории исходной системы (1.1) для известных на промежутке $[t_{\mathrm{s}}, t_{\mathrm{f}}]$ функций $\vartheta^\star$ и $\psi^\star$. Подобная методология, основанная на декомпозиции динамической системы, применялась в [2] при решении одной прикладной задачи оптимального управления.

2.1. Вспомогательная задача управления

Для динамической системы (1.1) рассмотрим следующую вспомогательную задачу управления.

З а д а ч а 2 (Вспомогательная задача). Пусть конечный момент времени t_{f} не зафиксирован. На промежутке времени $[t_{\mathrm{s}}, t_{\mathrm{f}}]$ для управляемой системы (1.1) с заданными начальными условиями (1.2) найти программное управление $\boldsymbol{U} = (U_\vartheta, U_\psi)^\top$ (кусочно-непрерывную на $[t_{\mathrm{s}}, t_{\mathrm{f}}]$ вектор-функцию), которое удовлетворяет условию (1.3) и обеспечивает выполнение терминальных условий

$$x^2(t_{\mathrm{f}}) + z^2(t_{\mathrm{f}}) \le \varepsilon_x^2, \tag{2.1}$$

$$v_x^2(t_{\mathrm{f}}) + v_z^2(t_{\mathrm{f}}) \le \varepsilon_v^2. \tag{2.2}$$

Кусочно-непрерывные на $[t_{\mathrm{s}}, t_{\mathrm{f}}]$ вектор-функции $\boldsymbol{U} = (U_\vartheta, U_\psi)^\top$, которые на промежутке $[t_{\mathrm{s}}, t_{\mathrm{f}}]$ удовлетворяют условию (1.3), будем называть допустимыми управлениями в задаче 2.

Заметим, что в отличие от основной задачи 1 от допустимых управлений во вспомогательной задаче 2 не требуется обеспечивать выполнение ограничений (1.4) на фазовое состояние системы (1.1) на промежутке $[t_{\mathrm{s}}, t_{\mathrm{f}}]$.

2.2. Декомпозиция динамической системы

Конкретизируя выражение для $\boldsymbol{W}^r(t, m, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\phi})$, систему (1.1) в покоординатной форме запишем в виде

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = v_x, \quad \dot{y} = v_y, \quad \dot{z} = v_z,\\
&\dot{v}_x = g_x + \frac{p}{m}\sin(\vartheta)\cos(\psi), \quad \dot{v}_y = g_y + \frac{p}{m}\cos(\vartheta)\cos(\psi), \quad \dot{v}_z = g_z - \frac{p}{m}\sin(\psi),\\
&\dot{m} = -\mu, \quad \dot{\vartheta} = U_\vartheta, \quad \dot{\psi} = U_\psi,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

где $\boldsymbol{x} = (x, y, z)^\top$, $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)^\top$, $\boldsymbol{g} \equiv (g_x, g_y, g_z)^\top$, $p = |\mathcal{P}|$.

Система (2.3) может быть разделена на три системы, описывающих боковое, горизонтальное и вертикальное движения материальной точки.

Боковое движение описывается решением системы дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = v_z, \quad \dot{v}_z = g_z - \frac{p}{m}\sin(\psi), \quad \dot{m} = -\mu, \quad \dot{\psi} = U_\psi, \tag{2.4}$$

которое удовлетворяет начальным условиям

$$z(t_{\mathrm{s}}) = z^{(0)}, \quad v_z(t_{\mathrm{s}}) = v_z^{(0)}, \quad m(t_{\mathrm{s}}) = m^{(0)}, \quad \psi(t_{\mathrm{s}}) = \psi^{(0)}.$$

При известном управлении $U_\psi^\star$ боковым движением, т. е. для заданной функции $\psi^\star$, горизонтальное движение описывается решением системы

$$\dot{x} = v_x, \quad \dot{v}_x = g_x + \frac{p}{m}\sin(\vartheta)\cos(\psi^\star), \quad \dot{m} = -\mu, \quad \dot{\vartheta} = U_\vartheta, \tag{2.5}$$

для которой заданы начальные условия

$$x(t_{\mathrm{s}}) = x^{(0)}, \quad v_x(t_{\mathrm{s}}) = v_x^{(0)}, \quad m(t_{\mathrm{s}}) = m^{(0)}, \quad \vartheta(t_{\mathrm{s}}) = \vartheta^{(0)}.$$

Система дифференциальных уравнений, решение которой описывает вертикальное движение, имеет вид

$$\dot{y} = v_y, \quad \dot{v}_y = g_y + \tfrac{p}{m}\cos(\vartheta^\star)\cos(\psi^\star), \quad \dot{m} = -\mu. \tag{2.6}$$

Для системы (2.6) задаются начальные условия

$$y(t_{\mathrm{s}}) = y^{(0)}, \quad v_y(t_{\mathrm{s}}) = v_y^{(0)}, \quad m(t_{\mathrm{s}}) = m^{(0)}, \quad \vartheta(t_{\mathrm{s}}) = \vartheta^{(0)}.$$

В (2.6) функции $\vartheta^\star$ и $\psi^\star$ считаются уже известными на промежутке $[t_{\mathrm{s}}, t_{\mathrm{f}}]$ функциями времени.

2.3. Итерационная по начальному моменту времени процедура

Содержательно предлагаемый подход к определению искомого в основной задаче 1 управления базируется на следующих идеях.

Для решения задачи 1 предлагается итерационная по начальному моменту времени t_{s} процедура. На каждом шаге для динамической системы (1.1) с заданным в текущий начальный момент времени состоянием (1.2) выполняются следующие операции.

Из условия достижения минимально допустимого значения сосредоточенной в материальной точке массы определяется максимально отдаленный момент времени окончания движения.

В результате решения задачи 2 на текущем промежутке времени строится управление, с помощью которого материальная точка в конечный момент времени с точностью, задаваемой условием (2.1), приближается к оси Oy неподвижной системы координат. При этом в силу (2.2) преследуется цель: с помощью этого управления в конечный момент времени приблизить к нулю и абсолютные значения компонент v_x, v_z вектора скорости. Достижению этой цели, в частности, способствует и обеспечение той ориентации вектора реактивной силы $\mathcal{P}$, которая диктуется терминальным условием (1.7) в основной задаче 1. Для построения такого управления предлагается последовательно решать специальные задачи оптимального управления боковым и горизонтальным движениями. В этих задачах оптимизируемые функционалы и процедуры вычисления значений параметров, определяющих искомые управления соответствующими движениями, кроме ограничений (1.3) на управление существенно учитывают как терминальные условия (2.1) и (2.2) во вспомогательной задаче 2, так и терминальное условие (1.7) в основной задаче 1.

С помощью найденных управлений боковым и горизонтальным движениями, терминальных условий (2.1), (2.2) и (1.7) уточняется текущий момент времени окончания движения.

Управления боковым и горизонтальным движениями задают управление системой (1.1), которое действует на текущем промежутке лишь до ближайшего момента времени, пока указанное управление удовлетворяет условиям (1.3) и обеспечивает выполнение фазовых ограничений (1.4). В данный момент времени производится переключение управления системой (1.1) на нулевое. При этом с заданным тактом по времени, который является параметром процедуры, предпринимается попытка, переинициализировав начальные условия (1.2) текущим фазовым состоянием системы (1.1), перейти на следующий шаг итерационной процедуры, т. е. переключиться на управление, которое определяется решением вспомогательной задачи 2 для текущих начальных условий (1.2).

Итерационная процедура завершается при достижении правого конца текущего промежутка времени.

Здесь отметим, что согласно физическому смыслу как основной, так и вспомогательной задач управления решения этих задач существуют не при всех значениях параметров математической модели: $|\boldsymbol{g}|$ и p; функция μ, описывающая в системе (1.1) динамику массы; $U_\vartheta^{\max}$ и $U_\psi^{\max}$, $\vartheta^{\max}$ и $\psi^{\max}$ в ограничениях (1.3) на управление и фазовых ограничениях (1.4) соответственно; ε_x, ε_v и ε_ϕ в терминальных условиях (1.5)–(1.7); $(\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{v}^{(0)}, m^{(0)}, \vartheta^{(0)},$

$\psi^{(0)})^\top \in \mathbb{R}^9$ в начальных условиях (1.2) для системы (1.1). Даже в случае существования решений этих задач не для всех значений перечисленных параметров их решения возможно получить описанным выше способом.

3. Определение допустимых управлений во вспомогательной задаче

Для определения допустимого в задаче 2 управления последовательно построим управления боковым и горизонтальным движениями. Для этого, считая конечный момент времени t_f формально заданным и принимая во внимание терминальные условия (2.1) и (2.2), помимо начальных условий (1.2) для системы (2.3) можно сформулировать и конечные условия как некую идеальную цель решения задачи 2:

$$\begin{aligned} &x(t_\mathrm{f}) = x^{(k)} = 0, \quad z(t_\mathrm{f}) = z^{(k)} = 0,\\ &v_x(t_\mathrm{f}) = v_x^{(k)} = 0, \quad v_z(t_\mathrm{f}) = v_z^{(k)} = 0,\\ &\vartheta(t_\mathrm{f}) = \vartheta^{(k)} = 0, \quad \psi(t_\mathrm{f}) = \psi^{(k)} = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Очевидно, что достижение этой цели при решении вспомогательной задачи 2 гарантирует выполнение как терминальных условий (2.1) и (2.2) в этой задаче, так и терминального условия (1.7) в основной задаче 1, для любых сколь угодно малых положительных значений параметров ε_x, ε_v и ε_ϕ.

3.1. Управление боковым движением

Для построения допустимого в задаче 2 управления U_ψ боковым движением воспользуемся предложенной в [2] методологией, основанной на решении экстремальной задачи

$$J_\psi[U_\psi] = \int\limits_{t_\mathrm{s}}^{t_\mathrm{f}} L_\psi[\boldsymbol{\eta}^{(\psi)}(\tau), U_\psi(\tau), \tau]d\tau \to \min_{U_\psi \in \mathbb{U}_\psi}, \tag{3.2}$$

где $L_\psi[\boldsymbol{\eta}^{(\psi)}(t), U_\psi(t), t] = \dfrac{p}{m(t)}\,(1 - \cos(\psi(t)))$; $\mathbb{U}_\psi = \{U_\psi \colon |U_\psi(t)| \le U_\psi^{\max}, t \in [t_\mathrm{s}, t_\mathrm{f}]\}$; $\boldsymbol{\eta}^{(\psi)} = (z, v_z, m, \psi)^\top = (\eta_3, \eta_6, m, \psi)^\top \in \mathbb{R}^4$.

Здесь достижение минимального, очевидно неотрицательного, значения функционала J_ψ связано с минимизацией абсолютных значений угла рыскания ψ на промежутке $[t_\mathrm{s}, t_\mathrm{f}]$, что соответствует требованию выполнить терминальное условие (1.7) в основной задаче 1 и отражает стремление обеспечить к конечному моменту времени t_f параллельность вектора силы $\mathcal{P}$ плоскости Oxy. Такое направление силы $\mathcal{P}$ позволяет приблизить к нулю и значение компоненты v_z терминального фазового состояния системы (1.1), что в полной мере согласуется с терминальным условием (2.2) в задаче 2.

Для нахождения управления, удовлетворяющего в задаче (3.2) необходимому условию оптимальности, в этой задаче (см. [2]) строится гамильтониан динамической системы (2.4) (см. [3, с. 74] и гл. 6 из [4])

$$H = -L_\psi + \lambda_3\eta_6 + \lambda_6\left(g_z - \frac{p}{m}\sin(\psi)\right) - \lambda_m\mu + \lambda_\psi U_\psi$$

и рассматривается для (2.4), (3.2) сопряженная система

$$\begin{aligned} &\dot\lambda_3 = 0, \quad \dot\lambda_6 = -\lambda_3,\\ &\dot\lambda_m = \frac{p}{m^2}\left(\cos(\psi) - \lambda_6\sin(\psi) - 1\right),\\ &\dot\lambda_\psi = \frac{p}{m}\cos(\psi)\left(\lambda_6 + \mathrm{tg}(\psi)\right). \end{aligned} \tag{3.3}$$

С учетом конечного условия $\lambda_\psi(t_\mathrm{f}) = 0$ (п. 2.3, п. 2.4 в [3]) в предположении, что существует единственный участок $[t_\psi, t_\mathrm{f}]$ особого управления, где $\lambda_\psi(t) \equiv 0$, в [2] определяется следующая структура управления боковым движением:

$$U_\psi^\star = \begin{cases} U_\psi^\pm(t) = U_\psi^{\max}\mathrm{sign}\{\lambda_\psi(t)\} & \forall t \in [t_\mathrm{s}, t_\psi] : \lambda_\psi(t) \neq 0, \\ \widehat{U}_\psi(t) \text{ — особое управление} & \forall t \in [t_\psi, t_\mathrm{f}] \colon \lambda_\psi(t) \equiv 0. \end{cases}$$

Доказывается, что справедливо равенство

$$\lambda_6(t) = -\operatorname{tg}(\psi(t)), \quad t \in [t_\psi, t_\mathrm{f}], \tag{3.4}$$

а особое управление $\widehat{U}_\psi$ задается выражением

$$\widehat{U}_\psi(t) = \lambda_3^{(0)} \cos^2(\psi(t)), \quad t \in [t_\psi, t_\mathrm{f}]. \tag{3.5}$$

При этом, учитывая, что в уравнения системы (2.4) управление входит в виде синуса угла ψ, искомое в задаче (3.2) управление боковым движением удобно описать (см. [2]) в терминах синуса этого угла

$$\sin(\psi(t)) = \begin{cases} \sin\Big(\psi^{(0)} + U_\psi^{\max}\mathrm{sign}\{-\lambda_6^{(0)} - \operatorname{tg}(\psi^{(0)})\}(t - t_\mathrm{s})\Big), & t \in [t_\mathrm{s}, t_\psi], \\ -\dfrac{\lambda_6(t)}{\sqrt{1 + \lambda_6^2(t)}}, & t \in [t_\psi, t_\mathrm{f}], \end{cases} \tag{3.6}$$

где в силу решения сопряженной системы (3.3), равенства (3.4) и непрерывности функции ψ, значение t_ψ определяется соотношением

$$\psi^{(0)} + U_\psi^{\max}\mathrm{sign}\{-\lambda_6^{(0)} - \operatorname{tg}(\psi^{(0)})\}(t_\psi - t_\mathrm{s}) = \operatorname{Arctan}(-\lambda_6^{(0)} + \lambda_3^{(0)}(t_\psi - t_\mathrm{s})). \tag{3.7}$$

Здесь $\lambda_3^{(0)} = \lambda_3(t_\mathrm{s})$, $\lambda_6^{(0)} = \lambda_6(t_\mathrm{s})$ и $\psi^{(0)} = \psi(t_\mathrm{s})$.

Таким образом, ввиду (3.6), (3.7) искомое управление боковым движением зависит от четырех параметров — $t_\psi, t_\mathrm{f}, \lambda_3^{(0)}, \lambda_6^{(0)}$. Алгоритм определения значений этих параметров приводится ниже (см. подразд. 3.3).

3.2. Управление горизонтальным движением

Считая управление боковым движением построенным, рассмотрим вопрос о структуре управления горизонтальным движением, которое описывается системой (2.5). Здесь функция $\psi^\star = \psi^\star(t)$, $t \in [t_\mathrm{s}, t_\mathrm{f}]$, рассматривается как известная (3.6) функция времени, где промежуток $[t_\mathrm{s}, t_\mathrm{f}]$ управления горизонтальным движением фиксирован — момент времени t_f считается формально заданным и равным значению, принятому при рассмотрении бокового движения.

Допустимое в задаче 2 управление горизонтальным движением предлагаем строить как решение экстремальной задачи

$$J_\vartheta[U_\vartheta] = \int\limits_{t_\mathrm{s}}^{t_\mathrm{f}} L_\vartheta[\boldsymbol{\eta}^{(\vartheta)}(\tau), U_\vartheta(\tau), \tau]d\tau \to \min_{U_\vartheta \in \mathbb{U}_\vartheta}, \tag{3.8}$$

где $L_\vartheta[\boldsymbol{\eta}^{(\vartheta)}(t), U_\vartheta(t), t] = \dfrac{p}{m(t)} \cos(\psi^\star(t))\,(1 - \cos(\vartheta(t)))$; $\mathbb{U}_\vartheta = \{U_\vartheta \colon |U_\vartheta(t)| \leq U_\vartheta^{\max}, t \in [t_\mathrm{s}, t_\mathrm{f}]\}$; $\boldsymbol{\eta}^{(\vartheta)} = (x, v_x, m, \vartheta)^\top = (\eta_1, \eta_4, m, \vartheta)^\top$.

Здесь так же, как и в задаче (3.2) оптимального управления боковым движением, минимизация значения функционала J_ϑ связана с минимизацией абсолютных значений угла тангажа ϑ на $[t_\mathrm{s}, t_\mathrm{f}]$, а значит, и с приближением направления силы $\mathcal{P}$ к оси Oy в момент времени t_f.

Это, во-первых, способствует выполнению терминального условия (1.7) в основной задаче 1 и, во-вторых, обеспечивает приближение к нулю значения $v_x(t_\mathrm{f})$, что согласуется с терминальным условием (2.2) во вспомогательной задаче 2.

Для решения задачи (3.8) воспользуемся методологией решения задачи (3.2).

Гамильтониан системы (2.5) в задаче (3.8) определяется выражением (см. п. 2.3. из [3])

$$H = \lambda_0 L_\vartheta + \lambda_1 \eta_4 + \lambda_4 \Big(g_x + \frac{p}{m}\cos(\psi^\star)\sin(\vartheta)\Big) - \lambda_m \mu + \lambda_\vartheta U_\vartheta,$$

где $\lambda_0 = -1$ [4, с. 510]. Тогда сопряженная система для (2.5), (3.8) имеет вид

$$\begin{aligned} &\dot{\lambda}_0 = 0, \quad \dot{\lambda}_1 = 0, \quad \dot{\lambda}_4 = -\lambda_1, \\ &\dot{\lambda}_m = -\frac{p}{m^2}\cos(\psi^\star)\left(1 - \cos(\vartheta) - \lambda_4 \sin(\vartheta)\right), \\ &\dot{\lambda}_\vartheta = \frac{p}{m}\cos(\psi^\star)\left(\sin(\vartheta) - \lambda_4\cos(\vartheta)\right). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Здесь функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_4(t)$ как решение системы (3.9) определяются в явном виде:

$$\lambda_1(t) = \lambda_1^{(0)}, \quad \lambda_4(t) = \lambda_4^{(0)} - \lambda_1^{(0)}(t - t_\mathrm{s}), \tag{3.10}$$

где $\lambda_1^{(0)} = \lambda_1(t_\mathrm{s})$ и $\lambda_4^{(0)} = \lambda_4(t_\mathrm{s})$.

Из необходимых условий оптимальности $\dfrac{\partial H}{\partial U_\vartheta}(t) = \lambda_\vartheta(t) = 0,\ t \in [t_\mathrm{s}, t_\mathrm{f}]$, вытекает, что если задача (3.8) имеет решение, то искомое управление горизонтальным движением имеет вид

$$U_\vartheta^\star = \begin{cases} U_\vartheta^\pm(t) = U_\vartheta^{\max}\mathrm{sign}\{\lambda_\vartheta(t)\} & \forall t \in [t_\mathrm{s}, t_\mathrm{f}]\colon \lambda_\vartheta(t) \neq 0, \\ \widehat{U}_\vartheta(t) \ \text{— особое управление} & \forall t \in [t_\vartheta^{(0)}, t_\vartheta^{(1)}] \subseteq [t_\mathrm{s}, t_\mathrm{f}]\colon \lambda_\vartheta(t) = 0, \end{cases}$$

— в предположении, что существует только один участок $[t_\vartheta^{(0)}, t_\vartheta^{(1)}]$, где $\lambda_\vartheta(t) \equiv 0$. Особое управление $\widehat{U}_\vartheta$ на $[t_\vartheta^{(0)}, t_\vartheta^{(1)}]$ находим из условия $\lambda_\vartheta(t) = 0$. В силу (3.9) на $[t_\vartheta^{(0)}, t_\vartheta^{(1)}]$ справедливо тождество

$$\dot{\lambda}_\vartheta = \frac{p}{m}\cos(\psi^\star)\left(\sin(\vartheta) - \lambda_4\cos(\vartheta)\right) = \frac{p}{m}\cos(\psi^\star)\cos(\vartheta)\left(\mathrm{tg}(\vartheta) - \lambda_4\right) \equiv 0. \tag{3.11}$$

Отсюда, поскольку $\dfrac{p}{m(t)} \neq 0\ \forall t \in [t_\vartheta^{(0)}, t_\vartheta^{(1)}]$, следует

$$\lambda_4(t) = \mathrm{tg}(\vartheta(t)), \quad t \in [t_\vartheta^{(0)}, t_\vartheta^{(1)}]. \tag{3.12}$$

Тогда из равенства (3.12) и сопряженной системы (3.9) вытекает, что

$$\dot{\lambda}_4 = \frac{1}{\cos^2(\vartheta(t))} U_\vartheta(t) = -\lambda_1, \quad t \in [t_\vartheta^{(0)}, t_\vartheta^{(1)}].$$

Таким образом, особое управление может быть описано выражением

$$\widehat{U}_\vartheta(t) = -\lambda_1 \cos^2(\vartheta(t)), \quad t \in [t_\vartheta^{(0)}, t_\vartheta^{(1)}]. \tag{3.13}$$

Утверждение 1. *Управление* $\widehat{U}_\vartheta(t)$, $t \in [t_\vartheta^{(0)}, t_\vartheta^{(1)}]$, *задаваемое выражением* (3.13), *при* $\vartheta \in \Big(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\Big)$[1] *удовлетворяет необходимому условию оптимальности Кэлли* [5]

$$\frac{\partial}{\partial U_\vartheta}\Big(\frac{d^2}{dt^2} H_u\big[\boldsymbol{\eta}^{(\vartheta)}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \widehat{U}_\vartheta(t)\big]\Big) \geq 0, \quad t \in [t_\vartheta^{(0)}, t_\vartheta^{(1)}],$$

где

$$H_u\big[\boldsymbol{\eta}^{(\vartheta)}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \widehat{U}_\vartheta(t)\big] = \frac{\partial}{\partial U_\vartheta} H\big[\boldsymbol{\eta}^{(\vartheta)}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \widehat{U}_\vartheta(t)\big].$$

[1] Учитывая физический смысл задачи управления, естественно считать, что $\vartheta^{\max} < \dfrac{\pi}{2}$ и $\psi^{\max} < \dfrac{\pi}{2}$ в фазовых ограничениях (1.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно заметить, что $H_u\big[\boldsymbol{\eta}^{(\vartheta)}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \widehat{U}_\vartheta(t)\big] = \lambda_\vartheta(t)$. Продифференцируем по t равенство (3.11) в силу систем (2.5) и (3.9)

$$\frac{d^2\lambda_\vartheta}{dt^2} = \frac{d}{dt}\Big(\frac{p}{m}\cos(\psi^\star)\,(\sin(\vartheta) - \lambda_4\cos(\vartheta))\Big) = p\Big(-\frac{1}{m^2}(-\mu)\cos(\psi^\star)\,(\sin(\vartheta) - \lambda_4\cos(\vartheta))\Big)$$
$$-\frac{p}{m}U_\psi\sin(\psi^\star)\,(\sin(\vartheta) - \lambda_4\cos(\vartheta)) + \frac{p}{m}\cos(\psi^\star)\big(U_\vartheta\cos(\vartheta) + \lambda_1\cos(\vartheta) + \lambda_4 U_\vartheta\sin(\vartheta)\big)$$
$$= f\left(\boldsymbol{\eta}^{(\vartheta)}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)\right) + \frac{p}{m}\cos(\psi^\star)U_\vartheta\left(\cos(\vartheta) + \lambda_4\sin(\vartheta)\right).$$

Откуда с учетом (3.12)

$$\frac{\partial}{\partial U_\vartheta}\Big(\frac{d^2}{dt^2}H_u\big[\boldsymbol{\eta}^{(\vartheta)}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \widehat{U}_\vartheta(t)\big]\Big) = \frac{p}{m}\cos(\psi^\star)\Big(\cos(\vartheta) + \frac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)}\sin(\vartheta)\Big) = \frac{p}{m}\cos(\psi^\star)\frac{1}{\cos(\vartheta)}.$$

Из этого равенства следует, что

$$\frac{\partial}{\partial U_\vartheta}\Big(\frac{d^2}{dt^2}H_u\big[\boldsymbol{\eta}^{(\vartheta)}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \widehat{U}_\vartheta(t)\big]\Big) > 0 \quad \forall\,|\psi^\star| < \frac{\pi}{2}, \quad \forall\,|\vartheta| < \frac{\pi}{2}.$$

Утверждение доказано.

По аналогии с управлением боковым движением предлагаем следующую структуру управления $U_\vartheta^\star$ горизонтальным движением на промежутке $[t_{\rm s}, t_{\rm f}]$. Поскольку $\lambda_\vartheta(t_{\rm f}) = 0$ (см. п. 2.3, п. 2.4 в [3]), то в предположении, что особое управление действует только на одном участке, существует единственный момент времени $t_\vartheta \in [t_{\rm s}, t_{\rm f}]$:

$$U_\vartheta^\star = \begin{cases} U_\vartheta^{\pm}(t) = U_\vartheta^{\max}\mathrm{sign}\{\lambda_\vartheta(t)\}, & t \in [t_{\rm s}, t_\vartheta], \\ -\lambda_1^{(0)}\cos^2(\vartheta(t)), & t \in [t_\vartheta, t_{\rm f}]. \end{cases}$$

Так как в уравнения (2.5) управление $U_\vartheta^\star$ входит в виде синуса угла ϑ, то в предположении, что $\vartheta \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big)$, искомое управление горизонтальным движением удобно представить в следующем виде:[2]

$$\sin(\vartheta(t)) = \begin{cases} \sin\left(\vartheta^{(0)} + U_\vartheta^{\max}\mathrm{sign}\{\lambda_4^{(0)} - \mathrm{tg}(\vartheta^{(0)})\}(t - t_{\rm s})\right), & t \in [t_{\rm s}, t_\vartheta], \\ \dfrac{\lambda_4(t)}{\sqrt{1 + \lambda_4^2(t)}}, & t \in [t_\vartheta, t_{\rm f}]. \end{cases} \tag{3.14}$$

С учетом (3.10) и (3.12) особое управление $\widehat{U}_\vartheta$ на $[t_\vartheta, t_{\rm f}]$ опишем с помощью выражения

$$\mathrm{tg}(\vartheta(t)) = \lambda_4^{(0)} - \lambda_1^{(0)}(t - t_{\rm s}), \quad t \in [t_\vartheta, t_{\rm f}]. \tag{3.15}$$

При этом, используя (3.14) и (3.15), значение t_ϑ в силу непрерывности угла ϑ определим из равенства

$$\vartheta^{(0)} + U_\vartheta^{\max}\mathrm{sign}\{\lambda_4^{(0)} - \mathrm{tg}(\vartheta^{(0)})\}(t_\vartheta - t_{\rm s}) = \mathrm{Arctg}(\lambda_4^{(0)} - \lambda_1^{(0)}(t_\vartheta - t_{\rm s})). \tag{3.16}$$

Таким образом, соотношения (3.14), (3.16) описывают структуру управления горизонтальным движением. Такое управление зависит от четырех параметров: от $t_\vartheta, t_{\rm f}, \lambda_1^{(0)}, \lambda_4^{(0)}$.

[2]В силу (3.12) $\sin(\vartheta(t)) = \dfrac{\mathrm{tg}(\vartheta(t))}{\frac{1}{\cos(\vartheta(t))}} = \dfrac{\mathrm{tg}(\vartheta(t))}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2(\vartheta(t))}} = \dfrac{\lambda_4(t)}{\sqrt{1 + \lambda_4^2(t)}}$, $t \in [t_\vartheta, t_{\rm f}]$.

3.3. Определение значений параметров управлений боковым и горизонтальным движениями

Для определения значений параметров $t_\psi, \lambda_3^{(0)}, \lambda_6^{(0)}$ управления $U_\psi^\star$ (3.6), (3.7) боковым движением и параметров $t_\vartheta, \lambda_2^{(0)}, \lambda_5^{(0)}$ управления $U_\vartheta^\star$ (3.14), (3.16) горизонтальным движением используем следующую процедуру.

3.3.1. Определение значений параметров управления боковым движением. Выражения (3.6) для управления $U_\psi^\star$ подставляем в первые два уравнения системы (2.4). Затем полученные дифференциальные уравнения интегрируем на отрезке $[t_\mathrm{s}, t_\mathrm{f}]$ в предположении, что значение t_f задано.

В результате (см. [2]) с учетом равенства (3.7) возникают соотношения

$$\begin{aligned} v_z(t_\mathrm{f}) = v_z(t_\mathrm{s}) + G_z(t_\mathrm{f}) - \int\limits_{t_\mathrm{s}}^{t_\psi} \Big[\frac{p}{m}\sin\big(\psi^{(0)} + U_\psi^{\max}\mathrm{sign}\{-\lambda_6^{(0)} - \mathrm{tg}(\psi^{(0)})\}(\tau - t_\mathrm{s})\big)\Big]d\tau \\ - \lambda_3^{(0)} \int\limits_{t_\psi}^{t_\mathrm{f}} \left[\frac{p(\tau - t_\mathrm{s})}{m\sqrt{1 + \big(\lambda_3^{(0)}(\tau - t_\mathrm{s}) - \lambda_6^{(0)}\big)^2}}\right]d\tau \\ + \lambda_6^{(0)} \int\limits_{t_\psi}^{t_\mathrm{f}} \left[\frac{p}{m\sqrt{1 + \big(\lambda_3^{(0)}(\tau - t_\mathrm{s}) - \lambda_6^{(0)}\big)^2}}\right]d\tau, \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} z(t_\mathrm{f}) = z(t_\mathrm{s}) + v_z(t_\mathrm{s})(t_\mathrm{f} - t_\mathrm{s}) + G_z^{(r)}(t_\mathrm{f}) \\ - (t_\psi - t_\mathrm{s}) \int\limits_{t_\mathrm{s}}^{t_\psi} \Big[\frac{p}{m}\sin\big(\psi^{(0)} + U_\psi^{\max}\mathrm{sign}\{-\lambda_6^{(0)} - \mathrm{tg}(\psi^{(0)})\}(\tau - t_\mathrm{s})\big)\Big]d\tau \\ \lambda_3^{(0)} \int\limits_{t_\psi}^{t_\mathrm{f}} \left[\frac{p(t_\mathrm{f} - \tau)(\tau - t_\mathrm{s})}{m\sqrt{1 + \big(\lambda_3^{(0)}(\tau - t_\mathrm{s}) - \lambda_6^{(0)}\big)^2}}\right]d\tau + \lambda_6^{(0)} \int\limits_{t_\psi}^{t_\mathrm{f}} \left[\frac{p(t_\mathrm{f} - \tau)}{m\sqrt{1 + \big(\lambda_3^{(0)}(\tau - t_\mathrm{s}) - \lambda_6^{(0)}\big)^2}}\right]d\tau, \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\psi^{(0)} + U_\psi^{\max}\mathrm{sign}\{-\lambda_6^{(0)} - \mathrm{tg}(\psi^{(0)})\}(t_\psi - t_\mathrm{s}) = \arctan\big(-\lambda_6^{(0)} + \lambda_3^{(0)}(t_\psi - t_\mathrm{s})\big), \tag{3.19}$$

$$m(\tau) = m(t_\mathrm{s}) - (\tau - t_\mathrm{s})\mu,$$

где

$$G_x(t) = \int\limits_{t_\mathrm{s}}^{t} g_x(\boldsymbol{x})d\tau, \quad G_y(t) = \int\limits_{t_\mathrm{s}}^{t} g_y(\boldsymbol{x})d\tau, \quad G_z(t) = \int\limits_{t_\mathrm{s}}^{t} g_z(\boldsymbol{x})d\tau;$$

$$G_x^{(r)}(t) = \int\limits_{t_\mathrm{s}}^{t} (t-\tau)g_x(\boldsymbol{x})d\tau, \quad G_y^{(r)}(t) = \int\limits_{t_\mathrm{s}}^{t} (t-\tau)g_y(\boldsymbol{x})d\tau, \quad G_z^{(r)}(t) = \int\limits_{t_\mathrm{s}}^{t} (t-\tau)g_z(\boldsymbol{x})d\tau.$$

Положим величины $v_z(t_\mathrm{f})$ и $z(t_\mathrm{f})$ в левых частях равенств (3.17) и (3.18) равными их желаемым терминальным значениям $v_z^{(k)}$ и $z^{(k)}$, указанным в (3.1), соответственно. Тогда, выражая из равенств (3.17)–(3.19) переменные $\lambda_3^{(0)}, \lambda_6^{(0)}, t_\psi$ соответственно, которые входят в них линейно, получаем систему уравнений вида

$$\lambda_3^{(0)} = F_1^{(\psi)}\big(t_\psi, \lambda_3^{(0)}, \lambda_6^{(0)}\big), \quad \lambda_6^{(0)} = F_2^{(\psi)}\big(t_\psi, \lambda_3^{(0)}, \lambda_6^{(0)}\big), \quad t_\psi = F_3^{(\psi)}\big(t_\psi, \lambda_3^{(0)}, \lambda_6^{(0)}\big). \tag{3.20}$$

Здесь

$$F_3^{(\psi)}\big(t_\psi, \lambda_3^{(0)}, \lambda_6^{(0)}\big) = t_{\rm s} + \frac{1}{s_\psi^{(0)} U_\psi^{\max}}\big(- \psi^{(0)} + \arctan\big(- \lambda_6^{(0)} + \lambda_3^{(0)}(t_\psi - t_{\rm s})\big)\big),$$

где $s_\psi^{(0)} = s_\psi^{(0)}(\lambda_6^{(0)}) = \operatorname{sign}\{-\lambda_6^{(0)} - \operatorname{tg}(\psi^{(0)})\}$.

Построенную таким образом систему уравнений (3.20) решаем методом простой итерации, где начальные значения $\lambda_3^{(0)}, \lambda_6^{(0)}$ задаются нулями, а начальное значение t_ψ полагается равным $t_{\rm s}$. В результате для заданного значения $t_{\rm f}$ получаем значения параметров $\lambda_3^{(0)}, \lambda_6^{(0)}, t_\psi$ управления $U_\psi^\star$ (3.6), (3.7) боковым движением.

Значения параметров $t_\vartheta, \lambda_1^{(0)}, \lambda_4^{(0)}$ управления $U_\vartheta^\star$ (3.14), (3.16) горизонтальным движением находим аналогично.

3.3.2. Определение значений параметров управления горизонтальным движением. Выражения (3.14) для управления $U_\vartheta^\star$ подставим в первые два уравнения системы (2.5). Затем полученные дифференциальные уравнения проинтегрируем на отрезке $[t_{\rm s}, t_{\rm f}]$ в предположении, что значение $t_{\rm f}$ задано. При этом, учитывая (3.12) и (3.15), выражение для управления $U_\vartheta^\star$ на промежутке $[t_\vartheta, t_{\rm f}]$ в (3.14) удобно представить как $\sin(\vartheta(t)) = \dfrac{\lambda_4(t)}{\sqrt{1+\lambda_4^2(t)}} = \dfrac{\operatorname{tg}(\vartheta(t))}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\vartheta(t))}} = \dfrac{\lambda_4^{(0)} - \lambda_1^{(0)}(t - t_{\rm s})}{\sqrt{1 + \big(\lambda_4^{(0)} - \lambda_1^{(0)}(t-t_{\rm s})\big)^2}}$, $t \in [t_\vartheta, t_{\rm f}]$. В результате с учетом (3.16) возникают равенства

$$\begin{gathered} v_x(t_{\rm f}) = v_x(t_{\rm s}) + G_x(t_{\rm f}) \\ + \int\limits_{t_{\rm s}}^{t_\vartheta} \Big[\frac{p}{m}\cos(\psi^\star)\sin\big(\vartheta^{(0)} + U_\vartheta^{\max}\operatorname{sign}\{\lambda_4^{(0)} - \operatorname{tg}(\vartheta^{(0)})\}(\tau - t_{\rm s})\big)\Big]d\tau \\ - \lambda_1^{(0)}\int\limits_{t_\vartheta}^{t_{\rm f}}\left[\frac{p}{m}\cos(\psi^\star)\frac{(\tau - t_{\rm s})}{\sqrt{1+\big(\lambda_4^{(0)} - \lambda_1^{(0)}(\tau - t_{\rm s})\big)^2}}\right]d\tau \\ + \lambda_4^{(0)}\int\limits_{t_\vartheta}^{t_{\rm f}}\left[\frac{p}{m}\cos(\psi^\star)\frac{1}{\sqrt{1+\big(\lambda_4^{(0)} - \lambda_1^{(0)}(\tau - t_{\rm s})\big)^2}}\right]d\tau, \end{gathered} \tag{3.21}$$

$$\begin{gathered} x(t_{\rm f}) = x(t_{\rm s}) + v_x(t_{\rm s})(t_{\rm f} - t_{\rm s}) + G_x^{(r)}(t_{\rm f}) \\ + (t_\vartheta - t_{\rm s})\int\limits_{t_{\rm s}}^{t_\vartheta} \Big[\frac{p}{m}\cos(\psi^\star)\sin\big(\vartheta^{(0)} + U_\vartheta^{\max}\operatorname{sign}\{\lambda_4^{(0)} - \operatorname{tg}(\vartheta^{(0)})\}(\tau - t_{\rm s})\big)\Big]d\tau \\ - \lambda_1^{(0)}\int\limits_{t_\vartheta}^{t_{\rm f}}\left[\frac{p}{m}\cos(\psi^\star)\frac{(\tau - t_{\rm s})(t_{\rm f} - \tau)}{\sqrt{1+\big(\lambda_4^{(0)} - \lambda_1^{(0)}(\tau - t_{\rm s})\big)^2}}\right]d\tau \\ + \lambda_4^{(0)}\int\limits_{t_\vartheta}^{t_{\rm f}}\left[\frac{p}{m}\cos(\psi^\star)\frac{t_{\rm f} - \tau}{\sqrt{1+\big(\lambda_4^{(0)} - \lambda_1^{(0)}(\tau - t_{\rm s})\big)^2}}\right]d\tau, \end{gathered} \tag{3.22}$$

$$\vartheta^{(0)} + U_\vartheta^{\max}\operatorname{sign}\{\lambda_4^{(0)} - \operatorname{tg}(\vartheta^{(0)})\}(t_\vartheta - t_{\rm s}) = \operatorname{Arctg}(\lambda_4^{(0)} - \lambda_1^{(0)}(t_\vartheta - t_{\rm s})), \tag{3.23}$$

$$m(\tau) = m(t_{\rm s}) - (\tau - t_{\rm s})\mu.$$

Положим величины $v_x(t_{\rm f})$ и $x(t_{\rm f})$ в левых частях равенств (3.21) и (3.22) равными их желаемым терминальным значениям $v_x^{(k)}$ и $x^{(k)}$, указанным в (3.1), соответственно. Тогда, выражая из равенств (3.21)–(3.23) переменные $\lambda_1^{(0)}, \lambda_4^{(0)}, t_\vartheta$ соответственно, входящие в них линейно, получаем систему уравнений вида

$$\lambda_1^{(0)} = F_1^{(\vartheta)}\big(t_\vartheta, \lambda_1^{(0)}, \lambda_4^{(0)}\big), \quad \lambda_4^{(0)} = F_2^{(\vartheta)}\big(t_\vartheta, \lambda_1^{(0)}, \lambda_4^{(0)}\big), \quad t_\vartheta = F_3^{(\vartheta)}\big(t_\vartheta, \lambda_1^{(0)}, \lambda_4^{(0)}\big). \tag{3.24}$$

Здесь

$$F_3^{(\vartheta)}\big(t_\vartheta, \lambda_1^{(0)}, \lambda_4^{(0)}\big) = t_{\rm s} + \frac{1}{s_\vartheta^{(0)} U_\vartheta^{\max}}\big(- \vartheta^{(0)} + \mathrm{Arctg}(\lambda_4^{(0)} - \lambda_1^{(0)}(t_\vartheta - t_{\rm s}))\big),$$

где $s_\vartheta^{(0)} = s_\vartheta^{(0)}(\lambda_4^{(0)}) = \mathrm{sign}\{\lambda_4^{(0)} - \mathrm{tg}(\vartheta^{(0)})\}$.

Для решения системы уравнений (3.24) используется метод простой итерации. Начальные значения $\lambda_1^{(0)}, \lambda_4^{(0)}$ задаются нулями, а начальное значение t_ϑ полагается равным $t_{\rm s}$. В результате для заданного значения $t_{\rm f}$ получаем значения параметров $\lambda_1^{(0)}, \lambda_4^{(0)}, t_\vartheta$ управления $U_\vartheta^\star$ (3.14), (3.16) горизонтальным движением.

3.3.3. Условия допустимости управлений боковым и горизонтальным движениями. Относительно управлений $U_\psi^\star$ и $U_\vartheta^\star$ боковым и горизонтальным движениями на промежутке $[t_{\rm s}, t_{\rm f}]$ соответственно, построенных описанным выше способом, необходимо отметить следующее.

Напомним, что для указанных движений промежуток времени $[t_{\rm s}, t_{\rm f}]$ разделяется на два участка. На первом осуществляется изменение значения соответствующего движению угла (рыскания ψ и тангажа ϑ) с максимальной скоростью $U_\psi^{\max}$ ($U_\vartheta^{\max}$), которая определяется соответствующим ограничением (1.3) на управление. На втором реализуется соответствующее движению особое управление $\widehat{U}_\psi$ ($\widehat{U}_\vartheta$).

Таким образом, функции $U_\psi^\star$ и $U_\vartheta^\star$ определяют допустимое управление и в основной, и во вспомогательной задачах (1 и 2), если на промежутке $[t_{\rm s}, t_{\rm f}]$ они удовлетворяют условию (1.3), а в основной задаче 1 — обеспечивают выполнение фазовых ограничений (1.4).

На первом участке условие (1.3) автоматически выполняется для $U_\psi^\star$ и $U_\vartheta^\star$. Выполнение же фазовых ограничений (1.4) на этом участке зависит от значений моментов времени t_ψ и t_ϑ переключения на участки особых управлений $\widehat{U}_\psi$ и $\widehat{U}_\vartheta$ соответственно.

На участках особого управления за выполнение как условий (1.3), так и фазовых ограничений (1.4) отвечают уже значения указанных выше пар параметров $\lambda_3^{(0)}, \lambda_6^{(0)}$ и $\lambda_1^{(0)}, \lambda_4^{(0)}$, определяющих особые управления $\widehat{U}_\psi$ и $\widehat{U}_\vartheta$ соответственно.

Так, в силу (3.5) управление $\widehat{U}_\psi$ на особом участке $[t_\psi, t_{\rm f}]$ бокового движения может быть допустимым, если удовлетворяет условию $|\widehat{U}_\psi(t)| \le U_\psi^{\max}$, $t \in [t_\psi, t_{\rm f}]$. Для этого достаточно, чтобы

$$|\lambda_3^{(0)}| \le U_\psi^{\max}.$$

Из (3.3), (3.6) следует, что особое управление $\widehat{U}_\psi$ обеспечивает на промежутке $[t_\psi, t_{\rm f}]$ выполнение фазовых ограничений (1.4), если для t_ψ, $\lambda_3^{(0)}$ и $\lambda_6^{(0)}$ справедливо неравенство

$$\frac{|\lambda_3^{(0)}(t - t_{\rm s}) - \lambda_6^{(0)}|}{\sqrt{1 + (\lambda_3^{(0)}(t - t_{\rm s}) - \lambda_6^{(0)})^2}} \le \sin(\psi^{\max}), \quad t \in [t_\psi, t_{\rm f}].$$

На основе выражений (3.13) и (3.14), можно сформулировать аналогичные заключения о допустимости в задачах 1, 2 и для управления $U_\vartheta^\star$ горизонтальным движением.

3.4. Определение значения момента времени $t_{\rm f}$ окончания движения

Начальное значение момента времени $t_{\rm f}$ окончания движения задается как максимально допустимое, т. е. определяется из условия $m(t_{\rm f}) = m_{\min}$, где $m_{\min} > 0$ — параметр математической модели.

Для уточнения значения t_f при заданных на текущем промежутке времени $[t_\mathrm{s}, t_\mathrm{f}]$ функциях $\psi^\star$ и $\vartheta^\star$ предлагается следующая процедура. Обозначим через

$$T_v = \{t \in [t_\mathrm{s}, t_\mathrm{f}] \mid (v_x(t))^2 + (v_z(t))^2 \le \varepsilon_v^2\}$$

множество моментов времени из промежутка $[t_\mathrm{s}, t_\mathrm{f}]$, в которых выполняется терминальное условие (2.2) во вспомогательной задаче 2. Это множество является ограниченным и замкнутым. Если T_v пусто, то либо формулируем вывод, что с помощью описанного выше алгоритма невозможно построить допустимое в задаче 2 управление, обеспечивающее выполнение терминального условия (2.2), либо это ограничение ослабляем — в правой части неравенства (2.2) величину ε_v увеличиваем до значения, при котором множество T_v становится непустым, по крайней мере одноэлементным.

Пусть $T_{vx} \subseteq T_v$:

$$T_{vx} = \{t \in T_v \mid (x(t))^2 + (z(t))^2 \le \varepsilon_x^2\}.$$

То есть T_{vx} — множество моментов времени из $[t_\mathrm{s}, t_\mathrm{f}]$, в которых выполняются условия (2.1) и (2.2). Аналогично если $T_{vx} = \varnothing$, то либо формулируем вывод, что с помощью описанного выше алгоритма невозможно построить допустимое во вспомогательной задаче 2 управление, которое обеспечивает выполнение терминального условия (2.1), либо это ограничение ослабляем — в правой части неравенства (2.1) величину ε_x увеличиваем до значения, при котором множество T_{xv} становится непустым.

Любой элемент множества T_{vx} может рассматриваться как момент окончания движения, реализуемого с помощью управления, задаваемого известными функциями $\psi^\star$ и $\vartheta^\star$. Очевидно, что множество T_{vx} является ограниченным и замкнутым. Поэтому на нем может быть решена следующая экстремальная задача:

$$\delta\boldsymbol{\phi}(t) \to \min_{t \in T_{xv}}. \tag{3.25}$$

Здесь $\delta\boldsymbol{\phi}(t) = \|\boldsymbol{\phi}(t) - \hat{\boldsymbol{\phi}}\|^2_{\mathbb{R}^2}$, $t \in [t_\mathrm{s}, t_\mathrm{f}]$, где $\hat{\boldsymbol{\phi}} = \left(\vartheta^{(k)}, \psi^{(k)}\right)^\top \in \mathbb{R}^2$.

Пусть $t_\mathrm{f}^\star$ — решение задачи (3.25). Содержательно $t_\mathrm{f}^\star$ — конечный момент времени, в который выполнены терминальные условия (2.1) и (2.2) в задаче 2 и достигается максимально близкая к желаемой (см. (3.1)) простанственная ориентация вектора реактивной силы $\mathcal{P}$. При этом возможно скорректировать значения величин ε_x и ε_v, которые определяют жесткость терминальных условий (2.1) и (2.2) соответственно, так чтобы допустимое во вспомогательной задаче 2 управление могло быть построено с помощью описанного выше алгоритма.

Отметим, что предложенная последовательность учета терминальных условий (2.1) и (2.2) при построении множества T_{vx} здесь отражает то обстоятельство, что во вспомогательной задаче 2 условие (2.2) имеет больший приоритет; это соответствует физическому смыслу ряда прикладных задач управления, которые формализуются с помощью рассматриваемой в данной работе математической модели.

4. Реализация вертикального движения в основной задаче управления

Значения координат y, v_y в момент времени t_f при известных на промежутке $[t_\mathrm{s}, t_\mathrm{f}]$ программах $\psi^\star(t)$ (3.6), (3.7) и $\vartheta^\star(t)$ (3.14), (3.16), $t \in [t_\mathrm{s}, t_\mathrm{f}]$, управления боковым и горизонтальным движениями соответственно определяются в результате интегрирования дифференциальных уравнений (2.6), которые описывают вертикальное движение материальной точки:

$$y(t_\mathrm{f}) = y(t_\mathrm{s}) + v_y(t_\mathrm{s})(t_\mathrm{f} - t_\mathrm{s}) + G_y^{(r)}(t_\mathrm{f}) + \int\limits_{t_\mathrm{s}}^{t_\mathrm{f}} \Big[\frac{p}{m(\tau)}(t_\mathrm{f} - \tau)\cos(\vartheta^\star(\tau))\cos(\psi^\star(\tau))\Big]d\tau, \tag{4.1}$$

$$v_y(t_\mathrm{f}) = v_y(t_\mathrm{s}) + G_y(t_\mathrm{f}) + \int\limits_{t_\mathrm{s}}^{t_\mathrm{f}} \Big[\frac{p}{m(\tau)}\cos(\vartheta^\star(\tau))\cos(\psi^\star(\tau))\Big]d\tau. \tag{4.2}$$

Очевидно, что для величин $y(t_\mathrm{f})$ и $v_y(t_\mathrm{f})$, задаваемых равенствами (4.1) и (4.2), терминальные условия (1.5), (1.6) могут быть и не выполнены.

Как свидетельствуют результаты численного моделирования, общий подход к решению этой проблемы — определение требуемых для выполнения условий (1.5), (1.6) функции μ и значений параметров p, $m_{\min}$, $m^{(0)}$ при остальных заданных начальных условиях (1.2).

Одним из частных способов может быть следующий. Пусть функции $\psi^\star(t)$ и $\vartheta^\star(t)$, $t \in [t_\mathrm{s}, t_\mathrm{f}]$, задают допустимое в задаче 1 управление. Тогда для системы (1.1) возможно переопределить часть начальных условий (1.2) так, что это управление будет обеспечивать выполнение терминальных условий (1.5), (1.6). Формально из (4.1) и (4.2) следует, что для этого достаточно в (1.2) переопределить начальные значения компонент y и v_y фазового состоянии системы (1.1) величинами, определяемыми формулами

$$\bar{y}^{(0)} = y^{(k)} - \bar{v}_y^{(0)}(t_\mathrm{f} - t_\mathrm{s}) - G_y^{(r)}(t_\mathrm{f}) - \int\limits_{t_\mathrm{s}}^{t_\mathrm{f}} \Big[\frac{p}{m(\tau)}(t_\mathrm{f} - \tau)\cos(\vartheta^\star(\tau))\cos(\psi^\star(\tau))\Big]d\tau,$$

$$\bar{v}_y^{(0)} = v_y^{(k)} - G_y(t_\mathrm{f}) - \int\limits_{t_\mathrm{s}}^{t_\mathrm{f}} \Big[\frac{p}{m(\tau)}\cos(\vartheta^\star(\tau))\cos(\psi^\star(\tau))\Big]d\tau,$$

где $y^{(k)}$, $v_y^{(k)}$ — требуемые для выполнения условий (1.5), (1.6) значения соответствующих компонент конечного фазового состояния системы (1.1), указанные в (3.1). В случае, если $\bar{y}^{(0)} > 0$, при уточненных таким образом начальных условиях (1.2) упомянутое выше управление является решением основной задачи 1.

5. Результаты численного моделирования

В рамках вычислительного эксперимента было проведено несколько модельных пусков, в которых использовались различные значения параметров динамической системы (1.1) и величин, определяющих ограничения (1.3) на управление, фазовые ограничения (1.4) и терминальные условия (1.5)–(1.7). Гравитационное ускорение задавалось вектором $\boldsymbol{g} = (0, -9.81, 0)^\top$ м/c^2 в неподвижной системе координат $Oxyz$. В этой системе координатная ось Ox лежит в плоскости, вектор главной нормали которой равен $-\boldsymbol{g}$. При этом направление оси Ox зафиксировано для всех пусков. Начальный момент времени t_s полагался равным нулю. Ниже приводятся результаты численного моделирования для двух пусков.

П р и м е р 1.

Значения параметров математической модели:
$p = 150$;
$m_{\min} = 1$ кг; $\mu \equiv 1$;
$U_\vartheta^{\max} = 0.5$ рад/с (≈ 28 град/с); $U_\psi^{\max} = 0.5$ рад/с(≈ 28 град/с) ;
$\vartheta^{\max} = 0.785$ рад (≈ 45 град); $\psi^{\max} = 0.785$ рад (≈ 45 град).
$\varepsilon_x = 10$ м; $\varepsilon_v = 0.2$ м/с; $\varepsilon_\phi = 0.05$ рад (≈ 3 град.).
Начальные условия (1.2) для динамической системы (1.1):
$\boldsymbol{x}^{(0)} = (100, 11000, 80)^\top$ м;
$\boldsymbol{v}^{(0)} = (-10, -28, -5)^\top$ м/с;
$m^{(0)} = 61$ кг;
$\vartheta^{(0)} = 0.27$ рад (≈ 15.5 град); $\psi^{(0)} = 0.2$ рад (≈ 11.5 град).

За один шаг итерационной процедуры без переключения управления на нулевое получены следующие результаты:
$t_\mathrm{f} = 60$ с;
$\boldsymbol{x}(t_\mathrm{f}) = (1.6028, 0.3362, -6.1946)^\top$ м: $\|\boldsymbol{x}(t_\mathrm{f})\|_{\mathbb{R}^3} = 6.4074$ м;

$\boldsymbol{v}(t_{\mathrm{f}}) = (-0.0161, -0.1117, 0.0485)^{\top}$ м/с: $\|\boldsymbol{v}(t_{\mathrm{f}})\|_{\mathbb{R}^3} = 0.1228$ м/с;

$\vartheta(t_{\mathrm{f}}) = -0.0174$ рад; $\psi(t_{\mathrm{f}}) = 0.0056$ рад: $\|\boldsymbol{\phi}(t_{\mathrm{f}})\|_{\mathbb{R}^2} = 0.0182$ рад (≈ 1 град).

Таким образом, фазовое состояние динамической системы (1.1) в конечный момент времени t_{f} удовлетворяет терминальным условиям (1.5)–(1.7) в основной задаче 1. При этом построенные в результате решения вспомогательной задачи 2 функции $\psi^{\star}(t)$ и $\vartheta^{\star}(t)$, $t \in [t_{\mathrm{s}}, t_{\mathrm{f}}]$, задают допустимое в задаче 1 управление, т. е. определяют решение этой задачи.

П р и м е р 2.

Значения параметров математической модели:

$p = 150$;

$m_{\min} = 1$ кг; $\mu \equiv 1$;

$U_{\vartheta}^{\max} = 0.5$ рад/с (≈ 28 град/с); $U_{\psi}^{\max} = 0.5$ рад/с(≈ 28 град/с) ;

$\vartheta^{\max} = 0.785$ рад (≈ 45 град); $\psi^{\max} = 0.785$ рад (≈ 45 град).

$\varepsilon_x = 10$ м; $\varepsilon_v = 0.2$ м/с; $\varepsilon_{\phi} = 0.1$ рад (≈ 6 град.).

По сравнению с примером 1 увеличим на один порядок расстояние от проекции на плоскость Π начального пространственного положения $\boldsymbol{x}^{(0)}$ материальной точки до точки приведения O. При этом в два раза ослабим терминальное условие (1.7). Зададим следующие начальные условия (1.2) для динамической системы (1.1):

$\boldsymbol{x}^{(0)} = (1000, 10887, 800)^{\top}$ м;

$\boldsymbol{v}^{(0)} = (-10, -25.9, -5)^{\top}$ м/с;

$m^{(0)} = 60$ кг;

$\vartheta^{(0)} = 0.25$ рад (≈ 14.3 град); $\psi^{(0)} = 0.2$ рад (≈ 11.5 град).

Здесь также, как и в примере 1, за один шаг итерационной процедуры без переключения управления на нулевое получены следующие результаты:

$t_{\mathrm{f}} = 60$ с;

$\boldsymbol{x}(t_{\mathrm{f}}) = (8.9049, -0.2182, -0.0966)^{\top}$ м: $\|\boldsymbol{x}(t_{\mathrm{f}})\|_{\mathbb{R}^3} = 8.9081$ м;

$\boldsymbol{v}(t_{\mathrm{f}}) = (-0.0489, -0.0606, -0.0475)^{\top}$ м/с: $\|\boldsymbol{v}(t_{\mathrm{f}})\|_{\mathbb{R}^3} = 0.05947$ м/с;

$\vartheta(t_{\mathrm{f}}) = 0.0659$ рад; $\psi(t_{\mathrm{f}}) = -0.0604$ рад: $\|\boldsymbol{\phi}(t_{\mathrm{f}})\|_{\mathbb{R}^2} = 0.0894$ рад (≈ 5 град).

Построенные в результате решения вспомогательной задачи 2 функции $\psi^{\star}(t)$ и $\vartheta^{\star}(t)$, $t \in [t_{\mathrm{s}}, t_{\mathrm{f}}]$, задают допустимое в задаче 1 управление. С помощью этого управления динамическая система (1.1) в конечный момент времени t_{f} переводится в фазовое состояние, для которого выполнены терминальные условия (1.5)–(1.7) в основной задаче 1. Таким образом, построенное управление является искомым в основной задаче 1.

На рис. 2 приведены графики функций $z(t)$ (пунктирная линия) и $x(t)$ (сплошная линия), $t \in [0, 60]$ с, форма графика функции $y(t)$ подобна формам графиков функций $z(t)$, $x(t)$; на рис. 3 – графики функций $v_z(t)$ (пунктирная линия) и $v_x(t)$ (сплошная линия); на рис. 4 – график функции $v_y(t)$;

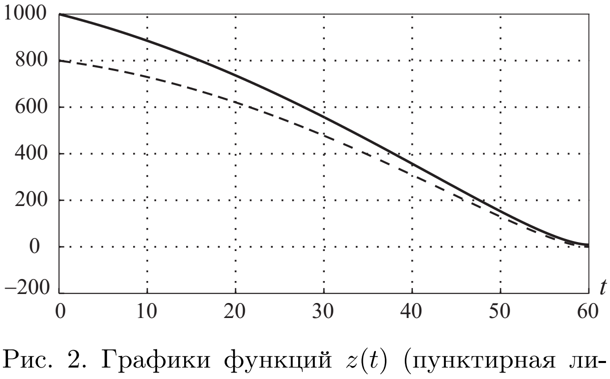

Рис. 2. Графики функций $z(t)$ (пунктирная линия) и $x(t)$ (сплошная линия), $t \in [0, 60]$ с.

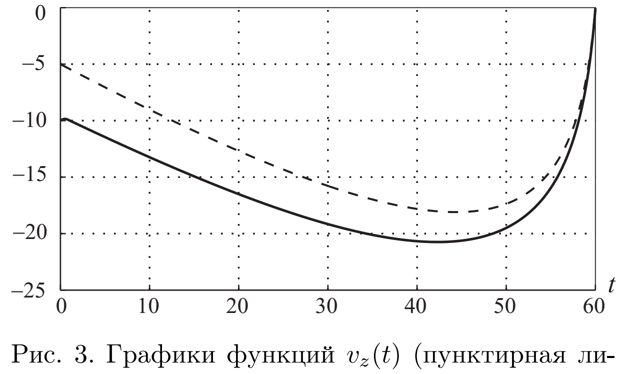

Рис. 3. Графики функций $v_z(t)$ (пунктирная линия) и $v_x(t)$ (сплошная линия), $t \in [0, 60]$ с.

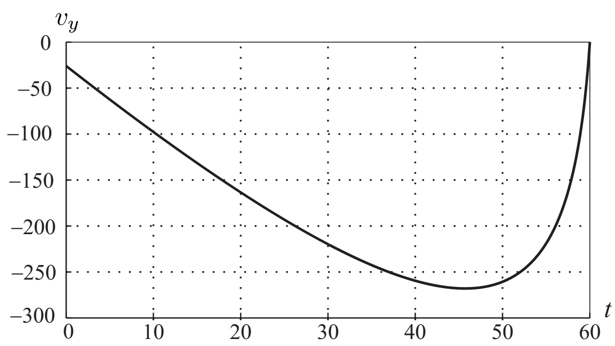

Рис. 4. График функции $v_y(t)$, $t \in [0, 60]$ с.

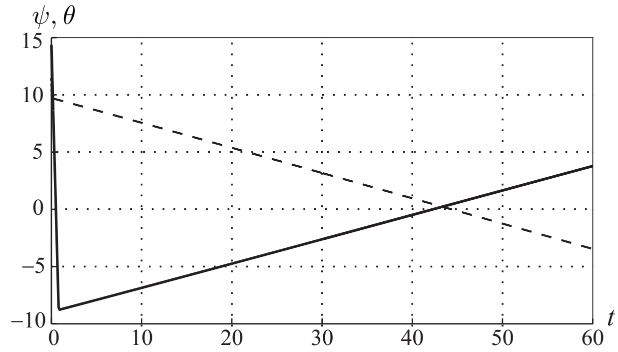

Рис. 5. Графики функций $\psi^\star(t)$ (пунктирная линия) и $\vartheta^\star(t)$ (сплошная линия), $t \in [0, 60]$ с. Значения функций приведены в градусах.

На рис. 5 отображены графики функций $\psi^\star(t)$ (пунктирная линия) и $\vartheta^\star(t)$ (сплошная линия), значения которых приведены в градусах. Угловые точки на графиках функций $\psi^\star$ и $\vartheta^\star$ соответствуют моментам времени t_ψ и t_ϑ переключения управлений $U_\psi^\star$ и $U_\vartheta^\star$ боковым и горизонтальным движениями соответственно на участки особых управлений.

Здесь необходимо отметить увеличение пространственной ошибки в плоскости приведения и большее отклонение вектора реактивной силы $\mathcal{P}$ от оси Oy в конечный момент времени t_f по сравнению с результатами, приведенными в примере 1.

Заключение

Результаты вычислительного эксперимента с использованием модельных данных свидетельствуют о применимости предложенного подхода к решению исследуемой в работе задачи управления при наличии терминальных условий и ограничений на текущее фазовое состояние динамической системы. При этом, как уже отмечалось выше, не для всех значений параметров математической модели удается построить решение этой задачи управления с помощью предлагаемой процедуры, что подтверждается и результатами численного моделирования.

Существуют основания считать, что описанная итерационная процедура применима к решению рассматриваемой в работе задачи управления и для более сложных моделей гравитационного поля, например, центрального.

В качестве одного из направлений дальнейших исследований следует указать и определение условий на параметры математической модели, для которых решение рассматриваемой в работе задачи управления может быть построено с помощью описанной процедуры.

Другим направлением исследований является усложнение математической модели задачи путем введения в нее других действующих на объект сил, а также случайной помехи. При наличии такой помехи для решения задачи эффективно может быть использован аппарат математической теории процессов управления [6], в частности теории дифференциальных игр [7] и позиционного управления [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лебедев А.А., Герасюта Н.Ф.** Баллистика ракет. М.: Машиностроение, 1970. 244 с.
2. **Мазгалин Д.В.** Построение способа управления ракетой-носителем при использовании в качестве управления программных угловых скоростей разворотов // Информационно-управляющие системы. 2010. № 3 (46). С. 21–29.
3. **Брайсон А., Хо Ю-ши.** Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.
4. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации: В 2-х кн. М.: МЦНМО, 2011. Кн.1., 620 с.
5. **Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.** Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 2003. 614 с.

6. **Красовский Н.Н.** Теория управление движением. М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1968. 475 с
7. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
8. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1985. 520 с

Поступила 04.06.2024
После доработки 12.07.2024
Принята к публикации 15.07.2024

Кандоба Игорь Николаевич
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
доцент, кафедра вычислительной математики и компьютерных наук,
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: kandoba@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Lebedev A.A., Gerasyuta N.F. *Ballistika raket* [Missile ballistics]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1970, 244 p.
2. Mazgalin D.V. Construction of a control method for a carrier rocket with using program angular turn rates as controls. *Inform.-Upravl. Sist.*, 2010, No. 3, pp. 21–29.
3. Bryson A.E., Ho Y.-C. *Applied optimal control: optimization, estimation, and control.* Waltham, Mass.: Blaisdell Pub. Co., 1969, 481 p. Translated to Russian under the title Prikladnaya teoriya optimal'nogo upravleniya, Moscow, Mir Publ., 1972, 544 p.
4. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]: in 2 books. Moscow: MTsNMO Publ., 2011, book 1, 620 p.
5. Afanas'ev V.N., Kolmanovskii V.B., Nosov V.R. Mathematical theory of control systems design. Transl. from 1st Russian ed. Dordrecht, Springer, 1996, 672 p. doi: 10.1007/978-94-017-2203-2 . Original Russian text (3rd ed.) Published in Afanas'ev V.N., Kolmanovskii V.B., Nosov V.R., Matematicheskaya teoriya konstruirovaniya sistem upravleniya, Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 2003, 614 p. ISBN: 5-06-004162-X .
6. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of motion control]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 475 p.
7. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Game-theoretical control problems. NY, Springer, 1988. 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Pozitsionnye differentsial'nye igry, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
8. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* [Control of a dynamical system]. Moscow: Nauka Publ., 1985, 520 p.

Received Juny 4, 2024
Revised July 12, 2024
Accepted July 15, 2024

Igor Nicolaevich Kandoba, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: kandoba@imm.uran.ru .

Cite this article as: I. N. Kandoba. On one approach to solving an applied control problem with state constraints. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 149–165 .