

УДК 515.12

О ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ РАЗМЕРНОСТЕЙ КВАНТОВАНИЯ ИДЕМПОТЕНТНЫХ МЕР¹

А. В. Иванов

Размерность квантования $\dim_{\mathcal{F}}(\xi)$ определена для любой точки ξ пространств вида $\mathcal{F}(X)$, где $\mathcal{F}$ — полунормальный метризуемый функтор, а X — метрический компакт. Примером размерности квантования является классическая емкостная размерность $\dim_B$ замкнутых подмножеств компакта X . В работе в качестве $\mathcal{F}$ рассматривается функтор I идемпотентных мер, или мер Маслова. Известно, что для любой идемпотентной меры $\mu \in I(X)$ ее размерности квантования (верхняя и нижняя) не превосходят соответственно верхней и нижней емкостных размерностей компакта X . Эти неравенства мотивируют вопрос о промежуточных значениях размерностей квантования идемпотентных мер. Доказана следующая теорема: на любом метрическом компакте X размерности $\dim_B X = a < \infty$ для любых чисел $c \in [0, a]$ и $b \in [0, a/2) \cap [0, c]$ существует идемпотентная мера, нижняя размерность квантования которой равна b , а верхняя — c . Из этой теоремы следует, что если метрический компакт X имеет положительную емкостную размерности, то на X всегда существует идемпотентная мера с положительной нижней размерностью квантования. При этом известно, что для емкостной размерности аналогичное утверждение в общем случае неверно, поскольку существует метрический компакт, емкостная размерность которого равна 1, а все его собственные замкнутые подмножества нульмерны в смысле нижней емкостной размерности.

Ключевые слова: идемпотентная мера, емкостная размерность, размерность квантования, метризуемый функтор.

A. V. Ivanov. On intermediate values of quantization dimensions of idempotent measures.

The quantization dimension $\dim_{\mathcal{F}}(\xi)$ is defined for any point ξ of spaces of the form $\mathcal{F}(X)$, where $\mathcal{F}$ is a half-normal metrizable functor and X is a metric compact space. An example of a quantization dimension is the classical box dimension $\dim_B$ of closed subsets of a compact space X . In this work, the functor I of idempotent measures or Maslov measures is considered as $\mathcal{F}$. It is known that, for any idempotent measure $\mu \in I(X)$, its (upper and lower) quantization dimensions do not exceed the upper and lower box dimensions, respectively, of the space X . These inequalities motivate the question about intermediate values of the quantization dimensions of idempotent measures. The following theorem is proved: on any metric compact space X of dimension $\dim_B X = a < \infty$, for any numbers $c \in [0, a]$ and $b \in [0, a/2) \cap [0, c]$, there is an idempotent measure whose lower quantization dimension is b and whose upper quantization dimension is c . As follows from this theorem, if a metric compact space X has positive box dimension, then X always has an idempotent measure with a positive lower quantization dimension. Moreover, it is known that a similar statement for the box dimension is not true in the general case, since there exists a metric compact space whose box dimension is 1 such that all of its proper closed subsets are zero-dimensional in the sense of the lower box dimension.

Keywords: idempotent measure, box dimension, quantization dimension, metrizable functor.

MSC: 54B30, 28A33

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-3-139-148

1. Введение

Размерность квантования (финитной аппроксимации) $\dim_{\mathcal{F}}(\xi)$ определена для точек ξ пространств вида $\mathcal{F}(X)$, где $\mathcal{F}$ — полунормальный метризуемый функтор, а (X, ρ) — метрический компакт (см. [1]). Понятие полунормального (ковариантного) функтора, действующего из категории компактов и непрерывных отображений в ту же категорию, охватывает такие известные конструкции, как пространство $\exp X$ непустых замкнутых подмножеств компакта X или

¹Финансовое обеспечение исследования осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

пространство $P(X)$ вероятностных мер, заданных на X . Если $\mathcal{F}$ — полунормальный функтор, то компакт X естественно вкладывается в $\mathcal{F}(X)$. Например, для функтора exp точки $x \in X$ отождествляются с одноточечными подмножествами $\{x\} \in \text{exp } X$, для функтора P точкам $x \in X$ соответствуют меры Дирака δ_x . Таким образом, если (X, ρ) — метрический компакт, то возникает вопрос о продолжении метрики ρ с X на $\mathcal{F}(X)$. Если такое продолжение $\rho_{\mathcal{F}}$ (удовлетворяющее естественным функториальным условиям) существует, то функтор $\mathcal{F}$ называется метризуемым. Для каждой точки $\xi \in \mathcal{F}(X)$ определен ее носитель $\text{supp}(\xi) \subset X$. При этом для функтора exp носителем точки $F \in \text{exp } X$ является само F , а “функториальный” носитель вероятностной меры совпадает с ее классическим носителем — наименьшим замкнутым подмножеством X полной меры.

Определение размерности квантования $\dim_{\mathcal{F}}(\xi)$ точки $\xi \in \mathcal{F}(X)$ состоит в следующем. Известно, что точки с конечными носителями образуют всюду плотное подмножество $\mathcal{F}(X)$ для любого полунормального функтора $\mathcal{F}$ и любого компакта X . Таким образом, для $\xi \in \mathcal{F}(X)$ и $\varepsilon > 0$ определено число $N(\xi, \varepsilon)$ как наименьшее количество точек в носителе ε -приближения ξ . Если носитель ξ бесконечен, то $N(\xi, \varepsilon)$ неограниченно возрастает при $\varepsilon \rightarrow 0$. Скорость этого возрастания характеризует размерность квантования

$$\dim_{\mathcal{F}}(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\xi, \varepsilon)}{-\log \varepsilon}$$

(если указанный предел не существует, рассматриваются верхний и нижний пределы, которые дают соответственно верхнюю $\bar{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi)$ и нижнюю $\underline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi)$ размерности квантования).

Размерность $\dim_{\mathcal{F}}$ является функториальным обобщением таких известных понятий, как емкостная размерность (*box dimension*) и размерность квантования вероятностных мер. Если в качестве $\mathcal{F}$ мы возьмем функтор экспоненты exp с метрикой Хаусдорфа, то $\dim_{\mathcal{F}}(A)$ совпадает с емкостной размерностью $\dim_B A$ для любого замкнутого подмножества $A \subset X$. Емкостная размерность была введена (под названием “метрический порядок”) в 1932 г. в работе Л. Понтрягина и Шнирельмана [2] и в настоящее время широко используется в теории динамических систем (см. Я. Песин [3]) и других областях математики. Для функтора вероятностных мер P с метрикой Канторовича — Рубинштейна размерность квантования $\dim_P(\mu)$ меры $\mu \in P(X)$ совпадает с классической размерностью квантования, которая определена в рамках теории квантования вероятностных мер (см. [4]) и является важным числовым параметром, характеризующим скорость приближения данной меры мерами с конечными носителями.

В настоящей работе рассматриваются размерности квантования для функтора I идемпотентных мер. Основные понятия идемпотентного анализа кратко изложены в обзоре [5]. В идемпотентной математике аналогом вероятностных мер являются идемпотентные меры, или меры Маслова (см. М. М. Заричный [6]), которые можно определить как нормированные функционалы $\mu: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$, линейные относительно идемпотентных арифметических операций (суммы $x \oplus y = \max\{x, y\}$ и произведения $x \odot y = x + y$). Множество $I(X)$ идемпотентных мер на компакте X , наделенное слабой* топологией, всегда есть компакт. Непрерывное отображение компактов $f: X \rightarrow Y$ естественно порождает отображение $I(f): I(X) \rightarrow I(Y)$. Таким образом, конструкция I определяет ковариантный функтор в категории компактов. Топологические свойства этого функтора исследованы в статье [6], где было доказано, что функтор I является нормальным в смысле Е. В. Щепина [7].

В работе [8] для любого метрического компакта (X, ρ) на $I(X)$ определена метрика, которая фактически задает метризацию функтора I в смысле В. В. Федорчука [9]. Тем самым для любой идемпотентной меры $\mu \in I(X)$ могут быть определены размерности квантования, которые были рассмотрены в [1] (и по аналогии с размерностями квантования классических вероятностных мер обозначены через $D_I(\mu)$). В [1] установлен ряд свойств размерностей квантования (верхней $\bar{D}_I(\mu)$ и нижней $\underline{D}_I(\mu)$), в том числе доказаны неравенства (см. [1, следствие 4.4])

$$\bar{D}_I(\mu) \leq \bar{\dim}_B(\text{supp}(\mu)), \quad \underline{D}_I(\mu) \leq \underline{\dim}_B(\text{supp}(\mu)),$$

где $\text{supp}(\mu)$ — носитель меры μ . Согласно этим неравенствам размерности квантования (верхняя и нижняя) любой идемпотентной меры $\mu \in I(X)$ не превосходят соответствующих емкостных размерностей компакта X . И здесь естественно возникает общий вопрос теории размерности “о промежуточных значениях”: *верно ли, что для любого метрического компакта X емкостной размерности $\dim_B X = a$ и любых двух чисел b и c , таких что $0 \leq b \leq c \leq a$, на X существует идемпотентная мера μ , для которой $\underline{D}_I(\mu) = b$, $\overline{D}_I(\mu) = c$?*

Напомним, что в теории размерности компактов вопрос о промежуточных значениях формулируется следующим образом. *Верно ли, что в компакте X лебеговой размерности $\dim X = n$ для любого натурального $k < n$ существует замкнутое подмножество F размерности $\dim F = k$?*

Известно, что для метризуемого X ответ положительный, а в общем случае это не так (контрпримеры — “бикомпакты без промежуточных размерностей” построил В.В. Федорчук [10]).

Емкостная размерность $\dim_B$ принимает вещественные значения, и в монографии [3, пример 6.2] приведен следующий нетривиальный результат о промежуточных значениях $\dim_B$: на отрезке $[0, 1]$ (который одномерен в смысле $\dim_B$) для любых чисел α, β , таких что $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$, существует замкнутое подмножество F , для которого $\underline{\dim}_B F = \alpha$, $\overline{\dim}_B F = \beta$.

В нашей статье [11] доказано, что для произвольного метрического компакта аналогичное утверждение неверно. А именно в [11] построен пример одномерного (в смысле $\dim_B$) метрического компакта, все непустые собственные замкнутые подмножества которого имеют нижнюю емкостную размерность, равную нулю. В то же время для любого неотрицательного числа b , не превосходящего $\overline{\dim}_B X$, существует замкнутое подмножество $F \subset X$ с размерностями $\underline{\dim}_B F = 0$, $\overline{\dim}_B F = b$.

Вопрос о промежуточных значениях размерностей квантования рассматривался в [1], где было доказано, что для любого замкнутого подмножества F метрического компакта X существует идемпотентная мера μ_F на X , размерности квантования которой совпадают с емкостными размерностями множества F . В настоящей работе предложен новый вариант метризации функтора I , отличный от рассмотренного в [1] и [8], который оказывается более удобным для решения задачи о промежуточных размерностях. Основным результатом является следующая теорема.

Пусть (X, ρ) — метрический компакт и $\dim_B X = a < \infty$. Тогда для любых чисел $c \in [0, a]$ и $b \in [0, a/2) \cap [0, c]$ на X существует идемпотентная мера, нижняя размерность квантования которой равна b , а верхняя — c .

Из этого утверждения следует, в частности, что на любом метрическом компакте положительной емкостной размерности существуют идемпотентные меры, нижняя размерность квантования которых также положительна. С учетом упомянутого выше примера из [11] мы видим здесь значительное отличие свойств размерностей квантования идемпотентных мер от свойств емкостных размерностей замкнутых подмножеств.

2. Определения и вспомогательные утверждения

Функтор $\mathcal{F}$ в категории компактов и непрерывных отображений называется полунормальным, если $\mathcal{F}$ сохраняет точку и пустое множество, сохраняет мономорфизмы, пересечения и непрерывен, т. е. перестановочен с операцией перехода к пределу обратного спектра. В дальнейшем через $\mathcal{F}$ обозначается полунормальный функтор, и при этом мы считаем дополнительно, что $\mathcal{F}$ сохраняет вес² всякого бесконечного компакта (следовательно, для любого метризуемого компакта X пространство $\mathcal{F}(X)$ также является метризуемым). Если A — замкнутое подмножество X , то для любого полунормального функтора пространство $\mathcal{F}(A)$ естественно

²Весом топологического пространства называется наименьшая мощность базы его топологии. Критерием метризуемости компакта является наличие счетной базы.

отождествляется с подпространством $\mathcal{F}(X)$. Таким образом, можно считать, что $\mathcal{F}(A) \subset \mathcal{F}(X)$. Для каждой точки $\xi \in \mathcal{F}(X)$ определен ее носитель $\text{supp}(\xi)$ как наименьшее замкнутое подмножество $A \subset X$, для которого $\xi \in \mathcal{F}(A)$. Для $n \in \mathbb{N}$ множество

$$\mathcal{F}_n(X) = \{\xi \in \mathcal{F}(X) : |\text{supp}(\xi)| \leq n\}$$

является замкнутым подмножеством $\mathcal{F}(X)$. При этом $\mathcal{F}_1(X)$ естественно гомеоморфно X (каждая точка $x \in X$ отождествляется с единственной точкой пространства $\mathcal{F}(\{x\})$). Таким образом, $X = \mathcal{F}_1(X) \subset \mathcal{F}(X)$.

Функтор $\mathcal{F}$ имеет бесконечную степень, если для любого бесконечного компакта X и любого $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{F}_n(X) \neq \mathcal{F}(X)$. В дальнейшем будем считать, что степень $\mathcal{F}$ бесконечна. Для любого полунормального функтора $\mathcal{F}$ и любого компакта X объединение $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n(X)$ всюду плотно в $\mathcal{F}(X)$. Доказательство всех перечисленных фактов можно найти в [12].

Функтор $\mathcal{F}$ называется метризуемым (см. [9, определение 3]), если для любого метрического компакта (X, ρ) может быть указана совместимая с топологией метрика $\rho_{\mathcal{F}}$ на $\mathcal{F}(X)$ так, что выполнены следующие условия:

- 1) для любого изометрического вложения $i: (X_1, \rho_1) \rightarrow (X_2, \rho_2)$ отображение $\mathcal{F}(i): (\mathcal{F}(X_1), (\rho_1)_{\mathcal{F}}) \rightarrow (\mathcal{F}(X_2), (\rho_2)_{\mathcal{F}})$ также является изометрическим вложением;
- 2) $\rho_{\mathcal{F}}|_X = \rho$;
- 3) $\text{diam}(\mathcal{F}(X)) = \text{diam}(X)$.

Пусть $\mathcal{F}$ — метризуемый полунормальный функтор, (X, ρ) — метрический компакт, $\xi \in \mathcal{F}(X)$ и $\varepsilon > 0$. Положим

$$N(\xi, \varepsilon) = \min\{n : \rho_{\mathcal{F}}(\xi, \mathcal{F}_n(X)) \leq \varepsilon\}.$$

Если носитель ξ бесконечен, то число $N(\xi, \varepsilon)$ неограниченно возрастает при $\varepsilon \rightarrow 0$. Асимптотику этого возрастания характеризуют верхняя и нижняя размерности квантования (финитной аппроксимации) $\overline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi)$ и $\underline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi)$ точки ξ (см. [1]), которые определяются по формулам

$$\overline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi) = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\xi, \varepsilon)}{-\log(\varepsilon)}, \quad \underline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi) = \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\xi, \varepsilon)}{-\log(\varepsilon)}.$$

Очевидно, что всегда $\overline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi) \geq \underline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi)$. Обозначение $\dim_{\mathcal{F}}(\xi)$ подразумевает, что $\overline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi) = \underline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi)$.

Имеет место следующее предложение, полезное при вычислении размерностей квантования.

Предложение 2.1. Если последовательность $\{\varepsilon_n > 0 : n \in \mathbb{N}\}$ монотонно ($\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n$) сходится к нулю и $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log \varepsilon_n / \log \varepsilon_{n+1}) = 1$, то

$$\overline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(\xi, \varepsilon_n)}{-\log(\varepsilon_n)}, \quad \underline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(\xi, \varepsilon_n)}{-\log(\varepsilon_n)}.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\overline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(\xi, \varepsilon_n)}{-\log \varepsilon_n}.$$

Докажем обратное неравенство. Пусть последовательность $\delta_k > 0$ такова, что

$$\underline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N(\xi, \delta_k)}{-\log \delta_k}.$$

Если пересечение $\{\varepsilon_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \{\delta_n : n \in \mathbb{N}\}$ бесконечно, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(\xi, \varepsilon_n)}{-\log \varepsilon_n} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N(\xi, \delta_k)}{-\log \delta_k}.$$

Остается рассмотреть случай, когда $\varepsilon_n \neq \delta_k$ для любых $n, k \in \mathbb{N}$. Тогда для каждого k существует натуральное число $n(k)$ такое, что $\delta_k \in (\varepsilon_{n(k)+1}, \varepsilon_{n(k)})$. Имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N(\xi, \delta_k)}{-\log \delta_k} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\log N(\xi, \varepsilon_{n(k)+1}) \log \varepsilon_{n(k)+1}}{-\log \varepsilon_{n(k)+1} \log \varepsilon_{n(k)}} \right) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(\xi, \varepsilon_n)}{-\log \varepsilon_n}.$$

Итак, первое равенство доказано. Второе доказывается аналогично. $\square$

Пусть (X, ρ) — метрический компакт, $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Для открытого (замкнутого) ε -шара точки x будем использовать следующие обозначения: $O(x, \varepsilon) = \{y : \rho(x, y) < \varepsilon\}$ ($B(x, \varepsilon) = \{y : \rho(x, y) \leq \varepsilon\}$). Подобным же образом обозначаются открытая и замкнутая ε -окрестности подмножества $A \subset X$. Напомним, что подмножество $A \subset X$ называется ε -сетью в X , если $B(A, \varepsilon) = X$. Множество $A \subset X$ называется ε -разделенным, если $\rho(x, y) > \varepsilon$ для любых двух различных точек $x, y \in A$. Любое максимальное (по включению) ε -разделенное подмножество X является ε -сетью.

Известный пример метризуемого функтора — это функтор экспоненты $\exp$. Для компакта X через $\exp X$ обозначается множество непустых замкнутых подмножеств X , наделенное топологией Вьеториса. Для непрерывного отображения компактов $f : X \rightarrow Y$ отображение $\exp f : \exp X \rightarrow \exp Y$ можно найти по формуле $\exp f(F) = f(F)$. Для метрического компакта (X, ρ) на $\exp X$ определена метрика Хаусдорфа ρ_H , удовлетворяющая условиям 1)–3) определения метризуемого функтора:

$$\rho_H(F, G) = \inf\{\varepsilon : F \subset B(G, \varepsilon), G \subset B(F, \varepsilon)\},$$

Для каждого непустого замкнутого подмножества F метрического компакта (X, ρ) и $\varepsilon > 0$ число $N(F, \varepsilon)$ равно (как легко проверить) наименьшему числу ε -шаров, покрывающих множество F . Таким образом, размерности квантования $\dim_{\exp} F$ (верхняя и нижняя) для функтора $\exp$ совпадают (соответственно) с верхней $\overline{\dim}_B F$ и нижней $\underline{\dim}_B F$ емкостными размерностями F (см. [1]).

Как обычно, через $C(X)$ мы обозначаем пространство непрерывных функций на X ; для постоянного отображения X в $\mathbb{R}$ со значением c используем символ c_X .

Функционал $\mu : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ называется идемпотентной мерой, или мерой Маслова (см. [6, определение 2.1]), если для любых $f, g \in C(X)$ и $c \in \mathbb{R}$ выполняются следующие условия:

- 1) $\mu(c_X) = c$;
- 2) $\mu(c_X + f) = c + \mu(f)$;
- 3) $\mu(\max\{f, g\}) = \max\{\mu(f), \mu(g)\}$.

Любая идемпотентная мера — это непрерывный функционал на $C(X)$ относительно топологии равномерной сходимости. Множество идемпотентных мер $I(X)$ есть подмножество пространства $\mathbb{R}^{C(X)}$. Тем самым $I(X)$ наделяется слабой* топологией. Если X — компакт, то пространство $I(X)$ также является компактом. Для любого непрерывного отображения компактов $h : X \rightarrow Y$ определено непрерывное отображение $I(h) : I(X) \rightarrow I(Y)$ по формуле $I(h)(\mu)(f) = \mu(f \circ h)$ для каждого $f \in C(Y)$. Таким образом, конструкция I является ковариантным функтором в категории компактов и непрерывных отображений. В работе [6] доказано, что I — нормальный функтор в смысле Е. В. Щепина [7] (и, следовательно, полунормальным).

Для каждой идемпотентной меры $\mu \in I(X)$ определена ее плотность $d_\mu : X \rightarrow \mathbb{R}_{\max}$ по формуле $d_\mu(x) = \inf\{\mu(f) : f \in C(X), f \leq 0_X, f(x) = 0\}$, где $\mathbb{R}_{\max} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$. Функция d_μ удовлетворяет условию $\max d_\mu = 0$ и полунепрерывна сверху. При этом d_μ определяет исходную меру μ :

$$\mu(f) = \max\{d_\mu(x) + f(x) : x \in X\}, \quad (1)$$

где $f \in C(X)$. (Формула (1) корректна, поскольку функция $d_\mu + f$ полунепрерывна сверху и, следовательно, $\sup\{d_\mu(x) + f(x) : x \in X\}$ достигается в некоторой точке компакта X). И наоборот, если взять любую полунепрерывную сверху функцию $g : X \rightarrow \mathbb{R}_{\max}$, удовлетворяющую

условию $\max g = 0$, то формула (1) определяет идемпотентную меру μ_g :

$$\mu_g(f) = \max\{g(x) + f(x) : x \in X\},$$

для которой $d_{\mu_g} = g$ (см. [13] и [8]). Носителем меры μ является множество

$$\text{supp}(\mu) = \overline{\{x : d_\mu(x) > -\infty\}}.$$

В работе [8] для каждого $k \in \mathbb{N}$ на $I(X)$ определена непрерывная псевдометрика ρ_k по следующей формуле:

$$\rho_k(\mu, \nu) = \frac{1}{k} \sup\{|\mu(kf) - \nu(kf)| : f \in \text{Lip}_1(X)\}, \quad (2)$$

где $\text{Lip}_1(X)$ — множество числовых функций на X , удовлетворяющих условию Липшица с константой 1. В силу условия 2) определения идемпотентной меры в формуле (2) достаточно рассматривать функции из $\text{Lip}_1(X)$, принимающие нулевое значение в некоторой фиксированной точке x_0 . Множество таких функций равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Следовательно, по теореме Арцела — Асколи это множество компактно. Таким образом, в определении ρ_k знак $\sup$ можно заменить на $\max$.

В [8] был предложен вариант метризации пространства $I(X)$ (который использовался также в [1]) по формуле

$$\rho_{I1}(\mu, \nu) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\rho_i(\mu, \nu)}{2^i}.$$

Как выяснилось в процессе исследования, более удобной является метризация функтора I метрикой

$$\rho_I(\mu, \nu) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\rho_{2^i}(\mu, \nu)}{2^i}. \quad (3)$$

Выбор такой метризации объясняется балансом скорости сходимости ряда (3) с границами оценок псевдометрик $\rho_{2^i}(\mu, \nu)$.

Легко проверить, что все утверждения, доказанные в [1] для метризации ρ_{I1} (где она была обозначена через ρ_I), справедливы также и для новой метризации. Размерности квантования, определенные по метрике формулы (3), мы будем обозначать через D_I (аналогично обозначению размерностей квантования вероятностных мер (см. [4]), идемпотентным аналогом которых являются меры Маслова).

Пусть $\mu \in I(X)$ и d_μ — функция плотности меры μ . Исходя из [1], введем обозначение

$$K(\mu) = \{x : d_\mu(x) = 0\}.$$

Следующее утверждение является прямым следствием леммы 4.5 из [1].

Предложение 2.2. *Для любой меры $\mu \in I(X)$ имеют место неравенства*

$$\underline{D}_I(\mu) \geq \underline{\dim}_B K(\mu), \quad \overline{D}_I(\mu) \geq \overline{\dim}_B K(\mu).$$

В пространстве $I(X)$ действует идемпотентное сложение $\oplus$. Для $\mu, \nu \in I(X)$ мера $\mu \oplus \nu \in I(X)$ определяется по формуле $(\mu \oplus \nu)(f) = \max\{\mu(f), \nu(f)\}$, где $f \in C(X)$. Очевидно, что $d_{\mu \oplus \nu}(x) = \max\{d_\mu(x), d_\nu(x)\} = (d_\mu \oplus d_\nu)(x)$ и $\text{supp}(\mu \oplus \nu) = \text{supp}(\mu) \cup \text{supp}(\nu)$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие утверждения, доказательства которых почти тождественны доказательству соответствующих предложений из [1].

Предложение 2.3 [1, предложение 4.10]. *Для любых $\mu, \nu \in I(X)$ и любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство*

$$N(\mu \oplus \nu, 2\varepsilon) \leq N(\mu, \varepsilon) + N(\nu, \varepsilon).$$

Следствие 2.4 [1, следствие 4.11]. Для любых мер $\mu, \nu \in I(X)$

$$\overline{D}_I(\mu \oplus \nu) \leq \max\{\overline{D}_I(\mu), \overline{D}_I(\nu)\}.$$

Предложение 2.5. Если последовательность $(\varepsilon_n : n \in \mathbb{N})$ удовлетворяет условиям предложения 2.1 и A_n — последовательность ε_n -разделенных ε_n -сетей в метрическом компакте X , то

$$\underline{\dim}_B X = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |A_n|}{-\log \varepsilon_n}, \quad \overline{\dim}_B X = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |A_n|}{-\log \varepsilon_n}.$$

Доказательство. Легко проверить, что имеют место неравенства

$$|A_n| \leq N(X, \varepsilon_n/2), \quad |A_n| \geq N(X, \varepsilon_n),$$

из которых сразу следует утверждение предложения. $\square$

3. Основная теорема

Теорема 3.1. Пусть (X, ρ) — метрический компакт и $\dim_B X = a < \infty$. Тогда для любых чисел $c \in [0, a]$ и $b \in [0, a/2] \cap [0, c]$ существует мера $\mu_{bc} \in I(X)$ такая, что $\underline{D}_I(\mu_{bc}) = b$, $\overline{D}_I(\mu_{bc}) = c$.

Доказательство. Пусть $b \in [0, a/2]$. Покажем вначале, что на X существует идемпотентная мера μ , для которой $D_I(\mu) = b$. Случай $b = 0$ тривиален, поскольку любая идемпотентная мера с конечным носителем имеет размерность квантования, равную нулю.

В дальнейшем $b > 0$. Зафиксируем положительное число p и для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $\varepsilon_n = 2^{-pn}$. Пусть A_0 — некоторое одноточечное подмножество X . Дополним A_0 до максимального (по включению) ε_1 -разделенного подмножества A_1 . Далее по индукции построим последовательность ε_n -разделенных подмножеств A_n . На шаге n уже имеющееся ε_{n-1} -разделенное подмножество A_{n-1} дополним до максимального ε_n -разделенного подмножества A_n . В итоге получим последовательность $(A_n : n \in \mathbb{N})$ ε_n -разделенных подмножеств X , которые (в силу максимальнойности) являются ε_n -сетями.

Определим теперь функцию $d : X \rightarrow \mathbb{R}_{\max}$ следующим образом. При $x \in A_0$ $d(x) = 0$, при $x \in A_n \setminus A_{n-1}$, где $n \in \mathbb{N}$, $d(x) = -2^n$, при $x \notin \bigcup_{n \in \omega_0} A_n$ $d(x) = -\infty$. Очевидно, что функция d полунепрерывна сверху и $\max(d) = 0$. Таким образом, d — функция плотности некоторой идемпотентной меры μ , для которой

$$\mu(f) = \max\{f(x) + d(x) : x \in X\} \quad (4)$$

для любой функции $f \in C(X)$.

Вычислим размерность квантования полученной меры. Пусть идемпотентная мера ν имеет конечный носитель $\text{supp}(\nu) = B$ и $|B| < |A_n|$. Множество A_n является ε_n -разделенным, следовательно, шары $B(x, \varepsilon_n/2)$, $x \in A_n$ попарно не пересекаются. Таким образом, существует точка $t \in A_n$, для которой $B(t, \varepsilon_n/2) \cap B = \emptyset$ и, значит, $\rho(t, B) > \varepsilon_n/2$. Функция $\rho(x, B)$ принадлежит множеству $\text{Lip}_1(X)$, отсюда

$$\rho_{2^i}(\mu, \nu) \geq \frac{1}{2^i} |\mu(2^i \rho(x, B)) - \nu(2^i \rho(x, B))|.$$

При этом $\nu(2^i \rho(x, B)) = 0$ (поскольку $B = \text{supp}(\nu)$) и $\mu(2^i \rho(x, B)) \geq 2^i \rho(t, B) + d(t) > 2^i \varepsilon_n/2 - 2^n$. Таким образом,

$$\rho_{2^i}(\mu, \nu) > \frac{\varepsilon_n}{2} - 2^{n-i}. \quad (5)$$

Легко проверить, что при $i > (p+1)n+2$ правая часть неравенства (5) больше $\varepsilon_n/4$ (напомним, что $\varepsilon_n = 2^{-pn}$). Следовательно,

$$\rho_I(\mu, \nu) \geq \sum_{i=[(p+1)n]+3}^{\infty} \frac{1}{2^i} \rho_{2^i}(\mu, \nu) > \frac{\varepsilon_n}{4} \sum_{i=[(p+1)n]+3}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{pn+[(p+1)n]+4}}.$$

Итак, доказано, что если носитель меры ν имеет мощность меньше $|A_n|$, то $\rho_I(\mu, \nu) > \delta_n$, где $\delta_n = 1/2^{pn+[(p+1)n]+4}$. Следовательно,

$$N(\mu, \delta_n) \geq |A_n|. \quad (6)$$

Из неравенства (6) и предложений 2.1 и 2.5 получаем

$$\underline{D}_I(\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(\mu, \delta_n)}{-\log \delta_n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\log |A_n| \log \varepsilon_n}{-\log \varepsilon_n \log \delta_n} \right) = \frac{p}{2p+1} \dim_B X.$$

Вывели оценку снизу для размерности квантования меры μ . Переходим к оценке сверху. Для каждого n определим идемпотентную меру ν_n с помощью функции плотности d_{ν_n} . При $x \in A_n$ положим $d_{\nu_n}(x) = d(x)$, где d — функция плотности меры μ , и $d_{\nu_n}(x) = -\infty$ при $x \notin A_n$. Пусть f — функция из $\text{Lip}_1(X)$, на которой достигается максимум правой части формулы (2) для $\nu = \nu_n$ и $k = 2^i$. Тогда

$$\rho_{2^i}(\mu, \nu_n) = \frac{1}{2^i} |\mu(2^i f) - \nu_n(2^i f)|.$$

В силу формулы (4) для некоторой точки $y \in X$ имеет место равенство $\mu(2^i f) = 2^i f(y) + d(y)$. Если $y \in A_n$, то $\mu(2^i f) = \nu_n(2^i f)$ и $\rho_{2^i}(\mu, \nu_n) = 0$. Если $y \notin A_n$, то существует точка $t \in A_n$ такая, что $\rho(t, y) \leq \varepsilon_n$, ибо A_n является ε_n -сетью. Имеем

$$2^i f(t) + d(t) \leq \nu_n(2^i f) < 2^i f(y) + d(y) = \mu(2^i f).$$

Следовательно, $|\mu(2^i f) - \nu_n(2^i f)| \leq 2^i |f(y) - f(t)| + d(y) - d(t)$. При этом $|f(y) - f(t)| \leq \varepsilon_n$, $d(y) \leq -2^{n+1}$, $-d(t) \leq 2^n$. Таким образом,

$$\rho_{2^i}(\mu, \nu_n) \leq \varepsilon_n + \frac{2^n - 2^{n+1}}{2^i} = \frac{1}{2^{pn}} - \frac{1}{2^{i-n}}. \quad (7)$$

Поскольку $\rho_{2^i}(\mu, \nu_n) \geq 0$, правая часть формулы (7) не может быть отрицательной, откуда следует, что $i \geq (p+1)n$. (Значит, при $i < (p+1)n$ случай $y \notin A_n$ заведомо исключен.) Итак,

$$\rho_I(\mu, \nu_n) \leq \sum_{i=[(p+1)n]}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^i} = \frac{1}{2^{pn+[(p+1)n]-1}}. \quad (8)$$

Из неравенства (8) вытекает, что $N\left(\mu, \frac{1}{2^{pn+[(p+1)n]-1}}\right) \leq |A_n|$. Из чего по аналогии с полученной выше нижней оценкой для $\underline{D}_I(\mu)$ получаем

$$\overline{D}_I(\mu) \leq \frac{p}{2p+1} \dim_B X.$$

Таким образом,

$$D_I(\mu) = \frac{p}{2p+1} \dim_B X = \frac{ap}{2p+1}.$$

Теперь для данного числа $b \in (0, a/2)$ достаточно взять $p = \frac{b}{a-2b}$, для которого имеет место равенство $b = \frac{ap}{2p+1}$, и мы получим искомую меру μ размерности $D_I(\mu) = b$.

Пусть $c \in [0, a]$ и $b \in [0, a/2) \cap [0, c]$. В работе [11] доказано, что в компакте X существует замкнутое подмножество F , для которого $\underline{\dim}_B F = 0$, $\overline{\dim}_B F = c$. Пусть $g_F : X \rightarrow \mathbb{R}_{\max}$ — функция, принимающая значение 0 в точках множества F и равная $-\infty$ при $x \notin F$. Функция g_F является функцией плотности некоторой идемпотентной меры ξ . В [1, следствие 4.7] доказано, что

$$\underline{D}_I(\xi) = \underline{\dim}_B F, \quad \overline{D}_I(\xi) = \overline{\dim}_B F \quad (9)$$

(легко проверить, что эти равенства верны и для метризации по формуле (3)). Таким образом, при $b = 0$ мера ξ является искомой мерой μ_{0c} .

При $b > 0$ положим

$$\mu_{bc} = \mu \oplus \xi,$$

где μ — идемпотентная мера размерности $D_I(\mu) = b$, построенная выше. В силу следствия 2.4 и равенств (9) $\overline{D}_I(\mu_{bc}) \leq c$. При этом $K(\mu_{bc}) \supset F$. Значит, из предложения 2.2 следует, что $\overline{D}_I(\mu_{bc}) \geq \dim_B F = c$. Итак, $\overline{D}_I(\mu_{bc}) = c$.

Согласно предложению 2.3 $N(\mu_{bc}, 2\varepsilon) \leq N(\mu, \varepsilon) + N(\xi, \varepsilon)$. Так как $\underline{D}_I(\xi) = 0$, то существует последовательность $\varepsilon_i \rightarrow 0$, для которой

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log N(\xi, \varepsilon_i)}{-\log \varepsilon_i} = \underline{D}_I(\xi) = 0.$$

Поскольку $D_I(\mu) = b > 0$, при малых ε_i выполняется неравенство $N(\mu, \varepsilon_i) > N(\xi, \varepsilon_i)$. Следовательно,

$$\underline{D}_I(\mu_{bc}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\mu_{bc}, 2\varepsilon)}{-\log \varepsilon} \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log 2N(\mu, \varepsilon_i)}{-\log \varepsilon_i} = b.$$

Обратное неравенство $\underline{D}_I(\mu_{bc}) \geq b$ доказывается дословным повторением проведенного выше доказательства неравенства $\underline{D}_I(\mu) \geq \frac{p}{2p+1} \dim_B X$ для меры μ . $\square$

В рамках общей задачи о промежуточных значениях размерностей квантования остается открытым следующий

В о п р о с. Верно ли, что утверждение теоремы 3.1 справедливо для любого $b \in [0, c]$?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ivanov A. V.** On quantization dimensions of idempotent probability measures // Topology and its Appl. 2022. Vol. 306. Art. no. 107931. doi: 10.1016/j.topol.2021.107931
2. **Pontryagin L., Shnirelman L.** On one metric property of dimension // Ann. Math. 1932. Vol. 33. P. 156–162.
3. **Песин Я.Б.** Теория размерности и динамические системы: современный взгляд и приложения. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 404 с.
4. **Graf S., Luschgy H.** Foundations of quantization for probability distributions. Berlin: Springer-Verlag, 2000. 231 p. doi: 10.1007/BFb0103945
5. **Литвинов Г.Л., Маслов В.П., Шпиз Г.Б.** Идемпотентный функциональный анализ. Алгебраический подход // Мат. заметки. 2001. Т. 69, №5. С. 758–797. doi: 10.4213/mzm539
6. **Заричный М.М.** Пространства и отображения идемпотентных мер // Изв. РАН. Сер. математическая. 2010. Т. 74, №3. С. 45–64. doi: 10.4213/im2785
7. **Щепин Е.В.** Функторы и несчетные степени компактов // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36, №3. С. 3–62.
8. **Bazylevych L., Repovs D., Zarichnyi M.** Spaces of idempotent measures of compact metric spaces // Topology and its Appl. 2010. Vol. 157, no.1. P. 136–144. doi: 10.1016/j.topol.2009.04.040
9. **Федорчук В.В.** Тройки бесконечных итераций метризуемых функторов // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1990. Т. 54, №2. С. 396–417.
10. **Федорчук В.В.** Бикомпакты без промежуточных размерностей // Докл. АН СССР. 1973. Т. 213, №4. С. 795–797.
11. **Иванов А.В.** О промежуточных значениях емкостных размерностей // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, №3. С. 540 – 545. doi: 10.33048/smzh.2023.64.307
12. **Fedorchuk V., Todorčević S.** Cellularity of covariant functors // Topology and its Appl. 1997. Vol. 76. P. 125–150.
13. **Akian M.** Densities of idempotent measures and large deviations // Trans. of Amer. Math. Soc. 1999. Vol. 351, № 11. P. 4515–4543. doi: 10.1090/S0002-9947-99-02153-4

Поступила 21.02.2024
 После доработки 4.05.2024
 Принята к публикации 13.05.2024

Иванов Александр Владимирович
 д-р физ.-мат. наук, профессор
 ведущий научн. сотрудник
 Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН
 г. Петрозаводск
 e-mail: alvlivanov@krc.karelia.ru

REFERENCES

1. Ivanov A.V. On quantization dimensions of idempotent probability measures. *Topology and its Appl.*, 2022, vol. 306, art. no. 107931. doi: 10.1016/j.topol.2021.107931
2. Pontryagin L., Shnirelman L. On one metric property of dimension. *Ann. Math.*, 1932, vol. 33, pp. 156–162.
3. Pesin Ya.B. *Dimension theory in dynamical systems: contemporary views and applications*, Chicago, Univ. Chicago Press, 1997, 304 p. ISBN: 0-226-66222-5. Translated to Russian under the title *Teoriya razmernosti i dinamicheskiye sistemy: sovremennyy vzglyad i prilozheniya*, Moscow; Izhevsk, Institut Komp'yut. Issledov., 2002, 404 p. ISBN: 5-93972-261-X.
4. Graf S., Luschgy H. *Foundations of quantization for probability distributions*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2000, 230 p. doi: 10.1007/BFb0103945
5. Litvinov G.L., Maslov V.P., Shpiz G.B. Idempotent functional analysis: an algebraic approach. *Math. Notes*, 2001, vol. 69, no. 5, pp. 696–729. doi: 10.1023/A:1010266012029
6. Zarichnyi M.M. Spaces and maps of idempotent measures. *Izv. Math.*, 2010, vol. 74, no. 3, pp. 481–499. doi: 10.1070/IM2010v074n03ABEH002495
7. Shchepin E.V. Functors and uncountable powers of compacta. *Russian Math. Surv.*, 1981, vol. 36, no. 3, pp. 1–71. doi: 10.1070/RM1981v036n03ABEH004247
8. Bazylevych L., Repovš D., Zarichny M. Spaces of idempotent measures of compact metric spaces. *Topology Appl.*, 2010, vol. 157, no. 1, pp. 136–144. doi: 10.1016/j.topol.2009.04.040
9. Fedorchuk V.V. Triples of infinite iterates of metrizable functors. *Math. USSR-Izv.*, 1991, vol. 36, no. 2, pp. 411–433. doi: 10.1070/IM1991v036n02ABEH002028
10. Fedorchuk V.V. Compact spaces without intermediate dimensions. *Sov. Math., Dokl.*, 1972, vol. 14, pp. 1808–1811.
11. Ivanov A.V. On the intermediate values of the box dimensions. *Sib. Math. J.*, 2023, vol. 64, no. 3, pp. 593–597. doi: 10.1134/S0037446623030072
12. Fedorchuk V., Todorčević S. Cellularity of covariant functors. *Topology Appl.*, 1997, vol. 76, pp. 125–150.
13. Akian M. Densities of idempotent measures and large deviations. *Trans. of Amer. Math. Soc.*, 1999, vol. 351, no. 11, pp. 4515–4543. doi: 10.1090/S0002-9947-99-02153-4

Received February 21, 2024

Revised May 4, 2024

Accepted May 13, 2024

Funding Agency: This work was supported by the federal budget as part of a state task to the Karelian Research Center of the Russian Academy of Sciences (the Institute of Applied Mathematical Research).

Aleksandr Vladimirovich Ivanov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Institute of Applied Mathematical Research of Karelian Research of the Centre Russian Academy of Sciences, Petrozavodsk, 185910, Russia, e-mail: alvlivanov@krc.karelia.ru.

Cite this article as: A. V. Ivanov. On intermediate values of quantization dimensions of idempotent measures. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 139–148.