ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 3 2024

УДК 517.977.5

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МНОГОКРАТНО ЗАМЫКАЕМЫХ СТРАТЕГИЙ В ЗАДАЧЕ МИНИМИЗАЦИИ ПОЛНОГО ИМПУЛЬСА УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ С ВОЗМУЩЕНИЕМ[1]

Н. М. Дмитрук

Рассматривается задача оптимального управления линейной дискретной системой с неизвестным ограниченным возмущением, которую требуется перевести с гарантией на терминальное множество, обеспечивая при этом минимум полного импульса управления. Формулируется задача построения оптимальной многократно замыкаемой стратегии управления, учитывающей измерения состояний системы в несколько будущих моментов времени и коррекцию управления в них. Предлагается метод вычисления оптимальной стратегии, основанный на сведении сформулированных задач к задачам линейного программирования.

Ключевые слова: линейная система, возмущения, гарантированное оптимальное управление, стратегия управления, алгоритм.

N. M. Dmitruk. A method for constructing multiply closed strategies in the problem of minimizing the total control impulse in a linear system with disturbance.

This paper deals with an optimal control problem for a linear discrete-time system subject to unknown bounded disturbance. It is required to steer the system robustly to a terminal set with the smallest total impulse of the control function. A problem of constructing an optimal multiply closed control strategy is formulated. It is assumed that the system states are measured and the control is corrected at some future times. A method for calculating an optimal strategy based on reducing the formulated problems to linear programs is proposed.

Keywords: linear system, disturbances, robust optimal control, control strategy, algorithm.

MSC: 93C05, 93B52, 49N05, 49L20

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-3-122-138

Введение

Задачи оптимального управления динамическими системами в условиях неопределенности изучаются с 1960-х гг., однако интерес к ним сохраняется до сих пор. Это обусловлено в первую очередь необходимостью разработки практических приложений, поскольку все физические объекты подвержены действию возмущений или содержат неопределенности, которые невозможно непосредственно учесть при математическом моделировании. Между тем для них желательно получить гарантированный результат [1; 2], т. е. обеспечить выполнение ограничений и гарантировать значение критерия качества при всех возможных реализациях неизвестных величин.

При управлении системами в условиях неопределенности необходимо использовать обратные связи. Однако применение динамического программирования [3], результатом которого является оптимальная обратная связь, при наличии неопределенностей и ограничений возможно только для систем небольшой размерности на коротких горизонтах управления. Для избежания проблем, связанных с “проклятием размерности”, применяются различные подходы, которые можно объединить идеей введения отдельных элементов обратной связи в решение (см. [4; 5]). В работах [6–9] таким элементом выступают моменты замыкания системы управления, которых (в отличие от динамического программирования, допускающего замыкание в

[1]Работа выполнена при поддержке Государственной программы научных исследований “Конвергенция-2025” (НИР 1.2.04.1).

каждый момент промежутка управления) выбирается небольшое число. Предполагается, что в момент замыкания станет известно точное измерение состояния системы, и управление будет скорректировано в соответствии с полученным измерением. Результатом является стратегия управления с моментами замыкания — однократно [10; 11] или многократно [12] замыкаемая стратегия управления.

В настоящей работе рассматривается задача оптимального управления дискретной линейной системой с ограниченным возмущением, которую требуется за конечное время перевести с гарантией на терминальное множество, обеспечивая при этом минимум полного импульса управления. Подобная задача для непрерывной системы исследована в [10], где получены результаты для однократно замыкаемой стратегии управления. Объединяя идеи [10] и [12], в настоящей работе мы предлагаем метод построения многократно замыкаемой стратегии.

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную дискретную стационарную систему со скалярными управлением и возмущением:

$$x(t+1) = Ax(t) + bu(t) + dw(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in \Delta = \{0, 1, \ldots, T-1\}. \tag{1.1}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние, $u(t) \in \mathbb{R}$ — управление, $w(t) \in \mathbb{R}$ — неизвестное возмущение в момент времени t, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b, d \in \mathbb{R}^n$ — заданные матрица и векторы, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — заданное начальное состояние системы (1.1).

На доступные значения управления и терминальные состояния системы (1.1) наложены следующие ограничения:

$$\begin{gathered} u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R} \colon |u| \le 1\}, \quad t \in \Delta, \\ x(T) \in X_T = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Hx \le g\}, \end{gathered} \tag{1.2}$$

где $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $g \in \mathbb{R}^m$, и предполагается, что терминальное множество X_T ограничено.

Поскольку система (1.1) находится под действием неизвестных возмущений, терминальное ограничение $x(T) \in X_T$ требуется выполнить с гарантией, т. е. при всех возможных реализациях возмущения. Относительно возмущения предполагается его ограниченность в каждый момент времени: $w(t) \in W = \{w \in \mathbb{R} \colon |w| \le w_{\max}\}$, $t \in \Delta$, $w_{\max} > 0$.

Качество управления будем оценивать величиной полного импульса управления

$$\sum_{t=0}^{T-1} |u(t)| \tag{1.3}$$

при переводе системы с гарантией на терминальное множество. Оптимальным является управление с минимальным значением (1.3).

В работе используются следующие обозначения: $u(\cdot) = (u(t), t \in \Delta)$, $w(\cdot) = (w(t), t \in \Delta)$, $U^t = \underbrace{U \times \ldots \times U}_{t \text{ раз}}$; аналогично для W^t. Траекторию системы (1.1), соответствующую управлению $u(\cdot) \in U^T$ и возмущению $w(\cdot) \in W^T$, обозначим через $x(t|x_0, u, w)$, $t = 0, 1, \ldots, T$.

Простейший подход к решению задачи (1.1)–(1.3) состоит в построении оптимальной гарантирующей программы — управления $u^0(\cdot) = (u^0(t), t \in \Delta)$, которое зависит только от времени t и доставляет минимум критерию качества (1.3) среди всех управлений $u(\cdot)$, гарантирующих выполнение условия $x(T|x_0, u, w) \in X_T$ при всех $w(\cdot) \in W^T$.

Метод построения оптимальной гарантирующей программы в настоящей работе не обсуждается, поскольку он следует известным в литературе рассуждениям (см., например, [8; 12]), а для непрерывных систем, аналогичных (1.1), приведен в работе [10]. Кроме того, в рассматриваемых в настоящей работе ситуациях (см. примеры в разд. 5) будем основное внимание уделять тем случаям, когда оптимальная гарантирующая программа в задаче (1.1)–(1.3) не существует, например в силу значительных возмущений, действие которых накапливается в моменты времени $t \in \Delta$, что не позволяет гарантировать нахождение состояния $x(T)$ в терминальном множестве X_T ни при каком управлении $u(\cdot)$.

В идеальной ситуации нам бы хотелось получить решение в виде оптимальной обратной связи как результата применения динамического программирования [3]. Уравнение Беллмана для задачи (1.1)–(1.3) имеет вид

$$V(t,x) = \min_{u\in U}\max_{w\in W}\big\{|u| + V(t+1, Ax + bu + dw)\big\}, \quad t \in \Delta, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$
$$V(T,x) = \begin{cases} 0, & x \in X_T; \\ +\infty, & x \notin X_T. \end{cases} \tag{1.4}$$

В результате решения (1.4) будет получена оптимальная обратная связь

$$u^0(t,x) = \arg\min_{u\in U}\max_{w\in W}\big\{|u| + V(t+1, Ax + bu + dw)\big\}, \quad x \in X_t, \quad t \in \Delta,$$

определенная для состояний из множества $X_t = \{x \in \mathbb{R}^n \colon V(t,x) < +\infty\}$, при которых задача (1.4) имеет решение.

Как указано во введении, основная цель настоящей работы — построение оптимальных стратегий управления, которые представляют собой промежуточный случай между оптимальной гарантирующей программой $u^0(\cdot)$ и оптимальной обратной связью $u^0(t,x)$, $x \in X_t$, $t \in \Delta$. Идея состоит в том, чтобы замыкать систему управления не в каждый момент времени $t \in \Delta$, как при динамическом программировании (1.4), а лишь в небольшое количество моментов из Δ, называемых *моментами замыкания*. Для каждого момента замыкания предполагается, что можно будет точно измерить текущее состояние системы и спланировать новое управление в зависимости от полученного измерения для его использования на промежутке времени до следующего момента замыкания. В результате будет получена так называемая (см. [10–12]) *оптимальная многократно замыкаемая стратегия управления.*

Замечание 1. Предлагаемый подход при выборе моментов замыкания, совпадающих с Δ, дает оптимальную обратную связь, поэтому разработанный далее метод можно применять к решению (1.4) при небольших горизонтах управления T (см. разд. 5).

Замечание 2. Задача (1.1)–(1.3) может быть сведена к терминальной задаче оптимального управления, для которой метод построения оптимальных многократно замыкаемых стратегий был разработан в [12]. Однако, это требует расширения размерности пространства состояний, что нежелательно в любых подходах, опирающихся на идеи динамического программирования. Кроме того, задача (1.1)–(1.3) обладает рядом особенностей (см. замечание 3 в разд. 3), также негативно сказывающихся на размерностях задач, которые решаются в [12] при построении стратегий. В связи с этим будем комбинировать идеи работ [10] и [12] для построения нового эффективного метода построения оптимальных многократно замыкаемых стратегий в задаче (1.1)–(1.3).

Далее используются следующие обозначения: $[z]_+ = \max\{0, z\}$ — положительная срезка; $\mathbb{1} = (1, 1, \dots, 1)^\top$ — вектор-столбец из единиц, размерность которого следует из контекста; $[\alpha]$, $\{\alpha\}$ — целая и дробная части числа α соответственно; вектор-столбец $\omega(\alpha)$, $\alpha \geq 0$, составлен по правилам

$$\omega_k(\alpha) = 1,\ k \leq [\alpha]; \quad \omega_k(\alpha) = \{\alpha\},\ k = [\alpha] + 1; \quad \omega_k(\alpha) = 0,\ k > [\alpha] + 1, \tag{1.5}$$

и его размерность соответствует размерностям других векторов и матриц, используемых в конкретных ситуациях. Под записью $|z|$, $z \in \mathbb{R}^r$, понимается r-вектор $|z| = (|z_1|, |z_2|, \dots, |z_r|)^\top$, а под записью $\mathrm{sort}(z)$ — r-вектор-строка, элементы которой отсортированы и не возрастают, т. е. $\mathrm{sort}(z_k, k = 1, 2, \dots, r) = (z_{k_1}, z_{k_2}, \dots, z_{k_r})$, где $z_{k_1} \geq z_{k_2} \geq \ldots \geq z_{k_r}$.

2. Оптимальные многократно замыкаемые стратегии управления

Приведем необходимые конструкции и определения для формализации понятия многократно замыкаемой стратегии в задаче (1.1)–(1.3).

Пусть до начала процесса управления зафиксированы моменты замыкания $T_1 < T_2 < \ldots < T_N$, $T_j \in \{1, 2, \ldots, T-1\}$, $j = 1, 2, \ldots, N$. Они разбивают интервал управления на $N+1$ промежуток $\Delta_j = \{T_j, T_j+1, \ldots, T_{j+1}-1\}$, $j = 0, 1, \ldots, N$, где считается, что $T_0 = 0$, $T_{N+1} = T$.

Управление и возмущение на Δ_j будем обозначать через $u_j(\cdot) = (u_j(t), t \in \Delta_j)$, $w_j(\cdot) = (w_j(t), t \in \Delta_j)$, множества доступных на Δ_j управлений обозначим как $\mathcal{U}_j = U^{T_{j+1}-T_j}$, возможных возмущений — как $\mathcal{W}_j = W^{T_{j+1}-T_j}$.

Состояние системы (1.1) в момент времени $t \in \Delta_j$ при начальном состоянии $x(T_j) = x_j$, управлении $u_j(\cdot) \in \mathcal{U}_j$ и возмущении $w_j(\cdot) \in \mathcal{W}_j$ будем обозначать $x(t|x_j, u_j, w_j)$. Множество состояний, в которых может оказаться система (1.1) в момент времени T_{j+1}, начав движение в момент T_j из состояния x_j под действием управления $u_j(\cdot)$, обозначим

$$X(T_{j+1}|x_j, u_j) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x = x(T_{j+1}|x_j, u_j, w_j),\ w_j(\cdot) \in \mathcal{W}_j\}.$$

Следуя [9; 11], сделаем предположение.

Предположение 1. *В каждый момент T_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, можно*
1) *измерить текущее состояние $x^*(T_j)$ системы*;
2) *в зависимости от $x^*(T_j)$ выбрать новое управление $u_j\big(\cdot\,|x^*(T_j)\big) \in \mathcal{U}_j$ на Δ_j.*

Согласно предположению 1 процесс управления будет организован следующим образом. Выбираем управление $u_0(\cdot|x_0)$, которое используем в моменты времени $t \in \Delta_0$. В зависимости от выбранного управления $u_0(\cdot|x_0)$ и некоторого реализовавшегося возмущения $w_0^*(\cdot) \in \mathcal{W}_0$ система в момент T_1 окажется в состоянии $x^*(T_1) = x(T_1|x_0, u_0, w_0^*)$, которое доступно для фактического измерения. В момент T_1 вычисляем управление $u_1(\cdot|x^*(T_1))$, которое применяем на Δ_1. Продолжая этот процесс, в момент времени T_j измеряем реализовавшееся состояние $x^*(T_j) = x(T_j|x^*(T_{j-1}), u_{j-1}, w_{j-1}^*)$ и определяем управление $u_j(\cdot|x^*(T_j))$.

Очевидно, что для каждого измеряемого состояния имеет место включение

$$x^*(T_j) \in X(T_j|x^*(T_{j-1}), u_{j-1}), \quad j = 1, 2, \ldots, N,$$

где $x^*(0) = x_0$.

Поскольку состояния $x^*(T_j)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, заранее (в момент $t = 0$) не известны, решение задачи (1.1)–(1.3) будем искать в виде *стратегии управления* $\pi_N(0, x_0)$ с N моментами замыкания $T_1, \ldots, T_N$, которую определим рекуррентно.

О п р е д е л е н и е 1. *Стратегией управления с моментом замыкания T_N на* $\{\Delta_{N-1}, \Delta_N\}$ назовем совокупность

$$\pi_1(T_{N-1}, x_{N-1}) = \{u_{N-1}(\cdot|x_{N-1});\ u_N(\cdot|x_N),\ x_N \in X(T_N|x_{N-1}, u_{N-1})\}, \tag{2.1}$$

состоящую из управления $u_{N-1}(\cdot|x_{N-1}) \in \mathcal{U}_{N-1}$ на Δ_{N-1} и семейства управлений $u_N(\cdot|x_N) \in \mathcal{U}_N$ на Δ_N для всех возможных состояний x_N системы (1.1) в момент замыкания T_N.

Стратегией управления с $N-j$ моментами замыкания $T_{j+1}, T_{j+2}, \ldots, T_N$ на $\{\Delta_j, \Delta_{j+1}, \ldots, \Delta_N\}$ назовем совокупность $\pi_{N-j}(T_j, x_j)$, состоящую из управления $u_j(\cdot|x_j) \in \mathcal{U}_j$ на Δ_j и семейства стратегий $\pi_{N-j-1}(T_{j+1}, x_{j+1})$ с $N-j-1$ моментами замыкания, определенных для всех возможных позиций (T_{j+1}, x_{j+1}) процесса управления в момент замыкания T_{j+1}:

$$\begin{gathered}\pi_{N-j}(T_j, x_j) = \{u_j(\cdot|x_j);\ \pi_{N-j-1}(T_{j+1}, x_{j+1}),\ x_{j+1} \in X(T_{j+1}|x_j, u_j)\}, \\ j = N-2, N-3, \ldots, 1.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Стратегия с N моментами замыкания (*многократно замыкаемая стратегия управления*) имеет вид

$$\pi_N(0, x_0) = \{u_0(\cdot|x_0);\ \pi_{N-1}(T_1, x_1), x_1 \in X(T_1|x_0, u_0)\}. \tag{2.3}$$

О п р е д е л е н и е 2. *Для любого* $j = 0, 1, \ldots, N-1$ *управление* $u_j(\cdot|x_j)$ *в составе каждой стратегии управления* (2.1)–(2.3) *будем называть начальной программой* (*на* Δ_j).

Траекторию системы управления (1.1), соответствующую стратегии $\pi_N(0, x_0)$ и возмущению $w(\cdot) = (w_0(\cdot), w_1(\cdot), \ldots, w_N(\cdot))$, будем обозначать через $x(\cdot|x_0, \pi_N, w)$. Определим ее согласно [9; 11] как последовательное решение систем

$$
\begin{gathered}
x(t+1) = Ax(t) + bu_0(t|x_0) + dw_0(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in \Delta_0, \\
x(t+1) = Ax(t) + bu_j(t|x(T_j)) + dw_j(t), \\
x(T_j) = x(T_j|x_{j-1}, u_{j-1}, w_{j-1}), \quad t \in \Delta_j, \quad j = 1, 2, \ldots, N.
\end{gathered}
$$

О п р е д е л е н и е 3. Допустимой называется стратегия управления $\pi_N(0, x_0)$, гарантирующая выполнение терминального ограничения на соответствующей траектории:

$$
x(T|x_0, \pi_N, w) \in X_T \ \ \forall w(\cdot) \in W^T.
$$

Для получения конструктивных условий допустимости и оптимальности стратегий управления (2.1)–(2.3) применяем стандартные рассуждения динамического программирования [3]. Процесс управления рассматриваем последовательно, начиная с последнего промежутка управления Δ_N и продолжая до Δ_0, при этом считаем, что в момент T_j оптимальным образом выбирается начальная программа $u_j(\cdot|x_j)$, которая не меняется при управлении на всем промежутке Δ_j. Это дает следующий аналог уравнения Беллмана (1.4):

$$
V_j(x_j) = \min_{u_j \in \mathcal{U}_j} \max_{w_j \in \mathcal{W}_j} \Big\{ \sum\nolimits_{t \in \Delta_j} |u_j(t)| + V_{j+1}\big(x(T_{j+1}|x_j, u_j, w_j)\big) \Big\}, \quad j = N-1, \ldots, 0, \tag{2.4}
$$

$$
V_N(x_N) = \min_{u_N \in \mathcal{U}_N} \sum\nolimits_{t \in \Delta_N} |u_N(t)|, \quad X(T|x_N, u_N) \subseteq X_T. \tag{2.5}
$$

Исходя из стандартных соглашений, будем считать, что если задача (2.4) или (2.5) не имеет решения, то $V_j(x) = +\infty$.

Обозначим через $X_j \subset \mathbb{R}^n$ область определения функции V_j:

$$
X_j = \{x \in \mathbb{R}^n \colon V_j(x) < +\infty\};
$$

предположим, что параметры системы управления (1.1) таковы, что (2.4), (2.5) имеют смысл для всех j, т. е. выполняется предположение

Предположение 2. *Все множества* $X_1, X_2, \ldots, X_N$ *не пустые.*

Для дальнейших построений будет удобно определить множества X_j следующим образом:

$$
\begin{gathered}
X_j = \{x_j \in \mathbb{R}^n \colon \exists\, u_j(\cdot|x_j) \in \mathcal{U}_j, \ X(T_{j+1}|x_j, u_j) \subseteq X_{j+1}\}, \\
j = N, \ldots, 2, 1,
\end{gathered} \tag{2.6}
$$

где примем, что $X_{N+1} = X_T$. Действительно, в задаче (2.4) существование программы $u_j(\cdot|x_j)$, переводящей систему (1.1) с гарантией на множество X_{j+1}, на котором определена функция V_{j+1}, гарантирует существование и оптимальной программы

$$
u_j^0(\cdot|x_j) = \arg \min_{u_j \in \mathcal{U}_j} \max_{w_j \in \mathcal{W}_j} \Big\{ \sum\nolimits_{t \in \Delta_j} |u_j(t)| + V_{j+1}\big(x(T_{j+1}|x_j, u_j, w_j)\big) \Big\}. \tag{2.7}
$$

При выполнении предположения 2 можно дать конструктивные определения допустимости и оптимальности многократно замыкаемой стратегии управления (2.3).

О п р е д е л е н и е 4. *Стратегия* $\pi_N(0,x_0)$ *допустима, если для всех начальных программ* $u_0(\cdot|x_0)\in\mathcal{U}_0$, $u_j(\cdot|x_j)\in\mathcal{U}_j$, $x_j\in X(T_j|x_{j-1},u_{j-1})$, $j=1,2,\dots,N$, *имеют место включения*

$$X(T_{j+1}|x_j,u_j)\subseteq X_{j+1}.$$

Допустимая стратегия $\pi^0_N(0,x_0)$ *оптимальна, если ее начальные программы* $u^0_j(\cdot|x_j)$, $j=0,1,\dots,N$, *удовлетворяют* (2.7).

С целью вычисления оптимальных начальных программ $u^0_j(\cdot|x_j)$ выполним ряд эквивалентных преобразований задачи (2.4), приведя ее к виду, удобному для дальнейшего численного решения. Решение задачи (2.5) не представляет труда, поскольку это — задача построения оптимальной гарантирующей программы (см. [10]).

Сначала, используя стандартный прием для минимаксных задач (см. [13, с. 134]), запишем (2.4) в виде

$$\begin{gathered} V_j(x_j)=\min_{u_j\in\mathcal{U}_j,\alpha}\Big\{\sum\nolimits_{t\in\Delta_j}|u_j(t)|+\alpha\Big\},\\ V_{j+1}\big(x(T_{j+1}|x_j,u_j,w_j)\big)\le\alpha\ \ \forall\ w_j(\cdot)\in\mathcal{W}_j, \end{gathered}\tag{2.8}$$

где $\alpha\in\mathbb{R}$ — дополнительная переменная оптимизации.

Наряду с X_j, $j=1,2,\dots,N$, введем в рассмотрение множества

$$X_j(\alpha)=\{x\in X_j\colon V_j(x)\le\alpha\},\quad j=1,2,\dots,N,\tag{2.9}$$

где $\alpha\in\mathbb{R}$ таково, что $X_j(\alpha)\ne\varnothing$. Множества (2.9) будем называть *множествами замыкания*.

Очевидно, $X_j(\alpha_1)\subseteq X_j(\alpha_2)\subseteq X_j$ при $\alpha_1<\alpha_2$. С учетом вида критерия качества (1.3) легко указать верхнюю границу для $V_j(x_j)$: $V_j(x_j)\le T-T_j$, откуда в (2.8) и (2.9) $\alpha\le T-T_j$. С практической точки зрения это означает, что $X_j(T-T_j)=X_j$ и далее проверку предположения 2 достаточно провести в процессе построения множеств замыкания (2.9) для $\alpha=T-T_j$. Для нижней границы значений параметра α нужно учесть, что $\alpha\ge0$, однако может оказаться, что $X_j(0)=\varnothing$. Тогда существует $\alpha_{j,\min}$ — минимальное положительное значение параметра, при котором множество замыкания не пусто. Мы не будем явно вводить нижнюю границу в формулировку оптимизационных задач, так как условие непустоты (2.9) в них будет выполнено автоматически. Отметим, что $\alpha_{N,\min}=0$ (см. [10]).

Теперь задачу (2.8) построения оптимальной начальной программы $u^0_j(\cdot|x_j)$ на Δ_j представим как

$$\begin{gathered} V_j(x_j)=\min_{u_j,\alpha}\Big\{\sum\nolimits_{t\in\Delta_j}|u_j(t)|+\alpha\Big\},\\ x(t+1)=Ax(t)+bu_j(t)+dw_j(t),\quad x(T_j)=x_j,\\ |u_j(t)|\le1,\quad t\in\Delta_j,\\ x(T_{j+1})\in X_{j+1}(\alpha)\ \ \forall\ w_j(\cdot)\in\mathcal{W}_j,\\ \alpha\le T-T_{j+1}. \end{gathered}\tag{2.10}$$

Дальнейшие построения (разд. 3) основаны на изучении зависимости множеств $X_j(\alpha)$, $j=1,2,\dots,N$, от параметра α. В разд. 4 будет показано, что с использованием результатов разд. 3 задача (2.10) эквивалентна задаче линейного программирования.

3. Построение множеств замыкания

Сначала установим, что все множества замыкания $X_j(\alpha)$, $\alpha\in[0,T-T_j]$, $j=1,2,\dots,N$, суть выпуклые многогранники. Начнем с множества $X_N(\alpha)$. Поскольку задача (2.5) — задача линейного программирования на минимум, функция $V_N(x)$, $x\in X_N$, является кусочно-линейной выпуклой функцией (см. [14, с. 180]). Соответственно, ее множество α-уровня $X_N(\alpha)$ при любом фиксированном значении $\alpha\in[0,T-T_j]$ — выпуклый многогранник. Поскольку терминальное множество X_T ограничено, множества замыкания $X_N(\alpha)$ также являются ограниченными.

По индукции, предполагая, что $X_{j+1}(\alpha)$ — выпуклый многогранник, а каждая задача (2.10) может быть представлена как задача линейного программирования (см. разд. 4), снова получаем, что $V_j(x)$, $x \in X_j$, является кусочно-линейной выпуклой, определенной на выпуклом множестве X_j. Тогда ее множество α-уровня $X_j(\alpha)$ при любом фиксированном значении α — выпуклый многогранник.

Предположение 3. *Для каждого $j = 1, 2, \dots, N$ известны векторы $p_{ji} \in \mathbb{R}^n$, $\|p_{ji}\| = 1$, $i = 1, 2, \dots, l_j$, образующие систему нормалей многогранников $X_j(\alpha)$ $\forall \alpha \in [\alpha_{j,\min}, T - T_j]$.*

Оказывается, что для множеств замыкания $X_j(\alpha)$ можно получить явное представление зависимости от параметра α. Начнем с исследования множества $X_N(\alpha)$. Для этого введем обозначения

$$G_N = HA^{T-T_N}, \quad d_N(t) = A^{T_N-t-1}b, \quad t \in \Delta_N, \quad \gamma_N = w_{\max} \sum\nolimits_{t \in \Delta_N} |HA^{T-t-1}d|. \tag{3.1}$$

Для каждого $i = 1, 2, \dots, l_N$ решим задачу линейного программирования

$$g_{Ni} = \min_y \, (g - \gamma_N)^\top y, \quad y \in Y_{Ni} = \{y \in \mathbb{R}^m \colon G_N^\top y = p_{Ni}, \ y \geq 0\}, \tag{3.2}$$

и составим вектор-строку

$$q_{Ni}^\top = \mathrm{sort}(|p_{Ni}^\top d_N(t)|, t \in \Delta_N).$$

Утверждение 1. *Множество замыкания $X_N(\alpha)$ имеет вид*

$$X_N(\alpha) = \big\{x \in \mathbb{R}^n \colon P_N x \leq g_N + Q_N \omega(\alpha)\big\}, \quad \alpha \in [0, T - T_N], \tag{3.3}$$

где

$$P_N = \begin{pmatrix} p_{Ni}^\top \\ i = 1, \dots, l_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l_N \times n}, \quad g_N = \begin{pmatrix} g_{Ni} \\ i = 1, \dots, l_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l_N},$$

$$Q_N = \begin{pmatrix} q_{Ni}^\top \\ i = 1, \dots, l_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l_N \times (T - T_N)},$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определениям (2.6), (2.9) множество $X_N(\alpha)$ содержит все состояния x_N, для которых существует управление, переводящее систему (1.1) с гарантией на терминальное множество X_T и имеющее полный импульс, не превосходящий α:

$$X_N(\alpha) = \Big\{x_N \in \mathbb{R}^n \colon \exists\, u_N(\cdot|x_N) \in \mathcal{U}_N, \ X(T|x_N, u_N) \subseteq X_T, \ \sum\nolimits_{t \in \Delta_N} |u_N(t|x_N)| \leq \alpha\Big\}.$$

С другой стороны, ввиду предположения 3 имеем полиэдральное представление

$$X_N(\alpha) = \{x_N \in \mathbb{R}^n \colon p_{Ni}^\top x_N \leq f_{Ni}(\alpha), \ i = 1, 2, \dots, l_N\}, \tag{3.4}$$

где для $f_{Ni}(\alpha)$ можно сформулировать оптимизационную задачу

$$f_{Ni}(\alpha) = \max_{x_N} p_{Ni}^\top x_N, \ x_N \in X_N(\alpha). \tag{3.5}$$

Используя первое из приведенных представлений $X_N(\alpha)$, перепишем (3.5):

$$\begin{gathered} f_{Ni}(\alpha) = \max_{x_N, u_N} p_{Ni}^\top x_N, \\ x(t+1) = Ax(t) + bu_N(t) + dw_N(t), \quad x(T_N) = x_N, \quad |u_N(t)| \leq 1, \quad t \in \Delta_N, \\ Hx(T) \leq g \ \ \forall w_N(\cdot) \in \mathcal{W}_N, \quad \sum\nolimits_{t \in \Delta_N} |u_N(t)| \leq \alpha. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Задача (3.6) содержит неопределенность, представленную возмущением, поэтому сначала, следуя работам [11; 12], сведем ее к детерминированной:

$$\begin{gathered} f_{Ni}(\alpha) = \max_{x_N, u_N} p_{Ni}^\top x_N, \\ x(t+1) = Ax(t) + bu_N(t), \quad x(T_N) = x_N, \quad |u_N(t)| \le 1, \quad t \in \Delta_N, \\ Hx(T) \le g - \gamma_N, \quad \sum\nolimits_{t \in \Delta_N} |u_N(t)| \le \alpha. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Далее, выразив терминальное состояние $x(T) = A^{T-T_N} x_N + \sum_{t \in \Delta_N} A^{T-t-1} bu_N(t)$, исключим из задачи (3.7) динамическую систему и положим $u_N(t) = u_N^*(t) - u_{N*}(t)$, $0 \le u_N^*(t) \le 1$, $0 \le u_{N*}(t) \le 1$, что позволяет заменить $|u_N(t)| = u_N^*(t) + u_{N*}(t)$, $t \in \Delta_N$. Используя обозначения (3.1), получим эквивалентную (3.6) задачу линейного программирования

$$\begin{gathered} f_{Ni}(\alpha) = \max_{x_N, u_N^*, u_{N*}} p_{Ni}^\top x_N, \\ G_N x_N + \sum\nolimits_{t \in \Delta_N} G_N d_N(t)(u_N^*(t) - u_{N*}(t)) \le g - \gamma_N, \\ \sum\nolimits_{t \in \Delta_N} (u_N^*(t) + u_{N*}(t)) \le \alpha, \\ 0 \le u_N^*(t) \le 1, \quad 0 \le u_{N*}(t) \le 1, \quad t \in \Delta_N. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Теперь рассмотрим задачу (3.8) как задачу, зависящую от скалярного параметра α, т. е. как параметрическую задачу линейного программирования [14]. Из [14] следует, что функция $f_{Ni}(\alpha)$, $\alpha \in [0, T - T_N]$, — кусочно-линейная вогнутая. Ее можно полностью построить (найти промежутки и коэффициенты линейности) с применением результатов теории двойственности.

Построим задачу, двойственную к (3.8):

$$\begin{gathered} f_{Ni}(\alpha) = \min_{y, \lambda, v^*, v_*} (g - \gamma_N)^\top y + \alpha\lambda + \sum\nolimits_{t \in \Delta_N} (v^*(t) + v_*(t)), \\ \big(G_N d_N(t)\big)^\top y + v^*(t) + \lambda \ge 0, \quad v^*(t) \ge 0, \quad t \in \Delta_N, \\ -\big(G_N d_N(t)\big)^\top y + v_*(t) + \lambda \ge 0, \quad v_*(t) \ge 0, \quad t \in \Delta_N, \\ y \in Y_{Ni}, \quad \lambda \ge 0, \end{gathered} \tag{3.9}$$

где $y \in \mathbb{R}^m$, λ, $v_*(t)$, $v^*(t) \in \mathbb{R}$, $t \in \Delta_N$, — двойственные переменные.

Нетрудно видеть, что в задаче (3.9) $v^*(t) = [-p_{Ni}^\top d_N(t) - \lambda]_+$, $v_*(t) = [p_{Ni}^\top d_N(t) - \lambda]_+$, $t \in \Delta_N$. Тогда задача (3.9) упрощается, в ней остаются только двойственные переменные y, λ, причем минимизация по ним может проводиться независимо:

$$f_{Ni}(\alpha) = \min_{y \in Y_{Ni}} (g - \gamma_N)^\top y + \min_{\lambda \ge 0} \Big\{ \alpha\lambda + \sum\nolimits_{t \in \Delta_N} \big[|p_{Ni}^\top d_N(t)| - \lambda\big]_+ \Big\}. \tag{3.10}$$

В (3.10) первое слагаемое есть g_{Ni} согласно (3.2). Во втором слагаемом вычислить минимальное значение можно явно. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(\lambda|\alpha, q) = \alpha\lambda + \sum\nolimits_{k=1}^r \big[q_k - \lambda\big]_+, \quad \lambda \ge 0, \tag{3.11}$$

где $\alpha \in [0, r]$, $q = (q_k, k = 1, 2, \ldots, r)$ — параметры, причем $q_1 \ge q_2 \ge \ldots \ge q_r$.

Функция (3.11) аргумента λ при фиксированных значениях параметров является кусочно-линейной выпуклой, имеет изломы последовательно в точках q_r, q_{r-1}, …, q_1, и следующие производные:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=+0} = \alpha - r, \;\; \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=q_r+0} = \alpha - r + 1, \;\; \ldots, \;\; \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=q_1+0} = \alpha.$$

Нетрудно видеть, что при $\alpha = 0$ минимум функции (3.11) по λ достигается в точке $\lambda = q_1$, при $\alpha = r$ — в точке $\lambda = 0$:

$$\min_{\lambda\ge 0}\varphi(\lambda|0,q) = \varphi(q_1|0,q) = 0, \quad \min_{\lambda\ge 0}\varphi(\lambda|r,q) = \varphi(0|r,q) = \sum\nolimits_{k=1}^{r} q_k.$$

Получим общее правило: при $\alpha \in [\bar{k}-1,\bar{k})$, $\bar{k} = 1,2,\dots,r$, минимум (3.11) достигается в точке $\lambda = q_{\bar{k}}$:

$$\min_{\lambda\ge 0}\varphi(\lambda|\alpha,q) = \varphi(q_{\bar{k}}|\alpha,q) = \sum\nolimits_{k=1}^{\bar{k}-1} q_k + \{\alpha\}q_{\bar{k}} = \sum\nolimits_{k=1}^{[\alpha]} q_k + \{\alpha\}q_{[\alpha]+1} = q^\top\omega(\alpha).$$

Возвращаясь к (3.10) и принимая во внимание обозначения (1.5), имеем

$$f_{Ni}(\alpha) = g_{Ni} + \min_{\lambda\ge 0}\varphi(\lambda|\alpha,q_{Ni}) = g_{Ni} + q_{Ni}^\top\omega(\alpha). \tag{3.12}$$

Объединяя (3.12) и (3.4) в векторной записи, получим (3.3).

Утверждение доказано.

З а м е ч а н и е 3. Если применить подход из работы [12] к описанию структуры функции $f_{Ni}(\alpha)$, $\alpha \in [0, T-T_N]$, то из свойств функции (3.11) следует, что (3.10) имеет изломы при всех целых значениях параметра α. Тогда количество неравенств, которые описывают множество замыкания $X_N(\alpha)$ в методе [12], равно $l_N(T-T_N)$ и растет с ростом длины промежутка Δ_N, что далее негативно сказывается на размерности задач построения оптимальной начальной программы (см. разд. 4). Полученное представление (3.3) позволяет избежать роста числа ограничений.

Представление, аналогичное (3.3), можно получить и для $j = 1,2,\dots,N-1$. Действительно, в полиэдральном представлении $X_j(\alpha) = \{x_j \in \mathbb{R}^n\colon p_{ji}^\top x_j \le f_{ji}(\alpha),\ i = 1,2,\dots,l_j\}$, величины $f_{ji}(\alpha)$, $i = 1,2,\dots,l_j$, могут быть найдены из задач

$$\begin{gathered} f_{ji}(\alpha) = \max_{x_j,u_j,\alpha_{j+1}} p_{ji}^\top x_j,\\ x(t+1) = Ax(t) + bu_j(t) + dw_j(t), \quad x(T_j) = x_j, \quad |u_j(t)| \le 1, \quad t \in \Delta_j,\\ x(T_{j+1}) \in X_{j+1}(\alpha_{j+1}) \ \ \forall w_j(\cdot) \in \mathcal{W}_j,\\ \sum\nolimits_{t\in\Delta_j} |u_j(t)| + \alpha_{j+1} \le \alpha, \quad \alpha_{j+1} \le T - T_{j+1}. \end{gathered} \tag{3.13}$$

Предположим, что искомое представление имеет место для $X_{N-1}(\alpha)$, …, $X_{j+1}(\alpha)$, т. е. в задаче (3.13) множество $X_{j+1}(\alpha)$ описывается формулой

$$X_{j+1}(\alpha) = \bigl\{x \in \mathbb{R}^n\colon P_{j+1}x \le g_{j+1} + Q_{j+1}\omega(\alpha)\bigr\}, \quad \alpha \in [\alpha_{j+1,\min}, T - T_{j+1}],$$

при некоторых $P_{j+1} \in \mathbb{R}^{m_{j+1}\times n}$, $g_{j+1} \in \mathbb{R}^{m_{j+1}}$, $Q_{j+1} \in \mathbb{R}^{m_{j+1}\times(T-T_{j+1})}$, где вид этих матриц и размерность m_{j+1} будут пояснены ниже, $m_N = l_N$.

Сначала покажем, что задачу (3.13) можно переписать как

$$\begin{gathered} f_{ji}(\alpha) = \max_{x_j,u_j,\omega} p_{ji}^\top x_j,\\ x(t+1) = Ax(t) + bu_j(t) + dw_j(t), \quad x(T_j) = x_j, \quad |u_j(t)| \le 1, \quad t \in \Delta_j,\\ P_{j+1}x(T_{j+1}) - Q_{j+1}\omega \le g_{j+1} \ \ \forall w_j(\cdot) \in \mathcal{W}_j,\\ \sum\nolimits_{t\in\Delta_j} |u_j(t)| + \mathbb{1}^\top\omega \le \alpha, \quad 0 \le \omega \le \mathbb{1}, \end{gathered} \tag{3.14}$$

где вместо скалярной переменной оптимизации α используется оптимизация по вектору $\omega \in \mathbb{R}^{T-T_{j+1}}$. Обоснование такой замены основано на монотонности строк матрицы Q_{j+1}, теории двойственности и условий оптимальности для задач линейного программирования.

Действительно, задача линейного программирования, эквивалентная (3.14), имеет вид

$$\begin{gathered} f_{ji}(\alpha) = \max_{x_j, u_j, \omega} p_{ji}^\top x_j, \\ G_j x_j + \sum\nolimits_{t \in \Delta_j} G_j d_j(t)(u_j^*(t) - u_{j*}(t)) - Q_{j+1}\omega \le g_{j+1} - \gamma_j, \\ \sum\nolimits_{t \in \Delta_j} (u_j^*(t) + u_{j*}(t)) + \mathbb{1}^\top \omega \le \alpha, \\ 0 \le u_j^*(t) \le 1, \quad 0 \le u_{j*}(t) \le 1, \quad t \in \Delta_j, \quad 0 \le \omega \le \mathbb{1}, \end{gathered} \tag{3.15}$$

где

$$G_j = P_{j+1} A^{T_{j+1} - T_j}, \quad d_j(t) = A^{T_j - t - 1} b, \quad t \in \Delta_j, \quad \gamma_j = w_{\max} \sum\nolimits_{t \in \Delta_j} |P_{j+1} A^{T_{j+1} - t - 1} d|.$$

Двойственную к (3.15) задачу запишем как

$$\begin{gathered} f_{ji}(\alpha) = \min_{y, \lambda, v^*, v_*, \mu} (g_{j+1} - \gamma_j)^\top y + \alpha\lambda + \sum\nolimits_{t \in \Delta_j} (v^*(t) + v_*(t)) + \mathbb{1}^\top \mu, \\ \big(G_j d_j(t)\big)^\top y + v^*(t) + \lambda \ge 0, \quad v^*(t) \ge 0, \quad t \in \Delta_j, \\ -\big(G_j d_j(t)\big)^\top y + v_*(t) + \lambda \ge 0, \quad v_*(t) \ge 0, \quad t \in \Delta_j, \\ -q_{j+1,k}^\top y + \mu_k + \lambda \ge 0, \quad \mu_k \ge 0, \quad k = 1, 2, \ldots, T - T_{j+1}, \\ y \in Y_{ji} = \{y \in \mathbb{R}^{m_{j+1}} \colon G_j^\top y = p_{ji}, \quad y \ge 0\}, \quad \lambda \ge 0, \end{gathered} \tag{3.16}$$

где $q_{j+1,k}$ — k-й столбец матрицы Q_{j+1}.

Аналогично задаче (3.9) в (3.16) можно найти часть двойственных переменных:

$$\begin{gathered} v^*(t) = [-p_{ji}^\top d_j(t) - \lambda]_+, \quad v_*(t) = [p_{ji}^\top d_j(t) - \lambda]_+, \quad t \in \Delta_j, \\ \mu_k = [q_{j+1,k}^\top y - \lambda]_+, \quad k = 1, 2, \ldots, T - T_{j+1}. \end{gathered} \tag{3.17}$$

В силу невозрастания элементов матрицы Q_{j+1} в каждой строке $q_{j+1,1}^\top y \ge q_{j+1,2}^\top y \ge \ldots \ge q_{j+1,T-T_{j+1}}^\top y$, откуда $\mu_1 \ge \mu_2 \ge \ldots \ge \mu_{T-T_{j+1}}$. Из (3.17) следует, что существует $\bar{k} \in \{1, 2, \ldots, T - T_{j+1}\}$, такое что $\mu_k > 0$, $k \le \bar{k}$, $\mu_k = 0$, $k > \bar{k}$.

Решения прямой задачи (3.15) и двойственной к ней (3.16) связаны условиями дополняющей нежесткости, из которых выделим часть, соответствующую переменным ω_k, μ_k:

$$\mu_k(1 - \omega_k) = 0, \quad \omega_k(-q_{j+1,k}^\top y + \mu_k + \lambda) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, T - T_{j+1}.$$

В силу свойств μ_k, $k = 1, 2, \ldots, T - T_{j+1}$, для оптимального вектора ω^0 в задаче (3.15) $\omega_k^0 = 1$, $k \le \bar{k}$, $\omega_{\bar{k}+1}^0 \in [0, 1]$, $\omega_k^0 = 0$, $k > \bar{k} + 1$, т.е. на оптимальном решении мы имеем структуру вектора ω, совпадающую с (1.5) для $\alpha^0 = \mathbb{1}^\top \omega^0$. Это обосновывает замену α на ω.

Продолжим выяснение свойств функции $f_{ji}(\alpha)$. Зная часть двойственных переменных (3.17), упростим задачу (3.16):

$$f_{ji}(\alpha) = \min_{y \in Y_{ji}, \lambda \ge 0} \Big\{ (g_{j+1} - \gamma_j)^\top y + \alpha\lambda + \sum_{t \in \Delta_j} \big[|p_{ji}^\top d_j(t)| - \lambda\big]_+ + \sum_{k=1}^{T - T_{j+1}} \big[q_{j+1,k}^\top y - \lambda\big]_+ \Big\}. \tag{3.18}$$

Здесь, в отличие от задачи (3.10), не удается выделить две задачи минимизации, поскольку переменные y, λ не являются независимыми. Поэтому в (3.18) сначала проведем минимизацию по λ при фиксированном y.

Обозначим

$$\begin{gathered} q_{ji}(y)^\top = \operatorname{sort} \Big(|p_{ji}^\top d_j(t)|, \ t \in \Delta_j, \ q_{j+1,k}^\top y, \ k = 1, 2, \ldots, T - T_{j+1} \Big) \in \mathbb{R}^{T - T_j}, \\ g_{ji}(y) = (g_{j+1} - \gamma_j)^\top y. \end{gathered} \tag{3.19}$$

Тогда, используя вспомогательную функцию (3.11) и рассуждения, приведенные выше при доказательстве утверждения 1, получим

$$f_{ji}(\alpha) = \min_{y \in Y_{ji}} \big\{ g_{ji}(y) + q_{ji}(y)^\top \omega(\alpha) \big\}. \tag{3.20}$$

Нетрудно видеть, что минимум в (3.20) может достигаться только на конечном подмножестве множества Y_{ji} двойственных переменных y. Действительно, вернемся к задаче (3.15) и рассмотрим ее как параметрическую задачу линейного программирования с параметром α. Следуя алгоритму, приведенному в работе [12], можно найти значение $\alpha_{j,\min}$ и получить разбиение отрезка $[\alpha_{j,\min}, T - T_j]$ точками $\alpha_{j,\min} = a_0 < a_1 < \ldots < a_K = T - T_j$ на K_{ji} интервалов вида $[a_k, a_{k+1}]$, на каждом из которых оптимальный базис задачи линейного программирования остается постоянным, а следовательно, оптимальное двойственное решение также остается постоянным. Заметим, что число различных оптимальных y при этом может быть меньшим K_{ji}, поскольку различия двойственного решения на двух соседних интервалах может приходиться на другие двойственные переменные.

Обозначим через $\bar{Y}_{ji}$ конечное подмножество множества Y_{ji}, состоящее из всех различных оптимальных двойственных решений y в параметрической задаче линейного программирования (3.15). Тогда в задаче (3.20) можно заменить минимизацию по всему множеству Y_{ji} перебором значений из $\bar{Y}_{ji}$.

Подводя итоги рассуждений, сформулируем

Утверждение 2. *Множество замыкания $X_j(\alpha)$ имеет вид*

$$X_j(\alpha) = \big\{ x \in \mathbb{R}^n \colon p_{ji}^\top x \le g_{ji}(y) + q_{ji}(y)^\top \omega(\alpha),\ y \in \bar{Y}_{ji},\ i = 1, 2, \ldots, l_j \big\},$$
$$\alpha \in [\alpha_{j,\min}, T - T_j].$$

В матричной записи имеем аналогичное (3.3) представление

$$X_j(\alpha) = \big\{ x \in \mathbb{R}^n \colon P_j x \le g_j + Q_j \omega(\alpha) \big\}, \quad \alpha \in [\alpha_{j,\min}, T - T_j], \tag{3.21}$$

где

$$P_j = \begin{pmatrix} P_{ji} \\ i = 1, \ldots, l_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m_j \times n}, \quad g_j = \begin{pmatrix} g_{ji}(y) \\ y \in \bar{Y}_{ji} \\ i = 1, \ldots, l_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m_j},$$
$$Q_j = \begin{pmatrix} q_{ji}^\top(y) \\ y \in \bar{Y}_{ji} \\ i = 1, \ldots, l_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m_j \times (T - T_j)},$$

и считаем, что матрицы P_{ji} составлены из $|\bar{Y}_{ji}|$ одинаковых строк $p_{ji}^\top$, $m_j = \sum_{i=1}^{l_j} |\bar{Y}_{ji}|$.

4. Задачи построения оптимальных начальных программ как задачи линейного программирования

Представление (3.21) позволяет переписать задачу (2.10) построения оптимальной начальной программы $u_j^0(\cdot|x_j)$ следующим образом (приведем сразу детерминированную задачу):

$$\begin{gathered} V_j(x_j) = \min_{u_j, \alpha} \sum_{t \in \Delta_j} |u_j(t)| + \mathbb{1}^\top \omega(\alpha), \\ x(t+1) = Ax(t) + bu_j(t), \quad x(T_j) = x_j, \\ |u_j(t)| \le 1, \quad t \in \Delta_j, \\ P_{j+1} x(T_{j+1}) - Q_{j+1} \omega(\alpha) \le g_{j+1} - \gamma_j, \\ \alpha \le T - T_{j+1}. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Решение задачи (4.1) обосновывает

Утверждение 3. *Пусть* $u_j^{*0}(t)$, $u_{j*}^0(t)$, $t \in \Delta_j$, ω^0 *— решение задачи линейного программирования*

$$V_j(x_j) = \min_{u_j^*, u_{j*}, \omega} \sum_{t\in\Delta_j} (u_j^*(t) + u_{j*}(t)) + \mathbb{1}^\top \omega,$$

$$\sum_{t\in\Delta_j} G_j d_j(t)(u_j^*(t) - u_{j*}(t)) - Q_{j+1}\omega \le g_{j+1} - \gamma_j - G_j x_j, \tag{4.2}$$

$$0 \le u_j^*(t) \le 1, \quad 0 \le u_{j*}(t) \le 1, \quad t \in \Delta_j, \quad 0 \le \omega \le \mathbb{1}.$$

Тогда $u_j^0(t|x_j) = u_j^{*0}(t) - u_{j*}^0(t)$, $t \in \Delta_j$, *— оптимальная начальная программа на промежутке* Δ_j, *которая вместе с* $\alpha^0 = \mathbb{1}^\top \omega^0$ *составляет решение задачи* (4.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о утверждения основано на заменах переменных, примененных при переходе от задачи (3.7) к задаче линейного программирования (3.8), замене α на ω, как в (3.14). □

Таким образом, метод построения оптимальной стратегии $\pi_N^0(0, x_0)$ и управления системой (1.1) этой стратегией, состоит в следующем.

До начала процесса управления:

1. Для всех $j = N, N-1, \dots, 1$, $i = 1, 2, \dots, l_j$, провести анализ чувствительности в задачах (3.15) по параметру α, построить множества $\bar{Y}_{ji}$ (множества $\bar{Y}_{Ni}$ содержат одну точку — решение задачи линейного программирования (3.2)), вычислить $g_{ji}(y)$, $q_{ji}(y)$, $y \in \bar{Y}_{ji}$, по формулам (3.19) и сформировать матрицы P_j, Q_j и векторы g_j.
2. Решить задачу (4.2) для $j = 0$, найти оптимальную начальную программу $u_0^0(\cdot|x_0)$.

В процессе управления:

3. Подать управление $u_j^0(\cdot|x^*(T_j)$ на объект на Δ_j.
4. Положить $j := j + 1$. Завершить процесс при $j = N + 1$.
5. Измерить текущее состояние системы $x^*(T_j)$.
6. Решить задачу (4.2) для $x_j = x^*(T_j)$, найти оптимальную начальную программу $u_j^0(\cdot|x^*(T_j))$, перейти к шагу 3.

В описанном процессе будет реализовано следующее управление:

$$u(t) = u_j^0(t|x^*(T_j)), \quad t \in \Delta_j, \quad j = 0, 1, \dots, N. \tag{4.3}$$

Поскольку все решаемые задачи являются задачами линейного программирования, метод обладает невысокой трудоемкостью.

5. Примеры

Приведем ряд примеров, иллюстрирующих построение оптимальных стратегий. Рассматриваемая далее дискретная система получена дискретизацией непрерывной системы $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1 + u$, $t \in [0, 10]$ (см. также [10]).

П р и м е р 1. Рассмотрим задачу

$$\min \ \textstyle\sum_{t\in\Delta} u(t),$$

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 0.5403 & 0.8415 \\ -0.8415 & 0.5403 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0.4597 \\ 0.8415 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0.4597 \\ 0.8415 \end{pmatrix} w(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

$$|u(t)| \le 1, \quad |w(t)| \le 0.3, \quad t \in \Delta = \{0, 1, \dots, 9\}, \quad |x_i(10)| \le 0.5, \quad i = 1, 2.$$

В силу достаточно большой амплитуды возмущений и относительно небольшого терминального множества в задаче (5.1) не существует гарантирующих программ, а также стратегий управления с одним моментом замыкания ни при каком $T_1 \in \Delta$.

Выберем два момента замыкания: $T_1 = 5$, $T_2 = 8$. Оптимальная стратегия $\pi_2^0(0, x_0)$ в (5.1) существует и доставляет оптимальное значение критерию качества равное $V_0(0, x_0) = 7.624259$.

На рис. 1 приведена иллюстрация решения. На рис. 1b приведены графики траектории $x^*(t)$, $t \in \Delta$, соответствующего управления (4.3) и экстремального возмущения $w^*(\cdot)$, где под таким возмущением понимается доставляющее максимум в задачах (2.7).

На рис. 1a жирной сплошной линией представлена фазовая траектория $x^*(t), t \in \Delta$, а штриховыми линиями изображены траектории номинальной системы, т. е. системы без возмущения. Траектория *1* относится к промежутку Δ_0 и изображает фазовую траекторию $x(\cdot|x_0, u_0^0, 0)$ системы под действием начальной программы $u_0^0(\cdot|x_0)$ и нулевого возмущения. Траектории *2* и *3* соответствуют промежуткам Δ_1 и Δ_2 и траекториям $x(\cdot|x^*(T_1), u_1^0, 0)$, $x(\cdot|x^*(T_2), u_2^0, 0)$. Сплошными тонкими линиями изображены множества $X(T_1|x_0, u_0^0)$, $X(T_2|x^*(T_1), u_1^0)$, $X(T|x^*(T_2), u_2^0)$ возможных состояний системы (5.1) под действием оптимальных начальных программ на соответствующих промежутках. Множество $X(T|x^*(T_2), u_2^0)$ целиком лежит в терминальном множестве X_T (серая область), что иллюстрирует выполнение ограничений (1.2) с гарантией. В терминальный момент времени система оказалась в состоянии $x^*(10) = (-0.5, -0.214922)$.

Пунктирные линии на рис. 1a изображают два множества замыкания: $X_1(\alpha_1)$ при $\alpha_1 = 3.505812$ и $X_2(\alpha_2)$ при $\alpha_2 = 1.765617$. Отметим, что при экстремальном возмущении имеют место $V_1(x^*(T_1)) = \alpha_1$, $V_2(x^*(T_2)) = \alpha_2$.

Характеристики множеств замыкания — число нормалей, необходимых для описания каждого множества при всех значениях параметра α, число строк m_j в матрице P_j, определяющее

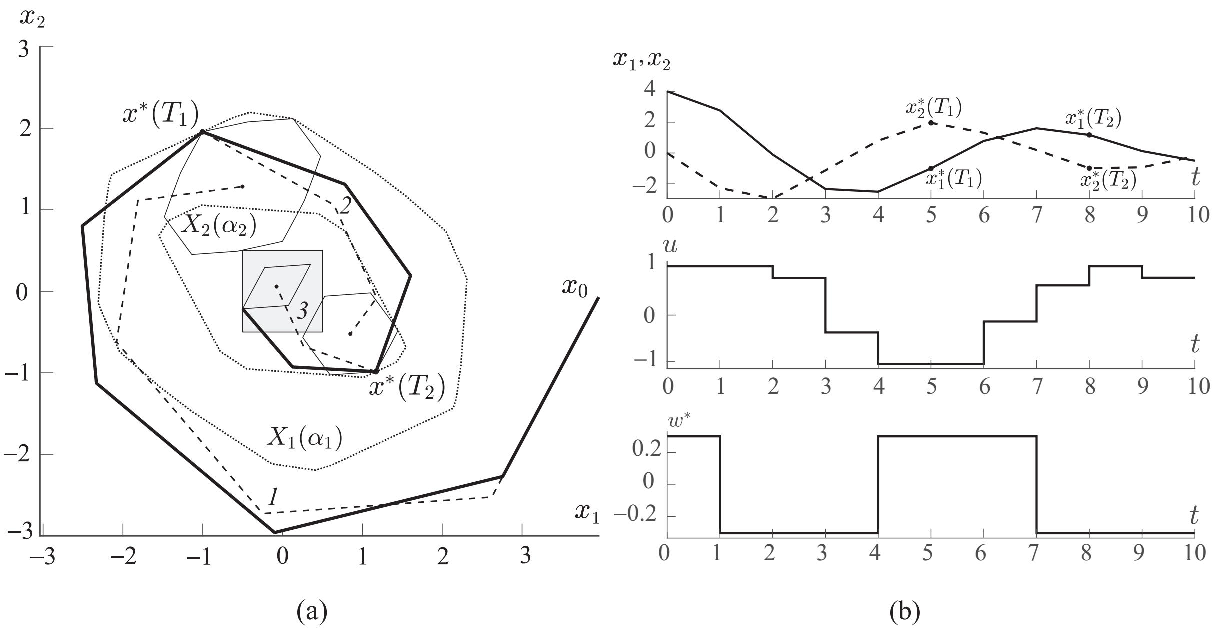

Рис. 1. Результаты решения примера 1.

Т а б л и ц а 1

Параметры множеств замыкания $X_1(\alpha)$, $X_2(\alpha)$ в примере 1

Момент замыкания	$T_1 = 5$	$T_2 = 8$
Число нормалей l_j	54	12
Размерность m_j	324	12
Допустимые α	$[0.7139, 5]$	$[0, 2]$
Время построения (с)	1.22	0.09

итоговую размерность задачи линейного программирования (4.2), интервал допустимых значений параметра α для соответствующего множества замыкания, а также время, необходимое для построения всех параметров функций (3.20), — приведены в табл. 1. Точность построения системы нормалей согласно предположению 3 составила 10^{-9}.

П р и м е р 2. Для задачи (5.1) выберем четыре момента замыкания: $T_1 = 2$, $T_2 = 4$, $T_3 = 6$, $T_4 = 8$. Оптимальная стратегия $\pi_4^0(0, x_0)$ доставляет оптимальное значение критерию качества: $V_0(0, x_0) = 7.589282$. На рис. 2 приведены результаты решения: траектории на фазовой плоскости и в зависимости от времени, а также управление (4.3), реализовавшееся в процессе с экстремальным возмущением $w^*(\cdot)$. В терминальный момент времени система оказалась в состоянии $x^*(10) = (-0.5, -0.5)$.

Оптимальные значения задач (2.8):

$$V_1(x^*(T_1)) = \alpha_1 = 5.589282, \quad V_2(x^*(T_2)) = \alpha_2 = 4.375461,$$

$$V_3(x^*(T_3)) = \alpha_3 = 2.375461, \quad V_4(x^*(T_4)) = \alpha_4 = 1.378872.$$

Характеристики множеств замыкания в примере 2 приведены в табл. 2.

Отметим, что экстремальные возмущения в примерах 1 и 2 различны (см. рисунки 1b, 2b). Если в примере 2 использовать возмущение из примера 1, то в процессе управления стратегией $\pi_4^0(0, x_0)$ реализуется управление (4.3), полный импульс которого равен 6.876471.

П р и м е р 3. Для задачи (5.1) примем $T_j = j$, $j = 1, 2, \ldots, 9$, т.е. реализуем полную схему динамического программирования (1.4) и построим оптимальную обратную связь

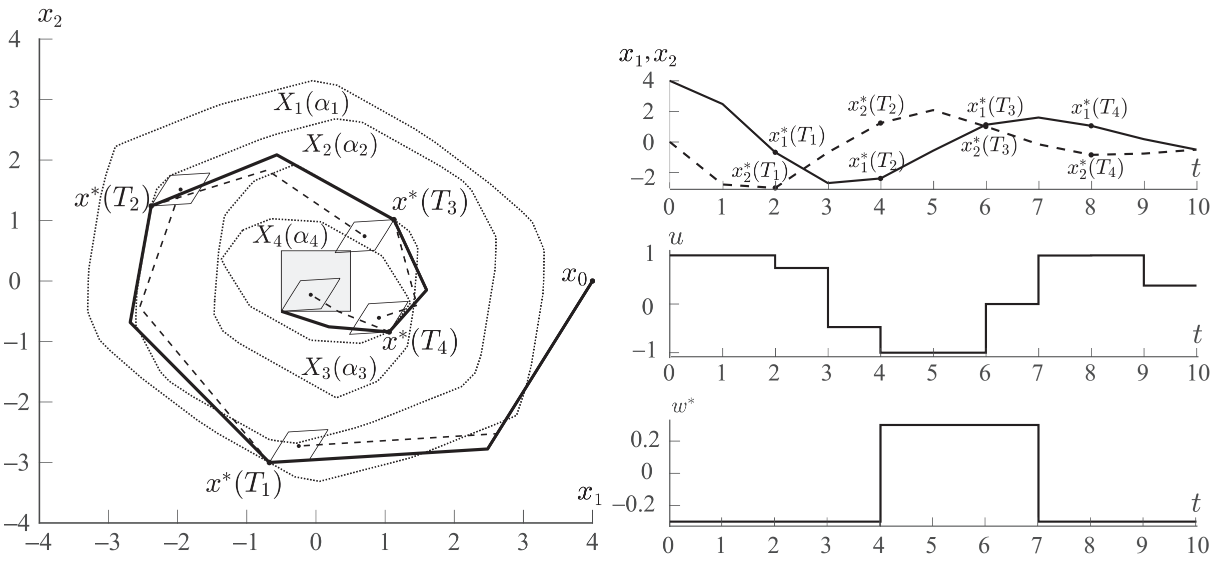

Рис. 2. Результаты решения примера 2.

Т а б л и ц а 2

Параметры множеств замыкания $X_j(\alpha)$, $j = 1, 2, 3, 4$, в примере 2

Момент замыкания	$T_1 = 2$	$T_2 = 4$	$T_3 = 6$	$T_4 = 8$
Число нормалей l_j	260	126	40	12
Размерность m_j	5300	1640	186	12
Допустимые α	$[1.1827, 8]$	$[0.8983, 6]$	$[0.4944, 4]$	$[0, 2]$
Время построения (с)	12.95	2.93	0.37	0.05

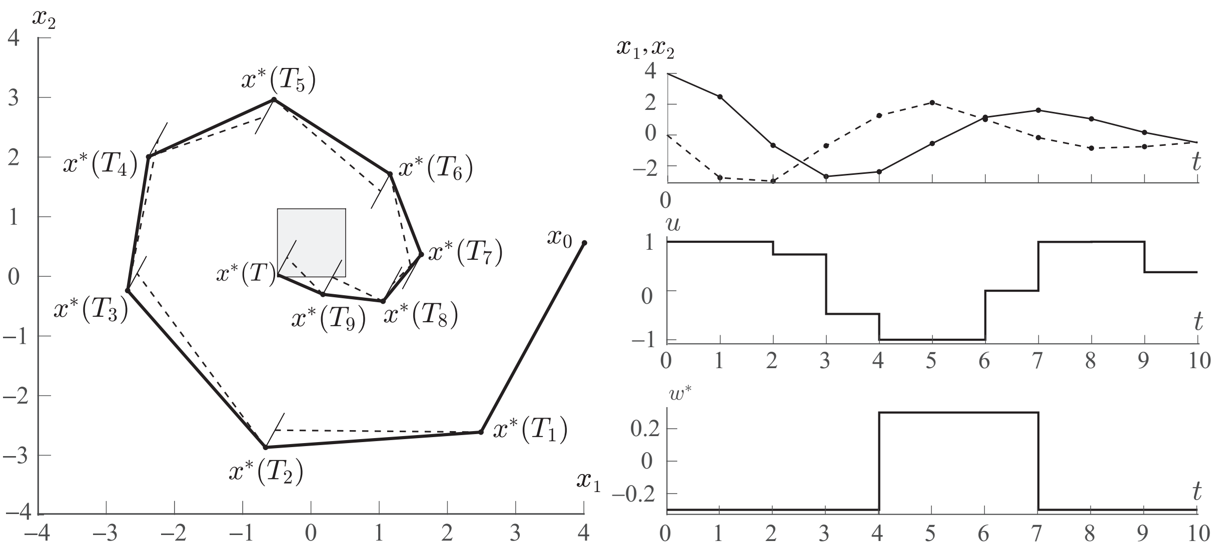

Рис. 3. Результаты решения примера 3.

Т а б л и ц а 3

Параметры множеств замыкания $X_j(\alpha)$, $j = 1, 2, \ldots, 9$, в примере 3

	$T_1 = 1$	$T_2 = 2$	$T_3 = 3$	$T_4 = 4$	$T_5 = 5$	$T_6 = 6$	$T_7 = 7$	$T_8 = 8$	$T_9 = 9$
l_j	608	442	336	204	114	72	30	12	6
m_j	16928	9938	6082	3116	1186	532	96	18	6
время	99.30	42.62	19.22	6.68	2.10	0.78	0.28	0.04	0.02

$u^0(t, x)$, $x \in X_t$, $t = 0, 1, \ldots, 9$. Оказалось, что оптимальное значение критерия качества $V_0(x_0) = 7.566021$. Процесс управления, в котором реализовалось экстремальное возмущение, представлен на рис. 3. Терминальное состояние в этом процессе $x^*(10) = (-0.5, -0.465646)$. Здесь не представлены множества замыкания, их параметры приведены в табл. 3. Отрезки, изображенные на рис. 3 тонкими сплошными линиями, суть множества возможных состояний системы в соответствующий момент времени: $X(t|x^*(t-1), u^0)$.

Отметим, что в процессе с возмущением из примера 1 полный импульс реализовавшегося управления оказался равен 6.858617.

Заключение

В работе рассмотрена задача минимизации полного импульса управления на траекториях линейной дискретной системой с неизвестным ограниченным возмущением, которую требуется перевести с гарантией на терминальное множество. Исследована проблема построения оптимальной многократно замыкаемой стратегии управления, где под моментами замыкания понимается небольшое множество моментов времени, для которых предполагается, что в них станет известно точное измерение текущего состояния системы и будет выбрано новое управление; оно применяется до поступления следующего измерения. Оптимальная стратегия управления представляет собой компромисс между оптимальной гарантирующей программой, которая проста в построении с вычислительной точки зрения, но консервативно оценивает потенциальные возможности системы управления либо же вообще может не существовать в рассматриваемой задаче из-за влияния возмущений, и оптимальной обратной связью, полученной в результате трудоемкого применения динамического программирования. Предложенный в настоящей работе метод построения оптимальной многократно замыкаемой стратегии управления опирается только на решение задач линейного программирования, что делает его привлекательным с вычислительной точки зрения и лишь незначительно более трудоемким, чем построение оптимальной гарантирующей программы. При этом подбор моментов замыкания позволяет получить стратегии, качество которых приближается к качеству управления с помощью оптимальной обратной связи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 520 с.
2. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1978. 392 с.
3. **Беллман Р.** Динамическое программирование. М.: Иностранная литература, 1960. 400 с.
4. **Lee J.H., Yu Z.** Worst-case formulations of model predictive control for systems with bounded parameters // Automatica. 1997. Vol. 33, no. 5. P. 763–781. doi: 10.1016/S0005-1098(96)00255-5
5. **Bemporad A., Borrelli F., Morari M.** Min-max control of constrained uncertain discrete-time linear systems // IEEE Trans. Autom. Control. 2003. Vol. 48, no. 9. P. 1600–1606. doi: 10.1109/TAC.2003.816984
6. **Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костина Е.А.** Замыкаемые обратные связи по состоянию для оптимизации неопределенных систем управления. I. Однократное замыкание // Автоматика и телемеханика. 1996. № 7. С. 121–130.
7. **Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костина Е.А.** Замыкаемые обратные связи по состоянию для оптимизации неопределенных систем управления. II. Многократно замыкаемые обратные связи // Автоматика и телемеханика. 1996. № 8. С. 90–99.
8. **Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 2. С. 265–286.
9. **Kostina E., Kostyukova O.** Worst-case control policies for (terminal) linear-quadratic control problems under disturbances // Inter. J. Robust and Nonlinear Control. 2009. Vol. 19, no. 17. P. 1940–1958. doi: 10.1002/rnc.1417
10. **Дмитрук Н.М.** Оптимальная стратегия с одним моментом замыкания в линейной задаче оптимального гарантированного управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2018. Т. 58, № 2. С. 664–681.
11. **Kastsiukevich D.A., Dmitruk N.M.** A method for constructing an optimal control strategy in a linear terminal problem // J. Belarus. State Univ. Mathematics and Informatics. 2021, no. 2. P. 38–50. doi: 10.33581/2520-6508-2021-2-38-50.
12. **Дмитрук Н.М.** Многократно замыкаемая стратегия управления в линейной терминальной задаче оптимального гарантированного управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2022. Т.28, №3. С. 66–82. doi: 10.21538/0134-4889-2022-28-3-66-82
13. **Boyd S., Vandenberghe L.** Convex optimization. NY: Cambridge Uni. Press, 2004. 716 p.
14. **Gal T.** Postoptimal analyses, parametric programming and related topics. Berlin: De Gruyter, 1995. 437 p.

Поступила 4.04.2024
После доработки 1.05.2024
Принята к публикации 6.05.2024

Дмитрук Наталия Михайловна
канд. физ.-мат. наук, доцент
зав. кафедрой
Белорусский государственный университет
г. Минск
e-mail: dmitrukn@bsu.by

REFERENCES

1. Krasovskiy N.N. *Upravleniye dinamicheskoy sistemoy. Zadacha o minimume garantirovannogo rezul'tata* [Dynamic system control. Minimum guaranteed result problem]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 520 p.
2. Kurzhanskii A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and observation under the conditions of uncertainty]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 392 p.
3. Bellman R. *Dynamic programming.* Princeton, New Jersey, Princeton Univer. Press, 1957, 340 p. ISBN: 069107951X. Translated to Russian under the title *Dinamicheskoe programmirovanie*, Moscow, Inostr. Liter. Publ., 1960, 400 p.
4. Lee J.H., Yu Z. Worst-case formulations of model predictive control for systems with bounded parameters. *Automatica*, 1997, vol. 33, no. 5, pp. 763–781. doi: 10.1016/S0005-1098(96)00255-5
5. Bemporad A., Borrelli F., Morari M. Min-max control of constrained uncertain discrete-time linear systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 2003, vol. 48, no. 9, pp. 1600–1606. doi: 10.1109/TAC.2003.816984
6. Gabasov R., Kirillova F.M., Kostina E.A. Subtended feedback with respect to state for optimization of uncertain control systems. I: Single loop. *Autom. Remote Control*, 1996, vol. 57, no. 7, pp. 1008–1015.
7. Gabasov R., Kirillova F.M., Kostina E.A. Closed-loop state feedback for optimization of uncertain control systems. II: Multiply closed feedback. *Autom. Remote Control*, 1996, vol. 57, no. 8, pp. 1137–1145.
8. Balashevich N.V., Gabasov R., Kirillova F.M. The construction of optimal feedback from mathematical models with uncertainty. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2004, vol. 44, no. 2, pp. 247–267.
9. Kostina E., Kostyukova O. Worst-case control policies for (terminal) linear-quadratic control problems under disturbances. *Inter. J. Robust and Nonlinear Control*, 2009, vol. 19, no. 17, pp. 1940–1958. doi: 10.1002/rnc.1417
10. Dmitruk N.M. Optimal strategy with one closing instant for a linear optimal guaranteed control problem. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2018, vol. 58, iss. 5, pp. 642–658. doi: 10.1134/S096554251805007X
11. Kastsiukevich D.A., Dmitruk N.M. A method for constructing an optimal control strategy in a linear terminal problem. *J. Belarus. State Univ. Mathematics and Informatics*, 2021, vol. 2, pp. 38–50. doi: 10.33581/2520-6508-2021-2-38-50
12. Dmitruk N.M. Multiply closed control strategy in a linear terminal problem of optimal guaranteed control. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2022, vol. 319, suppl. 1, pp. S112–S128. doi: 10.1134/S0081543822060104
13. Boyd S., Vandenberghe L. *Convex optimization*, UK, Cambridge; New York, Cambridge Univ. Press, 2004, 716 p.
14. Gal T. *Postoptimal analyses, parametric programming and related topics*, Berlin, De Gruyter Publ., 1995, 437 p.

Received April 4, 2024
Revised May 1, 2024
Accepted May 6, 2024

Funding Agency: This work was supported by the National Program for Scientific Research of the Republic of Belarus “Convergence 2025” (project no. 1.2.04.1).

Natalia Mikhailovna Dmitruk, Cand. Phys.-Math. Sci., Associate Prof., Belarusian State University, Minsk, 220030 Belarus, e-mail: dmitrukn@bsu.by.

Cite this article as: N. M. Dmitruk. A method for constructing multiply closed strategies in the problem of minimizing the total control impulse in a linear system with disturbance. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 122–138.