

УДК 517.97

СУЩЕСТВОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ В КПП-МОДЕЛИ ПРИ НЕЛОКАЛЬНОЙ КОНКУРЕНЦИИ

А. А. Давыдов, А. С. Платов, Д. В. Туницкий

Мы рассматриваем ресурс, распределенный на компактном замкнутом связном многообразии без края, например, на двумерной сфере — поверхности Земли, с динамикой, доставляемой моделью типа Колмогорова — Петровского — Пискунова и Фишера с коэффициентами в члене реакции, зависящими от общего объема ресурса, что делает уравнение модели нелокальным. При естественных предположениях о параметрах модели показано, что существует не более одного нетривиального неотрицательного стационарного распределения ресурса, а при наличии постоянного распределенного отбора ресурса есть стратегия отбора, при которой такое состояние доставляет максимум среднего временного сбора ресурса на стационарных состояниях.

Ключевые слова: КПП-модель, стационарное решение, средний временной сбор, оптимальная стратегия.

A. A. Davydov, A. S. Platov, D. V. Tunitsky. Existence of an optimal stationary solution in the KPP model under nonlocal competition.

We consider a resource distributed on a compact closed connected manifold without edge, for example, on a two-dimensional sphere representing the Earth surface. The dynamics of the resource is governed by a model of the Fisher–Kolmogorov–Petrovsky–Piskunov type with coefficients in the reaction term depending on the total amount of the resource, which makes the model equation nonlocal. Under natural assumptions about the model parameters, it is shown that there is at most one nontrivial nonnegative stationary distribution of the resource. Moreover, in the case of constant distributed resource harvesting, there is a harvesting strategy under which such a distribution maximizes the time-averaged resource harvesting over the stationary states.

Keywords: KPP model, stationary solution, time-averaged harvesting, optimal strategy.

MSC: 35K57, 49J20, 92D25, 91B76, 35A01

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-3-113-121

1. Введение

Качественный анализ моделей динамики распределенных возобновляемых ресурсов и оптимизация этой динамики по различным критериям качества (при наличии возможности управлять ею) являются ключевыми при решении важнейших проблем прикладного характера, таких как оптимизация эксплуатации промысловых популяций, задачи борьбы с эпидемиями, проблемы рационального природопользования, сохранения окружающей среды и биоразнообразия и другие вопросы, а потому находятся в фокусе исследований ученых в различных направлениях науки. Изучению подобных моделей с помощью различных математических инструментов посвящены публикации [1–5], работы [6–9] в контексте применения к задачам рационального природопользования и сохранения окружающей среды, а также исследования [3; 4; 10–15], предпринятые с целью оптимизации эксплуатации возобновляемого ресурса на бесконечном горизонте планирования.

Одной из активно используемых сегодня моделей динамики распределенного возобновляемого ресурса является модель Колмогорова — Петровского — Пискунова и Фишера [16; 17], которая появилась в тридцатых годах прошлого века; она учитывает внутривидовую конкуренцию, что впервые была описана Ферхюльстом [9], и обычно присутствующую диффузию ресурса, которая доставляется предложенным Фурье уравнением распространения тепла [18].

В настоящей работе мы рассматриваем нелокальную модель такого типа на компактном замкнутом связном многообразии без края M (например, на n -мерном торе, естественно появляющемся при изучении распределенного ресурса в периодической среде [1], или на двумерной сфере, которая является естественной моделью поверхности Земли [15; 19]). В данной модели коэффициенты члена реакции зависят от общего объема ресурса и, таким образом, уравнение модели становится нелокальным и принимает вид

$$p_t - Lp = ap - bp^2, \quad (1.1)$$

где $p = p(x, t)$ — неотрицательная плотность изучаемого ресурса в точке x многообразия M его распределения в момент времени t ; L — равномерно эллиптический оператор, непрерывно зависящий от точки ареала (см. [20; 21]), а ограниченные функции a и b характеризуют скорости процессов возобновления ресурса и насыщения им среды соответственно, измеримо зависят от точки этой области и непрерывно от показателя E объема имеющегося ресурса, например, его суммарной массы (это и делает модель нелокальной, чего нет, например, в [19–21]). Таким образом,

$$a = a(x, E), \quad b = b(x, E),$$

где показатель E определяется строго монотонным непрерывным функционалом на конусе неотрицательных плотностей распределения, имеющим нулевое значение в нуле, например вида

$$E = \int_M f(x)p(x, t)^\alpha dx, \quad (1.2)$$

с некоторым положительным измеримым весом f и положительной степенью α (при $f = 1$, $\alpha = 1$ здесь считается обычная масса распределенного ресурса). Как отмечено выше, нелинейная зависимость тех или иных характеристик при изучении возобновляемых ресурсов встречалась и ранее (см. например, [22–24]).

Предполагается, что функции a и b монотонно зависят от этого показателя, а именно при его росте функция a не возрастает, а функция b не убывает, т. е.

$$a(., E_1) \geq a(., E_2) \quad \text{и} \quad b(., E_1) \leq b(., E_2), \quad \text{если} \quad E_1 < E_2. \quad (1.3)$$

При этом мы считаем, что последняя функция отделена от нуля, т. е. существует такая константа b_0 , что

$$0 < b_0 \leq b(., 0). \quad (1.4)$$

В частности, при достаточно больших значениях плотности ресурса правая часть уравнения (1.1) отрицательна.

Учитывая, что функции a и b лишь измеримы по фазовой переменной, решение уравнения (1.1) или решение задачи Коши для него понимаем в слабом смысле (см., например, [20; 25]).

В настоящей работе мы показываем, что в изучаемой модели не может существовать более одного нетривиального неотрицательного ограниченного стационарного решения. Такое решение существует и является положительным, если при нулевом значении показателя E глобальный аттрактор нетривиальных неотрицательных решений положителен (см. [19; 21]; для тора необходимым и достаточным условием для этого является положительность интеграла от $a(., 0)$ [1]).

Более того, в данном случае существует постоянный распределенный отбор ресурса, что добавляет в правую часть уравнения (1.1) слагаемое $-up$; в простейшем случае (а при учете эффектов сложности обнаружения и/или извлечения ресурса возможны и другие выражения, см., например, [21; 26]) — с некоторым неотрицательным ненулевым стационарным измеримым управлением u , $u = u(x)$, при котором соответствующее стационарное решение положительно, и, таким образом, средний временной сбор ресурса также положителен. Таким образом,

существует стратегия извлечения ресурса, при которой сбор положителен, а ресурс не истощается.

Наконец, мы доказываем, что если измеримое управление удовлетворяет условию

$$U_1 \leq u \leq U_2 \quad (1.5)$$

с некоторыми ограниченными измеримыми функциями U_1 и U_2 (такое управление называется *допустимым*) и при $u = U_1$ есть стационарное положительное решение, то существует допустимое управление, при котором средний временной сбор ресурса на соответствующем ему стационарном состоянии не меньше, чем при других допустимых управлениях на соответствующих им стационарных состояниях ресурса. Иными словами — существует оптимальная допустимая стратегия отбора ресурса по функционалу среднего временного сбора (на стационарных состояниях).

З а м е ч а н и е 1. Если при минимальном отборе у ресурса нет нетривиальных неотрицательных стационарных состояний (в частности, если при таком отборе и нулевом значении показателя E все решения с ограниченными начальными данными стремятся к нулевому решению), то любая допустимая стратегия отбора ресурса дает нулевой средний временной сбор. В этом случае актуальными становятся задачи оптимизации использования исчерпаемого ресурса с бесконечным горизонтом планирования (см., например, работы [27;28] и библиографию в них).

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что значения ограничений U_1 и U_2 не обязательно всюду положительны. Допустим, для промысловых популяций отрицательность этих ограничений может наблюдаться в областях воспроизводства, в которых отбор запрещен и, наоборот, развитие популяций поддерживается подкормкой и другими мерами. Вводя разность $a - U_1$ в качестве новой функции a , нижнее ограничение U_1 можно сделать нулевым. При этом ограничение (1.5) на допустимые управления примет вид $0 \leq u \leq U_2 - U_1$.

В работе мы сначала обсуждаем существование стационарных состояний ресурса, а затем показываем, что среди них есть оптимальное по функционалу среднего временного сбора

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \overline{P(t)}/t, \quad (1.6)$$

где $P(t)$ — объем ресурса, собранный от начала момента сбора ресурса до времени t . Для вычисления этого объема или других показателей ресурса могут использоваться нелинейные по плотности распределения формулы, предполагающие учет различных факторов, таких как сложность обнаружения или извлечения ресурса при его сборе, нелинейное влияние имеющегося ресурса на показатели его восстановления и др. (что уже отмечено выше, см. [11;22;23;29]).

2. Существование положительных стационарных состояний ресурса

Справедливо следующее утверждение (определения решений, суб- и суперрешений см., например, в § III.21 [5] и [21]).

Теорема 1. *Уравнение (1.1) не может иметь более одного нетривиального неотрицательного ограниченного стационарного решения, если оператор L является равномерно эллиптическим, а коэффициенты a и b ограничены, измеримы по пространственной переменной, непрерывны по показателю E и удовлетворяют условиям (1.3), (1.4).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, допустим, что есть два таких решения, p и $\tilde{p}$, с показателями E и $\tilde{E}$ соответственно. При совпадении этих показателей и соответствующие им нетривиальные неотрицательные ограниченные стационарные решения совпадают, если они имеются, поскольку доставляют нетривиальные неотрицательные стационарные решение

уравнения (1.1) при данном фиксированном показателе, а такое решение единственное (см. [19] для двумерной сферы и [21] в общем случае).

При различии этих показателей пусть первый из них меньше второго, тогда в силу условия (1.3) имеем

$$a(x, E) \geq a(x, \tilde{E}) \quad \text{и} \quad b_0 \leq b(x, E) \leq b(x, \tilde{E}).$$

Отсюда для стационарного решения p уравнения (1.1) получаем

$$0 = Lp + a(x, E)p - b(x, E)p^2 \geq Lp + a(x, \tilde{E})p - b(x, \tilde{E})p^2.$$

Следовательно, для скорости изменения плотности ресурса на его уровне p при фиксированном показателе $\tilde{E}$ имеем

$$p_t = Lp + a(x, \tilde{E})p - b(x, \tilde{E})p^2 \leq 0.$$

Таким образом, это решение — суперрешение для нашего уравнения при этом значении показателя. Теперь, снова учитывая, что у уравнения (1.1) при таком фиксированном значении показателя — не более одного нетривиального стационарного решения [21], получаем, что решение $\tilde{p}$ всюду не больше решения p . Но тогда и для показателей имеем неравенство $E \geq \tilde{E}$ в силу неубывания функционала (1.2) объема ресурса по p .

Получаем противоречие со сделанным предположением $E < \tilde{E}$. Следовательно, это предположение неверно и справедливо утверждение теоремы 1.

Теорема 2. *Если в условиях теоремы 1 у уравнения (1.1) при нулевом значении показателя E есть нетривиальное неотрицательное ограниченное стационарное решение, то такое решение есть у самого этого уравнения и это решение положительное.*

Доказательство. Действительно, согласно теореме 1 у уравнения (1.1) может быть не более одного неотрицательного ненулевого стационарного ограниченного решения. Если такое решение есть, то ему соответствует положительное значение показателя E и это решение также является решением уравнения (1.1) при таком фиксированном значении этого показателя. Но тогда это решение положительно (см. [19] для двумерной сферы и [21] в общем случае).

Покажем теперь, что в условиях теоремы 2 положительное стационарное решение есть.

В силу существования неотрицательного ненулевого стационарного решения у уравнения (1.1) при нулевом значении показателя E первое собственное число λ задачи на собственные значения $-L\phi - a(x, 0)\phi = \lambda\phi$ отрицательно (см. [1] для случая торов и [21] в общем случае). Для этого собственного числа есть ограниченная положительная собственная функция ϕ . Она дифференцируема, и ее можно нормировать, например взяв с единичной L_2 -нормой.

Для распределения ресурса $p = \epsilon\phi$ показатель $E(\epsilon)$ непрерывно зависит от ϵ и монотонно стремится к нулю при $\epsilon \rightarrow 0$, что нетрудно видеть. Отсюда и из условия (1.3) получаем, что функция $a(\cdot, E(\epsilon))$ не убывает, а функция $b(\cdot, E(\epsilon))$, наоборот, не возрастает при $\epsilon \rightarrow 0$. Следовательно, отсюда для положительных значений ϵ для скорости изменения плотности ресурса на его уровне p имеем

$$\begin{aligned} p_t &= \epsilon[L\phi + a(x, E(\epsilon))\phi] - \epsilon^2 b(x, E(\epsilon))\phi^2 \\ &= \epsilon[L\phi + a(x, 0)\phi - (a(x, 0) - a(x, E(\epsilon)))\phi - \epsilon b(x, E(\epsilon))\phi^2] \\ &= \epsilon[-\lambda + (a(x, 0) - a(x, E(\epsilon))) - \epsilon b(x, E(\epsilon))\phi]\phi. \end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках в нижнем равенстве последней формулы положительно при малых положительных значениях ϵ , поскольку $-\lambda > 0$, и при $\epsilon \rightarrow 0$ второе (выражение в круглой скобке) и третье слагаемые в этой квадратной скобке стремятся к нулю, второе — ввиду непрерывности функции a по показателю E , а третье — в силу ограниченности

функций b и ϕ . Соответственно, вследствие положительности ϵ и ϕ сама эта правая часть положительна для достаточно малых положительных значений ϵ . Таким образом, на уровне p скорость изменения плотности ресурса положительна.

Отсюда получаем, что при достаточно малых положительных значениях ϵ функция $\epsilon\phi$ является субрешением для уравнения (1.1) при фиксированном значении показателя $E(\epsilon)$. Следовательно, при таких значениях этого показателя соответствующее стационарное решение не меньше $\epsilon\phi$, и, значит, это решение положительное ввиду положительности ϵ и ϕ .

Далее, при увеличении этого (фиксированного!) показателя соответствующее стационарное решение не возрастает, как и вычисленный по нему показатель E в силу условия (1.3). Следовательно, при росте фиксированного показателя E в уравнении (1.1) от нуля до E_0 (показателя положительного стационарного ограниченного решения данного уравнения при нулевом значении этого показателя) есть ровно одно его значение, которому соответствует положительное стационарное решение; вычисленный по нему показатель совпадает с указанным значением.

Таким образом, справедливо утверждение теоремы 2.

3. Существование оптимального стационарного состояния ресурса

Рассмотрим постоянный отбор плотности ресурса с допустимым управлением u , $u = u(x)$, что добавит в правую часть уравнения (1.1) слагаемое $-up$:

$$p_t - Lp = ap - up - bp^2. \quad (3.1)$$

Собранный ресурс будем считать по самой простой формуле

$$P(t) = \int_0^t \int_M u(x)p(x,t)dxdt.$$

З а м е ч а н и е 3. Следует отметить, что и утверждение теоремы ниже и наши рассуждения при ее доказательстве будут справедливы и для ряда других функционалов, как это уже было ранее, но не для произвольных.

Теорема 3. *Если в условиях теоремы 1 при минимальном отборе, т.е. при $u = U_1$, уравнение (3.1) имеет положительное стационарное решение, то существует допустимое управление, которое на соответствующем ему стационарном состоянии ресурса доставляет максимальный средний временной сбор среди всех допустимых управлений u на соответствующих им стационарных состояниях.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы рассматриваем неотрицательные стационарные решения, поэтому средний временной сбор на них будет вычисляться по формуле

$$\int_M u(x)p_u(x)dx, \quad (3.2)$$

где p_u — стационарное решение, соответствующее допустимому управлению u . Это решение либо положительное, если таковое есть, либо нулевое. В обоих случаях это решение не превосходит положительного стационарного решения $p_{\max}$, которое соответствует минимальному отбору $u = U_1$ и существует по условиям теоремы. Следовательно,

$$\left| \int_M u(x)p_u(x)dx \right| \leq \int_M m(x)p_{\max}(x)dx, \quad \text{где } m(x) = \max\{|U_1(x)|, |U_2(x)|\}.$$

Таким образом, рассматриваемый функционал среднего временного сбора ограничен и поэтому существует точная верхняя грань B его значений, а также последовательность

пар $\{u_k, p_{u_k}\}$ из допустимых управлений и соответствующих им стационарных решений, по которой значения этого функционала стремятся к этой грани при $k \rightarrow \infty$.

Далее, рассматриваемые неотрицательные стационарные решения ограничены, поскольку не превосходят решения $p_{\max}$, введенного только что выше. Следовательно, коэффициенты правой части уравнения (1.1) также ограничены. Отсюда в силу их измеримости по фазовой переменной, непрерывности оператора L и его равномерной эллиптичности получаем, что рассматриваемые стационарные решения p_k не только ограничены, но и имеют класс $C^{1+\alpha}$ с некоторым, одним и тем же, положительным α , см. [25]. Значит, эти решения и их производные доставляют ограниченные равномерно непрерывные последовательности функций.

По теореме Арцела — Асколи выберем из последовательности этих решений подпоследовательность, которая равномерно сходится на многообразии вместе со своими производными. Не нарушая общности, будем считать, что сама последовательность $\{p_{u_k}\}$ была таковой. Обозначим через p_∞ предел этой последовательности.

Далее, допустимые управления u_k лежат в выпуклом ограниченном компакте в пространстве L_2 :

$$\{u \mid U_1 \leq u \leq U_2\}.$$

Следовательно, из последовательности $\{u_k\}$ можно выбрать подпоследовательность, которая слабо сходится в этом пространстве к допустимому управлению u_∞ . Нетрудно видеть, что для последнего управления и предельного решения p_∞ мы получаем максимально возможное для него значение B изучаемого функционала (3.2), поскольку многообразие компактно, p_∞ является равномерным пределом последовательности $\{p_{u_k}\}$, а u_∞ — слабым пределом последовательности $\{u_k\}$.

Осталось показать, что p_∞ есть решение нашего уравнения для управления u_∞ . Мы понимаем решение как слабое, поэтому нужно, чтобы соответствующее уравнение в интегральной форме, выполненное для пар $\{u_k, p_{u_k}\}$ из допустимого управления и соответствующего ему стационарного решения, было справедливо и для предельной пары $\{u_\infty, p_\infty\}$. Но коэффициенты уравнения непрерывны по показателю объема ресурса E , соответствующего решению, сами решения и их производные сходятся равномерно на многообразии, а управления сходятся слабо и входят в уравнение линейно, поэтому уравнение будет выполненным и для этой предельной пары. Следовательно, p_∞ является стационарным решением уравнения (1.1) при наличии отбора с управлением u_∞ .

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Berestycki H., Francois H., Roques L.** Analysis of the periodically fragmented environment model: I Species persistence // J. Math. Biol. 2005. Vol. 51. P. 75–113. doi: 10.1007/s00285-004-0313-3
2. **Berestycki H., Francois H., Roques L.** Analysis of the periodically fragmented environment model: II—biological invasions and pulsating travelling fronts // J. Math. Pures Appl.. 2005. Vol. 84, no. 8. P. 1101–1146. doi: 10.1016/j.matpur.2004.10.006
3. **Daners D., Medina P.** Abstract evolution equations. Periodic problems and applications. Harlow: Longman Scientific & Technical, 1992. 249 p. (Pitman Research Notes in Math. Ser.; vol. 279.)
4. **Henderson K., Loreau M.** An ecological theory of changing human population dynamics // People Nature. 2019. Vol. 1, no. 1. P. 31–43. doi: 10.1002/pan3.8
5. **Hess P.** Periodic-parabolic boundary value problems and positivity. NY: John Wiley & Sons, 1991. 139 p. (Pitman Research Notes in Math. Ser.; vol. 247). ISBN: 0-582-06478-3
6. **Cohen P.J., Foale S.J.** Sustaining small-scale fisheries with periodically harvested marine reserves // Marine Policy. 2013. Vol. 37, no. 1. P. 278–287. doi: 10.1016/j.marpol.2012.05.010
7. **Pethame B.** Parabolic equations in biology: growth, reaction, movement and diffusion. Cham: Springer, 2015. 199 p. (Ser. Lecture Notes Math. Modelling Life Sci.) doi: 10.1007/978-3-319-19500-1
8. **Undersander D., Albert B., Cosgrove D., Johnson D., Peterson P.** Pastures for profit: A guide to rotational grazing (A3529). Madison: Cooperative Extension Publ., University of Wisconsin-Extension, 2002. 43 p.

9. Verhulst P.F. Notice sur la loi que la populations suit dans son accroissement // Correspondance mathematique et physique. Ghent. 1838. Vol. 10. P. 113–121.
10. Беляков А.О., Давыдов А.А. Оптимизация эффективности циклического использования возобновляемого ресурса // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, №2. С. 38–46. doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-38-46
11. Belyakov A.O., Davydov A.A., Veliov V.M. Optimal cyclic exploitation of renewable resources // J. Dyn. Control Syst.. 2015. Vol. 21, no. 3. P. 475–494. doi: 10.1007/s10883-015-9271-x
12. Davydov A.A., Vinnikov E.V. Optimal cyclic dynamic of distributed population under permanent and impulse harvesting // Dynamic Control and Optimiz. (DCO 2021): Proc. 2023. P. 101–112. (Ser. Springer Proc. Math. & Stat.; vol. 407). doi: 10.1007/978-3-031-17558-9_5
13. Du Y., Peng R. The periodic logistic equation with spatial and temporal degeneracies // Trans. Amer. Math. Soc. 2012. Vol. 364, no. 11. P. 6039–6070. doi: 10.1090/S0002-9947-2012-05590-5
14. Medina P.K. Feedback stabilizability of time-periodic parabolic equations // Dynamics Reported / eds. C.K.R.T. Jones, U. Kirchgraber, H.O. Walther. Berlin; Heidelberg: Springer, 1996. P. 26–98. (Ser. Expositions in Dynamical Systems; vol. 5). doi: 10.1007/978-3-642-79931-0_2
15. Туницкий Д.В. Эксплуатация возобновляемого ресурса, распределенного на поверхности Земли // Междунар. конф. “Системный анализ: моделирование и управление”, посвященная памяти акад. А. В. Кряжмского (Москва, 23, 24 января 2024 г.): тез. докл. / МГУ имени М.В. Ломоносова. Москва: МАКС Пресс, 2024. С. 113–114. doi: 10.29003/m3791.978-5-317-07128-8
16. Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюллетень МГУ. Сер. А. Математика и Механика. 1937. Т. 1, № 6. С. 1–26.
17. Fisher R.A. The Wave of advance of advantageous genes // Annals of Eugenics. 1937. Vol. 7, no. 4. P. 353–369. doi: 10.1111/j.1469-1809.1937.tb02153.x
18. Fourier J.B.J. Theorie Analytique de la Chaleur. Paris: F. Didot, 1822. 674 p.
19. Винников Е.В., Давыдов А.А., Туницкий Д.В. Существование максимального среднего временного сбора в КПП-модели на сфере при постоянном и импульсном отборах // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2023. Т. 514, № 1. С. 59–64. doi: 10.31857/S2686954323600453
20. Туницкий Д.В. О разрешимости полулинейных эллиптических уравнений второго порядка на замкнутых многообразиях // Изв. РАН. Сер. математическая. 2022. Т. 86, № 5. P. 97–115. doi: 10.4213/im9261
21. Туницкий Д.В. О стабилизации решений полулинейных параболических уравнений второго порядка на замкнутых многообразиях // Изв. РАН. Сер. математическая. 2023. Т. 87, № 4. P. 186–204. doi: 10.4213/im9354
22. Davydov A.A., Platov A.S. Optimal stationary solution in forest management model by accounting intra-species competition // Mosc. Math. J. 2012. Vol. 12, no. 2. P. 269–273. doi: 10.17323/1609-4514-2012-12-2-269-273
23. Давыдов А.А., Платов А.С. Оптимальная эксплуатация двух структурированных по размеру конкурирующих популяций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. P. 89–94.
24. Tarniceriu O.C., Veliov V.M. Optimal control of a class of size-structured systems // Large-Scale Scientific Computing (LSSC 2007): Proc. / eds. I. Lirkov, S. Margenov, J. Wasniewski. Berlin; Heidelberg: Springer, 2007. P. 366–373. (Ser. Lecture Notes in Computer Science; vol 4818). doi: 10.1007/978-3-540-78827-0_41
25. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
26. Беляков А.О., Давыдов А.А. Оптимальный циклический сбор распределенного возобновляемого ресурса с диффузией // Тр. МИАН. 2021. Т. 315. P. 64–73. doi: 10.4213/tm4246
27. Асеев С.М., Кряжмский А.В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Тр. МИАН. 2007. Т. 257. P. 3–271.
28. Асеев С.М., Вельов В.М. Другой взгляд на принцип максимума для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом в экономике // Успехи мат. наук. 2019. Т. 74, № 6. С. 3–54. doi: 10.4213/rm9915
29. Давыдов А.А., Нассар А.Ф. О стационарном состоянии в динамике популяции с иерархической конкуренцией // Успехи мат. наук. 2014. Т. 69, № 6. С. 179–180. doi: 10.4213/rm9631

Поступила 24.03.2024

После доработки 13.06.2024

Принята к публикации 17.06.2024

Давыдов Алексей Александрович

д-р физ.-мат. наук, профессор

зав. кафедрой

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, г. Москва;

Международный институт прикладного системного анализа (ИАСА)

г. Лаксенбург, Австрия

e-mail: davydov@mi-ras.ru

Платов Антон Сергеевич

канд. физ.-мат. наук, доцент

Национальный исследовательский технологический университет МИСИС, г. Москва

e-mail: platovmm@mail.ru

Тунцкий Дмитрий Васильевич

д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва

e-mail: dtunitsky@yahoo.com

REFERENCES

1. Berestycki H., Francois H., Roques L. Analysis of the periodically fragmented environment model: I Species persistence. *J. Math. Biol.*, 2005, vol. 51, pp. 75–113. doi: 10.1007/s00285-004-0313-3
2. Berestycki H., Francois H., Roques L. Analysis of the periodically fragmented environment model: II—biological invasions and pulsating travelling fronts. *J. Math. Pures Appl.*, 2005, vol. 84, no. 8, pp. 1101–1146. doi: 10.1016/j.matpur.2004.10.006
3. Daners D., Medina P. *Abstract evolution equations, periodic problems, and applications*. Harlow: Longman Scientific & Technical, 1992, Pitman Research Notes in Math. Ser., vol. 279, 249 p.
4. Henderson K., Loreau M. An ecological theory of changing human population dynamics. *People Nature*, 2019, vol. 1, no. 1, pp. 31–43. doi: 10.1002/pan3.8
5. Hess P. *Periodic-parabolic boundary value problems and positivity*. NY: John Wiley & Sons, 1991, Pitman Research Notes in Math. Ser., vol. 247, 139 p. ISBN: 0-582-06478-3.
6. Cohen P.J., Foale S.J. Sustaining small-scale fisheries with periodically harvested marine reserves. *Marine Policy*, 2013, vol. 37, no. 1, pp. 278–287. doi: 10.1016/j.marpol.2012.05.010
7. Pethame B. *Parabolic equations in biology: growth, reaction, movement and diffusion*. Cham, Springer, 2015, Ser. Lecture Notes Math. Modelling Life Sci., 199 p. doi: 10.1007/978-3-319-19500-1
8. Undersander D., Albert B., Cosgrove D., Johnson D., Peterson P. *Pastures for profit: A guide to rotational grazing (A3529)*. Madison: Cooperative Extension Publ., University of Wisconsin-Extension, 2002, 43 p.
9. Verhulst P.F. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Correspondence Mathematique et Physique (Ghent)*, 1838, vol. 10, pp. 113–121.
10. Belyakov A.O., Davydov A.A. Efficiency optimization for the cyclic use of a renewable resource. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2017, vol. 299, suppl. 1, pp. S14–S21. doi: 10.1134/S0081543817090036
11. Belyakov A.O., Davydov A.A., Veliov V.M. Optimal cyclic exploitation of renewable resources. *J. Dyn. Control Syst.*, 2015, vol. 21, no. 3, pp. 475–494. doi: 10.1007/s10883-015-9271-x
12. Davydov A.A., Vinnikov E.V. Optimal cyclic dynamic of distributed population under permanent and impulse harvesting. In: *Dynamic Control and Optimiz. (DCO 2021)*, Ser. Springer Proc. Math. & Stat., 2023, vol. 407, pp. 101–112. doi: 10.1007/978-3-031-17558-9_5
13. Du Y., Peng R. The periodic logistic equation with spatial and temporal degeneracies. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2012, vol. 364, no. 11, pp. 6039–6070. doi: 10.1090/S0002-9947-2012-05590-5
14. Medina P.K. Feedback stabilizability of time-periodic parabolic equations. In: *Dynamics Reported* (eds.) C.K.R.T. Jones, U. Kirchgraber, H.O. Walther, Berlin, Heidelberg, Springer, 1996, Ser. Expositions in Dynamical Systems, vol. 5, pp. 26–98. doi: 10.1007/978-3-642-79931-0_2

15. Tunitsky D.V. Exploitation of renewable resource distributed on the surface of the Earth. In: *Abstracts Int. Conf. "Systems analysis: modeling and control"* in memory of academician A.V. Kryazhimskiy. Moscow, Lomonosov Moscow State University Publ., MAKS Press Publ., 2024, p. 113–114 (in Russian). doi: 10.29003/m3791.978-5-317-07128-8
16. Kolmogorov A.N., Petrovsky I.G., Piskunov N.S. Study of the equation of diffusion coupled with an increase in matter, and its application to a biological problem. *Byulleten' MGU. Ser. A. Matematika i Mekhanika*, 1937, vol. 1, no. 6, pp. 1–26.
17. Fisher R.A. The wave of advance of advantageous genes. *Annals of Eugenics*, 1937, vol. 7, iss. 4, pp. 355–369. doi: 10.1111/j.1469-1809.1937.tb02153.x
18. Fourier J.B.J. *Théorie Analytique de la Chaleur*, Paris, F. Didot Publ., 1822, 674 p.
19. Vinnikov E.V., Davydov A.A., Tunitsky D.V. Existence of a maximum of time-averaged harvesting in the KPP model on sphere with permanent and impulse harvesting. *Dokl. Math.*, 2023, vol. 108, no. 3, pp. 472–476. doi: 10.1134/S1064562423701387
20. Tunitsky D.V. On solvability of semilinear second-order elliptic equations on closed manifolds. *Izv. Math.*, 2022, vol. 86, no. 5, pp. 925–942. doi: 10.1070/IM9261
21. Tunitsky D.V. On stabilization of solutions of second-order semilinear parabolic equations on closed manifolds. *Izv. Math.*, 2023, vol. 87, no. 4, pp. 817–834. doi: 10.4213/im9354e
22. Davydov A.A., Platov A.S. Optimal stationary solution in forest management model by accounting intra-species competition. *Moscow Math. J.*, 2012, vol. 12, no. 2, pp. 269–273. doi: 10.17323/1609-4514-2012-12-2-269-273
23. Davydov A.A., Platov A.S. Optimal exploitation of two competing size-structured populations. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2014, vol. 287, suppl. 1, pp. S49–S54. doi: 10.1134/S0081543814090053
24. Tarniceriu O.C., Veliov V.M. Optimal control of a class of size-structured systems. In: *Large-Scale Scientific Computing: Proc. (eds.) I. Lirkov, S. Margenov, J. Wasniewski*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2007, Ser. Lecture Notes in Computer Science, vol. 4818, pp. 366–373. doi: 10.1007/978-3-540-78827-0_41
25. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*. Providence, RI: American Math. Soc., 1968, Ser. Translations of Mathematical Monographs, vol. 23, 648 p. Original Russian text published in Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya parabolicheskogo tipa*. Moscow, Nauka Publ., 1967, 736 p.
26. Belyakov A.O., Davydov A.A. Optimal cyclic harvesting of a distributed renewable resource with diffusion. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2021, vol. 315, suppl. 1, pp. S56–S64. doi: 10.1134/S0081543821050059
27. Aseev S.M., Kryazhimskii A.V. The Pontryagin maximum principle and optimal economic growth problems. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2007, vol. 257, pp. 1–255. doi: 10.1134/S0081543807020010
28. Aseev S.M., Veliov V.M. Another view of the maximum principle for infinite-horizon optimal control problems in economics. *Russian Math. Surv.*, 2019, vol. 74, no. 6, pp. 963–1011. doi: 10.1070/RM9915
29. Davydov A.A., Nassar A.F. On a stationary state in the dynamics of a population with hierarchical competition. *Russian Math. Surv.*, 2014, vol. 69, no. 6, pp. 1126–1128. doi: 10.1070/rm2014v069n06abeh004930

Received March 24, 2024

Revised June 13, 2024

Accepted June 17, 2024

Alexey Alexandrovich Davydov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119992 Russia; International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA), Schlossplatz 1, 2361, Laxenburg, Austria, e-mail: davydov@mi-ras.ru.

Anton Sergeevich Platov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), National University of Science and Technology MISIS, Moscow, 119049 Russia, e-mail: platovmm@mail.ru.

Dmitry Vasilievich Tunitsky, Dr. Phys.-Math. Sci., V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, e-mail: dtunitsky@yahoo.com.

Cite this article as: A. A. Davydov, A. S. Platov, D. V. Tunitsky. Existence of an optimal stationary solution in the KPP model under nonlocal competition. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 113–121.