

УДК 517.957

РЕШЕНИЯ С НУЛЕВЫМ ФРОНТОМ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ¹

А. Л. Казаков

Рассматривается нелинейное эволюционное уравнение второго порядка, которое в отечественной литературе именуется нелинейным (квазилинейным) уравнением теплопроводности с источником (стоком), а в зарубежной — “the generalized porous medium equation”, в случае, когда размерность задачи произвольная, но имеет место центральная (осевая) симметрия, т.е. искомая функция зависит от времени t и расстояния ρ до некоторой точки (прямой). Изучаются нетривиальные решения, которые имеют нулевой фронт и описывают возмущения, распространяющиеся по покоящемуся (абсолютно холодному) фону с конечной скоростью. Доказывается новая теорема существования и единственности решения с искомыми свойствами с построением его в виде специального ряда с рекуррентно вычисляемыми коэффициентами, причем для раскрытия особенности в точке $\rho = 0$ применяется вырожденная замена независимых переменных. Обосновано утверждение, являющееся аналогом примера С.В. Ковалевской в рассмотренном случае. Получены условия, при выполнении которых коэффициенты построенных рядов являются константами, т.е. исходная задача редуцируется к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения с особенностью перед старшей производной. Проводится исследование свойств последнего с использованием методов мажорант и качественного анализа дифференциальных уравнений. Выполняется интерпретация полученных результатов с точки зрения исходной задачи.

Ключевые слова: нелинейные уравнения с частными производными, параболическое уравнение теплопроводности, вырождение, начально-краевая задача, теорема существования и единственности, ряд, сходимость, метод мажорант, точное решение, качественное исследование обыкновенных дифференциальных уравнений.

A. L. Kazakov. Solutions with a zero front to the quasilinear parabolic heat equation.

The paper considers a nonlinear second-order evolution equation known as the nonlinear (quasilinear) heat equation with a source (sink) and also as the generalized porous medium equation. We deal with the case of an arbitrary dimension, and there is central (axial) symmetry. In other words, the unknown function depends on time t and the distance ρ to some point (straight line). The study concerns nontrivial solutions with a zero front that describe disturbances propagating over a stationary (cold) background with a finite velocity. A new theorem for the existence and uniqueness of a solution with the desired properties is proved. It allows one to construct the solution as a special series with recursively calculated coefficients and to cancel the singularity at the point $\rho = 0$ by a degenerate change of independent variables. For the considered problem, an analog of S.V. Kovalevskaya's example is presented. We obtain conditions which ensure that the coefficients of the constructed series are constants; i.e., the original problem is reduced to the integration of an ordinary differential equation with a singularity in the factor at the highest derivative. The properties of the ordinary differential equation are studied using majorant methods and qualitative analysis. The results obtained are interpreted from the point of view of the original problem.

Keywords: nonlinear partial differential equations, generalized porous medium equation, degeneration, initial-boundary value problem, existence and uniqueness theorem, series, convergence, majorant method, exact solution, qualitative analysis of ordinary differential equations.

MSC: 35K10, 35K57, 35K67

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-2-86-102

Введение

Рассмотрим нелинейное эволюционное параболическое [1] уравнение второго порядка

$$U_t = \Delta \Psi_1(U) + \Psi_2(U), \quad (0.1)$$

¹Исследования выполнены в рамках госзадания Минобрнауки России по проекту “Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механике жидкости и газа” (№ гос. регистрации: 121041300058-1).

где t — время, Δ — лапласиан по пространственным переменным $x_1, x_2, \dots, x_N$; $U(t, x_1, \dots, x_N)$ — искомая функция. Известные функции $\Psi_1(U), \Psi_2(U)$ предполагаются достаточно гладкими. Часто этот математический объект называют квазилинейным параболическим уравнением теплопроводности с источником [2], и тогда используют несколько иное представление

$$U_t = \operatorname{div}(K(U)\nabla U) + Q(U),$$

где $K(U) = \Psi'_1(U)$, $Q(U) = \Psi_2(U)$. В зарубежной литературе такие математические объекты иногда именуют “the generalized porous medium equation” [3].

Подобные уравнения впервые были рассмотрены в работах известного французского механика Ж. В. Буссинеска [4], и по сей день они сохраняют свое место среди важных и актуальных задач современной теории уравнений с частными производными и математической физики. Причина этого кроется в их связи с важными приложениями в физике [5], популяционной биологии [6], гидрологии [7], экологии [8] и т. п. Близкие модели используются в мерзлотоведении [9], при изучении конвективных течений жидких сред [10] и др. Наиболее известной разновидностью уравнения (0.1) является уравнение нелинейной теплопроводности [11] (*the porous medium equation* [3]), которое соответствует случаю $\Psi_1(U) = U^\sigma$, $\Psi_2(U) \equiv 0$.

1. Постановка задачи

Уравнение (0.1) при условии достаточной гладкости и монотонности функции $K(U) = \Psi'_1(U)$ можно после замены $u = K(U)$ путем тривиальных преобразований привести к виду

$$u_t = u\Delta u + F(u)(\nabla u)^2 + \Upsilon(u). \quad (1.1)$$

Здесь $F(u) = u\phi''(u)/\phi'(u) + 1$, $\Psi(u) = \Psi_2(\phi(u))/\phi'(u)$, $K(\phi(u)) = u$, т. е. $\phi(u)$ — обратная к $K(U)$ функция.

Уравнение (1.1) при наличии пространственных симметрий может быть записано в виде

$$u_t = uu_{\rho\rho} + F(u)u_\rho^2 + \frac{\nu uu_\rho}{\rho} + \Psi(u), \quad (1.2)$$

где $\rho = (\sum_{i=1}^N x_i^2)^{1/2}$ — новая пространственная переменная, $\nu = N - 1$. Самыми естественными случаями здесь являются $\nu = 0$ (плоская симметрия), $\nu = 1$ (цилиндрическая или круговая симметрия) и $\nu = 2$ (сферическая симметрия). В принципе можно рассматривать любое неотрицательное значение ν , однако физический смысл уравнения (1.2) при нецелых ν неочевиден.

Наиболее часто в литературе встречается случай степенной функции $\Psi_1(U)$, и тогда $F(u) = 1/\sigma$, $\sigma > 0$, — константа, и (1.2) можно переписать в виде

$$u_t = uu_{\rho\rho} + \frac{u_\rho^2}{\sigma} + \frac{\nu uu_\rho}{\rho} + \Psi(u). \quad (1.3)$$

Отметим, что в литературе рассматривается также случай $\sigma < 0$ [12], но мы его оставляем за рамками исследования. Потребуем дополнительно, чтобы выполнялось условие $\Psi(0) = 0$, и тогда при условии достаточной гладкости функции Ψ справедливо представление $\Psi(u) = u\Upsilon(u)$, где $\Upsilon(u)$ — гладкая в нуле функция.

Содержанием настоящего исследования является поиск и изучение решений уравнения (1.3). Наибольший интерес для нас представляют те из них, которые удовлетворяют условию

$$u|_{\rho=a(t)} = 0. \quad (1.4)$$

Здесь функция $a(t)$ предполагается известной, хотя в литературе рассматриваются и другие постановки [13]. Задача (1.3), (1.4), как легко видеть, имеет тривиальное решение $u \equiv 0$, однако могут существовать и нетривиальные. Причиной нарушения единственности в данном

случае является то, что при $u = 0$ уравнение (1.3) вырождается, поскольку обращается в нуль множитель перед второй (старшей) производной.

Будем далее называть линию $\rho = a(t)$, на которой искомая функция обращается в нуль, *нулевым фронтом*. Подобные решения нелинейных параболических уравнений можно рассматривать как составную часть *тепловой (фильтрационной) волны* [13], под которой понимают кусочно-гладкую функцию, состоящую из двух состыкованных между собой сегментов: неотрицательной части упомянутого решения с нулевым фронтом и тривиального, непрерывно (производные, как правило, при этом терпят разрыв). Появление решений с такими свойствами, которые позволяют использовать их для описания возмущений, распространяющихся по покоящемуся (абсолютно холодному) фону с конечной скоростью, у уравнения (1.1) связано с тем, что при $u = 0$ обращается в нуль множитель перед лапласианом, вследствие чего, как уже отмечалось, параболический тип этого уравнения вырождается [14].

Решения с подобными свойствами, как принято считать среди специалистов, впервые были представлены в работе [15]. В дальнейшем они стали объектом активного изучения в научной школе А.Ф. Сидорова [13; 16; 17]. В частности, были доказаны теоремы существования и единственности тепловой волны в классе аналитических функций для (1.1) при различных значениях входных параметров и постановках краевых условий [18; 19]. Отдельным направлением указанных исследований с 2010-х годов стало построение и изучение точных решений (1.3) [23] с нулевым фронтом [24; 25], нахождение которых обычно сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ); как правило, это уравнения Льенара [26]. Часть полученных результатов удалось распространить на случай систем [27].

Настоящая работа является продолжением исследований, выполненных автором и его коллегами в последние 5 лет. Наиболее релевантными здесь являются статьи [19; 28]. В развитие результатов [19] доказана новая теорема существования и единственности решения задачи (1.3), (1.4), отличительной чертой которой является то, что за счет вырожденной замены переменных удалось раскрыть особенность при $\rho = 0$. Также продолжено исследование точных решений, начатое в [28]. Построен и исследован в более общем случае фазовый портрет возникающей динамической системы и обосновано утверждение, являющееся в рассмотренном случае аналогом классического примера С. В. Ковалевской [29] (см. также [30]). Наконец, для задачи Коши для ОДУ с особенностью, к интегрированию которой сводится задача (1.3), (1.4) в одном частном случае, получена оценка на радиус сходимости построенного решения в виде ряда Тейлора, обобщающая результат из работы [31].

2. Основная теорема

Основным содержанием настоящего раздела является доказательство теоремы существования и единственности нетривиального аналитического решения с нулевым фронтом рассматриваемой задачи, однако перед этим необходимо преобразовать последнюю к более удобному для дальнейшего исследования виду.

2.1. Преобразование задачи

Выполним в уравнении (1.3) замену переменных

$$u(t, \rho) = \varphi(t)\psi(\rho)w(t, z), \quad z = \ln \frac{\rho}{a(t)}, \quad (2.1)$$

где w — новая искомая функция; t, z — независимые переменные, а $\varphi(t)$ и $\psi(\rho)$ будут определены позднее. Якобиан замены независимых переменных в данном случае определяется как

$$J = \begin{vmatrix} z_\rho & z_t \\ t_\rho & t_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/\rho & -a'(t)/a(t) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho},$$

т.е. она является вырожденной при $\rho = 0$. Использование вырожденных замен для раскрытия особенностей в задачах механики жидкости и газа — достаточно распространенный прием (см. [33]). В принципе здесь можно было бы не использовать логарифм, однако выбранный способ задания z позволяет существенно упростить итоговый вид уравнения для w . Похожая (но отнюдь не тождественная) замена использовалась нами ранее [28] в контексте нахождения точных решений, когда искомая функция зависит только от одной переменной. При доказательстве теорем существования и единственности решений задачи (1.3), (1.4), насколько нам известно, попытки раскрыть особенность ранее не предпринимались, вследствие чего приходилось накладывать дополнительное ограничение $a(0) \geq r_0 > 0$ [18; 19].

В результате замены (2.1) производные преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_t &= \varphi'(t)\psi(\rho)w(t, z) + \varphi(t)\psi(\rho)w_t(t, z) - \frac{\varphi(t)a'(t)\psi(\rho)}{a(t)}w_z(t, z), \\ u_\rho &= \varphi(t)\psi'(\rho)w(t, z) + \frac{\varphi(t)\psi(\rho)}{\rho}w_z(t, z), \\ u_{\rho\rho} &= \varphi(t)\psi''(\rho)w(t, z) + \frac{2\varphi(t)\psi'(\rho)}{\rho}w_z(t, z) - \frac{\varphi(t)\psi(\rho)}{\rho^2}w_z(t, z) + \frac{\varphi(t)\psi(\rho)}{\rho^2}w_{zz}(t, z). \end{aligned}$$

Подставим полученные формулы в уравнение (1.3). Приведя подобные слагаемые и умножив на $\rho^2/[\varphi^2(t)\psi^2(\rho)]$, выводим следующее выражение:

$$\begin{aligned} ww_{zz} + \frac{w_z^2}{\sigma} + \left[\frac{2\rho\psi'(\rho)}{\psi(\rho)} \left(2 + \frac{2}{\sigma} \right) - 1 + \nu \right] ww_z + \left[\frac{\rho^2\psi''(\rho)}{\psi(\rho)} + \frac{\rho^2(\psi'(\rho))^2}{\sigma\psi^2(\rho)} + \frac{\nu\rho\psi'(\rho)}{\psi(\rho)} \right] w^2 \\ + \frac{a'(t)\rho^2}{\varphi(t)a(t)\psi(\rho)}w_z - \frac{\varphi'(t)\rho^2}{\varphi^2(t)\psi(\rho)}w - \frac{\rho^2}{\varphi(t)\psi(\rho)}w_t + \frac{\rho^2}{\varphi^2(t)\psi^2(\rho)}\Psi(\varphi(t)\psi(\rho)w) = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Определим теперь функции $\psi(\rho)$ и $\varphi(t)$. Пусть $\psi(\rho) = \rho^2$, $\varphi(t) = a'(t)/a(t)$, и тогда с учетом представления $\Psi(u) = u\Upsilon(u)$ формула (2.2) принимает вид

$$\begin{aligned} ww_{zz} + \frac{w_z^2}{\sigma} + \left(3 + \frac{4}{\sigma} + \nu \right) ww_z + w_z - \frac{a(t)}{a'(t)}w_t + \left(2 + \frac{4}{\sigma} + 2\nu \right) w^2 + \left(\frac{a(t)}{a'(t)} \right)' w \\ + \frac{a(t)}{a'(t)}w\Upsilon(a(t)a'(t)e^{-2z}w) = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\psi(\rho)\varphi(t) = a(t)a'(t)e^{-2z}$. Можно видеть, что уравнение (2.3) не имеет особенностей, если функции $a(t)$ и $\Upsilon(u)$ являются гладкими и $a'(0) \neq 0$.

Для упрощения записи введем новое обозначение. Пусть

$$\Phi(t, z, w) = - \left(2 + \frac{4}{\sigma} + 2\nu \right) w - b'(t) - b(t)\Upsilon(a(t)a'(t)e^{-2z}w),$$

где $b(t) = a(t)/a'(t)$. Тогда (2.2) примет вид

$$ww_{zz} + \frac{w_z^2}{\sigma} + \left(3 + \frac{4}{\sigma} + \nu \right) ww_z + w_z - \frac{a(t)}{a'(t)}w_t = w\Phi(t, z, w). \quad (2.4)$$

Для уравнения (2.4) согласно (1.4) и (2.1) имеем граничное условие

$$w|_{z=0} = 0. \quad (2.5)$$

Задача (2.4), (2.5) отличается от постановок, которые рассматривались в научной школе А. Ф. Сидорова ранее [18; 19]. Можно без труда убедиться, что ей удовлетворяет функция $w \equiv 0$. Однако, как явствует из нижеследующего утверждения, может существовать и нетривиальное решение.

2.2. Формулировка и доказательство теоремы

Под аналитической в окрестности точки функцией здесь и далее понимается функция, совпадающая в указанной окрестности со своим тейлоровским разложением.

Теорема 1. Пусть функция $a(t)$ является аналитической в некоторой окрестности точки $t = 0$, $a'(0) \neq 0$; функция $\Phi(t, z, w)$ является аналитической в некоторой окрестности точки $(t = 0, z = 0, w = 0)$. Тогда у задачи (2.4), (2.5) в некоторой окрестности точки $(t = 0, z = 0)$ существует нетривиальное аналитическое решение, причем единственное.

Доказательство. Обоснование теоремы проводится в два этапа. На первом строится формальное решение в виде ряда Тейлора, а на втором доказывается его сходимости.

1. Будем строить решение задачи (2.4), (2.5) в виде

$$w(t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w_k(t)z^k}{k!}, \quad w_k = \left. \frac{\partial^k w}{\partial z^k} \right|_{z=0}. \quad (2.6)$$

отметим, что представление решений в виде рядов часто применяется в научной школе А. Ф. Сидорова при исследовании начально-краевых задач для нелинейных уравнений математической физики [20–22].

Из условия (2.5) имеем, что $w_0(t) = 0$, $w'_0(t) = 0$. Подставив $z = 0$, $w_0 = w'_0 = 0$ в уравнение (2.4), получим, что $w_1^2/\sigma + w_1 = 0$. Отсюда следует, что либо $w_1(t) = 0$, и тогда имеем решение $w(t, z) \equiv 0$, поскольку $w_1 = 0 = w_2 = \dots$; либо $w_1(t) = -\sigma$. При всех прочих способах задания $w_z|_{z=0}$ задача Коши оказывается несовместной.

Пусть далее $w_1(t) = \sigma > 0$. Для нахождения w_2 продифференцируем уравнение (2.4) по z и положим $z = 0$. С учетом ранее найденных значений $w_0 = 0$ и $w_1 = -\sigma$ имеем, что

$$-\sigma w_2 - \frac{2\sigma w_2}{\sigma} + \frac{(\nu + 3)\sigma + 4}{\sigma} \sigma^2 + w_2 = -\sigma \Phi(t, 0, 0).$$

Приведя подобные и выразив w_2 , получим, что

$$w_2 = \frac{\sigma}{\sigma + 1} [(\nu + 3)\sigma + 4 + \Phi(t, 0, 0)] = \frac{\sigma}{\sigma + 1} [(\nu + 3)\sigma + 4 - b'(t) - b(t)\Upsilon(0)].$$

И так далее. Пусть нам известны коэффициенты $w_i(t)$ при i от 0 до k включительно. Продифференцировав уравнение (2.4) k раз по z , положив $z = 0$ и разрешив относительно w_{k+1} , получаем выражение

$$w_{k+1} = \frac{1}{1 + k\sigma} \left(\sum_{i=2}^k C_k^i w_i w_{k+2-i} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{k-1} C_k^i w_{i+1} w_{k+1-i} + \frac{(\nu + 3)\sigma + 4}{\sigma} \sum_{i=1}^k C_k^i w_i w_{k+1-i} - \frac{a(t)}{a'(t)} w'_k(t) - \sum_{i=1}^k C_k^i w_i \Phi_{k-i} \right). \quad (2.7)$$

Здесь $\Phi_i(t) = \partial^i \Phi / \partial z^i|_{z=0}$, причем дифференцирование проводится с учетом того, что $\Phi(t, z, w)$ — сложная функция, в которой $w = w(t, z)$.

Можно видеть, что в правой части формулы (2.7) находится выражение, зависящее от величин $w_1(t), w_2(t), \dots, w_k(t)$. Если они известны, то коэффициент $w_{k+1}(t)$ однозначно определяется: напомним, что $\sigma > 0$, $a'(0) \neq 0$, а функции $a(t)$ и $\Phi(t, z, w)$ аналитические, т. е. бесконечно дифференцируемые. Итак, в соответствии с принципом математической индукции формальное решение в виде ряда (2.6) построено. Первый этап обоснования теоремы завершен.

2. Доказательство сходимости ряда (2.6) проводится методом мажорант с использованием теоремы Коши — Ковалевской [32]. Хотя, как уже отмечалось, задача (2.4), (2.5) отличается от ранее рассмотренных постановок, мажорантная задача имеет традиционную структуру (см. [19]), поэтому будем кратки в рассуждениях.

Прежде всего, введем новую искомую функцию W :

$$w(t, z) = w_0(t) + zw_1(t) + z^2W(t, z) = -\sigma z + z^2W(t, z). \quad (2.8)$$

После подстановки (2.8) в (2.4) получаем, что

$$\begin{aligned} & z(zW - \sigma)(2W + 4zW_z + z^2W_{zz}) + \frac{1}{\sigma}(2zW + z^2W_z - \sigma)^2 \\ & + \left(3 + \frac{4}{\sigma} + \nu\right)z(zW - \sigma)(2zW + z^2W_z - \sigma) \\ & + zW - \frac{a(t)}{a'(t)}z^2W_t = z(zW - \sigma)\Phi(t, z, z^2W - \sigma z). \end{aligned} \quad (2.9)$$

В результате приведения подобных и деления на $(-z)$ уравнение (2.9) примет вид

$$\begin{aligned} & z^2W_{zz} + \left(4 + \frac{1}{\sigma}\right)zW_z + \left(2 + \frac{2}{\sigma}\right)W \\ & = h_0(t) + zh_1(t, z, W, W_t) + z^2h_2(t, z, W, W_z) + z^3h_3(t, z, W, W_z, W_{zz}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь h_i , $i = 0, \dots, 3$, — аналитические функции своих переменных. Явные формулы здесь не приводятся, поскольку они а) не имеют принципиального значения; б) довольно громоздки.

Выполненные выше преобразования являются эквивалентными, поэтому, если (2.10) имеет в окрестности $z = 0$ аналитическое решение, то из этого следует аналитическая разрешимость исходной задачи. Формальное решение (2.10) строится в виде ряда по степеням z аналогично тому, как был построен ряд (2.6). Мажоранту для решения (2.10) в окрестности $z = 0$ можно найти по схеме из [19, теорема 1, уравнение (11)].

Итак, второй этап обоснования завершен.

Теорема доказана.

Поскольку $w|_{z=0} = 0$, $w_z|_{z=0} = -\sigma < 0$, то $w(t, z) > 0$ при $z < 0$. Это означает, что справедливо нижеследующее утверждение.

Следствие 1. *Можно определить решение уравнения (1.3), имеющее вид тепловой волны, следующим образом:*

$$u(t, \rho) = \begin{cases} 0, & \rho \geq a(t), \\ w^*\left(t, \ln \frac{\rho}{a(t)}\right), & \rho \leq a(t), \end{cases}$$

где $w^*(t, z) = a(t)a'(t)w(t, z)e^{2z}$.

В частности, можно рассматривать случай, когда нулевой фронт $\rho = a(t)$ в начальный момент времени $t = 0$ находится в точке $\rho = 0$, если принять, что вдоль него $\rho/a(t) = 1$ всегда, в том числе при $\rho = a(0) = 0$ (по непрерывности), т. е. вырожденная замена (2.1) действительно позволяет раскрыть особенность в задаче (1.3), (1.4).

3. Точные решения

Рассмотрим теперь вопрос о том, когда (2.3) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ). Пусть $\Psi(u) = \alpha u^\beta$. При этом необходимо потребовать, чтобы выполнялось одно из равенств $\alpha = 0$ или $\beta = 1$. Для того чтобы отделить случаи, когда возможна

редукция к ОДУ, от общей постановки, будем обозначать искомую функцию $v(z)$. Поскольку обоснование редукции проведено в работе [28], приведем только итоговые результаты.

1. Пусть $\beta = 1$. Тогда $\varphi = \text{const} = C_1$, а $a(t) = C_2 e^{C_1 t}$. При это α может быть любым, в том числе и нулем.

2. Пусть $\alpha = 0$, $\varphi \neq \text{const}$. Тогда $a(t) = (C_3 t + C_4)^\gamma$, а $\varphi(t) = \gamma/(t + C_*)$. Здесь $C_* = C_4/C_3$, $\gamma \neq 0$ — действительное число.

Получающиеся ОДУ можно записать совместно в виде

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + \left(3 + \frac{4}{\sigma} + \nu\right)vv' + v' + \left(2 + \frac{4}{\sigma} + 2\nu\right)v^2 + \mu v = 0, \quad v(0) = 0, \quad (3.1)$$

где μ может принимать значения α или $1/\gamma$. Дальнейшее содержание статьи посвящено исследованию задачи (3.1)

3.1. Переход в фазовую плоскость

Сделаем линейную замену переменных. Пусть $\tilde{z} = (3 + 4/\sigma + \nu)z$, $\tilde{v} = (3 + 4/\sigma + \nu)v$. Тогда уравнение (3.1) примет вид

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + vv' + v' + \eta v^2 + \mu v = 0. \quad (3.2)$$

Здесь $\eta = 2\sigma(\sigma + \nu\sigma + 2)/(3\sigma + \nu\sigma + 4)^2 > 0$, $\tilde{\mu} = \sigma\mu/(3\sigma + \nu\sigma + 4)$. Знак $\sim$ (тильда) в уравнении (3.2) и далее опускается для упрощения обозначений.

Далее, пользуясь тем, что уравнение (3.2) является автономным, понизим его степень путем перехода в фазовую плоскость. Будем считать $p = v'(z)$ новой искомой функцией, а v — независимой переменной. Получим следующее соотношение:

$$pv \frac{dp}{dv} + \frac{p^2}{\sigma} + pv + p + \eta v^2 + \mu v = 0. \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) ранее уже возникало в работе [28], однако его изучение осталось незавершенным, поскольку мы там ограничились рассмотрением одного частного случая.

Начнем дальнейшие исследования с построения решений (3.3) в виде рядов. При этом наибольший интерес для нас представляют нетривиальные решения, удовлетворяющие условию Коши

$$p(0) = p_0, \quad (3.4)$$

которое можно рассматривать как условие на фронте тепловой волны. Будем строить решение задачи (3.3), (3.4) в виде ряда Тейлора по степеням v

$$p(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{k!} v^k, \quad p_k = p^{(k)}(0). \quad (3.5)$$

Коэффициенты ряда (3.5) традиционно определяются индукцией по k .

Подставляя $v = 0, p = p_0$ в (3.3), получим, что p_0 должно удовлетворять уравнению

$$\frac{p_0^2}{\sigma} + p_0 = 0,$$

т. е. p_0 может принимать одно из двух значений 0 или $-\sigma$, для прочих значений p_0 уравнение (3.3) не имеет классического (непрерывно дифференцируемого) решения. Столь нетипичное свойство задачи Коши вызвано тем, что при $v = 0$ в (3.3) обращается в нуль множитель перед производной. Далее рассмотрим оба возможных случая последовательно.

3.2. Нулевое начальное условие

Пусть $p_0 = 0$. Последовательно дифференцируя уравнение (3.3) и полагая $v = 0$, получим, что

$$p_1 = -\mu, \quad p_2 = 2\left[\mu - \left(1 + \frac{1}{\sigma}\right)\mu^2 - \eta\right], \dots$$

Таким образом, база индукции установлена. Пусть известны p_i , $i = 0, 1, \dots, k-1$, $k \geq 3$. Тогда для нахождения p_k имеем соотношение

$$p_k = k\left(\mu k + \frac{2\mu}{\sigma} - 1\right)p_{k-1} - k \sum_{i=2}^{k-2} C_{k-1}^i p_i p_{k-i} - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=2}^{k-2} C_k^i p_i p_{k-i}, \quad (3.6)$$

где $C_k^i = k!/[i!(k-i)!]$. В силу предположения индукции правая часть (3.6) определяется однозначно. Итак, ряд (3.5) в рассматриваемом случае построен. С учетом того, что в правой части перед p_{k-1} множитель имеет по k вторую степень, очевидно, что сходимость ряда в общем случае не гарантирована. Покажем это строго в “хорошем”, на первый взгляд, случае $\mu = 0$ (множитель перед p_{k-1} имеет тогда первую степень). Напомним, что этот случай соответствует квазилинейному уравнению теплопроводности без источника (стока).

Утверждение 1. Пусть $\eta > 0$, $\sigma > 0$, $p_0 = 0$. Если $\mu = 0$, то ряд (3.5) при $v \neq 0$ расходится; если $\mu \neq 0$, $\eta = \mu - (1 + 1/\sigma)\mu^2$, то ряд (3.5) обрывается и имеет вид $p = -\mu v$.

Доказательство. Пусть $\mu = 0$. Тогда имеем, что $p_1 = 0$, $p_2 = -2\eta < 0$, $p_3 = -3p_2 = 6\eta$. Предположим, что $p_i < 0$, если $i = 2j$; $p_i > 0$, если $i = 2j + 1$ для всех $i = 2, 3, \dots, k-1$. Тогда

$$p_k = -kp_{k-1} - k \sum_{i=2}^{k-2} C_{k-1}^i p_i p_{k-i} - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=2}^{k-2} C_k^i p_i p_{k-i}. \quad (3.7)$$

В силу предположения индукции имеем, что у всех произведений в правой части (3.7) одинаковый знак, причем они положительны при нечетных k и отрицательны при четных. Поэтому, отбросив все слагаемые, кроме содержащих произведение $p_2 p_{k-2}$, получаем неравенство

$$|p_k| > \left[k(C_{k-1}^2 + C_{k-1}^{k-2}) + \frac{1}{\sigma}(C_k^2 + C_k^{k-2}) \right] |p_2| |p_{k-2}| = k(k-1) \left(k + \frac{2}{\sigma} \right) \eta |p_{k-2}| > 0, \quad k \geq 4.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|p_k|(k-2)!}{|p_{k-2}|k!} > \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k-2)!}{k!} k(k-1) \left(k + \frac{2}{\sigma} \right) \eta = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(k + \frac{2}{\sigma} \right) \eta = +\infty.$$

Таким образом, расходимость ряда (3.5) при $v \neq 0$ установлена.

Пусть теперь $\mu \neq 0$, $\eta = \mu - (1 + 1/\sigma)\mu^2$. Тогда имеем, что

$$p_1 = -\mu \neq 0, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = 3\left(3\mu + \frac{2\mu}{\sigma} - 1\right)p_2 = 0.$$

И так далее — индукцией по k , используя (3.7), несложно показать, что $p_k = 0$, $k \geq 2$.

Утверждение доказано.

З а м е ч а н и е 1. Утверждение является аналогом классического примера С.В. Ковалевской [29] в рассмотренном случае. Подобное утверждение для частного случая $\eta = 0$ было доказано в работе [36].

3.3. Ненулевое начальное условие

Пусть теперь $p_0 = -\sigma$. В этом случае существование единственного локально аналитического решения задачи (3.3), (3.4) следует из ранее доказанной нами в работе [31] теоремы 1. Однако область сходимости степенного ряда там была исследована при дополнительных предположениях, которым уравнение (3.3) не удовлетворяет. Проведем исследование радиуса сходимости ряда (3.5) в рассматриваемом случае. Для этого конкретизируем формулы для коэффициентов. Итак, имеем, что

$$p_0 = -\sigma, \quad p_1 = \frac{\mu - \sigma}{\sigma + 1}, \quad p_2 = \frac{2}{2\sigma + 1} \left[\frac{\mu(\mu - \sigma)}{\sigma(\sigma + 1)} + \eta \right], \quad p_3 = \frac{3p_2}{3\sigma + 1} \left[\frac{(3\sigma + 2)(\mu - \sigma)}{\sigma(\sigma + 1)} + 1 \right],$$

$$p_k = \frac{1}{\sigma k + 1} \left[\left(\frac{(k\sigma + 2)(\mu - \sigma)}{\sigma(\sigma + 1)} + 1 \right) k p_{k-1} + \sum_{i=2}^{k-2} C_k^i \left(i + \frac{1}{\sigma} \right) p_i p_{k-i} \right], \quad k \geq 4. \quad (3.8)$$

Для удобства дальнейших выкладок преобразуем соотношение (3.8). Легко убедиться в справедливости равенства

$$\sum_{i=2}^{k-2} C_k^i \left(i + \frac{1}{\sigma} \right) p_i p_{k-i} = \sum_{i=2}^{k-2} C_k^i \left(k - i + \frac{1}{\sigma} \right) p_i p_{k-i}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{i=2}^{k-2} C_k^i \left(i + \frac{1}{\sigma} \right) p_i p_{k-i} + \sum_{i=2}^{k-2} C_k^i \left(k - i + \frac{1}{\sigma} \right) p_i p_{k-i} = \left(k + \frac{2}{\sigma} \right) \sum_{i=2}^{k-2} C_k^i p_i p_{k-i}.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=2}^{k-2} C_k^i \left(i + \frac{1}{\sigma} \right) p_i p_{k-i} = \left(\frac{k}{2} + \frac{1}{\sigma} \right) \sum_{i=2}^{k-2} C_k^i p_i p_{k-i}. \quad (3.9)$$

Поставив (3.9) в (3.8), получаем, что

$$p_k = \frac{k\sigma + 2}{k\sigma + 1} \left[\left(\frac{\mu - \sigma}{\sigma(\sigma + 1)} + \frac{1}{k\sigma + 2} \right) k p_{k-1} + \frac{1}{2\sigma} \sum_{i=2}^{k-2} C_k^i p_i p_{k-i} \right], \quad k \geq 4. \quad (3.10)$$

Для того чтобы построить оценку выражения в квадратных скобках (3.10), нам потребуется два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$, $\sigma > 0$. Тогда справедливо равенство

$$\sum_{i=2}^{k-2} \frac{1}{i(k-i)(i\sigma+1)(k\sigma-i\sigma+1)} = \frac{2}{(k\sigma+1)(k\sigma+2)} \sum_{i=2}^{k-2} \left(\frac{\sigma}{i(i\sigma+1)} + \frac{2}{ki} \right).$$

Доказательство леммы проводится путем разложения выражения под знаком суммирования на элементарные дроби методом неопределенных коэффициентов при использовании очевидных равенств

$$\sum_{i=2}^{k-2} \frac{1}{i} = \sum_{i=2}^{k-2} \frac{1}{k-i}, \quad \sum_{i=2}^{k-2} \frac{1}{i\sigma+1} = \sum_{i=2}^{k-2} \frac{1}{(k-i)\sigma+1}.$$

Технические детали вряд ли могут представлять интерес для читателя и поэтому опускаются.

Лемма 2. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$, $\sigma > 0$. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{i=2}^{k-2} \left(\frac{\sigma}{i(i\sigma+1)} + \frac{2}{ki} \right) < \frac{\pi^2}{6} - \frac{19}{30}. \quad (3.11)$$

Доказательство. Оценим слагаемые в левой части (3.11) последовательно:

$$\sum_{i=2}^{k-2} \frac{\sigma}{i(i\sigma+1)} < \sum_{i=2}^{k-2} \frac{1}{i^2} < \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1,$$

где для получения оценки использована сумма ряда обратных квадратов [34]. Известно, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{k} \sum_{i=2}^{k-2} \frac{1}{i} = 0,$$

при этом, как несложно убедиться, наибольшее значение, равное $11/30$, данная сумма принимает при $k = 7$.

Лемма доказана.

Перейдем теперь к финальному этапу построения оценки. Будем искать мажоранту в виде

$$|p_i| < \frac{M^{i-1}(i-1)!}{i\sigma+1}, \quad i \geq 2. \quad (3.12)$$

Для p_2 и p_3 оценка (3.12) выполняется (см. (3.7)) с константами

$$M_2 = 2 \left| \frac{\mu(\mu-\sigma)}{\sigma(\sigma+1)} + \eta \right|, \quad M_3 = \sqrt{\frac{3}{2\sigma+1} \left| \frac{\mu(\mu-\sigma)}{\sigma(\sigma+1)} + \eta \right| \left| \frac{(3\sigma+2)(\mu-\sigma)}{\sigma(\sigma+1)} + 1 \right|}.$$

Пусть оценка (3.12) с некоторой константой M получена для $i = 2, 3, \dots, k-1$, $k \geq 3$. Тогда из (3.10) имеем, что

$$|p_k| < \frac{k\sigma+2}{k\sigma+1} \left[\left| \frac{\mu-\sigma}{\sigma(\sigma+1)} + \frac{1}{k\sigma+2} \right| \frac{kM^{k-2}(k-2)!}{(k-1)\sigma+1} + \frac{1}{2\sigma} \sum_{i=2}^{k-2} \frac{M^{k-2}k!}{i(k-i)(i\sigma+1)(k\sigma-i\sigma+1)} \right].$$

С учетом лемм 1 и 2 отсюда получаем, что

$$|p_k| < \frac{M^{k-2}(k-1)!}{k\sigma+1} \left[\left| \frac{\mu-\sigma}{\sigma(\sigma+1)} + \frac{1}{k\sigma+2} \right| \frac{k}{(k-1)} \frac{(k\sigma+2)}{[(k-1)\sigma+1]} + \frac{k}{\sigma(k\sigma+2)} \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{19}{30} \right) \right].$$

Можно видеть, что величина в квадратных скобках ограничена по k , откуда следует существование искомой константы M . Для наглядности получим ее грубую оценку, которая будет справедлива при любых $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ и $k \geq 4$:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\mu-\sigma}{\sigma(\sigma+1)} + \frac{1}{k\sigma+2} \right| \frac{k}{(k-1)} \frac{(k\sigma+2)}{[(k-1)\sigma+1]} + \frac{k}{\sigma(k\sigma+2)} \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{19}{30} \right) \\ & < \left[\frac{|\mu-\sigma|}{\sigma(\sigma+1)} + \frac{1}{2(2\sigma+1)} \right] \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{2(2\sigma+1)}{(3\sigma+1)} + \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{19}{30} \right) \\ & = \frac{8(2\sigma+1)|\mu-\sigma|}{3\sigma(\sigma+1)(3\sigma+1)} + \frac{4}{3\sigma(3\sigma+1)} + \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{19}{30} \right) = M_*. \end{aligned}$$

Итак, установлена справедливость оценки (3.12) при выборе константы M из условия

$$M = \max\{M_2, M_3, M_*\}. \quad (3.13)$$

Из проведенных рассуждений следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2. Пусть $\mu, \eta \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $p_0 = -\sigma$. Тогда ряд (3.5) сходится при $|v| < 1/M = R$, где M определяется из условия (3.13).

Можно видеть, что при $\eta = 0$ с ростом σ значение R также возрастает, причем неограниченно.

4. Качественное исследование

Исследуем глобальные свойства решений уравнения (3.2). Для этого выполним анализ, используя один из классических методов качественной теории дифференциальных уравнений [35] (см. также [25; 28; 36]).

4.1. Анализ особых точек

Уравнению (3.3) соответствует динамическая система

$$\frac{dv}{d\zeta} = vp, \quad \frac{dp}{d\zeta} = -\frac{p^2}{\sigma} - pv - \eta v^2 - p - \mu v, \quad (4.1)$$

где $dz = v d\zeta$. Рассмотрим теперь состояния равновесия (особые точки) системы (4.1). Имеется три таких точки $(0, -\sigma)$, $(0, 0)$ и $(-\mu/\eta, 0)$. Если $\mu = 0$, то вторая и третья точки совпадают.

В работе [28] изучены типы этих точек и показано, что точка $(0, -\sigma)$ имеет топологический тип “седло”, а точка $(0, 0)$ является сложным состоянием равновесия, причем возможны следующие случаи:

1. Если $\mu \neq 0$, то точка $(0, 0)$ имеет тип “седло-узел” с одним узловым сектором и двумя седловыми. При этом, если $\mu < 0$, то траектории узлового сектора стремятся к $(0, 0)$ при $\zeta \rightarrow -\infty$ слева от оси Op , а если $\mu > 0$, то траектории узлового сектора стремятся к $(0, 0)$ при $\zeta \rightarrow +\infty$ справа от оси Op .
2. Если $\mu = 0$, то состояние равновесия $(0, 0)$ является устойчивым сложным узлом.

4.2. Исследование фазового портрета

Построение и исследование полного фазового портрета динамической системы (4.1) — это отдельная и сложная задача. В частном случае, когда $\eta = 0$, она была рассмотрена в работе [36]. В случае $\mu = 0, \nu = 1$ — в работе [28].

Здесь положим $\mu = 0, \nu > 0$, тогда $\eta = 2\sigma(\sigma + \nu\sigma + 2)/(3\sigma + \nu\sigma + 4)^2$ и имеется две особые точки. Фазовые траектории меняют направление движения при переходе через ось Op , а также при пересечении кватрики $p^2/\sigma + p + pv + \eta v^2 = 0$, на которой, в частности, лежат особые точки.

Определим вначале свойства этой кривой второго порядка, уравнение которой имеет вид

$$\frac{p^2}{\sigma} + pv + \eta v^2 + p = 0.$$

Приведя его к каноническому виду, получим соотношение

$$\frac{\sigma - 4\eta}{4} \left(v + \frac{\sigma}{\sigma - 4\eta} \right)^2 - \frac{1}{\sigma} \left(p + \frac{\sigma v}{2} + \frac{\sigma}{2} \right)^2 = \frac{\eta\sigma}{\sigma - 4\eta}.$$

Подставив сюда выражение для η , окончательно приходим к уравнению

$$\frac{\sigma(9\sigma + 6\nu\sigma + \nu^2\sigma + 16)}{4(3\sigma + \nu\sigma + 4)^2} \left(\sigma v + \frac{(3\sigma + \nu\sigma + 4)^2}{9\sigma + 6\nu\sigma + \nu^2\sigma + 16} \right)^2 - \left(p + \frac{\sigma v}{2} + \frac{\sigma}{2} \right)^2 = \frac{2\sigma(\sigma + \nu\sigma + 2)}{9\sigma + 6\nu\sigma + \nu^2\sigma + 16}. \quad (4.2)$$

Можно убедиться, что это гипербола с асимптотами

$$p_{\pm}(v) = -\frac{\sigma}{2} \left(1 \pm \frac{\sqrt{\sigma(9\sigma + 6\nu\sigma + \nu^2\sigma + 16)}}{3\sigma + \nu\sigma + 4} \right) v \mp \frac{(3\sigma + \nu\sigma + 4)\sqrt{\sigma}}{2\sqrt{9\sigma + 6\nu\sigma + \nu^2\sigma + 16}} - \frac{\sigma}{2}.$$

Расположение ветвей гиперболы следующее: левая ветвь целиком лежит во втором квадранте, а правая — в третьем и четвертом квадрантах, проходя через особые точки.

Фазовый портрет динамической системы представлен на рис. 1. Ключевым его элементом является сепаратриса, которая проходит через особую точку $(0, -\sigma)$, огибает особую точку $(0, 0)$ и узловой сектор и изображена жирной линией. Можно видеть, что а) в правой полуплоскости вдоль сепаратрисы как v , так и p меняются немонотонно, для обеих переменных имеются точки экстремума: для v существует максимум, который достигается на пересечении с осью абсцисс, а для p — минимум, который достигается на пересечении с гиперболой (4.2) (обозначена на рис. 1 пунктирной линией); б) в левой полуплоскости для переменной v существует минимум, который также достигается на пересечении с осью абсцисс, а p монотонно возрастает; в) $\lim_{v \rightarrow \pm 0} p(v) = +\infty$.

Траектории, лежащие внутри сепаратрисы (в узловом секторе), стремятся в начало координат при $\zeta \rightarrow +\infty$. Траектории, лежащие вне сепаратрисы, обладают свойством $\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} v = 0$, $\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} p = -\infty$. Причем для траекторий, пересекающих гиперболу (4.2), зависимость $p(v)$ немонотонная, вследствие чего возникают три изгиба (при пересечении ветвей гиперболы и оси абсцисс). Траектории, не пересекающие гиперболу (4.2) (заметим, что все они расположены в левой полуплоскости, причем область, в которой они локализованы, ограничена сепаратрисой, осью ординат и траекторией, которая касается левой ветви гиперболы), имеют один изгиб.

Вернемся в плоскость переменных v, z . На основании проведенных рассуждений можем утверждать, что найденная сепаратриса определяет при $\mu = 0$ решение (3.2) $v = v^*(z)$, удовлетворяющее условию $v(0) = 0$, $v'(0) = -\sigma$ со следующими свойствами (см. рис. 2): при $z < 0$ функция $v_*(z)$ вначале убывает вместе со своей первой производной, потом вторая производная меняет знак в точке $z = \bar{z}$, далее в точке $z = z_{\max} < \bar{z}$ функция достигает максимума $v_{\max}$ и $v'(z)$ меняет знак, наконец, в точке $z_* < z_{\max}$ вновь $v(z_*) = 0$, причем $v'(z_*) = \infty$.

С точки зрения исходной задачи (1.3), (1.4) это означает, что получено решение, которое имеет два нулевых фронта, т. е. является функцией с финитным носителем и геометрически представляет собой уединенную волну (солитон). При этом свойства построенного решения отличаются от свойств солитонов, полученных ранее для плоскосимметричного случая [30; 36]. В частности, первая производная для исследованного решения ОДУ является немонотонной.

Решение при $z > 0$ является отрицательным и не допускает очевидной физической интерпретации, однако представляет интерес с математической точки зрения. Функция $v(z)$ имеет здесь положительную вторую производную, достигает минимума в точке $z = z_{\min}$ и обращается в нуль в точке $z = z^*$, причем $v'(z^*) = \infty$.

Заключение

Представленная работа является очередным этапом проводимых автором и его коллегами систематических исследований решений типа тепловых (фильтрационных, диффузионных) волн для нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка. Подобные решения представляют собой интересный и содержательный математический объект, поскольку описывают возмущения, которые распространяются по покоящемуся фону с конечной скоростью, что позволяет использовать их для моделирования диффузионных и фильтрационных процессов различной природы. Кроме того, они являются не вполне обычными для уравнений параболического типа: как известно, конечная скорость движения волны — свойство, присущее решениям гиперболических уравнений. Оно появляется в рассматриваемых задачах как следствие их вырождения, связанного с тем, что обращается в нуль множитель перед старшей (второй) производной.

Была рассмотрена, казалось бы, хорошо изученная постановка: размерность задачи произвольная, но имеет место центральная (осевая) симметрия, т. е. искомая функция зависит от времени t и расстояния ρ до некоторой точки (прямой), для которой тем не менее удалось получить содержательные научные результаты. Так, была доказана оригинальная теорема

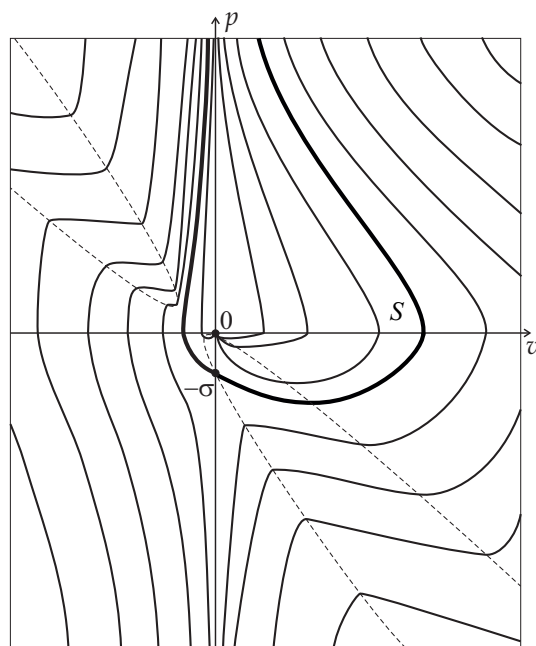
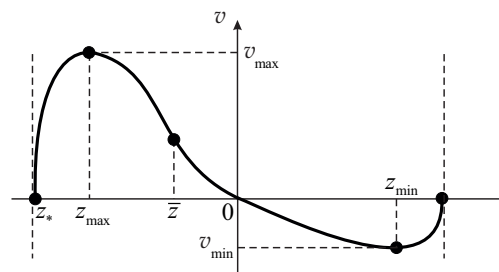


Рис. 1. Фазовый портрет.

Рис. 2. Функция $v = v^*(z)$.

существования решений искомого типа, отличие которой от ранее доказанных аналогичных утверждений состоит в том, что за счет вырожденной замены независимых переменных удалось раскрыть особенность в точке $\rho = 0$. Также было продолжено исследование точных решений искомого вида, построение которых сводится к интегрированию ОДУ. Были улучшены, дополнены и уточнены ранее полученные результаты. Особого внимания, на наш взгляд, заслуживают полученные оценки радиусов сходимости степенных рядов, в виде которых представлены точные решения. Интересными свойствами обладает построенный фазовый портрет упомянутого ОДУ.

Дальнейшие исследования в данном направлении могут быть связаны с разработкой вычислительных алгоритмов построения решений рассмотренных задач с учетом необходимости раскрытия всех особенностей. Поскольку для вырождающихся нелинейных уравнений математической физики доказать сходимость численных методов удастся только в единичных случаях, в качестве средства верификации расчетов могут быть использованы найденные здесь точные решения, а также отрезки рядов, которые были построены при доказательстве теоремы, причем полученные результаты позволяют проверить корректность вычислений вблизи особой точки $\rho = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
2. **Галактионов В.А., Дородницын В.А., Еленин Г.Г., Курдюмов С.П., Самарский А.А.** Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Нов. достиж. 1986. Т. 28. С. 95–205.
3. **Vazquez J.** The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. Clarendon Press: Oxford, 2007. 624 p. doi: 10.1093/acprof:oso/9780198569039.001.0001.
4. **Boussinesq J.** Essai sur la theorie des eaux courantes. Paris: Imprimerie Nationale, 1877. 666 p.
5. **Ковалев В.А., Куретова Е.Д., Куркина Е.С.** О формировании нитеподобных структур на ранней фазе солнечных вспышек // Физика плазмы. 2020. Т. 46. № 4. С. 351–357.
6. **Murray J.D.** Mathematical biology II: Spatial models and biomedical applications. Interdisciplinary Appl. Math. Vol. 18. NY: Springer, 2003. 837 p.

7. **Баренблатт Г.И., Ентов В.Н., Рыжик В.М.** Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 211 с.
8. **Шагапов В.Ш., Мухаметшин С.М., Галиаскарова Г.Р.** Распространение тяжелых атмосферных выбросов с учетом ландшафта местности // Инженерно-физический журнал. 2005. Т. 78, № 2. С. 99–103.
9. **Filimonov M.Yu., Kamnev Ya.K., Shein A.N., Vaganova N.A.** Modeling the temperature field in frozen soil under buildings in the city of Salekhard taking into account temperature monitoring // Land. 2022. Vol. 11, iss. 7. P. 1102. doi: 10.3390/land11071102.
10. **Андреев В.К., Гапоненко Ю.А., Гончарова О.Н., Пухначев В.В.** Современные математические модели конвекции. М.: Физматлит, 2008. 368 с.
11. **Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.** Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.
12. **Svirshchevskii S.R.** Exact solutions of a nonlinear diffusion equation on polynomial invariant subspace of maximal dimension // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2022. Vol. 112. Art. no. 106515. doi: 10.1016/j.cnsns.2022.106515.
13. **Сидоров А.Ф.** Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
14. **DiBenedetto E.** Degenerate parabolic equations. NY: Springer-Verlag, 1993. 388 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0895-2.
15. **Зельдович Я.Б., Компанеец А.С.** К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сборник, посвященный 70-летию А.Ф. Иоффе. 1950. С. 61–71.
16. **Коврижных О.О.** О построении асимптотического решения нелинейного вырождающегося параболического уравнения // Журнал выч. мат. и мат. физ. 2003. Т. 43, № 10. С. 1487–1493.
17. **Ваганова Н.А.** Построение новых классов решений нелинейного уравнения фильтрации с помощью специальных согласованных рядов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2003. Т. 9, № 2. С. 10–20.
18. **Баутин С.П.** Аналитическая тепловая волна. М.: Физматлит, 2003. 88 с.
19. **Казаков А.Л.** О точных решениях краевой задачи о движении тепловой волны для уравнения нелинейной теплопроводности // Сиб. электрон. мат. известия. 2019. Т. 16. С. 1057–1068. doi: 10.33048/semi.2019.16.073.
20. **Филимонов М.Ю.** Применение метода специальных рядов для построения новых классов решений нелинейных уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 6. С. 801–808.
21. **Филимонов М.Ю.** Использование метода специальных рядов для представления решений начально-краевых задач для нелинейных уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 8. С. 1100–1107.
22. **Filimonov M.Yu.** Representation of solutions of boundary value problems for nonlinear evolution equations by special series with recurrently calculated coefficients // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1268. Art. no. 012071. doi: 10.1088/1742-6596/1268/1/012071.
23. **Рубина Л.И., Ульянов О.Н.** Об одном методе решения уравнения нелинейной теплопроводности // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 5. С. 1091–1101.
24. **Казаков А.Л., Орлов С.С.** О некоторых точных решениях нелинейного уравнения теплопроводности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 1. С. 112–123.
25. **Казаков А.Л., Орлов Св.С., Орлов С.С.** Построение и исследование некоторых точных решений нелинейного уравнения теплопроводности // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 3. С. 544–560. doi: 10.17377/smzh.2018.59.306.
26. **Kudryashov N.A., Sinelshchikov D.I.** On the integrability conditions for a family of Liénard-type equations // Regular and Chaotic Dynamics. 2016. Vol. 21, no. 5. P. 548–555. doi: 10.1134/S1560354716050063.
27. **Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Lempert A.A.** Analytical solutions to the singular problem for a system of nonlinear parabolic equations of the reaction-diffusion type // Symmetry. 2020. Vol. 12, № 6. P. 999. doi: 10.3390/SYM12060999.
28. **Kazakov A., Lempert A.** Multidimensional diffusion-wave-type solutions to the second-order evolutionary equation // Mathematics. 2024. Vol. 12, no. 2. Art. no. 354. doi: 10.3390/math12020354.
29. **Козлов В.В.** Софья Ковалевская: математик и человек // Успехи мат. наук. 2000. Т. 55, № 6. P. 159–172. doi: 10.4213/rm353.
30. **Kazakov A.** Solutions to nonlinear evolutionary parabolic equations of the diffusion wave type // Symmetry. 2021. Vol. 13, № 5. P. 871. doi: 10.3390/sym13050871.

31. Казаков А.Л., Лемперт А.А. Точные решения типа диффузионных волн для нелинейного вырождающегося параболического уравнения второго порядка // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, № 3. С. 114–128. doi: 10.21538/0134-4889-2022-28-3-114-128.
32. Курант Р. Уравнения с частными производными. Т. 2. М.: Мир, 1964. 830 с.
33. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1987. 432 с.
34. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров: Определения, теоремы, формулы. М.: Лань, 2003. 832 с.
35. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука. 1990. 488 с.
36. Kazakov A.L., Lempert A.A. Diffusion-wave type solutions to the second-order evolutionary equation with power nonlinearities // Mathematics. 2022. Vol. 10, № 2. P. 232. doi: 10.3390/math10020232.

Поступила 23.04.2024

После доработки 8.05.2024

Принята к публикации 13.05.2024

Казаков Александр Леонидович

д-р физ.-мат. наук, профессор

профессор РАН

гл. науч. сотрудник

Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН

г. Иркутск

e-mail: kazakov@icc.ru

REFERENCES

1. Ladyzenskaja O.A., Solonnikov V.A., Ural'ceva N.N. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*. Ser. Translations of mathematical monographs, vol. 23, Amer. Math. Soc., 1988, 648 p. ISBN: 978-0-8218-1573-1. Original Russian text was published in Ladyzenskaja O.A., Solonnikov V.A., Ural'ceva N.N. *Lineynyye i kvazilineynyye uravneniya parabolicheskogo tipa*, Moscow, Nauka Publ., 1967, 736 p.
2. Galaktionov V.A., Dorodnitsyn V.A., Yelenin G.G., Kurdyumov S.P., Samarskii A.A. A quasi-linear equation of heat conduction with a source: peaking, localization, symmetry, exact solutions, asymptotic behavior, structures. *J. Soviet Math.*, 1988, vol. 41, no. 5, pp. 1222–1292.
3. Vazquez J. *The porous medium equation: mathematical theory*. Oxford, Clarendon Press, 2007, 624 p. doi: 10.1093/acprof:oso/9780198569039.001.0001
4. Boussinesq J. *Essai sur la theorie des eaux courantes*. Paris, Imprimerie Nationale, 1877, 666 p.
5. Kovalev V.A., Kuretova E.D., Kurkina E.S. On the formation of filamentary structures in the early phase of solar flares. *Plasma Physics Reports*, 2020, vol. 46, no. 4, pp. 396–401. doi: 10.1134/S1063780X20040078
6. Murray J.D. *Mathematical biology II : Spatial models and biomedical applications*, Interdisciplinary Appl. Math. (IAM, vol. 18), NY, Springer, 2003, 837 p. doi: 10.1007/b98869
7. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. *Theory of fluid flows through natural rocks*. Dordrecht, Kluwer Academ. Publ., 1990, 395 p. Original Russian text was published in Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. *Dvizheniye zhidkostey i gazov v prirodnykh plastakh*, Moscow, Nedra Publ, 1984, 211 p.
8. Shagapov V.Sh., Mukhametshin S.M., Galiaskarova G.R. Propagation of heavy atmospheric emissions with allowance for the ground landscape. *J. Engineer. Phys. Thermophys.*, 2005, vol. 78, no. 2, pp. 310–315. doi: 10.1007/s10891-005-0062-1
9. Filimonov M.Yu., Kamnev Ya.K., Shein A.N., Vaganova N.A. Modeling the temperature field in frozen soil under buildings in the city of Salekhard taking into account temperature monitoring. *Land*, 2022, vol. 11, iss. 7, pp. 1102. doi: 10.3390/land11071102
10. Andreev V.K., Gaponenko Yu.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V. *Mathematical models of convection*. Berlin, Walter De Gruyter, 2012, 432 p. doi: 10.1515/9783110258592. Original Russian text was published in Andreev V.K., Gaponenko Yu.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V. *Sovremennyye matematicheskiye modeli konveksii*, Moscow, Fizmatlit Publ., 2008, 368 p.
11. Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhailov A.P. *Blow-up in quasilinear parabolic equations*. Berlin, NY, Walter De Gruyter, 1995, 533 p. ISBN: 3-11-012754-7. Original Russian text was published in Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhailov A.P. *Rezhimy s*

- obostreniyem v zadachakh dlya kvazilineynykh parabolicheskikh uravneniy*, Moscow, Nauka Publ., 1987, 480 p.
12. Svirshchevskii S.R. Exact solutions of a nonlinear diffusion equation on polynomial invariant subspace of maximal dimension. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2022, vol. 112, art. no. 106515. doi: 10.1016/j.cnsns.2022.106515
 13. Sidorov A.F. *Izbrannyye trudy: Matematika. Mekhanika* [Selected works: Mathematics. Mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, 576 p. ISBN: 5-9221-0103-X.
 14. DiBenedetto E. *Degenerate parabolic equations*. NY, Springer-Verlag, 1993, 388 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0895-2
 15. Zel'dovich Ya.B., Kompaneyets A.S. On the theory of heat propagation with thermal conductivity depending on temperature. *Sbornik, posv. 70-letiyu A. F. Ioffe*, 1950, pp. 61–71 (in Russian).
 16. Kovrizhnykh O.O. On construction of an asymptotic solution to the degenerate nonlinear parabolic equation. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2003, vol. 43, no. 10, pp. 1430–1436.
 17. Vaganova N.A. Constructing new classes of solutions of a nonlinear filtration equation by special consistent series. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2003, suppl. 2, pp. S182–S193.
 18. Bautin S.P. *Analiticheskaya teplovaya volna* [Analytical heat wave]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003, 88 p. (in Russian). ISBN: 5-9221-0443-8.
 19. Kazakov A.L. On exact solutions to a heat wave propagation boundary-value problem for a nonlinear heat equation. *Sib. Electr. Math. Rep.*, 2019, vol. 16 pp. 1057–1068. doi: 10.33048/semi.2019.16.073
 20. Filimonov M.Yu. Application of the special series method to the construction of new classes of solutions of nonlinear partial differential equations. *Diff. Equat.*, 2003. vol. 39, no. 6, pp. 844–852. doi: 10.1023/B:DIEQ.0000008411.99716.73
 21. Filimonov M.Yu. Representation of solutions of initial-boundary value problems for nonlinear partial differential equations by the method of special series. *Diff. Equat.*, 2003, vol. 39, no. 8, pp. 1159–1166. doi: 10.1023/B:DIEQ.0000011290.09965.9a
 22. Filimonov M.Yu. Representation of solutions of boundary value problems for nonlinear evolution equations by special series with recurrently calculated coefficients. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1268, art. no. 012071. doi: 10.1088/1742-6596/1268/1/012071
 23. Rubina L.I., Ul'yanov O.N. On some method for solving a nonlinear heat equation. *Siberian Math. J.*, 2012, vol. 53, no. 5, pp. 872–881. doi: 10.1134/S0037446612050126
 24. Kazakov A.L., Orlov S.S. On some exact solutions to the nonlinear heat equation. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2016, vol. 22, no. 1, pp. 112–123 (in Russian).
 25. Kazakov A.L., Orlov Sv.S., Orlov S.S. Construction and study of exact solutions to a nonlinear heat equation. *Siberian Math. J.*, 2018, vol. 59, no. 3, pp. 427–441. doi: 10.1134/S0037446618030060
 26. Kudryashov N.A., Sinelshchikov D.I. On the integrability conditions for a family of Liénard-type equations. *Regular and chaotic dynamics*, 2016, vol. 21, iss. 5, pp. 548–555. doi: 10.1134/S1560354716050063
 27. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Lempert A.A. Analytical solutions to the singular problem for a system of nonlinear parabolic equations of the reaction-diffusion type. *Symmetry*, 2020, vol. 12, no. 6, pp. 999. doi: 10.3390/SYM12060999
 28. Kazakov A., Lempert A. Multidimensional diffusion-wave-type solutions to the second-order evolutionary equation. *Mathematics*, 2024, vol. 12, no. 2, pp. 354. doi: 10.3390/math12020354
 29. Kozlov V.V. Sofya Kovalevskaya: a mathematician and a person. *Russian Math. Surveys*, 2000, vol. 55, pp. 1175–1192. doi: 10.1070/rm2000v055n06ABEH000353
 30. Kazakov A. Solutions to nonlinear evolutionary parabolic equations of the diffusion wave type. *Symmetry*, 2021, vol. 13, no. 5, pp. 871. doi: 10.3390/sym13050871
 31. Kazakov A.L., Lempert A.A. Exact solutions of diffusion wave type for a nonlinear second-order parabolic equation with degeneration. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 3, pp. 114–128 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2022-28-3-114-128.
 32. Courant R., Hilbert D. *Methods of mathematical physics. Vol. 2 : Partial differential equations*, New York, Intersci., 1962, 830 p. Translated to Russian under the title *Metody matematicheskoi fiziki: Uravneniya v chastnykh proizvodnykh*, Moscow, Mir Publ., 1964, 831 p.
 33. Sedov L.I. *Similarity and dimensional methods in mechanics*. Boca Raton, CRC Press, 1993, 496 p. doi: 10.1201/9780203739730

34. Korn G.A., Korn T.M. *Mathematical handbook for scientists and engineers*, NY, San Francisco, Toronto, London, Sydney, McGraw-Hill Book Comp., 1968. 1130 p. doi: 10.1002/zamm.19690490921. Translated to Russian under the title *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov: Opredeleniya, teoremy, formuly*, Moscow, Lan' Publ., 2003, 832 p.
35. Bautin N.N., Leontovich E.A. *Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskikh sistem na ploskosti* [Methods and ways of qualitative study of dynamic systems on a plane], Moscow, Nauka Publ., 1990, 488 p.
36. Kazakov A.L., Lempert A.A. Diffusion-wave type solutions to the second-order evolutionary equation with power nonlinearities. *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 2, pp. 232. doi: 10.3390/math10020232

Received April 23, 2024

Revised May 8, 2024

Accepted May 13, 2024

Funding Agency: This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the project “Analytical and numerical methods of mathematical physics in problems of tomography, quantum field theory, and fluid mechanics” (state registration no. 121041300058-1).

Alexander Leonidovich Kazakov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033 Russia, e-mail: kazakov@icc.ru.

Cite this article as: A.L.Kazakov. Solutions with a zero front to the quasilinear parabolic heat equation. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 86–102.