ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 2 2024

УДК 519.853.62

УСТОЙЧИВОЕ РЕШЕНИЕ НЕРАВНОМЕРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОЙ МИНИМИЗАЦИИ ЭКСТРАГРАДИЕНТНЫМ МЕТОДОМ С ОТДЕЛЕННЫМ ОТ НУЛЯ ШАГОМ[1]

Л. А. Артемьева, А. А. Дряженков, М. М. Потапов

Рассматривается задача квадратичной минимизации в гильбертовых пространствах при наличии ограничений, заданных линейным операторным уравнением и выпуклым квадратичным неравенством. Основная особенность постановки задачи состоит в том, что практически доступные аппроксимации точных линейных операторов, задающих критерий и ограничения, сходятся к ним не по равномерной операторной норме, а лишь сильно поточечно, что делает невозможным обоснованное применение классических методов регуляризации. В работе предлагается метод регуляризации, применимый при наличии оценок погрешности приближенных операторов в парах других операторных норм, более слабых по сравнению с исходными. Для каждого из операторов пара соответствующих ему ослабленных операторных норм получается за счет усиления нормы в области его определения и ослабления нормы во множестве его значений. Ослабление операторных норм, как правило, позволяет оценить погрешности в операторах, когда это было принципиально невозможно в исходных нормах, например, при конечномерной аппроксимации некомпактного оператора. От исходной оптимизационной постановки осуществляется переход к задаче поиска седловой точки функции Лагранжа. Предлагаемый численный метод поиска седла представляет собой итерационную регуляризованную экстраградиентную двухэтапную процедуру. На каждой итерации на первом этапе уточняется приближение к оптимальному значению критерия, а на втором этапе происходит уточнение ее приближенного решения по основной переменной. По сравнению с методами, разработанными авторами ранее и работающими в подобных информационных условиях, данный метод предпочтительнее при практической реализации, поскольку не требует обязательной сходимости градиентного шага к нулю. Основным результатом работы является доказательство сильной сходимости генерируемых методом приближений к одному из точных решений исходной задачи по норме исходного пространства.

Ключевые слова: задача квадратичной минимизации, приближенные данные, численное решение, некорректная задача, регуляризация, экстраградиентный метод, функция Лагранжа, седловая точка.

L. A. Artem'eva, A. A. Dryazhenkov, M. M. Potapov. A stable solution of a nonuniformly perturbed quadratic minimization problem by the extragradient method with step size separated from zero.

A quadratic minimization problem is considered in Hilbert spaces under constraints given by a linear operator equation and a convex quadratic inequality. The main feature of the problem statement is that the practically available approximations to the exact linear operators specifying the criterion and the constraints converge to them only strongly pointwise rather than in the uniform operator norm, which makes it impossible to justify the use of the classical regularization methods. We propose a regularization method that is applicable in the presence of error estimates for approximate operators in pairs of other operator norms, which are weaker than the original ones. For each of the operators, the pair of corresponding weakened operator norms is obtained by strengthening the norm in the domain of the operator and weakening the norm in its range. The weakening of operator norms usually makes it possible to estimate errors in operators where this was fundamentally impossible in the original norms, for example, in the finite-dimensional approximation of a noncompact operator. From the original optimization formulation, a transition is made to the problem of finding a saddle point of the Lagrange function. The proposed numerical method for finding a saddle point is an iterative regularized extragradient two-stage procedure. At the first stage of each iteration, an approximation to the optimal value of the criterion is refined; at the second stage, the approximate solution with respect to the main variable is refined. Compared to methods previously developed by the authors and working under similar information conditions, this method is preferable for practical implementation, since it does not require the gradient step size to converge to zero. The main result of the work is the proof of the strong convergence of the approximations generated by the method to one of the exact solutions to the original problem in the norm of the original space.

Keywords: quadratic minimization problem, approximate data, numerical solution, ill-posed problem, regularization, extragradient method, Lagrange function, saddle point.

MSC: 65J20, 65K05, 90C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-2-7-22

[1]Статья опубликована при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

1. Введение

Рассматривается следующая задача условной минимизации квадратичного функционала:

$$J(u) = \|\mathcal{A}u - f\|_F^2 \to \min_{u \in U}, \quad U = \{u \in U_0 \mid \mathcal{B}u = g, \ \|\mathcal{Q}u - w\|_W^2 \leqslant R^2\}, \tag{1.1}$$

где $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(H \to F)$, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(H \to G)$, $\mathcal{Q} \in \mathcal{L}(H \to W)$ — заданные линейные ограниченные операторы, действующие в гильбертовых пространствах H, F, G, W. Элементы $f \in F$, $g \in G$, $w \in W$, число $R > 0$ и множество $U_0 \subset H$ также считаются заданными. Введем обозначения для нижней грани функционала и множества оптимальных решений задачи (1.1):

$$J_* = \inf_{u \in U} J(u), \quad U_* = \operatorname{Arg}\min_{u \in U} J(u) = \{u \in U \mid J(u) = J_*\}. \tag{1.2}$$

Требуется найти один из оптимальных элементов $u_* \in U_*$.

Предполагается, что вместо точных данных $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{Q}$, f, g, w, R известны лишь некоторые их приближения $\mathcal{A}_n \in \mathcal{L}(H \to F)$, $\mathcal{B}_n \in \mathcal{L}(H \to G)$, $\mathcal{Q}_n \in \mathcal{L}(H \to W)$, $f_n \in F$, $g_n \in G$, $w_n \in W$, $R_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$. Требуется построить численный метод, порождающий соответствующие элементы $u_n \in H$, которые приближаются к точному решению u_* по норме пространства H при уменьшении погрешности аппроксимации: $\|u_n - u_*\|_H \to 0$ при $n \to \infty$. Классическими предположениями об аппроксимации являются условия равномерной близости приближенных операторов к точным. Они однотипны для всех трех операторов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{Q}$, а для $\mathcal{A}$ имеют вид

$$\|\mathcal{A}_n u - \mathcal{A}u\|_F \leqslant h_n \|u\|_H \quad \forall\, u \in H, \tag{1.3}$$

где уровень погрешности $h_n > 0$ известен и является малым: $h_n \to 0$ при $n \to \infty$.

В таких предположениях для построения элемента u_n можно использовать многие классические методы регуляризации: метод регуляризации А. Н. Тихонова [1], обобщенный метод невязки [2], обобщенный принцип невязки [3], а также итерационные методы регуляризации [4], в том числе регуляризованный экстраградиентный метод [5]. Однако во многих прикладных задачах, например в задаче граничного управлениями колебаниями струны [6], получение таких оценок с уровнем погрешности $h_n \to 0$ или затруднительно, или вообще невозможно. Применение модификаций этих методов, опирающихся на индивидуальные оценки погрешности вида

$$\|\mathcal{A}_n u_* - \mathcal{A}u_*\|_F \leqslant h_n$$

на *неизвестном* оптимальном решении u_*, также затруднительно в силу того, что во многих приложениях значения $h_n \to 0$ невозможно оценить при отсутствии дополнительной информации о свойствах элемента u_*.

В данной работе мы отказываемся от классических аппроксимационных условий (1.3), заменяя их более слабыми требованиями, для описания которых нам понадобятся вспомогательные гильбертовы пространства H^-, F^+, G^+, W^+, связанные с исходными пространствами непрерывными всюду плотными вложениями $H^- \subset H$, $F \subset F^+$, $G \subset G^+$, $W \subset W^+$. Будем предполагать, что *известны* уровни погрешностей h_n^-, h_n^+, σ_n, σ_n^+ в оценках

$$\|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(H^- \to F)} \leqslant h_n^-, \quad \|\mathcal{B}_n - \mathcal{B}\|_{\mathcal{L}(H^- \to G)} \leqslant h_n^-, \quad \|\mathcal{Q}_n - \mathcal{Q}\|_{\mathcal{L}(H^- \to W)} \leqslant h_n^-, \tag{1.4}$$

$$\|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(H \to F^+)} \leqslant h_n^+, \quad \|\mathcal{B}_n - \mathcal{B}\|_{\mathcal{L}(H \to G^+)} \leqslant h_n^+, \quad \|\mathcal{Q}_n - \mathcal{Q}\|_{\mathcal{L}(H \to W^+)} \leqslant h_n^+, \tag{1.5}$$

$$\|f_n - f\|_F \leqslant \sigma_n, \quad \|g_n - g\|_G \leqslant \sigma_n, \quad \|w_n - w\|_W \leqslant \sigma_n, \quad |R_n - R| \leqslant \sigma_n, \tag{1.6}$$

$$\|f_n - f\|_{F^+} \leqslant \sigma_n^+, \quad \|g_n - g\|_{G^+} \leqslant \sigma_n^+, \quad \|w_n - w\|_{W^+} \leqslant \sigma_n^+, \tag{1.7}$$

такие что $h_n^-, h_n^+, \sigma_n, \sigma_n^+ \to 0$ при $n \to \infty$. По сравнению с (1.3) в оценках (1.4), (1.5) операторные нормы являются более слабыми, что существенно расширяет класс возможных приложений предлагаемого ниже метода.

Ранее авторами был предложен ряд методов регуляризации, вырабатывающих устойчивые приближения к искомому решению u_* в информационных условиях (1.4)–(1.7). Из них идеологически наиболее близким к данной работе является метод, предложенный в работе [7], где также осуществлялся переход от исходной оптимизационной постановки к задаче поиска седловой точки функции Лагранжа, которая решалась регуляризованным градиентным методом, а одним из условий его сходимости было требование стремления градиентного шага к нулю. В предлагаемом здесь регуляризованном методе экстраградиентного типа это требование снято, что, на наш взгляд, позволяет считать его более подходящим для практического применения.

Изложение материала организовано следующим образом. Во втором разделе описан сам метод, в третьем приведены требования к исходным данным задачи и сформулированы основные теоремы сходимости, в четвертом сформулированы и доказаны вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства основных теорем, а в пятом разделе приведены доказательства этих теорем.

2. Описание метода

Введем обозначения для вспомогательных пространств и множеств:

$$\begin{gathered} V^- = H^- \times G \times \mathbb{R}, \quad V^+ = H \times F \times W \times G^+ \times \mathbb{R}^2, \\ U_0^- = U_0 \cap H^- \subset H^-, \; V_0^- = U_0^- \times G \times \mathbb{R}_+ \subset V^-, \; V_0^+ = U_0 \times F \times W \times G^+ \times \mathbb{R}_+^2 \subset V^+, \end{gathered} \tag{2.1}$$

где $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Через $\mathcal{P}_{V_0^-}$ и $\mathcal{P}_{V_0^+}$ будем обозначать операторы метрического проектирования на множества V_0^- и V_0^+ в пространствах V^- и V^+ соответственно. На первом этапе будет использоваться регуляризованная по Тихонову в пространстве V^- приближенная функция Лагранжа задачи (1.1)

$$\begin{aligned} t_n^-(v^-) = \|\mathcal{A}_n u - f_n\|_F^2 + \langle \lambda, \mathcal{B}_n u - g_n \rangle_G + \mu \left(\|\mathcal{Q}_n u - w_n\|_W^2 - R_n^2 \right) \\ + \alpha_n^- \|u\|_{H^-}^2 - \alpha_n^- \|(\lambda, \mu)\|_{G \times \mathbb{R}}^2, \quad v^- = (u, \lambda, \mu) \in V^-. \end{aligned} \tag{2.2}$$

На втором этапе будет задействован функционал

$$\begin{aligned} t_n^+(v^+) = \|\mathcal{A}_n u - f_n - \psi\|_{F^+}^2 + \|\mathcal{Q}_n u - w_n - \varphi\|_{W^+}^2 \\ + \langle \lambda, \mathcal{B}_n u - g_n \rangle_{G^+} + \mu_1 \left(\|\psi\|_F^2 - d_n^2 \right) + \mu_2 \left(\|\varphi\|_W^2 - R_n^2 \right) \\ + \alpha_n^+ \|(u, \psi, \varphi)\|_{H \times F \times W}^2 - \alpha_n^+ \|(\lambda, \mu_1, \mu_2)\|_{G^+ \times \mathbb{R}^2}^2, \quad v^+ = (u, \psi, \varphi, \lambda, \mu_1, \mu_2) \in V^+, \end{aligned} \tag{2.3}$$

в котором числовая последовательность $d_n \in \mathbb{R}$ формируется в процессе вычислений. Функционал $t_n^+(v^+)$ представляет собой регуляризованную по Тихонову в пространстве V^+ функцию Лагранжа вспомогательной задачи минимизации, которая будет поставлена ниже. Введем также и обозначения для векторов, отличающихся от градиентов функционалов (2.2), (2.3) лишь знаками при последних компонентах:

$$\begin{gathered} \nabla_{\pm} t_n^-(v^-) = \Big(\frac{\partial t_n^-(v^-)}{\partial u}, -\frac{\partial t_n^-(v^-)}{\partial \lambda}, -\frac{\partial t_n^-(v^-)}{\partial \mu} \Big) \in V^-, \\ \nabla_{\pm} t_n^+(v^+) = \Big(\frac{\partial t_n^+(v^+)}{\partial u}, \frac{\partial t_n^+(v^+)}{\partial \psi}, \frac{\partial t_n^+(v^+)}{\partial \varphi}, -\frac{\partial t_n^+(v^+)}{\partial \lambda}, -\frac{\partial t_n^+(v^+)}{\partial \mu_1}, -\frac{\partial t_n^+(v^+)}{\partial \mu_2} \Big) \in V^+. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Метод представляет собой двухэтапный итерационный процесс построения последовательностей элементов $v_n^- \in V_0^-$, $\overline{v}_n^- \in V_0^-$, $v_n^+ \in V_0^+$, $\overline{v}_n^+ \in V_0^+$, $d_n \in \mathbb{R}_+$. Для его запуска требуется задать параметры регуляризации α_n^-, α_n^+, $n = 0, 1, 2, \ldots$, шаги метода β_n^-, β_n^+, $n = 0, 1, 2, \ldots$, значения $M > 0$, $\varepsilon_n > 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и выбрать начальные приближения $v_0^- \in V_0^-$ и $v_0^+ \in V_0^+$.

На *первом* этапе процесса уточняются приближения к нижней грани функционала J_* из (1.2). Для этого сначала по пересчетным формулам экстраградиентного метода [5] с шагом $\beta_n^- > 0$ вычисляются элементы

$$\overline{v}_n^{\,-} = \mathcal{P}_{V_0^-}\left(v_n^- - \beta_n^- \nabla_{\pm} t_n^-(v_n^-)\right), \quad v_{n+1}^- = \mathcal{P}_{V_0^-}\left(v_n^- - \beta_n^- \nabla_{\pm} t_n^-(\overline{v}_n^{\,-})\right). \tag{2.5}$$

Первое из равенств в (2.5) называют прогнозным шагом, а второе — основным шагом. Вслед за этим вычисляется значение $m_n > 0$ по формуле

$$\begin{aligned} m_n^2 = {}&\left(\|\mathcal{A}_n u_n^- - f_n\|_F + h_n^- \|u_n^-\|_{H^-} + \sigma_n\right)^2 + M\left(\|\mathcal{B}_n u_n^- - g_n\|_G + h_n^- \|u_n^-\|_{H^-} + \sigma_n\right) \\ &+ M \max\left\{0,\ \left(\|\mathcal{Q}_n u_n^- - w_n\|_W + h_n^- \|u_n^-\|_{H^-} + \sigma_n\right)^2 - \left(\max(0, R_n - \sigma_n)\right)^2\right\}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где $u_n^- \in H^-$ — первая компонента элемента $v_n^- \in V^-$. Первый этап завершается вычислением $d_n > 0$ по правилам

$$d_0 = m_0, \quad d_{n+1}^2 = d_n^2 + \operatorname{sign}\left(m_{n+1}^2 - d_n^2\right) \min\left\{\varepsilon_n,\ \left|m_{n+1}^2 - d_n^2\right|\right\}. \tag{2.7}$$

Значение $d_n^2 > 0$ будет служить приближением к оптимальному значению функционала J_*.

На *втором* этапе происходит уточнение приближения к оптимальному решению $u_* \in U_*$. Для этого по экстраградиентной процедуре в пространстве V^+ с шагом $\beta_n^+ > 0$ вычисляются элементы

$$\overline{v}_n^{\,+} = \mathcal{P}_{V_0^+}\left(v_n^+ - \beta_n^+ \nabla_{\pm} t_n^+(v_n^+)\right), \quad v_{n+1}^+ = \mathcal{P}_{V_0^+}\left(v_n^+ - \beta_n^+ \nabla_{\pm} t_n^+(\overline{v}_n^{\,+})\right), \tag{2.8}$$

а основным результатом второго этапа — приближением к u_* — объявляется первая компонента $u_{n+1}^+ \in H$ элемента $v_{n+1}^+ \in V^+$.

3. Предположения и основные результаты

Сходимость метода будет доказана в следующих предположениях об исходных данных задачи и параметрах.

А1. Функция Лагранжа

$$L(u; \lambda, \mu) = \|\mathcal{A}u - f\|_F^2 + \langle \lambda, \mathcal{B}u - g\rangle_G + \mu\left(\|\mathcal{Q}u - w\|_W^2 - R^2\right) \tag{3.1}$$

исходной задачи (1.1) имеет на множестве $U_0 \times G \times \mathbb{R}_+$ седловую точку $(u_\star, \lambda_\star, \mu_\star)$, и известна задействованная в (2.6) постоянная $M > 0$ из оценки

$$\|(\lambda_\star, \mu_\star)\|_{G\times\mathbb{R}}^2 = \|\lambda_\star\|_G^2 + \mu_\star^2 \leqslant M^2.$$

А2. Множество U_0 является выпуклым и замкнутым в H, множество U_0^- из (2.1) замкнуто в пространстве H^-, U_0^- плотно в U_0 по норме пространства H.

А3. Во множестве U по норме пространства H плотно множество таких точек $u_0 \in U$, для которых эллипсоидальное ограничение выполняется строго: $\|\mathcal{Q}u_0 - w\|_W < R$, и, кроме того, $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, C_\varepsilon > 0 : \forall\, h \in H$ существует точка $\widehat{u} = \widehat{u}(\varepsilon, h) \in U_0^-$ со свойствами

$$\|\widehat{u} - u_0\|_H \leqslant \varepsilon, \quad \|\widehat{u}\|_{H^-} \leqslant C_\varepsilon, \quad \langle h, \widehat{u} - u_0\rangle_H \leqslant 0.$$

А4. Выполнены аппроксимационные предположения (1.4)–(1.7).

А5. Параметры $\alpha_n^\pm > 0, \beta_n^\pm > 0, \varepsilon_n > 0$ при $n \to \infty$ обладают асимптотическими свойствами

$$\begin{gathered} \alpha_n^- \to 0, \quad \frac{h_n^-}{(\alpha_n^-)^{3/2}} \to 0, \quad \frac{\sigma_n}{\alpha_n^-} \to 0, \quad \frac{|\alpha_{n+1}^- - \alpha_n^-|}{(\alpha_n^-)^{5/2}\beta_n^-} \to 0, \\ \varepsilon_n \to 0, \quad \alpha_n^+ \to 0, \quad \frac{h_n^+ + \sigma_n^+ + \sigma_n}{\alpha_n^+} \to 0, \quad \frac{|\alpha_{n+1}^+ - \alpha_n^+|}{(\alpha_n^+)^2\beta_n^+} \to 0, \quad \frac{\varepsilon_n}{(\alpha_n^+)^2\beta_n^+} \to 0. \end{gathered} \tag{3.2}$$

A6. Последовательности β_n^- и β_n^+ являются ограниченными, и начиная с некоторого номера N выполнены неравенства

$$\beta_n^- K_n^-(v_n^-, \overline{v}_n^{\,-}) \leqslant \frac{1}{2}, \quad \beta_n^+ K_n^+(v_n^+, \overline{v}_n^{\,+}) \leqslant \frac{1}{2}, \quad n = N, N+1, \ldots, \tag{3.3}$$

где выражения для $K_n^-(v_1, v_2)$ и $K_n^+(v_1, v_2)$ выписаны явно ниже в (4.19), (4.26).

A7. Следующие ряды расходятся:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^- \beta_n^- = +\infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^+ \beta_n^+ = +\infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n = +\infty. \tag{3.4}$$

З а м е ч а н и е 1. Условие A3, являющееся наименее стандартным из приведенных требований A1–A7, заведомо выполняется, если принять предположения о плотности множества $U \cap H^-$ в U по норме пространства H и о существовании слейтеровой точки $u_0 \in U$: $\|\mathcal{Q}u_0 - w\|_W < R$, как это было сделано авторами в [7]. Из приведенных в следующем разделе доказательств лемм 1 и 2 видно, что условие A3 можно ослабить, например, такими способами:

1. Вместо плотности Q в U, где Q — множество точек $u_0 \in U$, описанное в предположении A3, можно потребовать плотность $\mathcal{A}Q$ в $\mathcal{A}U$ по норме пространства F.
2. Требование $\forall\, h \in H \quad \langle h, \widehat{u} - u_0 \rangle_H \leqslant 0$ можно заменить условием $\forall\, u \in U_0^- \quad \langle \mathcal{B}u - g, \mathcal{B}\widehat{u} - g \rangle_H \leqslant 0$.

Основными результатами работы являются следующие теоремы о сходимости метода.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* A1–A7. *Тогда определенная в* (2.7) *числовая последовательность d_n обладает следующими свойствами*:

1. $d_n^2 \geqslant J_* \quad \forall\, n = 0, 1, 2, \ldots$.
2. $\lim\limits_{n \to \infty} d_n^2 = J_*$.
3. $\left| d_{n+1}^2 - d_n^2 \right| \leqslant \varepsilon_n \quad \forall\, n = 0, 1, 2, \ldots$.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения* A1–A7 *и $u_* \in U_*$ — оптимальное решение задачи* (1.1), *обладающее экстремальным свойством*

$$u_* = \arg\min_{u \in U_*} \left(\|u\|_H^2 + \|\mathcal{Q}u - w\|_W^2 \right). \tag{3.5}$$

Тогда к этому решению сходятся первые компоненты u_n^+ элементов v_n^+ из (2.8):

$$\|u_n^+ - u_*\|_H \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Анонсированный нами важный результат о снятии обязательного требования стремления к нулю шагов β_n^-, β_n^+ в (2.5), (2.8) содержит

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения* A1–A7. *Тогда последовательности чисел $K_n^-(v_n^-, \overline{v}_n^{\,-})$, $K_n^+(v_n^+, \overline{v}_n^{\,+})$ из условия* A6 *являются ограниченными.*

З а м е ч а н и е 2. Коснемся вопроса выбора шага β_n^-. Искать его можно, например, исходя из уравнения

$$\beta_n^- \big(K_n^-(v_n^-, \overline{v}_n^{\,-}) + C \big) = \frac{1}{2}, \tag{3.6}$$

где $C > 0$ — некоторая положительная константа, например, $C = 1$. Ясно, что если оно выполнено, то будет выполнено первое неравенство из (3.3) одновременно с неравенством $\beta_n^- \leqslant 1/(2C)$, обеспечивающим ограниченность β_n^-. Уравнение (3.6) является довольно сложным в силу зависимости $\overline{v}_n^{\,-}$ от β_n^-, но все же при каждом фиксированном n имеет решение, поскольку левая часть (3.6) непрерывно зависит от β_n^-, стремится к нулю при $\beta_n^- \to 0$ и стремится к $+\infty$ при $\beta_n^- \to +\infty$. Аналогичным образом можно выбирать и шаг β_n^+. Тогда согласно теореме 3 оба эти шага не будут сходиться к нулю при $n \to \infty$.

4. Вспомогательные утверждения

Первая группа вспомогательных утверждений связана с седловой точкой регуляризованной по Тихонову в пространстве V^- функции Лагранжа исходной задачи (1.1) с точными данными:

$$T_n^-(v^-) = \|\mathcal{A}u - f\|_F^2 + \langle \lambda, \mathcal{B}u - g\rangle_G + \mu\left(\|\mathcal{Q}u - w\|_W^2 - R^2\right) + \alpha_n^-\|u\|_{H^-}^2 - \alpha_n^-\|(\lambda,\mu)\|_{G\times\mathbb{R}}^2, \quad (4.1)$$

где α_n^- — коэффициент регуляризации первого этапа метода. Поскольку $\alpha_n^- > 0$, функция $T_n^-(v^-)$ для каждого n на замкнутом в силу предположения A2 множестве V_0^- имеет единственную ([8], с. 179, предложение 2.2) седловую точку $v_{*n}^- = (u_{*n}, \lambda_n^*, \mu_n^*) \in V_0^-$

$$T_n^-(u_{*n}, \lambda, \mu) \leqslant T_n^-(u_{*n}, \lambda_n^*, \mu_n^*) \leqslant T_n^-(u, \lambda_n^*, \mu_n^*) \quad \forall\, u \in U_0^-, \quad \forall\, \lambda \in G, \quad \forall\, \mu \geqslant 0. \quad (4.2)$$

Заметим, что исходная нерегуляризованная функция Лагранжа (3.1) на множестве V_0^- с более сильной, чем в исходных пространствах топологией седловой точки может и не иметь, поэтому сходимость последовательности точек v_{*n}^- не гарантирована. Для анализа свойств этой последовательности докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть выполнены предположения* A2, A3, $\alpha_n^- \to 0$ *при* $n \to \infty$, *а* $u_0 \in U_0$ *— произвольная точка, удовлетворяющая всем соотношениям из условия* A3. *Тогда существует последовательность точек* $\overline{u}_n \in U_0^-$ *такая, что*

$$\|\overline{u}_n - u_0\|_H \to 0, \quad \alpha_n^-\|\overline{u}_n\|_{H^-}^2 \to 0, \quad \langle \lambda_n^*, \mathcal{B}\overline{u}_n - \mathcal{B}u_0\rangle_G \leqslant 0, \quad \|\mathcal{Q}\overline{u}_n - w\|_W \leqslant R - \overline{\varepsilon}, \quad (4.3)$$

где константа $\overline{\varepsilon} > 0$ *не зависит от номера* n.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\overline{\varepsilon} = (R - \|\mathcal{Q}u_0 - w\|_W)/2 > 0$ и пусть $\varepsilon_0 = \overline{\varepsilon}/\|\mathcal{Q}\|_{\mathcal{L}(H\to W)}$ (если $\|\mathcal{Q}\|_{\mathcal{L}(H\to W)} = 0$, можно взять $\varepsilon_0 = 1$). Тогда для $\varepsilon = \varepsilon_0$ и $h = \mathcal{B}^*\lambda_n^* \in H$ в силу предположения A3 существуют константа $C_1 = C_\varepsilon|_{\varepsilon=\varepsilon_0} > 0$ и элемент $u_1 = \widehat{u}(\varepsilon_0, h) \in U_0^-$, для которых выполнены все три неравенства, представленных в A3. Поскольку последовательность $\alpha_n^- \to 0$ и является ограниченной, то существует константа $\overline{C} > 0$ такая, что $\alpha_n^- \leqslant \overline{C}^3/C_1^3$. Далее рассмотрим вспомогательную задачу минимизации

$$\begin{gathered} \|u - u_0\|_H^2 \to \min_{u\in M_n}, \\ M_n = \left\{u \in U_0^- \mid \langle \mathcal{B}^*\lambda_n^*, u - u_0\rangle_H \leqslant 0,\ \|u\|_{H^-} \leqslant \overline{C}/\sqrt[3]{\alpha_n^-},\ \|\mathcal{Q}u - w\|_W \leqslant R - \overline{\varepsilon}\right\}, \end{gathered} \quad (4.4)$$

где u_0 — элемент из предположения A3.

Заметим, что множество M_n непусто и содержит элемент u_1. Действительно, первое из трех неравенств в (4.4) для u_1 выполняется в силу A3. Второе неравенство из (4.4) следует из цепочки оценок

$$\|u_1\|_{H^-} \leqslant C_1 \leqslant \overline{C}/\sqrt[3]{\alpha_n^-}, \quad (4.5)$$

в которой первое звено взято из A3, а второе — из записанного выше условия ограниченности последовательности α_n^-. Последнее, третье, неравенство в (4.4) получается, если взять из A3 оценку $\|u_1 - u_0\|_H \leqslant \varepsilon_0$ и воспользоваться неравенством треугольника

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Q}u_1 - w\|_W &\leqslant \|\mathcal{Q}u_0 - w\|_W + \|\mathcal{Q}\|_{\mathcal{L}(H\to W)}\|u_1 - u_0\|_H \leqslant \|\mathcal{Q}u_0 - w\|_W + \varepsilon_0\|\mathcal{Q}\|_{\mathcal{L}(H\to W)} \\ &\leqslant \|\mathcal{Q}u_0 - w\|_W + \overline{\varepsilon} = (R - 2\overline{\varepsilon}) + \overline{\varepsilon} = R - \overline{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Множество M_n является выпуклым в силу выпуклости множества U_0, затребованной в предположении A2, и выпуклости остальных определяющих его ограничений. Замкнутость множества M_n в пространстве H^- следует из замкнутости в этом пространстве множества U_0^-, непрерывности вложения $H^- \subset H$ и замкнутости в H^- шара $\left\{\|u\|_{H^-} \leqslant \overline{C}/\sqrt[3]{\alpha_n^-}\right\}$. Из-за наличия этого шарового ограничения множество M_n будет также и ограниченным в пространстве H^-, а значит, и слабо компактным в H^-. При этом функционал $\|u-u_0\|_H^2$ в задаче (4.4) является выпуклым и непрерывным, т. е. слабо полунепрерывным снизу в пространстве H^- и, следовательно, достигает на множестве M_n своей нижней грани в некоторой точке $\overline{u}_n$ ([9], с. 648, теорема 8).

Покажем, что последовательность $\overline{u}_n$ является искомой. Понятно, что второе, третье и четвертое соотношения из (4.3) выполнены по построению множества M_n и потому, что $\alpha_n^- \to 0$. Для доказательства предельного соотношения $\|\overline{u}_n - u_0\|_H \to 0$ снова воспользуемся предположением А3, взяв вектор $h = \mathcal{B}^*\lambda_n^*$ и на этот раз уже произвольное $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Для них найдутся константа $C_\varepsilon > 0$ и элемент $\widehat{u}_\varepsilon \in U_0^-$ такие, что будут выполнены все три неравенства из А3. В силу бесконечной малости последовательности $\{\alpha_n^-\}$ получим, что для достаточно больших номеров $n \geqslant N(\varepsilon)$ будет выполнено неравенство $\alpha_n^- \leqslant \overline{C}^3/C_\varepsilon^3$. С использованием этого неравенства и предположения А3 аналогично (4.5), (4.6) получаем, что $\widehat{u}_\varepsilon \in M_n$. Тогда, пользуясь первой оценкой из А3 и тем, что $\overline{u}_n$ — решение задачи (4.4), получим цепочку неравенств

$$\|\overline{u}_n - u_0\|_H \leqslant \|\widehat{u}_\varepsilon - u_0\|_H \leqslant \varepsilon \quad \forall\, n \geqslant N(\varepsilon).$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем желаемую сходимость $\|\overline{u}_n - u_0\|_H \to 0$. □

В следующем утверждении приводятся некоторые свойства последовательности седловых точек v_{*n}^-.

Лемма 2. *Пусть выполнены предположения* А2, А3. *Тогда*

1. *Последовательность множителей Лагранжа μ_n^* ограничена:* $\exists\, C_\mu > 0\colon \mu_n^* \leqslant C_\mu \quad \forall\, n$.
2. *Если последовательность α_n^- ограничена, то выполняется следующее свойство ограниченности:*
$$\exists\, C_* > 0\colon \alpha_n^- \|v_{*n}^-\|_{V^-}^2 \leqslant C_* \quad \forall\, n. \tag{4.7}$$
3. *Если $\alpha_n^- \to 0$ при $n \to \infty$, то имеют место предельные соотношения*
$$\varlimsup_{n\to\infty} \|\mathcal{A}u_{*n} - f\|_F^2 \leqslant J_*, \quad \lim_{n\to\infty} \|\mathcal{B}u_{*n} - g\|_G = 0, \quad \varlimsup_{n\to\infty} \|\mathcal{Q}u_{*n} - w\|_W^2 \leqslant R^2. \tag{4.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие максимума функции Тихонова $T_n^-(v^-)$ по $\lambda \in G$ может быть записано в форме условия стационарности

$$\mathcal{B}u_{*n} - g - 2\alpha_n^- \lambda_n^* = 0. \tag{4.9}$$

С учетом квадратичной зависимости той же функции от скалярной переменной μ из условия ее максимума в точке μ_n^* на неотрицательной полуоси находим

$$\begin{gathered} \mu_n^* = 0 \ \text{ при } \ \|\mathcal{Q}u_{*n} - w\|_W^2 \leqslant R^2; \\ \mu_n^* = \left(\|\mathcal{Q}u_{*n} - w\|_W^2 - R^2\right)/2\alpha_n^- \ \text{ при } \ \|\mathcal{Q}u_{*n} - w\|_W^2 > R^2, \end{gathered} \tag{4.10}$$

откуда следует соотношение

$$2\alpha_n^- \left(\mu_n^*\right)^2 = \mu_n^* \left(\|\mathcal{Q}u_{*n} - w\|_W^2 - R^2\right). \tag{4.11}$$

С использованием равенств (4.9), (4.11) значение функции Тихонова (4.1) в седловой точке v_{*n}^- записывается в виде

$$T_n^-(v_{*n}^-) = T_n^-(u_{*n}, \lambda_n^*, \mu_n^*) = \|\mathcal{A}u_{*n} - f\|_F^2 + \alpha_n^- \|v_{*n}^-\|_{V^-}^2. \tag{4.12}$$

Первое утверждение леммы 2 об ограниченности последовательности μ_n^* заявлено для любой последовательности $\alpha_n^- > 0$, поэтому в ней могут содержаться подпоследовательности, отделенные от нуля, и подпоследовательности, сходящиеся к нулю. Для подпоследовательностей $\alpha_{n_m}^- \to 0$ в качестве $\overline{u}_{n_m}$ возьмем последовательность точек из леммы 1, соответствующую произвольной точке u_0, удовлетворяющей А3. Для подпоследовательностей, отделенных от нуля: $\alpha_{n_m}^- \geqslant \alpha_0 > 0$, формально обозначим $\overline{u}_{n_m} = u_1$, где u_1 — точка из доказательства леммы 1. Отметим, что в силу принадлежности $u_1 \in M_n$ для $\overline{u}_{n_m} = u_1$ выполнены два последние соотношения из (4.3). Для сокращения записи подпоследовательность $\overline{u}_{n_m}$ будем обозначать просто $\overline{u}_n$. Воспользуемся для $u = \overline{u}_n$ правым седловым неравенством из (4.2) и (4.12):

$$\begin{gathered}\|\mathcal{A}u_{*n} - f\|_F^2 + \alpha_n^- \|v_{*n}^-\|_{V^-}^2 \leqslant \|\mathcal{A}\overline{u}_n - f\|_F^2 \\ + \langle \lambda_n^*, \mathcal{B}\overline{u}_n - g\rangle_G + \mu_n^* \left(\|\mathcal{Q}\overline{u}_n - w\|_W^2 - R^2\right) + \alpha_n^- \|\overline{u}_n\|_{H^-}^2 - \alpha_n^- \|\lambda_n^*\|_G^2 - \alpha_n^- \left(\mu_n^*\right)^2 .\end{gathered}$$

Учтем равенство $\mathcal{B}u_0 = g$ из предположения А3 и последнее соотношение из (4.3):

$$\begin{gathered}\|\mathcal{A}u_{*n} - f\|_F^2 + \alpha_n^- \|v_{*n}^-\|_{V^-}^2 \leqslant \|\mathcal{A}\overline{u}_n - f\|_F^2 + \langle \lambda_n^*, \mathcal{B}\overline{u}_n - \mathcal{B}u_0\rangle_G \\ + \big((R-\overline{\varepsilon})^2 - R^2\big)\mu_n^* + \alpha_n^- \|\overline{u}_n\|_{H^-}^2 - \alpha_n^- \|\lambda_n^*\|_G^2 - \alpha_n^- \left(\mu_n^*\right)^2 .\end{gathered} \tag{4.13}$$

Поскольку $R > \overline{\varepsilon}$, то $(R-\overline{\varepsilon})^2 - R^2 = -\overline{\varepsilon}(2R-\overline{\varepsilon}) \leqslant -R\overline{\varepsilon}$, а тогда согласно третьему соотношению из (4.3) с учетом (4.13) следует, что

$$\|\mathcal{A}u_{*n} - f\|_F^2 + \alpha_n^- \|v_{*n}^-\|_{V^-}^2 + \alpha_n^- \left(\mu_n^*\right)^2 + R\overline{\varepsilon}\mu_n^* \leqslant \|\mathcal{A}\overline{u}_n - f\|_F^2 + \alpha_n^- \|\overline{u}_n\|_{H^-}^2. \tag{4.14}$$

Оценивая снизу первое слагаемое в левой части (4.14) нулем, а второе — величиной $\alpha_n^- \left(\mu_n^*\right)^2$, решая получающееся квадратичное неравенство относительно μ_n^* и используя априорное ограничение $\mu_n^* \geqslant 0$, после преобразований иррациональностей получим итоговую оценку

$$\begin{aligned}\mu_n^* &\leqslant \frac{2\|\mathcal{A}\overline{u}_n - f\|_F^2 + 2\alpha_n^- \|\overline{u}_n\|_{H^-}^2}{R\overline{\varepsilon} + \sqrt{R^2\overline{\varepsilon}^2 + 8\alpha_n^-\left(\|\mathcal{A}\overline{u}_n - f\|_F^2 + \alpha_n^- \|\overline{u}_n\|_{H^-}^2\right)}} \\ &\leqslant \frac{\|\mathcal{A}\overline{u}_n - f\|_F^2}{R\overline{\varepsilon}} + \min\Big(\frac{\alpha_n^- \|\overline{u}_n\|_{H^-}^2}{R\overline{\varepsilon}}, \|\overline{u}_n\|_{H^-}\Big).\end{aligned} \tag{4.15}$$

Для тех номеров n, которым соответствует подпоследовательность $\alpha_n^- \to 0$, в силу леммы 1 имеем сходимость $\|\mathcal{A}\overline{u}_n - f\|_F^2 \to \|\mathcal{A}u_0 - f\|_F^2$ при $n \to \infty$, что вместе со вторым соотношением из (4.3) означает ограниченность мажоранты в (4.15). Если же брать номера n, которым отвечает отделенная от нуля подпоследовательность α_n^-, то после подстановки $\overline{u}_n = u_1$ в правую часть (4.15) также получаем ее ограниченность не зависящей от n величиной. Таким образом, ограниченность всей последовательности множителей μ_n^* установлена.

Второе утверждение леммы получается аналогичным образом после загрубления левой части (4.14) снизу ее вторым слагаемым. Ограниченность α_n^- нужна при этом для доказательства ограниченности второго слагаемого из правой части (4.14) на подпоследовательностях таких номеров n, для которых соответствующие α_n^- отделены от нуля.

Для доказательства третьего утверждения леммы загрубим левую часть (4.14) снизу первым ее слагаемым и перейдем к верхнему пределу в получившейся оценке, используя непрерывность оператора $\mathcal{A}$ и первые два соотношения из (4.3):

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|\mathcal{A}u_{*n} - f\|_F^2 \leqslant \|\mathcal{A}u_0 - f\|_F^2. \tag{4.16}$$

Учитывая затребованную в предположении А3 плотность точек u_0 во множестве U, получим, что неравенство (4.16) справедливо и при замене точки u_0 на точку $u_* \in U_*$, что завершает доказательство первого соотношения из (4.8).

Для доказательства второго и третьего соотношений из (4.8) достаточно перейти к пределу в равенстве (4.9) и к верхнему пределу в (4.10), учитывая при этом оценку (4.7). $\square$

В следующей группе вспомогательных утверждений устанавливаются некоторые свойства производных точной и приближенной функций Лагранжа задачи (1.1) с переменной u из пространства H^-, которые нам понадобятся для доказательства сходимости метода. Эти функции Лагранжа имеют вид

$$L^-(v^-) = \|\mathcal{A}u - f\|_F^2 + \langle \lambda, \mathcal{B}u - g\rangle_G + \mu\left(\|\mathcal{Q}u - w\|_W^2 - R^2\right),$$

$$L_n^-(v^-) = \|\mathcal{A}_n u - f_n\|_F^2 + \langle \lambda, \mathcal{B}_n u - g_n\rangle_G + \mu\left(\|\mathcal{Q}_n u - w_n\|_W^2 - R_n^2\right). \tag{4.17}$$

Появляющийся ниже оператор дифференцирования $\nabla_\pm$ определяется аналогично (2.4).

Лемма 3. *Функция $\nabla_\pm L_n^-(v^-)$ является липшицевой:*

$$\left\|\nabla_\pm L_n^-(v_1^-) - \nabla_\pm L_n^-(v_2^-)\right\|_{V^-} \leqslant K_n^-(v_1^-, v_2^-)\left\|v_1^- - v_2^-\right\|_{V^-} \quad \forall\, v_1^-, v_2^- \in V_0^-, \tag{4.18}$$

с константой $K_n^-(v_1^-, v_2^-) = \sqrt{A_n^2 + B_n^2 + C_n^2}$, где $v_k^- = (u_k, \lambda_k, \mu_k)$, $k = 1, 2$,

$$\begin{gathered} A_n = 2\|\mathcal{A}_n\|^2_{\mathcal{L}(H^-\to F)} + \|\mathcal{B}_n\|_{\mathcal{L}(H^-\to G)} + 2\mu_2\|\mathcal{Q}_n\|^2_{\mathcal{L}(H^-\to W)} \\ + \|\mathcal{Q}_n\|_{\mathcal{L}(H^-\to W)}\|\mathcal{Q}_n u_1 - w_n\|_W + \|\mathcal{Q}_n\|_{\mathcal{L}(H^-\to W)}\|\mathcal{Q}_n u_2 - w_n\|_W, \\ B_n = \|\mathcal{B}_n\|_{\mathcal{L}(H^-\to G)}, \quad C_n = 2\|\mathcal{Q}_n\|_{\mathcal{L}(H^-\to W)}\|\mathcal{Q}_n u_1 - w_n\|_W. \end{gathered} \tag{4.19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцирование функции (4.17) в V^- выполняется явно:

$$\nabla_\pm L_n^-(v^-) = \Big(2\mathcal{A}_n^*(\mathcal{A}_n u - f_n) + \mathcal{B}_n^*\lambda + 2\mu\mathcal{Q}_n^*(\mathcal{Q}_n u - w_n),\ -\mathcal{B}_n u + g_n,\ -\|\mathcal{Q}_n u - w_n\|_W^2 + R_n^2\Big). \tag{4.20}$$

Используя это выражение, числовое неравенство $\sqrt{a^2+b^2+c^2} \leqslant |a| + |b| + |c|$, неравенство треугольника, неравенство $\|\mathcal{A}x\| \leqslant \|\mathcal{A}\|\|x\|$ и равенства $\|\mathcal{A}^*\| = \|\mathcal{A}\|$, $\|a\|^2 - \|b\|^2 = \langle a-b, a+b\rangle$, получаем

$$\begin{gathered} \left\|\nabla_\pm L_n^-(v_1^-) - \nabla_\pm L_n^-(v_2^-)\right\|_{V^-} \leqslant (2\|\mathcal{A}_n\|^2 + \|\mathcal{B}_n\|)\|u_1 - u_2\|_{H^-} + \|\mathcal{B}_n\|\|\lambda_1 - \lambda_2\|_G \\ + 2|\mu_1 - \mu_2| \cdot \|\mathcal{Q}_n^*(\mathcal{Q}_n u_1 - w_n)\|_{H^-} + 2\mu_2\|\mathcal{Q}_n^*\mathcal{Q}_n(u_1 - u_2)\|_{H^-} \\ + |\langle \mathcal{Q}_n(u_2 - u_1), (\mathcal{Q}_n u_1 - w_n) + (\mathcal{Q}_n u_2 - w_n)\rangle_W|, \end{gathered}$$

где все операторные нормы берутся в ослабленных пространствах: $\mathcal{L}(H^-\to F)$, $\mathcal{L}(H^-\to G)$, $\mathcal{L}(H^-\to W)$. Используя неравенство Коши — Буняковского в W, получаем

$$\left\|\nabla_\pm L_n^-(v_1^-) - \nabla_\pm L_n^-(v_2^-)\right\|_{V^-} \leqslant A_n\|u_1 - u_2\|_{H^-} + B_n\|\lambda_1 - \lambda_2\|_G + C_n|\mu_1 - \mu_2|. \tag{4.21}$$

Применяя к правой части (4.21) неравенство Коши — Буняковского в $\mathbb{R}^3$, получаем заявленную оценку (4.18). □

Лемма 4. *Оператор дифференцирования $\nabla_\pm L_n^-(v^-)$ является монотонным:*

$$\langle \nabla_\pm L_n^-(v_1^-) - \nabla_\pm L_n^-(v_2^-), v_1^- - v_2^-\rangle_{V^-} \geqslant 0 \quad \forall\, v_1^-, v_2^- \in V_0^-. \tag{4.22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя явный вид производных (4.20), после несложных преобразований левую часть (4.22) можно представить в виде $\langle \nabla_\pm L_n^-(v_1^-) - \nabla_\pm L_n^-(v_2^-), v_1^- - v_2^-\rangle_{V^-} = 2\|\mathcal{A}_n(u_1 - u_2)\|_F^2 + (\mu_1 + \mu_2)\|\mathcal{Q}_n(u_1 - u_2)\|_W^2$, из которого в силу того, что $\mu_1 \geqslant 0$, $\mu_2 \geqslant 0$, следует свойство (4.22). □

В следующем утверждении устанавливаются аппроксимационные свойства производных $\nabla_\pm L_n^-(v^-)$ по отношению к $\nabla_\pm L^-(v^-)$ в седловой точке $v^- = v_{*n}^-$.

Лемма 5. *Пусть выполнены предположения* A2–A4 *и последовательности чисел* h_n^-, σ_n, α_n^-, $h_n^-/\sqrt{\alpha_n^-}$ *являются ограниченными. Тогда существует константа* $C > 0$, *не зависящая от* n, *такая, что*

$$\left\|\nabla_\pm L_n^-(v_{*n}^-) - \nabla_\pm L^-(v_{*n}^-)\right\|_{V^-} \leqslant C\left(h_n^-\|v_{*n}^-\|_{V^-} + h_n^- + \sigma_n\right). \tag{4.23}$$

Доказательство. Используя выражение (4.20), неравенство треугольника, оценку $\sqrt{a^2+b^2+c^2} \leqslant |a|+|b|+|c|$ и равенство $\|a\|^2-\|b\|^2 = \langle a-b, a+b\rangle$, после добавления и вычитания вспомогательных слагаемых $2\mathcal{A}_n^*(\mathcal{A}u_{*n} - f)$ и $2\mu_n^*\mathcal{Q}_n^*(\mathcal{Q}u_{*n} - w)$ получаем оценку

$$\begin{gathered}
\left\|\nabla_\pm L_n^-(v_{*n}^-) - \nabla_\pm L^-(v_{*n}^-)\right\|_{V^-} \leqslant 2\|\mathcal{A}_n^*\mathcal{A}_n u_{*n} - \mathcal{A}_n^*\mathcal{A}u_{*n}\|_{H^-} + 2\|\mathcal{A}_n^*\mathcal{A}u_{*n} - \mathcal{A}^*\mathcal{A}u_{*n}\|_{H^-} \\
+ 2\|\mathcal{A}_n^* f_n - \mathcal{A}_n^* f\|_{H^-} + 2\|\mathcal{A}_n^* f - \mathcal{A}^* f\|_{H^-} + \|\mathcal{B}_n^*\lambda_n^* - \mathcal{B}^*\lambda_n^*\|_{H^-} \\
+ 2\mu_n^*\|\mathcal{Q}_n^*\mathcal{Q}_n u_{*n} - \mathcal{Q}_n^*\mathcal{Q}u_{*n}\|_{H^-} + 2\mu_n^*\|\mathcal{Q}_n^*\mathcal{Q}u_{*n} - \mathcal{Q}^*\mathcal{Q}u_{*n}\|_{H^-} + 2\mu_n^*\|\mathcal{Q}_n^* w_n - \mathcal{Q}_n^* w\|_{H^-} \\
+ 2\mu_n^*\|\mathcal{Q}_n^* w - \mathcal{Q}^* w\|_{H^-} + \|\mathcal{B}_n u_{*n} - \mathcal{B}u_{*n}\|_G + \|g_n - g\|_G \\
+ |\langle(\mathcal{Q}-\mathcal{Q}_n)u_{*n} + (w_n - w), \mathcal{Q}_n u_{*n} - w_n + \mathcal{Q}u_{*n} - w\rangle_W| + |R_n - R|\,(R_n + R).
\end{gathered}$$

Затем, применяя неравенство Коши — Буняковского в W, неравенство вида $\|\mathcal{A}x\| \leqslant \|\mathcal{A}\|\|x\|$, равенство $\|\mathcal{A}^*\| = \|\mathcal{A}\|$ и учитывая аппроксимационные свойства (1.4), (1.6), а также ограниченность последовательностей норм $\|\mathcal{A}_n\|_{\mathcal{L}(H^-\to F)}$, $\|\mathcal{Q}_n\|_{\mathcal{L}(H^-\to W)}$, чисел R_n и установленную в лемме 2 ограниченность множителей Лагранжа μ_n^*, имеем, что

$$\begin{gathered}
\left\|\nabla_\pm L_n^-(v_{*n}^-) - \nabla_\pm L^-(v_{*n}^-)\right\|_{V^-} \leqslant C\left(h_n^-\|u_{*n}\|_{H^-} + h_n^-\|\lambda_n^*\|_G + h_n^- + \sigma_n\right) \\
+ \left(h_n^-\|u_{*n}\|_{H^-} + \sigma_n\right)\left(\|\mathcal{Q}_n u_{*n} - w_n\|_W + \|\mathcal{Q}u_{*n} - w\|_W\right).
\end{gathered}$$

В силу неравенства $\|u_{*n}\|_{H^-} + \|\lambda_n^*\|_G \leqslant \sqrt{2}\|v_{*n}^-\|_{V^-}$ для получения (4.23) достаточно доказать ограниченность последовательностей норм $\|\mathcal{Q}u_{*n} - w\|_W$ и $\|\mathcal{Q}_n u_{*n} - w_n\|_W$. Ограниченность норм $\|\mathcal{Q}u_{*n} - w\|_W$ следует из (4.10) и ограниченности α_n^- и множителей μ_n^*. Ограниченность вторых норм следует из условия ограниченности величин $h_n^-/\sqrt{\alpha_n^-}$ и доказанной в лемме 2 ограниченности последовательности $\sqrt{\alpha_n^-}\|u_{*n}\|_{H^-}$: $\|\mathcal{Q}_n u_{*n} - w_n\|_W \leqslant \|\mathcal{Q}u_{*n} - w\|_W + \|\mathcal{Q}_n u_{*n} - \mathcal{Q}u_{*n}\|_W + \|w_n - w\|_W \leqslant \sqrt{R^2 + 2\alpha_n^-\mu_n^*} + \dfrac{h_n^-}{\sqrt{\alpha_n^-}}\sqrt{\alpha_n^-}\|u_{*n}\|_{H^-} + \sigma_n$. □

В следующей группе утверждений выясняются свойства производных точной и приближенной функций Лагранжа, отвечающих задаче минимизации

$$\|\mathcal{A}u - f - \psi\|_{F^+}^2 + \|\mathcal{Q}u - w - \varphi\|_{W^+}^2 \to \min_{u,\psi,\varphi}, \quad u \in U_0, \quad \mathcal{B}u = g, \quad \|\psi\|_F^2 \leqslant d_n^2, \quad \|\varphi\|_W^2 \leqslant R^2,$$

которая решается на втором этапе экстраградиентным процессом (2.8). Эти функции Лагранжа имеют вид

$$\begin{gathered}
\mathcal{L}_n^+(v^+) = \|\mathcal{A}u - f - \psi\|_{F^+}^2 + \|\mathcal{Q}u - w - \varphi\|_{W^+}^2 \\
+ \langle\lambda, \mathcal{B}u - g\rangle_{G^+} + \mu_1\left(\|\psi\|_F^2 - d_n^2\right) + \mu_2\left(\|\varphi\|_W^2 - R^2\right), \\
L_n^+(v^+) = \|\mathcal{A}_n u - f_n - \psi\|_{F^+}^2 + \|\mathcal{Q}_n u - w_n - \varphi\|_{W^+}^2 + \langle\lambda, \mathcal{B}_n u - g_n\rangle_{G^+} \\
+ \mu_1\left(\|\psi\|_F^2 - d_n^2\right) + \mu_2\left(\|\varphi\|_W^2 - R_n^2\right), \quad v^+ = (u, \psi, \varphi, \lambda, \mu_1, \mu_2) \in V^+.
\end{gathered} \tag{4.24}$$

Доказательства приводимых ниже вспомогательных утверждений вполне аналогичны доказательствам лемм 3–5, а потому будут менее подробными. В них появятся оценочные константы C_F, C_G, C_W, характеризующие непрерывность вложений $F \subset F^+$, $G \subset G^+$, $W \subset W^+$:

$$\|v\|_{F^+} \leqslant C_F\|v\|_F \ \ \forall v \in F, \quad \|h\|_{G^+} \leqslant C_G\|h\|_G \ \ \forall h \in G, \quad \|e\|_{W^+} \leqslant C_W\|e\|_W \ \ \forall e \in W,$$

а в доказательствах будут явно участвовать сопряженные операторы $\mathcal{I}_F^* \in \mathcal{L}(F^+ \to F)$ и $\mathcal{I}_W^* \in \mathcal{L}(W^+ \to W)$ к операторам $\mathcal{I}_F \in \mathcal{L}(F \to F^+)$ и $\mathcal{I}_W \in \mathcal{L}(W \to W^+)$, осуществляющим два из этих трех вложений: $F \subset F^+$ и $W \subset W^+$.

Заметим также, что в леммах 6–8 операторы $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{B}_n$ и $\mathcal{Q}_n$ рассматриваются как объекты класса $\mathcal{A}_n \in \mathcal{L}(H \to F^+)$, $\mathcal{B}_n \in \mathcal{L}(H \to G^+)$ и $\mathcal{Q}_n \in \mathcal{L}(H \to W^+)$, которым соответствуют сопряженные отображения $\mathcal{A}_n^* \in \mathcal{L}(F^+ \to H)$, $\mathcal{B}_n^* \in \mathcal{L}(G^+ \to H)$ и $\mathcal{Q}_n^* \in \mathcal{L}(W^+ \to H)$.

Лемма 6. *Функция $\nabla_\pm L_n^+(v^+)$ является липшиц-непрерывной:*

$$\left\|\nabla_\pm L_n^+(v_1^+) - \nabla_\pm L_n^+(v_2^+)\right\|_{V^+} \leqslant K_n^+(v_1^+, v_2^+) \left\|v_1^+ - v_2^+\right\|_{V^+} \quad \forall\, v_1^+, v_2^+ \in V_0^+, \tag{4.25}$$

где $v_k^+ = (u_k, \psi_k, \varphi_k, \lambda_k, \mu_{k1}, \mu_{k2})$, $k = 1, 2$, с константой

$$\begin{gathered}
K_n^+(v_1^+, v_2^+) = \sqrt{A_n^2 + B_n^2 + C_n^2 + \|\mathcal{B}_n\|^2_{\mathcal{L}(H \to G^+)} + 4\|\psi_2\|_F^2 + 4\|\varphi_2\|_W^2}, \\
A_n = 2\|\mathcal{A}_n\|^2_{\mathcal{L}(H \to F^+)} + 2\|\mathcal{Q}_n\|^2_{\mathcal{L}(H \to W^+)} + 2C_F\|\mathcal{A}_n\|_{\mathcal{L}(H \to F^+)} \\
+ 2C_W\|\mathcal{Q}_n\|_{\mathcal{L}(H \to W^+)} + \|\mathcal{B}_n\|_{\mathcal{L}(H \to G^+)}, \\
B_n = 2C_F\|\mathcal{A}_n\|_{\mathcal{L}(H \to F^+)} + 2C_F^2 + 2\mu_{11} + \|\psi_1 + \psi_2\|_F, \\
C_n = 2C_W\|\mathcal{Q}_n\|_{\mathcal{L}(H \to W^+)} + 2C_W^2 + 2\mu_{12} + \|\varphi_1 + \varphi_2\|_W.
\end{gathered} \tag{4.26}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем использовать явные выражения для производных функции Лагранжа $L_n^+(v^+)$:

$$\begin{gathered}
\nabla_\pm L_n^+(v^+) = \Big(2\mathcal{A}_n^*(\mathcal{A}_n u - f_n - \psi) + 2\mathcal{Q}_n^*(\mathcal{Q}_n u - w_n - \varphi) + \mathcal{B}_n^*\lambda, \\
2\mathcal{I}_F^*(\psi - \mathcal{A}_n u + f_n) + 2\mu_1\psi,\ 2\mathcal{I}_W^*(\varphi - \mathcal{Q}_n u + w_n) + 2\mu_2\varphi, \\
-\mathcal{B}_n u + g_n,\ -\|\psi\|_F^2 + d_n^2,\ -\|\varphi\|_W^2 + R_n^2\Big).
\end{gathered} \tag{4.27}$$

Техника вывода оценки (4.25) с константой Липшица (4.26) аналогична той, что применялась при доказательстве леммы 3 и использует неравенство $\sqrt{\sum_{k=1}^6 a_k^2} \leqslant \sum_{k=1}^6 |a_k|$, неравенство треугольника, неравенство вида $\|\mathcal{A}x\| \leqslant \|\mathcal{A}\|\|x\|$, неравенства $\|\mathcal{I}_F\| \leqslant C_F$, $\|\mathcal{I}_W\| \leqslant C_W$, неравенство Коши — Буняковского в F, W, $\mathbb{R}^6$, равенства $\|\mathcal{A}^*\| = \|\mathcal{A}\|$, $\|a\|^2 - \|b\|^2 = \langle a - b, a + b\rangle$ и добавление и вычитание слагаемых $\mu_{11}\psi_2$ и $\mu_{12}\varphi_2$ под знаками норм. □

Лемма 7. *Оператор дифференцирования $\nabla_\pm L_n^+(v^+)$ является монотонным:*

$$\langle \nabla_\pm L_n^+(v_1^+) - \nabla_\pm L_n^+(v_2^+), v_1^+ - v_2^+\rangle_{V^+} \geqslant 0 \quad \forall\, v_1^+, v_2^+ \in V_0^+.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится аналогично доказательству леммы 4 с использованием явного вида производных (4.27). □

В следующей лемме будет получена оценка близости значений производных двух функций Лагранжа (4.24) в седловых точках v_{*n}^+ регуляризованной по Тихонову в пространстве V^+ функции Лагранжа $\mathcal{L}_n^+(v^+)$ из (4.24) с точными данными

$$\begin{gathered}
T_n^+(v^+) = \|\mathcal{A}u - f - \psi\|^2_{F^+} + \|\mathcal{Q}u - w - \varphi\|^2_{W^+} + \langle \lambda, \mathcal{B}u - g\rangle_{G^+} \\
+ \mu_1\left(\|\psi\|_F^2 - d_n^2\right) + \mu_2\left(\|\varphi\|_W^2 - R^2\right) + \alpha_n^+\|(u, \psi, \varphi)\|^2_{H \times F \times W} - \alpha_n^+\|(\lambda, \mu_1, \mu_2)\|^2_{G^+ \times \mathbb{R}^2}.
\end{gathered}$$

На замкнутом в силу предположения A2 множестве V_0^+ такие седловые точки $v_{*n}^+ = (u_{*n}^+, \psi_{*n}^+, \varphi_{*n}^+, \lambda_{*n}^+, \mu_{1*n}^+, \mu_{2*n}^+) \in V_0^+$ при $\alpha_n^+ > 0$ существуют ([8], с. 179, предложение 2.2), и в них выполняются двусторонние неравенства

$$\begin{gathered}
T_n^+(u_{*n}^+, \psi_{*n}^+, \varphi_{*n}^+, \lambda, \mu_1, \mu_2) \leqslant T_n^+(v_{*n}^+) \leqslant T_n^+(u, \psi, \varphi, \lambda_{*n}^+, \mu_{1*n}^+, \mu_{2*n}^+) \\
\forall\,(u, \psi, \varphi) \in U_0 \times F \times W, \quad \forall\,(\lambda, \mu_1, \mu_2) \in G^+ \times \mathbb{R}^2_+.
\end{gathered}$$

Лемма 8. *Пусть выполнены предположения* A2, A4 *и последовательности* h_n^+, σ_n *ограничены. Тогда существует константа* $C > 0$, *не зависящая от* n, *такая, что*

$$\left\|\nabla_{\pm} L_n^+(v_{*n}^+) - \nabla_{\pm}\mathcal{L}_n^+(v_{*n}^+)\right\|_{V^+} \leqslant C\left(h_n^+\|v_{*n}^+\|_{V^+} + h_n^+ + \sigma_n^+ + \sigma_n\right).$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 5 и использует выражение (4.27), неравенство $\sqrt{\sum_{k=1}^6 a_k^2} \leqslant \sum_{k=1}^6 |a_k|$, неравенство треугольника, неравенство вида $\|\mathcal{A}x\| \leqslant \|\mathcal{A}\|\|x\|$, неравенства $\|\mathcal{I}_F\| \leqslant C_F$, $\|\mathcal{I}_W\| \leqslant C_W$, неравенство Коши — Буняковского в $\mathbb{R}^4$, равенство $\|\mathcal{A}^*\| = \|\mathcal{A}\|$ и добавление и вычитание слагаемых $\mathcal{A}_n^*(\mathcal{A}u_{*n}^+ - f)$ и $\mathcal{Q}_n^*(\mathcal{Q}u_{*n}^+ - w)$ под знаками норм. □

5. Доказательства основных результатов

5.1. Доказательство теоремы 1

Сначала докажем, что $\|v_n^- - v_{*n}^-\|_{V^-} \to 0$ при $n \to \infty$, где v_n^- — точки, генерируемые методом в (2.5), а v_{*n}^- — седловые точки из (4.2). Для этого заметим, что характеристическое свойство проекции [8, с. 48], примененное к (2.5), приводит к неравенствам

$$\langle \overline{v}_n^- - v_n^- + \beta_n^- \nabla_{\pm} t_n^-(v_n^-), v^- - \overline{v}_n^- \rangle_{V^-} \geqslant 0 \quad \forall\, v^- \in V_0^-,$$
$$\langle v_{n+1}^- - v_n^- + \beta_n^- \nabla_{\pm} t_n^-(\overline{v}_n^-), v^- - v_{n+1}^- \rangle_{V^-} \geqslant 0 \quad \forall\, v^- \in V_0^-.$$

Подставим в первое из них $v^- = v_{n+1}^-$, во второе — $v^- = v_{*n}^-$ и сложим получившиеся неравенства:

$$\langle \overline{v}_n^- - v_n^-, v_{n+1}^- - \overline{v}_n^- \rangle_{V^-} + \langle v_{n+1}^- - v_n^-, v_{*n}^- - v_{n+1}^- \rangle_{V^-}$$
$$+ \beta_n^- \langle \nabla_{\pm} t_n^-(v_n^-), v_{n+1}^- - \overline{v}_n^- \rangle_{V^-} + \beta_n^- \langle \nabla_{\pm} t_n^-(\overline{v}_n^-), v_{*n}^- - v_{n+1}^- \rangle_{V^-} \geqslant 0.$$

Далее воспользуемся алгебраическим тождеством $2\langle a - c, c - b\rangle = \|a - b\|^2 - \|a - c\|^2 - \|b - c\|^2$ и перегруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned} &\|v_{n+1}^- - \overline{v}_n^-\|_{V^-}^2 + \|\overline{v}_n^- - v_n^-\|_{V^-}^2 + \|v_{n+1}^- - v_{*n}^-\|_{V^-}^2 \leqslant \|v_n^- - v_{*n}^-\|_{V^-}^2 \\ &\quad + 2\beta_n^- \langle \nabla_{\pm} t_n^-(v_n^-), v_{n+1}^- - \overline{v}_n^- \rangle_{V^-} + 2\beta_n^- \langle \nabla_{\pm} t_n^-(\overline{v}_n^-), v_{*n}^- - v_{n+1}^- \rangle_{V^-}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Используя равенство $\nabla_{\pm} t_n^-(v^-) = \nabla_{\pm} L_n^-(v^-) + 2\alpha_n^- v^-$, следующее из (2.2), (2.4), (4.17), перейдем от (5.1) к оценке

$$\begin{aligned} &\|v_{n+1}^- - \overline{v}_n^-\|_{V^-}^2 + \|\overline{v}_n^- - v_n^-\|_{V^-}^2 + \|v_{n+1}^- - v_{*n}^-\|_{V^-}^2 \leqslant \|v_n^- - v_{*n}^-\|_{V^-}^2 \\ &\quad + 2\beta_n^- \langle \nabla_{\pm} L_n^-(v_n^-) - \nabla_{\pm} L_n^-(\overline{v}_n^-), v_{n+1}^- - \overline{v}_n^- \rangle_{V^-} \\ &\quad + 2\beta_n^- \langle \nabla_{\pm} L_n^-(\overline{v}_n^-) - \nabla_{\pm} L_n^-(v_{*n}^-), v_{*n}^- - \overline{v}_n^- \rangle_{V^-} + 2\beta_n^- \langle \nabla_{\pm} L_n^-(v_{*n}^-), v_{*n}^- - \overline{v}_n^- \rangle_{V^-} \\ &\quad + 4\alpha_n^- \beta_n^- \langle v_n^-, v_{n+1}^- - \overline{v}_n^- \rangle_{V^-} + 4\alpha_n^- \beta_n^- \langle \overline{v}_n^-, v_{*n}^- - v_{n+1}^- \rangle_{V^-}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Рассмотрим слагаемые в правой части (5.2). Скалярное произведение во втором слагаемом оценивается сверху с помощью неравенства Коши — Буняковского и свойства липшицевости, доказанного в лемме 3:

$$\begin{aligned} &\langle \nabla_{\pm} L_n^-(v_n^-) - \nabla_{\pm} L_n^-(\overline{v}_n^-), v_{n+1}^- - \overline{v}_n^- \rangle_{V^-} \leqslant K_n^-(v_n^-, \overline{v}_n^-)\|v_n^- - \overline{v}_n^-\|_{V^-}\|v_{n+1}^- - \overline{v}_n^-\|_{V^-} \\ &\quad \leqslant \frac{K_n^-(v_n^-, \overline{v}_n^-)}{2}\left(\|v_n^- - \overline{v}_n^-\|_{V^-}^2 + \|v_{n+1}^- - \overline{v}_n^-\|_{V^-}^2\right). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Третье слагаемое правой части (5.2) неположительно по лемме 4. Для оценки скалярного произведения в четвертом слагаемом запишем вариационное неравенство, эквивалентное паре седловых неравенств (4.2) (см. [8], с. 175, предложение 1.6):

$$\langle \nabla_{\pm} T_n^-(v_{*n}^-), v^- - v_{*n}^- \rangle_{V^-} \geqslant 0 \quad \forall\, v^- \in V_0^-. \tag{5.4}$$

Подставим в (5.4) $v^- = v_n^-$ и с помощью равенства $\nabla_\pm T_n^-(v^-) = \nabla_\pm L^-(v^-) + 2\alpha_n^- v^-$ получим оценку

$$\begin{aligned} \langle \nabla_\pm L_n^-(v_{*n}^-), v_{*n}^- - \overline{v}_n^{\,-}\rangle_{V^-} &\leqslant \langle \nabla_\pm L_n^-(v_{*n}^-) - \nabla_\pm T_n^-(v_{*n}^-), v_{*n}^- - \overline{v}_n^{\,-}\rangle_{V^-} \\ &= \langle \nabla_\pm L_n^-(v_{*n}^-) - \nabla_\pm L^-(v_{*n}^-), v_{*n}^- - \overline{v}_n^{\,-}\rangle_{V^-} + 2\alpha_n^- \langle v_{*n}^-, \overline{v}_n^{\,-} - v_{*n}^-\rangle_{V^-}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Для оценки сверху первого слагаемого из правой части (5.5) используем неравенство Коши — Буняковского, лемму 5, добавление и вычитание v_n^- под знаком нормы, неравенство треугольника и числовое неравенство $|a| \leqslant (a^2+1)/2$:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_\pm L_n^-(v_{*n}^-) - \nabla_\pm L^-(v_{*n}^-), v_{*n}^- - \overline{v}_n^{\,-}\rangle_{V^-} &\leqslant C\left(h_n^- \|v_{*n}^-\|_{V^-} + h_n^- + \sigma_n\right) \|v_{*n}^- - \overline{v}_n^{\,-}\|_{V^-} \\ &\leqslant C\left(h_n^- \|v_{*n}^-\|_{V^-} + h_n^- + \sigma_n\right) \Big(1 + \frac{1}{2}\|v_{*n}^- - v_n^-\|_{V^-}^2 + \frac{1}{2}\|v_n^- - \overline{v}_n^{\,-}\|_{V^-}^2\Big). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Далее преобразуем сумму пятого и шестого слагаемого из правой части (5.2) и второго слагаемого из правого звена цепочки (5.5), опуская для краткости их общий множитель $4\alpha_n^-\beta_n^-$:

$$\begin{aligned} &\langle v_n^-, v_{n+1}^- - \overline{v}_n^{\,-}\rangle_{V^-} + \langle \overline{v}_n^{\,-}, v_{*n}^- - v_{n+1}^-\rangle_{V^-} + \langle v_{*n}^-, \overline{v}_n^{\,-} - v_{*n}^-\rangle_{V^-} \\ &= \langle v_n^- - \overline{v}_n^{\,-}, v_{n+1}^- - v_{*n}^-\rangle_{V^-} + \langle v_n^- - v_{*n}^-, v_{*n}^- - \overline{v}_n^{\,-}\rangle_{V^-} = \langle v_n^- - \overline{v}_n^{\,-}, v_{n+1}^- - \overline{v}_n^{\,-}\rangle_{V^-} \\ &- \|v_n^- - \overline{v}_n^{\,-}\|_{V^-}^2 + \langle v_n^- - \overline{v}_n^{\,-}, v_n^- - v_{*n}^-\rangle_{V^-} - \|v_n^- - v_{*n}^-\|_{V^-}^2 + \langle v_n^- - v_{*n}^-, v_n^- - \overline{v}_n^{\,-}\rangle_{V^-}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Затем перейдем от (5.7) к оценке, используя неравенство Коши — Буняковского и числовые неравенства $ab \leqslant (a^2+b^2)/2$ и $ab \leqslant a^2 + b^2/4$:

$$\begin{aligned} &\langle v_n^-, v_{n+1}^- - \overline{v}_n^{\,-}\rangle_{V^-} + \langle \overline{v}_n^{\,-}, v_{*n}^- - v_{n+1}^-\rangle_{V^-} + \langle v_{*n}^-, \overline{v}_n^{\,-} - v_{*n}^-\rangle_{V^-} \\ &\leqslant \|v_n^- - \overline{v}_n^{\,-}\|_{V^-}\|v_{n+1}^- - \overline{v}_n^{\,-}\|_{V^-} - \|v_n^- - \overline{v}_n^{\,-}\|_{V^-}^2 + 2\|v_n^- - \overline{v}_n^{\,-}\|_{V^-}\|v_n^- - v_{*n}^-\|_{V^-} \\ &- \|v_n^- - v_{*n}^-\|_{V^-}^2 \leqslant \frac{3}{2}\|v_n^- - \overline{v}_n^{\,-}\|_{V^-}^2 + \frac{1}{2}\|v_{n+1}^- - \overline{v}_n^{\,-}\|_{V^-}^2 - \frac{1}{2}\|v_n^- - v_{*n}^-\|_{V^-}^2. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Наконец, преобразуем неравенство (5.2), загрубляя его правую часть сверху при помощи вспомогательных оценок (5.3), (5.5), (5.6), (5.8) и перегруппировывая слагаемые:

$$\begin{aligned} &\|v_{n+1}^- - v_{*n}^-\|_{V^-}^2 + \left(1 - \beta_n^- K_n^-(v_n^-, \overline{v}_n^{\,-}) - 2\alpha_n^-\beta_n^-\right)\|v_{n+1}^- - \overline{v}_n^{\,-}\|_{V^-}^2 \\ &+ \left(1 - \beta_n^- K_n^-(v_n^-, \overline{v}_n^{\,-}) - \gamma_n^-\beta_n^- - 6\alpha_n^-\beta_n^-\right)\|\overline{v}_n^{\,-} - v_n^-\|_{V^-}^2 \\ &\leqslant \left(1 - 2\alpha_n^-\beta_n^- + \gamma_n^-\beta_n^-\right)\|v_n^- - v_{*n}^-\|_{V^-}^2 + 2\gamma_n^-\beta_n^-, \end{aligned} \tag{5.9}$$

где $\gamma_n^- = C(h_n^-\|v_{*n}^-\|_{V^-} + h_n^- + \sigma_n)$. Отметим, что $\gamma_n^- \to 0$ при $n \to \infty$ в силу следующего из (3.2) предельного соотношения $h_n^-/\sqrt{\alpha_n^-} \to 0$ и ограниченности величин $\sqrt{\alpha_n^-}\|v_{*n}^-\|_{V^-}$, доказанной в лемме 2. Отсюда и из предположения A6 следует, что второе и третье слагаемые в левой части (5.9) неотрицательны начиная с некоторого номера $n \geqslant N$. Загрубляя их снизу нулем, при $n \geqslant N$ придем к оценке

$$\|v_{n+1}^- - v_{*n}^-\|_{V^-}^2 \leqslant \left(1 - 2\alpha_n^-\beta_n^- + \gamma_n^-\beta_n^-\right)\|v_n^- - v_{*n}^-\|_{V^-}^2 + 2\gamma_n^-\beta_n^-. \tag{5.10}$$

Для продолжения оценки используем неравенство $\|v_{*n}^- - v_{*n+1}^-\|_{V^-} \leqslant \dfrac{C|\alpha_{n+1}^- - \alpha_n^-|}{(\alpha_n^-)^{3/2}}$ из ([7], формула (5.18)), а также числовое неравенство $(a+b)^2 \leqslant (1+\varepsilon)a^2 + (1+1/\varepsilon)b^2$ со значением параметра $\varepsilon = \alpha_n^-\beta_n^-$:

$$\begin{gathered} \|v_{n+1}^- - v_{*n+1}^-\|_{V^-}^2 \leqslant (1 + \alpha_n^-\beta_n^-)\|v_{n+1}^- - v_{*n}^-\|_{V^-}^2 + \Big(1 + \frac{1}{\alpha_n^-\beta_n^-}\Big)\|v_{*n}^- - v_{*n+1}^-\|_{V^-}^2 \\ \leqslant (1 - s_n)\|v_n^- - v_{*n}^-\|_{V^-}^2 + q_n, \\ s_n = \alpha_n^-\beta_n^- - C\gamma_n^-\beta_n^-, \quad q_n = C\gamma_n^-\beta_n^- + \frac{C(\alpha_{n+1}^- - \alpha_n^-)^2}{\beta_n^-(\alpha_n^-)^4}, \end{gathered}$$

где через C обозначены константы, не зависящие от номера n. Из условия (3.2) и ограниченности величин $\sqrt{\alpha_n^-}\|v_{*n}^-\|_{V^-}$ следует выполнение для достаточно больших номеров n неравенств $0 \leqslant s_n \leqslant 1$, а также то, что $q_n/s_n \to 0$ при $n \to \infty$. Кроме того, из (3.4) следует $\sum_{n=0}^{\infty} s_n = +\infty$, а тогда по лемме 2.6.6 из [9, с. 107] из этих условий следует, что

$$\|v_n^- - v_{*n}^-\|_{V^-} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{5.11}$$

Дальнейшее доказательство теоремы фактически повторяет конец доказательства леммы 5 и доказательство теоремы 2 из работы [7] и использует установленные выше соотношения (4.7), (4.8) из леммы 2.

5.2. Доказательство теоремы 2

Согласно лемме 4 из [7] имеет место сходимость

$$\|v_{*n}^+ - v_*^+\|_{V^+} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{5.12}$$

где $v_*^+ = (u_*, \mathcal{A}u_* - f, \mathcal{Q}u_* - w, 0, 0, 0)$, а точка u_* — решение исходной задачи, определенное в (3.5). Это значит, что для доказательства теоремы достаточно доказать сходимость $\|v_n^+ - v_{*n}^+\|_{V^+} \to 0$. Для этого сначала следует повторить алгебраические выкладки начала доказательства теоремы 1 до формулы (5.10) включительно с заменой верхнего индекса “ $-$ ” на “ $+$ ”. Сходимость к нулю полученных при этом величин $\gamma_n^+ = C(h_n^+\|v_{*n}^+\|_{V^+} + h_n^+ + \sigma_n^+ + \sigma_n)$ будет следовать из предположения A5 и ограниченности норм $\|v_{*n}^+\|_{V^+}$, имеющей место в силу сходимости (5.12). Затем, используя полученное в [7] неравенство (6.11)

$$\|v_{*n}^+ - v_{*n+1}^+\|_{V^+} \leqslant \frac{|\alpha_{n+1}^+ - \alpha_n^+|\|v_*^+\|_{V^+}}{\alpha_n^+} + \frac{\varepsilon_n}{2\alpha_n^+},$$

приходим к оценке

$$\|v_{n+1}^+ - v_{*n+1}^+\|_{V^+}^2 \leqslant (1 - s_n)\|v_n^+ - v_{*n}^+\|_{V^-}^2 + q_n,$$
$$s_n = \alpha_n^+\beta_n^+ - C\gamma_n^+\beta_n^+, \quad q_n = C\gamma_n^+\beta_n^+ + \frac{C(\alpha_{n+1}^+ - \alpha_n^+)^2}{\beta_n^+(\alpha_n^+)^3} + \frac{C\varepsilon_n^2}{\beta_n^+(\alpha_n^+)^3},$$

в которой константа $C > 0$ не зависит от n. Наконец, применяя далее лемму 2.6.6 из [9, с. 107], получим заявленную в теореме 2 сходимость.

5.3. Доказательство теоремы 3

При доказательстве теоремы 1 была доказана сходимость (5.11), из которой, в частности, следует сходимость третьих компонент: $|\mu_n^- - \mu_n^*| \to 0$. В силу ограниченности множителей μ_n^*, доказанной в лемме 2, тогда будет ограниченной и последовательность μ_n^-. Для доказательства ограниченности величин $\overline{\mu}_n^-$ докажем сходимость $\|\overline{v}_n^- - v_{*n}^-\|_{V^-} \to 0$ при $n \to \infty$. Для достаточно больших $n \geqslant N$ левую часть (5.9) можно загрубить снизу третьим слагаемым:

$$\begin{aligned}\big(1 - \beta_n^- K_n^-(v_n^-, \overline{v}_n^-) - \gamma_n^-\beta_n^- - 6\alpha_n^-\beta_n^-\big)\|\overline{v}_n^- - v_n^-\|_{V^-}^2 \\ \leqslant \big(1 - 2\alpha_n^-\beta_n^- + \gamma_n^-\beta_n^-\big)\|v_n^- - v_{*n}^-\|_{V^-}^2 + 2\gamma_n^-\beta_n^-.\end{aligned} \tag{5.13}$$

В силу установленной при доказательстве теоремы 1 сходимости $\gamma_n^- \to 0$, с учетом предположения A6 и сходимости $\alpha_n^- \to 0$ при достаточно больших n выполняется неравенство $1 - \beta_n^- K_n^-(v_n^-, \overline{v}_n^-) - \gamma_n^-\beta_n^- - 6\alpha_n^-\beta_n^- \geqslant 1/4$. В то же время правая часть (5.13) сходится к нулю в силу (5.11), что означает сходимость $\|\overline{v}_n^- - v_n^-\|_{V^-} \to 0$ при $n \to \infty$, из которой следуют заявленная сходимость $\|\overline{v}_n^- - v_{*n}^-\|_{V^-} \to 0$ и, в частности, ограниченность величин $\overline{\mu}_n^-$.

Как видно из (4.19), для завершения доказательства ограниченности $K_n^-(v_n^-, \overline{v}_n^{\,-})$ осталось доказать ограниченность норм $\|\mathcal{Q}_n u_n^- - w_n\|_W$ и $\|\mathcal{Q}_n \overline{u}_n^{\,-} - w_n\|_W$. Первую из них оцениваем с помощью неравенства треугольника:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Q}_n u_n^- - w_n\|_W &\leqslant \|\mathcal{Q}_n(u_n^- - u_{*n})\|_W + \|\mathcal{Q}_n u_{*n} - w_n\|_W \\ &\leqslant \|\mathcal{Q}_n\|_{\mathcal{L}(H^- \to W)} \|u_n^- - u_{*n}\|_{H^-} + \|\mathcal{Q}_n u_{*n} - w_n\|_W \end{aligned} \tag{5.14}$$

и замечаем, что первое слагаемое в правом звене цепочки (5.14) сходится к нулю, а ограниченность второго слагаемого установлена в ходе доказательства леммы 5. Ограниченность второй нормы устанавливается аналогично с учетом доказанной выше сходимости $\|\overline{v}_n^{\,-} - v_{*n}^-\|_{V^-} \to 0$ и следующей из нее сходимости $\|\overline{u}_n^{\,-} - u_{*n}\|_{H^-} \to 0$ при $n \to \infty$.

Ограниченность величин $K_n^+(v_n^+, \overline{v}_n^+)$ доказывается с использованием установленной при доказательстве теоремы 2 сходимости $\|v_n^+ - v_*^+\|_{V^+} \to 0$, с помощью которой, используя аналогичное (5.13) неравенство, можно получить сходимость $\|\overline{v}_n^{\,-} - v_*^+\|_{V^+} \to 0$. Эти сходимости влекут ограниченность последовательностей $\{v_n^+\}$, $\{\overline{v}_n^{\,-}\}$, а значит, и ограниченность последовательностей их компонент, из чего с учетом явного вида (4.26) для величин $K_n^+(v_n^+, \overline{v}_n^+)$ устанавливается их ограниченность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. Изд. 3-е, испр. М.: Наука, 1986. 288 с.
2. **Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г.** Об одном регуляризующем алгоритме для некорректно поставленных задач с приближенно заданным оператором // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1972. Т. 12, № 6. С. 1592–1594.
3. **Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г.** Обобщенный принцип невязки // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1973. Т. 13, № 2. С. 294–302.
4. **Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.** Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989. 128 с.
5. **Антипин А.С., Артемьева Л.А., Васильев Ф. П.** Экстраградиентный метод поиска решения задачи оптимального управления с неявно заданными граничными условиями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2017. Т. 57, № 1. С. 49–54. doi: 10.7868/S0044466916110028
6. **Zuazua E.** Propagation, observation, and control of waves approximated by finite difference methods // SIAM Rev. 2005. Vol. 47, no. 2. P. 197–243. doi: 10.1137/S0036144503432862
7. **Артемьева Л.А., Дряженков А.А., Потапов М.М.** О задаче квадратичной минимизации с неравномерными возмущениями в критерии и ограничениях // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 2. С. 19–34. doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-2-19-34
8. **Экланд И., Темам Р.** Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 400 с.
9. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации: В 2-х кн. М.: МЦНМО, 2011. 1053 с.

Поступила 16.02.2024
После доработки 27.02.2024
Принята к публикации 28.02.2024

Артемьева Людмила Анатольевна
канд. физ.-мат. наук
доцент
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова;
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
e-mail: artemieva.luda@gmail.com

Дряженков Андрей Александрович
канд. физ.-мат. наук, младший науч. сотрудник
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова;
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
e-mail: andrja@yandex.ru

Потапов Михаил Михайлович
д-р физ.-мат. наук, доцент
профессор
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: mmpotapovrus@gmail.com

REFERENCES

1. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Solutions of ill-posed problems]. Moscow: Nauka Publ., 1986. 288 p.
2. Goncharskii A.V., Leonov A.S., Yagola A.G. A regularizing algorithm for incorrectly formulated problems with an approximately specified operator. *USSR Comput. Math. Math. Physics*, 1972, vol. 12, no. 6, pp. 286–290. doi: 10.1016/0041-5553(72)90157-7
3. Goncharskii A.V., Leonov A.S., Yagola A.G. A generalized discrepancy principle. *USSR Comput. Math. Math. Physics*, 1973, vol. 13, no. 2, pp. 25–37. doi: 10.1016/0041-5553(73)90128-6
4. Bakushinskii A.B., Goncharskii A.V. *Iterativnye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Iterative methods for solving ill-posed problems]. Moscow: Nauka Publ., 1989, 128 p. ISBN: 5-02-013960-2 .
5. Antipin A.S., Artem'eva L.A., Vasil'ev F.P. Extragradient method for solving an optimal control problem with implicitly specified boundary conditions. *Comput. Math. Math. Physics*, 2017, vol. 57, no. 1, pp. 64–70. doi: 10.1134/S0965542516110026
6. Zuazua E. Propagation, observation, and control of waves approximated by finite difference methods. *SIAM Rev.*, 2005, vol. 47, no. 2, pp. 197–243. doi: 10.1137/S0036144503432862
7. Artem'eva L.A., Dryazhenkov A.A., Potapov M.M. On a quadratic minimization problem with nonuniform perturbations in the criteria and constraints. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2021, vol. 315, suppl. 1, pp. S27–S41. doi: 10.1134/S0081543821060031
8. Ekeland I., Temam R. *Convex analysis and variational problems.* NY: Elsevier Publ. Comp., 1976, 399 p. ISBN: 9780080875224. Translated to Russian under the title *Vypuklyi analiz i variatsionnye problemy*, Moscow: Mir Publ., 1979, 400 p.
9. Vasil'ev F.P. Metody optimizatsii [Optimization methods]. Moscow: MTsNMO Publ., 2011, vol. 1, 620 p., ISBN: 978-5-94057-707-2; vol. 2, 433 p., ISBN: 978-5-94057-708-9 .

Received February 16, 2024
Revised February 27, 2024
Accepted February 28, 2024

Funding Agency: This research was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within a program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics (agreement no. 075-15-2022-284).

Liudmila Anatolievna Artemieva, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Lomonosov Moscow State University, Moscow; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, 119991 Russia,
e-mail: artemieva.luda@gmail.com .

Andrey Alexandrovich Dryazhenkov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Lomonosov Moscow State University, Moscow; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, 119991 Russia,
e-mail: andrja@yandex.ru .

Mikhail Mikhailovich Potapov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia, e-mail: mmpotapovrus@gmail.com .

Cite this article as: L. A. Artem'eva, A. A. Dryazhenkov, M. M. Potapov. A stable solution of a nonuniformly perturbed quadratic minimization problem by the extragradient method with step size separated from zero. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 7–22 .