ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 2 2024

УДК 517.988 + 517.968.4

МЕТОД СРАВНЕНИЯ С МОДЕЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ В ИССЛЕДОВАНИИ ВКЛЮЧЕНИЙ В ВЕКТОРНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

Е. С. Жуковский, Е. А. Панасенко

Для заданного многозначного отображения $F : X \rightrightarrows Y$ и заданного элемента $\tilde{y} \in Y$ исследуется вопрос о существовании и оценках решения $x \in X$ включения $F(x) \ni \tilde{y}$. Множества X, Y наделяются векторными метриками $\mathcal{P}_X^{E_+}$ и $\mathcal{P}_Y^{M_+}$, имеющими значения в конусах E_+, M_+ банахова пространства E и линейного топологического пространства M. Рассматриваемое включение сравнивается с "модельным" уравнением $f(t) = 0$ с отображением $f : E_+ \to M$. Предполагается, что f можно записать в виде $f(t) \equiv g(t,t)$, где отображение $g : E_+ \times E_+ \to M$ является упорядоченно накрывающим множество $\{0\} \subset M$ по первому аргументу, антитонным по второму аргументу и $-g(0,0) \in M_+$. Показано, что в этих условиях уравнение $f(t) = 0$ имеет решение $t^* \in E_+$. А если еще для некоторого x_0 выполнены предлагаемые в работе условия связи между $f(0)$ и $F(x_0)$, а также между приращениями значений $f(t)$ при $t \in [0,t^*]$ и приращениями значений $F(x)$ при всех x из шара с центром в x_0 радиуса t^*, то в этом шаре рассматриваемое включение имеет решение. Полученные в работе результаты об операторном включении применяются к исследованию интегрального включения.

Ключевые слова: операторное включение, существование и оценки решений, интегральное включение, векторное метрическое пространство.

E. S. Zhukovskiy, E. A. Panasenko. The method of comparison with a model equation in the study of inclusions in vector metric spaces.

For a given multivalued mapping $F : X \rightrightarrows Y$ and a given element $\tilde{y} \in Y$, the existence of a solution $x \in X$ to the inclusion $F(x) \ni \tilde{y}$ and its estimates are studied. The sets X and Y are endowed with vector metrics $\mathcal{P}_X^{E_+}$ and $\mathcal{P}_Y^{M_+}$, whose values belong to cones E_+ and M_+ of a Banach space E and a linear topological space M, respectively. The inclusion is compared with a "model" equation $f(t) = 0$, where $f : E_+ \to M$. It is assumed that f can be written as $f(t) \equiv g(t,t)$, where the mapping $g : E_+ \times E_+ \to M$ orderly covers the set $\{0\} \subset M$ with respect to the first argument and is antitone with respect to the second argument and $-g(0,0) \in M_+$. It is shown that in this case the equation $f(t) = 0$ has a solution $t^* \in E_+$. Further, conditions on the connection between $f(0)$ and $F(x_0)$ and between the increments of $f(t)$ for $t \in [0,t^*]$ and the increments of $F(x)$ for all x in the ball of radius t^* centered at x_0 for some x_0 are formulated, and it is shown that the inclusion has a solution in the ball under these conditions. The results on the operator inclusion obtained in the paper are applied to studying an integral inclusion.

Keywords: operator inclusion, existence and estimates of solutions, integral inclusion, vector metric space.

MSC: 54E35, 47H04, 45G10

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-2-68-85

Введение

В различных разделах математики, в том числе в теории интегральных и дифференциальных уравнений, теории управления наряду с "прямым" исследованием свойств изучаемых объектов применяются методы и результаты, основанные на сравнении рассматриваемых объектов с модельными. Применительно к задаче устойчивости метод сравнения сформулирован Н. Н. Красовским в [1, с. 14]: "Вместо данной системы уравнений строим упрощенную, приближенную систему, для которой устанавливаем соответственно устойчивость, асимптотическую

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00272, https://rscf.ru/project/24-21-00272/ .

устойчивость или неустойчивость. Затем показываем, что соответствующее свойство сохраняется при переходе к первоначальной исходной системе". Для построения упрощенной модельной системы часто используется линеаризация — замена нелинейных объектов линейными. Существует много других подходов к построению модельных объектов. Отметим широко известную процедуру управления, использующую вместе с реальной эталонную невозмущенную систему — "поводырь" ([2], § 57). Методы, использующие вспомогательную модельную управляемую систему, также эффективны для задач управления с неполной информацией о фазовых состояниях [3–5].

В связи с актуальными приложениями (см. [6]) и теоретическими сложностями (см. [7]) в последнее время возрос интерес к исследованию задач управления процессами, динамика которых задается неявными дифференциальными уравнениями. В частности, в [8] рассматривалась дифференциальная игра преследования, описываемая неявным уравнением. Арсенал инструментов исследования таких управляемых систем не столь разнообразен, как для явных систем. Авторы данной работы полагают, что к исследованию неявных систем могут эффективно применяться методы сравнения. В частности, может использоваться сравнение дифференциального или интегрального включения, соответствующего рассматриваемой управляемой системе, с модельным уравнением.

Как известно, при исследовании множества допустимых траекторий удобно, используя лемму Филиппова об измеримом выборе, "подставить" в систему управления множество допустимых управлений и таким образом записать ее в виде включения. В случае, когда динамика системы управления описывается неявным дифференциальным уравнением, соответствующее дифференциальное включение, конечно, также будет неявным. В статье рассматриваются интегральные включения, к которым сводятся краевые задачи для таких неявных включений. Исследование основывается на доказываемой в первой части статьи теореме сравнения операторного включения в векторно метрических пространствах с модельным уравнением. Идея определения модельного уравнения аналогична идее, использовавшейся в теореме Канторовича о неподвижной точке (см. [9] или книгу ([10], гл. XVIII, п. 1.2, теорема 1)) и в ее распространениях, полученных в [11–16]).

В теореме Канторовича рассматривается непрерывно дифференцируемое отображение S, действующее в банаховом пространстве X. Для определения его неподвижной точки уравнение $x = S(x)$ сравнивается с уравнением $t = \varphi(t)$, в котором функция $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ возрастает, дифференцируема и имеет неподвижную точку $t^* \geq 0$. Утверждается, что если, во-первых, при некотором $x_0 \in X$ выполнено неравенство $\|S(x_0) - x_0\| \leq \varphi(0)$ и, во-вторых, при любом $t \in [0, t^*)$ и любом $x \in X$ таком, что $\|x - x_0\| \leq t$, выполнено неравенство $\|S'(x)\| \leq \varphi'(t)$, то S имеет неподвижную точку x^*, удовлетворяющую оценке $\|x^* - x_0\| \leq t^*$.

Условия этой теоремы означают, что норма изменения значений отображения S не превосходит соответствующих приращений функции φ, а поэтому величина $\|S(x) - x\|$ ограничена значением $\varphi(t) - t$ при соответствующих значениях t (точнее, при t таких, что $\|x - x_0\| \leq t$). При этом функция $t \mapsto \varphi(t) - t$ непрерывна на $[0, t^*]$, положительна на $[0, t^*)$ и обращается в 0 в точке t^*. Соответственно отображение $x \mapsto \|S(x) - x\|$ вынуждено обратиться в 0 в некоторой точке x^* такой, что $\|x^* - x_0\| \leq t^*$.

Такая трактовка условий теоремы Канторовича позволяет получать аналогичные результаты для отображений метрических и обобщенно метрических пространств. С использованием близких идей в [12; 13] получены теоремы о неподвижной точке и более общие теоремы о точках совпадения отображений (не только однозначных, но и многозначных) в метрических пространствах, в [14] — теоремы об операторных уравнениях в метрических пространствах. Аналогичные подходы применены в [15] и в [16] для исследования, соответственно, точек совпадения отображений и операторных уравнений в векторно метрических пространствах, при этом модельные уравнения рассматривались уже не в $\mathbb{R}$, а в частично упорядоченных банаховых пространствах значений векторных метрик.

Ниже в разд. 1–3 излагаются результаты работы. В разд. 1 определяется векторная метрика со значениями в конусе линейного пространства. В разд. 2 доказана теорема существования решения операторного включения в векторно метрическом пространстве — аналог теоремы Канторовича о неподвижной точке. На основании этой теоремы в разд. 3 исследуется интегральное включение относительно неизвестной измеримой функции.

1. Пространство с векторной метрикой

В этом разделе приведем основные определения и утверждения, связанные с понятиями векторной метрики и векторного метрического пространства. В последние годы появилось довольно много работ, посвященных исследованиям свойств отображений, действующих в векторных метрических пространствах, и связанных с ними операторных уравнений и включений. Векторные метрические пространства представляют собой различного рода обобщения "классических" метрических пространств с функциями расстояния, принимающими значения в линейных (конечно- или бесконечномерных) пространствах. Изучение вопросов существования, устойчивости и оценок неподвижных точек, точек совпадения отображений (как однозначных, так и многозначных), действующих в векторных метрических пространствах, позволяет существенно расширить области применения соответствующих утверждений в исследовании функционально-дифференциальных уравнений и включений, имеющих, например, несуммируемые особенности или неразрешенных относительно производных (см. [16]). В дополнение к уже упомянутым выше работам (посвященным аналогам теоремы Канторовича) отметим еще несколько статей по этой тематике: теоремы о неподвижной точке в пространствах с векторнозначной метрикой для однозначных отображений получены А. И. Перовым в [17]; в статьях [18; 19] получены утверждения о точках совпадения в векторных метрических пространствах с n-мерной метрикой, в [20] — о решениях операторных уравнений; операторные включения в векторных метрических пространствах с метрикой, имеющей значения в конусе банахова пространства и принимающей возможно бесконечные значения, рассматривались в [21]; метод поиска нулей функционалов, определенных на векторных метрических пространствах, предложен в [22].

Пусть P — линейное пространство (над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел), в котором задан острый выпуклый конус P_+. Конус P_+ порождает в пространстве P "естественный" порядок (который мы будем обозначать $\leq$), а именно: для элементов $\nu, \mu \in P$ выполнено $\nu \leq \mu$ (или, что то же самое, $\mu \geq \nu$), если $\mu - \nu \in P_+$. В случае, когда $\nu \leq \mu$ и $\nu \neq \mu$, будем писать $\nu < \mu$ (или, что то же самое, $\mu > \nu$). Для $\underline{\mu}, \overline{\mu} \in M$, $\underline{\mu} \leq \overline{\mu}$, стандартно обозначим отрезок $[\underline{\mu}, \overline{\mu}]_P := \{\nu \in P : \underline{\mu} \leq \nu \leq \overline{\mu}\}$ (в случае $\mu := \underline{\mu} = \overline{\mu}$ полагаем $[\mu, \mu]_P = \{\mu\}$).

Далее, пусть задано множество X, содержащее не менее двух элементов, и определено отображение расстояния $\mathcal{P}_X^{P_+} : X \times X \to P_+$ такое, что для любых $x, z, w \in X$ выполнены соотношения

$$\mathcal{P}_X^{P_+}(x,z) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = z; \quad \mathcal{P}_X^{P_+}(x,z) = \mathcal{P}_X^{P_+}(z,x); \quad \mathcal{P}_X^{P_+}(x,w) \leq \mathcal{P}_X^{P_+}(x,z) + \mathcal{P}_X^{P_+}(z,w).$$

Тогда отображение $\mathcal{P}_X^{P_+}$ называют (см., например, [17]) *векторной метрикой* или, сокращенно, в-*метрикой*, а пару $(X, \mathcal{P}_X^{P_+})$ — *векторным метрическим* (в-*метрическим*) *пространством.* Очевидно, что если P — это пространство вещественных чисел $\mathbb{R}$, а $P_+ = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, то в-метрика превращается в "обычную" метрику.

Шаром в пространстве $(X, \mathcal{P}_X^{P_+})$ с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $e \in P_+$ называют множество $B_X(x_0, e) := \{x \in X : \mathcal{P}_X^{P_+}(x, x_0) \leq e\}$.

Для определения понятия *предела* в $(X, \mathcal{P}_X^{P_+})$ далее будем предполагать, что P является линейным топологическим пространством. В этом случае будем говорить, что последовательность $\{x_i\} \subset X$ *сходится* (при $i \to \infty$) к $x \in X$, если $\mathcal{P}_X^{E_+}(x_i, x) \to 0$ в топологическом пространстве P. Множество $U \subset X$ будем называть (*секвенциально*) *замкнутым,* если для любой сходящейся последовательности $\{x_i\} \subset U$, $x_i \to x$, выполнено $x \in U$.

Наиболее содержательной является ситуация, когда пространство P банахово и конус P_+ замкнут. Приведем известные определения некоторых свойств острых выпуклых замкнутых конусов в банаховых пространствах.

В силу замкнутости конуса P_+ для любой возрастающей последовательности $\{\varsigma_i\} \subset P$ (т. е. $\varsigma_{i+1} \geq \varsigma_i$ при всех i), в случае ее сходимости $\varsigma_i \to \varsigma$, при всех i имеет место неравенство $\varsigma_i \leq \varsigma$. Далее, напомним, что конус P_+ называется *правильным* (см. [23, с. 257]), если любая возрастающая последовательность $\{\varsigma_i\} \subset P$ сходится тогда и только тогда, когда она ограничена сверху. В [24, Proposition 6] показано, что вследствие правильности конуса P_+ для такой ограниченной возрастающей последовательности $\{\varsigma_i\} \subset P$ существует супремум и $\lim_{i\to\infty} \varsigma_i = \sup\{\varsigma_i\}$. Более того, из правильности конуса P_+ следует, что для любой ограниченной сверху цепи $S \subset P$ существует возрастающая последовательность $\{\varsigma_i\} \subset S$, которая коинициальна цепи S, т. е. для любого элемента цепи $\varsigma \in S$ существует такой элемент ς_i этой последовательности, что $\varsigma_i \geq \sigma$. Поэтому такая цепь S имеет супремум, причем $\sup S = \sup\{\varsigma_i\} = \lim_{i\to\infty} \varsigma_i$ (см. [24], Proposition 7). Отметим также, что вследствие правильности конуса P_+ любой элемент произвольного непустого ограниченного сверху замкнутого множества $U \subset P$ подчинен некоторому максимальному элементу этого множества, т. е. для любого $\varsigma \in U$ существует максимальный (возможно, не единственный) элемент $\tau \in U$, для которого $\tau \geq \varsigma$ (доказательство этого свойства см. [15, с. 399, 400]). Очевидно, в рассматриваемом банаховом пространстве P, упорядоченном замкнутым правильным конусом P_+, аналогичными свойствами обладают ограниченные снизу множества, цепи и убывающие последовательности.

Напомним (см. [23, с. 257]), что конус неотрицательных функций в пространстве L_p суммируемых с любой степенью $p \in [1, \infty]$ функций является правильным, в отличие, например, от конуса неотрицательных функций в пространстве C непрерывных функций (относительно "стандартных" норм L_p и C).

Далее, остановимся на понятиях, связанных со сходимостью в в-метрическом пространстве $(X, \mathcal{P}_X^{P_+})$, если пространство P банахово. В этом случае сходимость $x_i \to x$ к x (при $i \to \infty$) означает сходимость $\|\mathcal{P}_X^{P_+}(x_i, x)\|_P \to 0$, а предел x (если он существует), очевидно, является единственным.

Последовательность $\{x_i\} \subset X$ называют *фундаментальной,* если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер I, что для всех $i, j > I$ имеет место неравенство $\|\mathcal{P}_X^{P_+}(x_i, x_j)\|_P < \varepsilon$. в-метрическое пространство $(X, \mathcal{P}_X^{P_+})$ называют *полным,* если любая фундаментальная последовательность сходится.

Отметим также (см. [16]), что в случае замкнутости и правильности конуса P_+ банахова пространства P отображение $\mathcal{P}_X^{P_+} : X \times X \to P_+$ является непрерывным, т. е. при $x_i \to x$, $u_i \to u$ выполнено $\mathcal{P}_X^{P_+}(x_i, u_i) \to \mathcal{P}_X^{P_+}(x, u)$. Шар $B_X(x_0, e)$ (с центром $x_0 \in X$ радиуса $e \in P_+$) в таком пространстве $(X, \mathcal{P}_X^{P_+})$ является замкнутым множеством.

В заключение приведем примеры двух в-метрических пространств, которые будут использоваться в разд. 3 при исследовании интегральных включений.

П р и м е р 1. Пусть $T > 0$. Обозначим через W^n множество измеримых (по Лебегу) функций $[0, T] \to \mathbb{R}^n$. В случае $n = 1$ верхний индекс в обозначениях будем опускать. Множество W будем рассматривать как линейное пространство (относительно "обычных" операций с функциями), наделим его топологией сходимости по мере на $[0, T]$. Зададим в этом пространстве конус W_+ скалярных измеримых неотрицательных функций, который, очевидно, является острым и выпуклым (а также замкнутым в рассматриваемой топологии). Тогда в W^n можно определить векторную метрику $\mathcal{P}_{W^n}^{W_+} : W^n \times W^n \to W_+$ соотношением

$$\forall y, z \in W^n \quad \big(\mathcal{P}_{W^n}^{W_+}(y, z)\big)(t) := \big|y(t) - z(t)\big|_{\mathbb{R}^n}, \quad t \in [0, T]. \tag{1.1}$$

П р и м е р 2. Пусть задана измеримая функция $e_0 : [0, T] \to [1, \infty)$. Определим линейное весовое пространство L_{e_0} измеримых функций $[0, T] \to \mathbb{R}$, полагая, что $\varsigma \in L_{e_0}$ тогда и только тогда, когда $\varsigma(\cdot)/e_0(\cdot) \in L$. Норму в этом пространстве зададим формулой

$$\|\varsigma\|_{L_{e_0}} := \int_0^T \big|\varsigma(t)\big|/e_0(t)dt. \tag{1.2}$$

Относительно этой нормы пространство L_{e_0} является банаховым, а конус $L_{e_0+} \subset L_{e_0}$ неотрицательных функций является замкнутым и правильным. Далее, определим множество, на котором введем векторную метрику со значениями в L_{e_0+}. Пусть $u_0 : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ — некоторая измеримая функция. Обозначим через $L^n_{u_0\,e_0}$ множество измеримых функций $u : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ таких, что $\big|u(\cdot) - u_0(\cdot)\big|_{\mathbb{R}^n} \in L_{e_0+}$, и определим на нем в-метрику $\mathcal{P}^{L_{e_0+}}_{L^n_{u_0\,e_0}} : L^n_{u_0\,e_0} \times L^n_{u_0\,e_0} \to L_{e_0+}$ формулой

$$\forall x, u \in L^n_{u_0\,e_0} \quad \big(\mathcal{P}^{L_{e_0+}}_{L^n_{u_0\,e_0}}(x,u)\big)(t) := \big|x(t) - u(t)\big|_{\mathbb{R}^n}, \quad t \in [0,T]. \tag{1.3}$$

2. Теорема сравнения включения в векторном метрическом пространстве и модельного уравнения

Будем полагать заданными банахово пространство E, упорядоченное выпуклым, острым, замкнутым и правильным конусом $E_+ \subset E$, и линейное топологическое пространство M, упорядоченное выпуклым, острым конусом $M_+ \subset M$. Пусть определены в-метрические пространства $\big(X, \mathcal{P}^{E_+}_X\big)$, $\big(Y, \mathcal{P}^{M_+}_Y\big)$. Будем предполагать, что пространство $\big(X, \mathcal{P}^{E_+}_X\big)$ является полным.

Пусть заданы элемент $\tilde{y} \in Y$ и многозначное отображение $G : X \times X \rightrightarrows Y$, имеющее непустые значения $G(v,u) \subset Y$ при любых аргументах $v, u \in X$. Рассмотрим включение

$$G(x,x) \ni \tilde{y} \tag{2.1}$$

относительно неизвестного $x \in X$.

Для включения (2.1) будем рассматривать модельное уравнение вида

$$g(\varsigma,\varsigma) = 0 \tag{2.2}$$

относительно неизвестного $\varsigma \in E_+$ с отображением $g : E_+ \times E_+ \to M$. Получим утверждение о решениях модельного уравнения (2.2) и условия, при выполнении которых из существования решения уравнения (2.2) следует существование решения включения (2.1).

Вначале приведем утверждения о решениях уравнения (2.2), которые будем использовать при сравнении включения (2.1) с модельным уравнением (2.2). Нам потребуются определения некоторых свойств отображений, действующих из E_+ в M. Пусть заданы непустые множества $\mathfrak{I} \subset E_+$ и $\mathfrak{D} \subset M$.

О п р е д е л е н и е 1. Отображение $f : E_+ \to M$ называют *антитонным относительно множеств* $\mathfrak{I} \subset E_+$ и $\mathfrak{D} \subset M$, если

$$\forall e, e' \in \mathfrak{I} \;\; e' \le e \;\text{ и }\; f(e) \in \mathfrak{D} \implies f(e) \le f(e'). \tag{2.3}$$

Класс всех отображений $f : E_+ \to M$, удовлетворяющих соотношению (2.3), обозначим символом $\mathrm{Ant}(\mathfrak{I}, \mathfrak{D})$ и в случае, когда отображение f является антитонным относительно $\mathfrak{I}, \mathfrak{D}$, будем писать $f \in \mathrm{Ant}(\mathfrak{I}, \mathfrak{D})$.

О п р е д е л е н и е 2 (см. [24], определение 1; [16], определение 2). Отображение $f : E_+ \to M$ называют *упорядоченно накрывающим относительно множеств* $\mathfrak{I} \subset E_+$ и $\mathfrak{D} \subset M$, если

$$\forall e \in \mathfrak{I} \;\; \forall m \in \mathfrak{D} \;\; f(e) \le m \implies \exists e' \in \mathfrak{I} \;\; e' \ge e \;\text{ и }\; f(e') = m. \tag{2.4}$$

Класс всех отображений $f : E_+ \to M$, удовлетворяющих соотношению (2.4), обозначим символом $\mathrm{Cov}(\mathfrak{I}, \mathfrak{D})$ и будем писать $f \in \mathrm{Cov}(\mathfrak{I}, \mathfrak{D})$ вместо “отображение f является упорядоченно накрывающим относительно $\mathfrak{I}, \mathfrak{D}$”.

Очевидно имеют место соотношения

$$f \in \mathrm{Ant}(\mathfrak{I}, \mathfrak{D}) \iff \forall m \in \mathfrak{D} \;\; f \in \mathrm{Ant}(\mathfrak{I}, \{m\}), \quad f \in \mathrm{Cov}(\mathfrak{I}, \mathfrak{D}) \iff \forall m \in \mathfrak{D} \;\; f \in \mathrm{Cov}(\mathfrak{I}, \{m\}).$$

О п р е д е л е н и е 3. Отображение $g : E_+ \times E_+ \to M$ будем называть *замкнутым относительно множеств* $\mathfrak{I}$ *и* $\mathfrak{D}$, если для любых $e \in \mathfrak{I}$, $m \in \mathfrak{D}$ и любых возрастающих последовательностей $\{e_i\} \subset \mathfrak{I}$, $\{e_i'\} \subset \mathfrak{I}$, выполнено

$$\big(\{g(e_i', e_i)\} \subset \mathfrak{D},\; e = \lim_{i\to\infty} e_i = \lim_{i\to\infty} e_i' \text{ и } m = \lim_{i\to\infty} g(e_i', e_i)\big) \implies g(e,e) = m.$$

Класс замкнутых относительно множеств $\mathfrak{I}$ и $\mathfrak{D}$ отображений будем обозначать $\mathrm{Cl}(\mathfrak{I}, \mathfrak{D})$.

Сформулируем утверждения о существовании и свойствах решений уравнения (2.2). Будем обозначать через $\mathrm{Sol}_{\mathfrak{I}}(g)$ множество решений уравнения (2.2), принадлежащих множеству $\mathfrak{I} \subset E_+$.

Лемма 1. *Пусть* $\overline{e} \in E_+$, $\mathfrak{I} = [0, \overline{e}]_E$, $\mathfrak{D} = \{0\} \subset M$, *отображение* $g : E_+ \times E_+ \to M$ *удовлетворяет следующим условиям:* $g(0,0) \le 0$, $g \in \mathrm{Cl}(\mathfrak{I}, \mathfrak{D})$, $g(\cdot, \nu) \in \mathrm{Cov}(\mathfrak{I}, \mathfrak{D})$ *и* $g(\nu, \cdot) \in \mathrm{Ant}(\mathfrak{I}, \mathfrak{D})$ *при любом* $\nu \in \mathfrak{I}$. *Тогда множество* $\mathrm{Sol}_{\mathfrak{I}}(g)$ *не пусто, замкнуто в* E, *любой его элемент* $\varsigma \in \mathrm{Sol}_{\mathfrak{I}}(g)$ *подчинен некоторому минимальному элементу* $\varsigma^* \in \mathrm{Sol}_{\mathfrak{I}}(g)$, *т. е.* $\varsigma^* \le \varsigma$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем существование возрастающей последовательности $\{\varsigma_i\}$, удовлетворяющей соотношению

$$g(\varsigma_i, \varsigma_{i-1}) = 0, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Положим $\varsigma_0 = 0$. Из неравенства $g(\varsigma_0, \varsigma_0) \le 0$ в силу условия $g(\cdot, \varsigma_0) \in \mathrm{Cov}(\mathfrak{I}, \{0\})$ следует, что существует $\varsigma_1 \in [\varsigma_0, \overline{e}]_E$ такой, что $g(\varsigma_1, \varsigma_0) = 0$. Отсюда в силу условия $g(\varsigma_1, \cdot) \in \mathrm{Ant}(\mathfrak{I}, \{0\})$ получаем неравенство $g(\varsigma_1, \varsigma_1) \le 0$.

На втором шаге аналогично определяем $\varsigma_2 \in [\varsigma_1, \overline{e}]_E$ такой, что $g(\varsigma_2, \varsigma_1) = 0$, $g(\varsigma_2, \varsigma_2) \le 0$. И так далее. В результате определим возрастающую последовательность, удовлетворяющую рекуррентному соотношению (2.5).

Вследствие правильности конуса E_+ и замкнутости множества $\mathfrak{I}$ построенная возрастающая последовательность сходится к некоторому $\varsigma \in \mathfrak{I}$. А так как $g \in \mathrm{Cl}(\mathfrak{I}, \{0\})$, из соотношения (2.5) получаем, что ς является решением уравнения (2.2). Итак, $\mathrm{Sol}_{\mathfrak{I}}(g) \ne \varnothing$. Из предположения $g \in \mathrm{Cl}(\mathfrak{I}, \{0\})$ также прямо следует, что множество $\mathrm{Sol}_{\mathfrak{I}}(g)$ замкнуто в E.

В силу правильности конуса E_+, любой элемент непустого, замкнутого и ограниченного (сверху и снизу) множества $\mathrm{Sol}_{\mathfrak{I}}(g)$ подчинен некоторому минимальному элементу $\varsigma^* \in \mathrm{Sol}_{\mathfrak{I}}(g)$. □

Отметим, что операторное уравнение вида (2.2) рассматривалось в [25; 26], его многозначный аналог — в [27; 28], и в этих работах получены близкие предположениям леммы 1 условия существования решений.

Лемма 2 ([16], лемма 1). *Пусть множество решений уравнения* (2.2) *не пусто и элемент* $\varsigma^* \in E_+$ *является минимальным в этом множестве. Положим* $\mathfrak{I}^* = [0, \varsigma^*]_E$, $\mathfrak{D} = \{0\} \subset M$. *Пусть для отображения* $g : E_+ \times E_+ \to M$ *выполнено* $g(0,0) \le 0$, $g \in \mathrm{Cl}(\mathfrak{I}^*, \mathfrak{D})$, $g(\cdot, \nu) \in \mathrm{Cov}(\mathfrak{I}^*, \mathfrak{D})$ *и* $g(\nu, \cdot) \in \mathrm{Ant}(\mathfrak{I}^*, \mathfrak{D})$ *при любом* $\nu \in \mathfrak{I}^*$. *Тогда существует возрастающая последовательность* $\{\varsigma_i\} \subset \mathfrak{I}^*$ *с начальным элементом* $\varsigma_0 = 0$ *такая, что выполнено соотношение* (2.5) *и имеет место сходимость* $\varsigma_i \to \varsigma^*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как показано при доказательстве леммы 1, существует возрастающая последовательность $\{\varsigma_i\} \subset \mathfrak{I}^*$, $\varsigma_0 = 0$, удовлетворяющая соотношению (2.5) и сходящаяся к некоторому решению ς уравнения (2.2). Для этого решения выполнено $\varsigma \le \varsigma^*$. Но так как ς^* является минимальным во множестве решений, получаем $\varsigma = \varsigma^*$. $\square$

Приведем несколько более общее утверждение, которое будем использовать в доказательстве теоремы о разрешимости включения (2.1).

Лемма 3. *Предположим, что множество решений уравнения* (2.2) *не пусто и элемент* $\varsigma^* \in E_+$ *является минимальным в этом множестве. Пусть* $g(0,0) \le 0$, $\mu_0 \in \big[0, -g(0,0)\big]_M$, $\vartriangle_\mu \in \big[0, -g(0,0) - \mu_0\big]_M$, $\mathfrak{I}^* = [0, \varsigma^*]_E$, $\mathfrak{D} = \big[-(\mu_0 + \vartriangle_\mu), -\mu_0\big]_M$ *и выполнены соотношения* $g \in \mathrm{Cl}(\mathfrak{I}^*, \mathfrak{D})$, $g(\cdot, \nu) \in \mathrm{Cov}(\mathfrak{I}^*, \mathfrak{D})$ *и* $g(\nu, \cdot) \in \mathrm{Ant}(\mathfrak{I}^*, \mathfrak{D})$ *при любом* $\nu \in \mathfrak{I}^*$. *Тогда для отображения* $\overline{g} : E_+ \times E_+ \to M$

$$\overline{g}(\nu, e) = g(\nu, e) + \mu_0, \quad \nu, e \in E_+,$$

уравнение

$$\overline{g}(\varsigma, \varsigma) = 0 \tag{2.6}$$

имеет решение на множестве $\mathfrak{I}^*$, *т. е.* $\mathrm{Sol}_{\mathfrak{I}^*}(\overline{g}) \neq \varnothing$, *и существует возрастающая последовательность* $\{\varsigma_i\} \subset \mathfrak{I}^*$ *с начальным элементом* $\varsigma_0 = 0$, *которая удовлетворяет соотношению*

$$\overline{g}(\varsigma_i, \varsigma_{i-1}) + 2^{-i} \vartriangle_\mu = 0, \quad i \in \mathbb{N}, \tag{2.7}$$

и сходится к некоторому $\overline{\varsigma} \in \mathrm{Sol}_{\mathfrak{I}^*}(\overline{g})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим последовательность $\{\varsigma_i\} \subset \mathfrak{I}^*$, существование которой утверждается в лемме, следующим образом.

Положим $\varsigma_0 = 0$. Согласно принятым предположениям имеем $g(\varsigma_0, \varsigma_0) \le -\mu_0 - \vartriangle_\mu$. Поскольку $-\mu_0 - \vartriangle_\mu \in \mathfrak{D}$, в силу условия $g(\cdot, \varsigma_0) \in \mathrm{Cov}(\mathfrak{I}^*, \mathfrak{D})$ существует $\varsigma_1 \in [\varsigma_0, \varsigma^*]_E$ такой, что $g(\varsigma_1, \varsigma_0) = -\mu_0 - \vartriangle_\mu$ или, что то же самое, $\overline{g}(\varsigma_1, \varsigma_0) + \vartriangle_\mu = 0$. Вследствие условия $g(\varsigma_1, \cdot) \in \mathrm{Ant}(\mathfrak{I}^*, \mathfrak{D})$ получаем

$$g(\varsigma_1, \varsigma_1) \le g(\varsigma_1, \varsigma_0) = -\mu_0 - \vartriangle_\mu \le -\mu_0 - 2^{-1} \vartriangle_\mu .$$

Теперь, так как $-\mu_0 - 2^{-1} \vartriangle_\mu \in \mathfrak{D}$, в силу предположения $g(\cdot, \varsigma_1) \in \mathrm{Cov}(\mathfrak{I}^*, \mathfrak{D})$ существует $\varsigma_2 \in [\varsigma_1, \varsigma^*]_E$ такой, что $g(\varsigma_2, \varsigma_1) = -\mu_0 - 2^{-1} \vartriangle_\mu$. Таким образом, $\overline{g}(\varsigma_2, \varsigma_1) + 2^{-1} \vartriangle_\mu = 0$. А так как $g(\varsigma_2, \cdot) \in \mathrm{Ant}(\mathfrak{I}^*, \mathfrak{D})$, имеем

$$g(\varsigma_2, \varsigma_2) \le g(\varsigma_2, \varsigma_1) = -\mu_0 - 2^{-1} \vartriangle_\mu \le -\mu_0 - 2^{-2} \vartriangle_\mu .$$

Продолжая такие рассуждения, определим возрастающую последовательность, удовлетворяющую рекуррентному соотношению (2.7).

Вследствие правильности конуса E_+ построенная последовательность сходится, обозначим ее предел через $\overline{\varsigma} = \lim_{i\to\infty} \varsigma_i$. Имеем $\overline{\varsigma} \in \mathfrak{I}^*$. В силу условия $g \in \mathrm{Cl}(\mathfrak{I}^*, \mathfrak{D})$ из соотношения (2.5) следует, что $\overline{\varsigma}$ является решением уравнения (2.6). $\square$

Теперь получим условия существования решения включения (2.1) в виде теоремы сравнения с модельным уравнением (2.2). Будем обозначать через $\mathrm{Sol}_{\mathfrak{B}}(G)$ множество решений включения (2.1), принадлежащих некоторому заданному непустому множеству $\mathfrak{B} \subset X$.

Определение ниже является аналогом определения 3 (в случае одноэлементного множества $\mathfrak{D}$) для многозначного отображения.

О п р е д е л е н и е 4. Будем говорить, что отображение $G : X \times X \rightrightarrows Y$ является *замкнутым относительно множеств* $\mathfrak{B}$ *и* $\{\tilde{y}\} \subset Y$, если для любых двух последовательностей $\{x_i\}, \{x_i'\} \subset \mathfrak{B}$, сходящихся к одному и тому же пределу $x = \lim_{i\to\infty} x_i = \lim_{i\to\infty} x_i'$ и таких, что $G(x_i, x_i') \ni \tilde{y}$ $\forall i \in \mathbb{N}$, для предела x этих последовательностей выполнено $G(x, x) \ni \tilde{y}$.

Следующее определение распространяет на многозначные отображения введенное в ([16], определение 4) для однозначных отображений в-метрических пространств понятие мажорантного отображения.

О п р е д е л е н и е 5. Пусть заданы $\mu_0 \in M_+$, $x_0 \in X$, $\overline{e} \in E_+$. Будем говорить, что *отображение* $g : E_+ \times E_+ \to M$ *мажорирует* (*с параметром* μ_0) *многозначное отображение* $G : X \times X \rightrightarrows Y$ *на шаре* $\mathfrak{B} := B_X(x_0, \overline{e})$, если G, g как отображения первого аргумента удовлетворяют соотношению

$$\forall e \in \mathfrak{I} := [0, \overline{e}]_E \ \ \forall x \in B_X(x_0, e) \ \ \forall \Delta \in [0, \overline{e} - e]_E \\ \exists y \in G(x, x) \ \ \mathcal{P}_Y^{M_+}\big(\tilde{y}, y\big) \le g(e + \Delta, e) - g(e, e) \implies \\ \exists\, u \in \mathfrak{B} \ \ G(u, x) \ni \tilde{y}, \ \ \mathcal{P}_X^{E_+}(u, x) \le \Delta, \quad (2.8)$$

а как отображения второго аргумента — соотношению

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall e \in \mathfrak{I} \ \ \forall \varsigma \in [0, e]_E \ \ \forall x \in B_X(x_0, e) \ \ \forall u \in B_X(x_0, \varsigma) \ \ \mathcal{P}_X^{E_+}(u, x) \le e - \varsigma \implies \\ \forall y \in G(x, u) \ \ \exists z \in G(x, x) \ \ \mathcal{P}_Y^{M_+}\big(y, z\big) \le g(e, \varsigma) - g(e, e) + \varepsilon\mu_0. \quad (2.9)$$

Несложно заметить, что описываемое определением 5 свойство отображений g, G сохраняется при "уменьшении" отрезка $\mathfrak{I}$, т. е. справедливо

Предложение 1. *Если отображение g мажорирует отображение G на шаре $B_X(x_0, \overline{e})$, то при любом $e' \in [0, \overline{e}]_E$ отображение g мажорирует отображение G также и на шаре $B_X(x_0, e')$ (с тем же параметром μ_0).*

Теорема 1. *Предположим, что множество $\mathrm{Sol}_{E_+}(g)$ решений уравнения (2.2) не пусто, элемент $\varsigma^* \in E_+$ является минимальным в этом множестве. Далее предположим, что отображение G является замкнутым относительно множеств $\mathfrak{B}^* := B_X(x_0, \varsigma^*)$, $\{\tilde{y}\}$, и для некоторого элемента $y_0 \in G(x_0, x_0)$ имеет место неравенство*

$$\mathcal{P}_Y^{M_+}(\tilde{y}, y_0) \le -g(0, 0). \quad (2.10)$$

Положим $\overline{\mu} := -g(0,0) - \mathcal{P}_Y^{M_+}(\tilde{y}, y_0)$, $\mathfrak{D} = [-\overline{\mu}, 0]_M$, $\mathfrak{I}^* = [0, \varsigma^*]_E$. Пусть выполнены соотношения $g \in \mathrm{Cl}(\mathfrak{I}^*, \mathfrak{D})$, $g(\cdot, \nu) \in \mathrm{Cov}(\mathfrak{I}^*, \mathfrak{D})$ и $g(\nu, \cdot) \in \mathrm{Ant}(\mathfrak{I}^*, \mathfrak{D})$ при любом $\nu \in \mathfrak{I}^*$. В приведенных допущениях, если отображение g мажорирует отображение G на шаре $\mathfrak{B}^*$ с параметром $\overline{\mu}$, то множество $\mathrm{Sol}_{\mathfrak{B}^*}(G)$ принадлежащих шару $\mathfrak{B}^*$ решений включения (2.1) не пусто, и для любого $\delta \in (0,1)$ существует $x^* \in \mathrm{Sol}_{\mathfrak{B}^*}(G)$ такой, что $\mathcal{P}_X^{E_+}(x_0, x^*) \le \overline{\varsigma}_\delta$, где $\overline{\varsigma}_\delta \in [0, \varsigma^*]$ — решение уравнения

$$\overline{g}_\delta(\varsigma, \varsigma) = 0 \quad (2.11)$$

с правой частью, определяемой отображением $\overline{g}_\delta(\nu, e) = g(\nu, e) + \overline{\mu} - \delta\overline{\mu}$, $\nu, e \in E_+$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\mu_0 := \overline{\mu} - \delta\overline{\mu}$, $\triangle_\mu := \delta\overline{\mu}$. Согласно лемме 3 существует возрастающая последовательность $\{\varsigma_i\} \subset \mathfrak{I}^*$, $\varsigma_0 = 0$, удовлетворяющая соотношению

$$\overline{g}_\delta(\varsigma_i, \varsigma_{i-1}) + 2^{-i} \triangle_\mu = 0, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (2.12)$$

и сходящаяся к некоторому решению $\overline{\varsigma}_\delta$ уравнения (2.11).

Покажем, что существует последовательность $\{x_i\} \subset \mathfrak{B}^*$, для которой при любом i выполнено

$$\begin{aligned} & G(x_{i+1}, x_i) \ni \tilde{y}, \\ & \exists y_i \in G(x_i, x_i) \ \ \mathcal{P}_Y^{M_+}\big(\tilde{y}, y_i\big) \le g(\varsigma_{i+1}, \varsigma_i) - g(\varsigma_i, \varsigma_i), \\ & \mathcal{P}_X^{E_+}(x_0, x_i) \le \varsigma_i, \ \ \mathcal{P}_X^{E_+}(x_i, x_{i+1}) \le \varsigma_{i+1} - \varsigma_i. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Пусть сначала $i=0$. Согласно (2.12) выполнено

$$0=g(\varsigma_1,\varsigma_0)+(1-\delta)\overline{\mu}+2^{-1}\,\triangle_{\mu}=g(\varsigma_1,\varsigma_0)+(1-\delta)\overline{\mu}+2^{-1}\delta\overline{\mu}\le g(\varsigma_1,\varsigma_0)+\overline{\mu}.$$

Учитывая это соотношение, из предположения (2.10) получаем $\mathcal{P}_Y^{M+}(\tilde{y},y_0)=-g(\varsigma_0,\varsigma_0)-\overline{\mu}\le g(\varsigma_1,\varsigma_0)-g(\varsigma_0,\varsigma_0)$. Отсюда в силу условия (2.8), полагая в котором $x:=x_0$, $e:=\varsigma_0$, $\Delta:=\varsigma_1-\varsigma_0$, получаем, что существует $x_1\in\mathfrak{B}^*$ такой, что

$$G(x_1,x_0)\ni\tilde{y},\quad \mathcal{P}_X^{E+}(x_1,x_0)\le\varsigma_1-\varsigma_0=\varsigma_1.$$

Теперь пусть $i=1$. Поскольку g мажорирует отображение G, из соотношения (2.9), если в нем положить $\varepsilon:=2^{-2}$, $e:=\varsigma_1$, $\varsigma:=\varsigma_0$, $x:=x_1$, $u:=x_0$, установим существование $y_1\in G(x_1,x_1)$ такого, что

$$\mathcal{P}_Y^{M+}(\tilde{y},y_1)\le g(\varsigma_1,\varsigma_0)-g(\varsigma_1,\varsigma_1)+2^{-2}\delta\overline{\mu}. \tag{2.14}$$

Согласно (2.12) имеем $g(\varsigma_1,\varsigma_0)-g(\varsigma_2,\varsigma_1)=\overline{g}_\delta(\varsigma_1,\varsigma_0)-\overline{g}_\delta(\varsigma_2,\varsigma_1)=-2^{-1}\delta\overline{\mu}+2^{-2}\delta\overline{\mu}=-2^{-2}\delta\overline{\mu}$. В силу этого соотношения неравенство (2.14) запишем в виде

$$\mathcal{P}_Y^{M+}(\tilde{y},y_1)\le g(\varsigma_2,\varsigma_1)-g(\varsigma_1,\varsigma_1).$$

Поскольку $\varsigma_1\ge\mathcal{P}_X^{E+}(x_0,x_1)$, имеем $x_1\in B_X(x_0,\varsigma_1)$. В силу условия (2.8), полагая в котором $x:=x_1$, $e:=\varsigma_1$, $\Delta:=\varsigma_2-\varsigma_1$, получаем, что существует $x_2\in\mathcal{B}$ такой, что

$$G(x_2,x_1)=\tilde{y},\quad \mathcal{P}_X^{E+}(x_2,x_1)\le\varsigma_2-\varsigma_1,\quad \mathcal{P}_X^{E+}(x_2,x_0)\le\varsigma_2-\varsigma_1+\varsigma_1-\varsigma_0=\varsigma_2.$$

Таким образом, определены x_1 и x_2 так, что соотношения (2.13) выполнены при $i=0$ и $i=1$. Продолжая аналогичные рассуждения, по индукции определим последовательность $\{x_i\}\in\mathfrak{B}^*$ так, что соотношения (2.13) выполнены при всех i.

Из последнего неравенства в (2.13) имеем

$$\forall i,n\in\mathbb{N}\ \ \mathcal{P}_X^{E+}(x_i,x_{i+n})\le\sum_{l=0}^{n-1}\mathcal{P}_X^{E+}(x_{i+l},x_{i+l+1})\le\sum_{l=0}^{n-1}\bigl(\varsigma_{i+l+1}-\varsigma_{i+l}\bigr)=\varsigma_{i+n}-\varsigma_i. \tag{2.15}$$

Так как последовательность $\{\varsigma_i\}\subset\mathfrak{I}^*$ является фундаментальной, согласно (2.15) получаем, что последовательность $\{x_i\}\subset\mathfrak{B}^*$ также является фундаментальной и поэтому сходится в полном пространстве $(X,\mathcal{P}_X^{E+})$ к некоторому элементу $x^*\in X$. Поскольку шар $\mathfrak{B}^*$ является замкнутым множеством, получаем $x^*\in\mathfrak{B}^*$. А вследствие замкнутости отображения G относительно множеств $\mathfrak{B}^*$ и $\{\tilde{y}\}$ из первого соотношения в (2.13) получаем $G(x^*,x^*)\ni\tilde{y}$.

Для завершения доказательства остается заметить, что при любом i выполнены неравенства $\mathcal{P}_X^{E+}(x_0,x_i)\le\varsigma_i\le\overline{\varsigma}_\delta$, из которых следует, что $\mathcal{P}_X^{E+}(x_0,x^*)\le\overline{\varsigma}_\delta$. □

3. Приложения к интегральным включениям

Пусть mes — мера Лебега на $[0,T]$, $T>0$.

Рассмотрим интегральное включение вида

$$\Phi\biggl(t,\int\limits_0^T\mathcal{K}(t,s)x(s)ds,x(t)\biggr)\ni 0,\quad t\in[0,T], \tag{3.1}$$

относительно неизвестной измеримой (по Лебегу) функции $x:[0,T]\to\mathbb{R}^n$. Здесь функция $\mathcal{K}:[0,T]\times[0,T]\to\mathbb{R}^{k\times n}$ измерима, а многозначная функция $\Phi:[0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n\rightrightarrows\mathbb{R}^m$ имеет компактные значения и удовлетворяет условиям Каратеодори: измерима по первому аргументу и непрерывна по совокупности остальных аргументов.

Предлагаемое исследование разрешимости включения (3.1) основано на полученной выше теореме 1 сравнения операторного включения с модельным уравнением. В качестве модельного мы будем использовать уравнение

$$\varphi\big(t, \int_0^T \kappa(t,s)\varsigma(s)ds, \varsigma(t)\big) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{3.2}$$

относительно измеримой функции $\varsigma : [0,T] \to \mathbb{R}_+$. Будем предполагать, что выполнено следующее условие.

У с л о в и е 1:

- функция $\varphi : [0,T] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям Каратеодори (т. е. измерима по первому аргументу и непрерывна по совокупности второго и третьего аргументов);
- при п.в. $t \in [0,T]$ и любом $\varsigma \in \mathbb{R}_+$ функция $\varphi(t,\cdot,\varsigma) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ убывает (т. е. $\sigma_1 > \sigma_2 \Longrightarrow \varphi(t,\sigma_1,\varsigma) \le \varphi(t,\sigma_2,\varsigma)$);
- при п.в. $t \in [0,T]$ выполнено неравенство $\phi_0(t) := \varphi(t,0,0) \le 0$;
- функция $\kappa : [0,T] \times [0,T] \to \mathbb{R}_+$ измерима;
- существует такая измеримая функция $\overline{e} : [0,T] \to \mathbb{R}_+$, что

$$\int_0^T \kappa(t,s)\overline{e}(s)ds < +\infty, \quad \overline{\phi}(t) := \varphi\bigg(t, \int_0^T \kappa(t,s)\overline{e}(s)ds, \overline{e}(t)\bigg) \ge 0, \quad t \in [0,T].$$

Определим функцию $\overline{e}_0 : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ формулой $\overline{e}_0(t) := \max\big\{1, \overline{e}(t)\big\}$, $t \in [0,T]$, и соответствующее весовое пространство $L_{\overline{e}_0}$ измеримых функций $\varsigma \in L_{\overline{e}_0}$ для которых $\varsigma(\cdot)/\overline{e}_0(\cdot) \in L$, с нормой (1.2). Это пространство банахово, а конус $L_{\overline{e}_0+}$ неотрицательных функций является правильным (см. пример 2). Очевидно, выполнено $\overline{e}_0 \in L_{\overline{e}_0}$. Определим множество $\mathfrak{I} := [0,\overline{e}]_{L_{\overline{e}_0}}$. Элементами множества $\mathfrak{I}$ являются всевозможные измеримые функции со значениями в $\mathfrak{I}(t) := [0,\overline{e}(t)]$, $t \in [0,T]$.

Далее определим линейное пространство W скалярных вещественных измеримых на $[0,T]$ функций с топологией сходимости по мере и естественной упорядоченностью, порожденной конусом W_+ неотрицательных измеримых функций (см. пример 1).

Для любого $\varsigma \in \mathfrak{I}$ при п.в. $t \in [0,T]$ функция $\kappa(t,\cdot)\varsigma(\cdot)$ суммируема. Это позволяет определить отображение $g : L_{\overline{e}_0+} \times L_{\overline{e}_0+} \to W$ при $(\nu,\varsigma) \in \mathfrak{I} \times \mathfrak{I}$ соотношением

$$g(\nu,\varsigma)(t) := \varphi\bigg(t, \int_0^T \kappa(t,s)\varsigma(s)ds, \nu(t)\bigg), \quad t \in [0,T]. \tag{3.3}$$

Если же $(\nu,\varsigma) \notin \mathfrak{I} \times \mathfrak{I}$, то можем определить значение $g(\nu,\varsigma)$ произвольно; будем полагать $g(\nu,\varsigma)(t) := 1$ при п.в. $t \in [0,T]$.

Заметим, что множество тех решений уравнения (3.2), значения которых принадлежат отрезку $\mathfrak{I}(t) := [0,\overline{e}(t)]$, $t \in [0,T]$, совпадает с множеством $\mathrm{Sol}_{\mathfrak{I}}(g) \subset L_{\overline{e}_0+}$ решений уравнения (2.2), в котором отображение g на $\mathfrak{I} \times \mathfrak{I}$ определено соотношением (3.3). Следующее утверждение показывает, что определенное здесь отображение g удовлетворяет условиям лемм 1–3 и, более того, во множестве $\mathrm{Sol}_{\mathfrak{I}}(g) \subset L_{\overline{e}_0+}$ (соответственно, и во множестве решений уравнения (3.2), принимающих значения только в отрезке $[0,\overline{e}(t)]$, $t \in [0,T]$) существует наименьший элемент (в лемме 1 лишь утверждалось, что среди решений есть минимальный элемент).

Положим $\mathfrak{D} := \big[\phi_0, \overline{\phi}\big]_W$.

Лемма 4. *Пусть выполнено условие* 1. *Тогда при определении отображения* $g : L_{\overline{e}_0+} \times L_{\overline{e}_0+} \to W$ *на* $\mathfrak{I} \times \mathfrak{I}$ *формулой* (3.3) *имеем*

- *справедливы соотношения* $g \in \mathrm{Cl}(\mathfrak{I},\mathfrak{D})$, $g(\cdot,\nu) \in \mathrm{Cov}(\mathfrak{I},\mathfrak{D})$ *и* $g(\nu,\cdot) \in \mathrm{Ant}(\mathfrak{I},\mathfrak{D})$ *при любом* $\nu \in \mathfrak{I}$;
- *множество* $\mathrm{Sol}_{\mathfrak{I}}(g)$ *не пусто, замкнуто в* $L_{\overline{e}_0}$ *и содержит наименьший элемент* $\varsigma^* \in \mathrm{Sol}_{\mathfrak{I}}(g)$;
- *при любых* $\mu_0 \in \big[0,-g(0,0)\big]_W$, $\triangle_\mu \in \big[0,-g(0,0)-\mu_0\big]_W$, *для отображения* $\overline{g} : L_{\overline{e}_0+} \times L_{\overline{e}_0+} \to W$, $\overline{g}(\nu,e) = g(\nu,e)+\mu_0$, $\nu, e \in L_{\overline{e}_0+}$, *уравнение* $\overline{g}(\varsigma,\varsigma)=0$ *имеет решение на множестве* $\mathfrak{I}^* := [0,\varsigma^*]_{L_{\overline{e}_0}}$, *т. е.* $\mathrm{Sol}_{\mathfrak{I}^*}(\overline{g}) \neq \varnothing$, *и, кроме того, существует возрастающая последовательность* $\{\varsigma_i\} \subset \mathfrak{I}^*$ *с начальным элементом* $\varsigma_0 = 0$, *которая удовлетворяет соотношению*
$$\overline{g}(\varsigma_i,\varsigma_{i-1}) + 2^{-i}\triangle_\mu = 0, \quad i \in \mathbb{N},$$
и сходится к некоторому $\overline{\varsigma} \in \mathrm{Sol}_{\mathfrak{I}^*}(\overline{g})$.

Доказательство. Докажем, что $g \in \mathrm{Cl}(\mathfrak{I},\mathfrak{D})$. Пусть заданы две возрастающие последовательности $\{e_i\} \subset \mathfrak{I}$, $\{e_i'\} \subset \mathfrak{I}$ такие, что $\big\{g(e_i',e_i)\big\} \subset \mathfrak{D}$, $e = \lim_{i\to\infty} e_i = \lim_{i\to\infty} e_i'$ и $m = \lim_{i\to\infty} g(e_i',e_i)$. Из сходимости по норме пространства $L_{\overline{e}_0}$ возрастающих последовательностей следует их сходимость почти всюду, поэтому $e_i(t) \to e(t)$, $e_i'(t) \to e(t)$ при п.в. $t \in [0,T]$. Так как $\displaystyle\int_0^T \kappa(t,s)\overline{e}(s)ds < +\infty$ и $0 \le \kappa(t,s)e_i'(s) \le \kappa(t,s)\overline{e}(s)$, в силу теоремы Лебега о предельном переходе получаем $\displaystyle\int_0^T \kappa(t,s)e_i'(s)ds \to \int_0^T \kappa(t,s)e(s)ds$, $t \in [0,T]$. А поскольку функция φ непрерывна по совокупности второго и третьего аргументов, при п.в. $t \in [0,T]$ имеем
$$g(e_i,e_i')(t) = \varphi\bigg(t, \int\limits_0^T \kappa(t,s)e_i'(s)ds, e_i(t)\bigg) \to \varphi\bigg(t, \int\limits_0^T \kappa(t,s)e(s)ds, e(t)\bigg) = g(e,e)(t).$$
Таким образом, доказано, что $g \in \mathrm{Cl}(\mathfrak{I},\mathfrak{D})$.

Докажем, что $g(\cdot,\nu) \in \mathrm{Cov}(\mathfrak{I},\mathfrak{D})$ при любом $\nu \in \mathfrak{I}$. Пусть для некоторых $e \in \mathfrak{I}$, $m \in \mathfrak{D}$ выполнено неравенство $g(e,\nu) \le m$, т. е. $\varphi\Big(t, \displaystyle\int_0^T \kappa(t,s)\nu(s)ds, e(t)\Big) \le m(t)$, $t \in [0,T]$. Вследствие убывания функции φ по второму аргументу получаем
$$m(t) \le \overline{\phi}(t) = \varphi\bigg(t, \int\limits_0^T \kappa(t,s)\overline{e}(s)ds, \overline{e}(t)\bigg) \le \varphi\bigg(t, \int\limits_0^T \kappa(t,s)\nu(s)ds, \overline{e}(t)\bigg), \quad t \in [0,T].$$
Из приведенных неравенств в силу непрерывности функции φ по третьему аргументу следует включение
$$m(t) \in \varphi\bigg(t, \int\limits_0^T \kappa(t,s)\nu(s)ds, [e(t),\overline{e}(t)]\bigg), \quad t \in [0,T].$$
Согласно лемме Филиппова об измеримом выборе (см., например, лемму 1.5.15 из [29]) существует измеримая функция $e' \in [e,\overline{e}]_{L_{\overline{e}_0}}$ такая, что
$$m(t) = \varphi\bigg(t, \int\limits_0^T \kappa(t,s)\nu(s)ds, e'(t)\bigg), \quad t \in [0,T].$$
Итак, $m = g(e',\nu)$, и, таким образом, доказано, что $g(\cdot,\nu) \in \mathrm{Cov}(\mathfrak{I},\mathfrak{D})$.

Включение $g(\nu,\cdot) \in \mathrm{Ant}(\mathfrak{I},\mathfrak{D})$ при любом $\nu \in \mathfrak{I}$ прямо следует из убывания функции φ по второму аргументу и неотрицательности функции κ.

Для отображения $g : L_{\overline{e}_0+} \times L_{\overline{e}_0+} \to W$, определенного на $\mathfrak{I} \times \mathfrak{I}$ формулой (3.3), выполнены все предположения леммы 1. Согласно этой лемме множество $\mathrm{Sol}_{\mathfrak{I}}(g)$ не пусто, замкнуто в $L_{\overline{e}_0}$ и содержит минимальный элемент $\varsigma^* \in \mathrm{Sol}_{\mathfrak{I}}(g)$. Докажем, что элемент ς^* является наименьшим в $\mathrm{Sol}_{\mathfrak{I}}(g)$.

В предположении противного существует элемент $\varsigma \in \mathrm{Sol}_{\mathfrak{I}}(g)$, не сравнимый с ς^*. Определим множества $\mathfrak{T} := \{t \in [0,T] : \varsigma^*(t) \geq \varsigma(t)\}$, $\mathfrak{T}^* := \{t \in [0,T] : \varsigma^*(t) \leq \varsigma(t)\}$ и заметим, что $\mathrm{mes}\,\mathfrak{T} > 0$ и $\mathrm{mes}\,\mathfrak{T}^* > 0$, так как ς и ς^* не сравнимы. Зададим функцию

$$\overline{\eta} \in [0, \overline{\varsigma}]_{L_{\overline{e}_0}}, \quad \overline{\eta}(t) = \inf\{\varsigma^*(t), \varsigma(t)\} = \begin{cases} \varsigma(t), & t \in \mathfrak{T}, \\ \varsigma^*(t), & t \in \mathfrak{T}^*. \end{cases}$$

Для этой функции выполнены неравенства $\overline{\eta} < \varsigma^*$, $\overline{\eta} < \varsigma$. При $t \in \mathfrak{T}$ в силу убывания по второму аргументу функции φ имеем

$$\varphi\Big(t, \int_0^T \kappa(t,s)\overline{\eta}(s)ds, \overline{\eta}(t)\Big) = \varphi\Big(t, \int_0^T \kappa(t,s)\overline{\eta}(s)ds, \varsigma(t)\Big) \geq \varphi\Big(t, \int_0^T \kappa(t,s)\varsigma(s)ds, \varsigma(t)\Big) = 0.$$

Аналогично, при $t \in \mathfrak{T}^*$ получаем

$$\varphi\Big(t, \int_0^T \kappa(t,s)\overline{\eta}(s)ds, \overline{\eta}(t)\Big) = \varphi\Big(t, \int_0^T \kappa(t,s)\overline{\eta}(s)ds, \varsigma^*(t)\Big) \geq \varphi\Big(t, \int_0^T \kappa(t,s)\varsigma^*(s)ds, \varsigma^*(t)\Big) = 0.$$

Доказано, что для функции $\overline{\eta} \in [0, \overline{\varsigma}]_{L_{\overline{e}_0}}$ при п.в. $t \in [0,T]$ выполнено неравенство

$$\varphi\Big(t, \int_0^T \kappa(t,s)\overline{\eta}(s)ds, \overline{\eta}(t)\Big) \geq 0.$$

Поэтому условие 1 останется выполненным, если в нем заменить $\overline{e}$ на $\overline{\eta}$. В силу доказанного выше должно существовать решение $\nu \in [0, \overline{\eta}]_{L_{\overline{e}_0}}$ уравнения (3.2) такое, что $\nu \leq \overline{\eta} < \varsigma^*$. Получено противоречие с минимальностью элемента ς^* во множестве $\mathrm{Sol}_{\mathfrak{I}}(g)$.

Заключительное утверждение доказываемой леммы прямо следует из того, что для отображения $g : L_{\overline{e}_0+} \times L_{\overline{e}_0+} \to W$, определенного формулой (3.3), выполнены все предположения леммы 1. $\square$

Теперь рассмотрим включение (3.1).

Пусть задана измеримая функция $u_0 : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ такая, что при п.в. $t \in [0,T]$ функция $\mathcal{K}(t,\cdot)u_0(\cdot)ds : [0,T] \to \mathbb{R}^k$ суммируема. Определим множество $L^n_{u_0\,\overline{e}_0}$ (см. пример 2) с в-метрикой $\mathcal{P}^{L_{\overline{e}_0+}}_{L^n_{u_0\,\overline{e}_0}} : L^n_{u_0\,\overline{e}_0} \times L^n_{u_0\,\overline{e}_0} \to L_{\overline{e}_0+}$, заданной соотношением (1.3).

Обозначим $\mathfrak{B} := B_{L^n_{u_0\,\overline{e}_0}}(u_0, \overline{e})$. Отметим, что для любого $x \in \mathfrak{B}$ функция $\mathcal{K}(t,\cdot)x(\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}^k$ суммируема при п.в. $t \in [0,T]$. Соответственно, значения функции $\int_0^T \mathcal{K}(\cdot,s)x(s)ds$ конечны почти всюду на $[0,T]$. Поэтому для любых $x, u \in \mathfrak{B}$ многозначное отображение $\mathcal{F} : [0,T] \rightrightarrows \mathbb{R}^m$

$$\mathcal{F}(t) := \Phi\Big(t, \int_0^T \mathcal{K}(t,s)x(s)ds, u(t)\Big), \quad t \in [0,T],$$

измеримо (его значениями являются компактные множества из $\mathbb{R}^m$).

Далее, рассмотрим пространство W^m измеримых функций $y : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ (см. пример 1) с в-метрикой $\mathcal{P}^{W_+}_{W^m} : W^m \times W^m \to W_+$, заданной формулой (1.1). Определим многозначное отображение $G : L^n_{u_0\,\overline{e}_0} \times L^n_{u_0\,\overline{e}_0} \rightrightarrows W^m$, полагая, что $G(u,x)$ при $(u,x) \in \mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$ — это множество всех измеримых сечений многозначного отображения $\mathcal{F}$, т. е.

$$G(u,x) := \left\{ y \in W^m : y(t) \in \Phi\Big(t, \int\limits_0^T \mathcal{K}(t,s)x(s)ds, u(t)\Big),\ t \in [0,T] \right\}. \tag{3.4}$$

Если же $(u,x) \notin \mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$, то можем определить значение $G(u,x)$ произвольно; будем полагать $G(u,x)(t) := \{1\}$ при п.в. $t \in [0,T]$.

Множество решений включения (3.1), значения которых принадлежат шару $\mathfrak{B}(t) := B_{\mathbb{R}^n}\big(u_0(t), \overline{e}(t)\big)$, $t \in [0,T]$, совпадает с множеством $\mathrm{Sol}_{\mathfrak{B}}(G) \subset L^n_{u_0\,\overline{e}_0}$ решений включения (2.1), в котором отображение G на $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$ определено соотношением (3.4).

Сформулируем достаточные условия на функции φ, Φ, при выполнении которых отображение (3.3) мажорирует многозначное отображение (3.4) на шаре $\mathfrak{B} \subset L^n_{u_0\,\overline{e}_0}$.

Определим функции $z_0 \in W^k$ и $\overline{r} \in W_+$ соотношениями

$$z_0(t) := \int\limits_0^T \mathcal{K}(t,s)u_0(s)ds, \quad \overline{r}(t) := \int\limits_0^T \kappa(t,s)\overline{e}(s)ds, \quad t \in [0,T].$$

Следующее определение — аналог определения 5 из [16] для случая многозначного отображения Φ.

О п р е д е л е н и е 6. Будем говорить, что функция φ и многозначное отображение Φ удовлетворяют *условию* $\mathrm{M1}[u_0,\overline{e}]$, если при почти всех $t \in [0,T]$ выполнено соотношение

$$\begin{aligned} &\forall \varsigma \in [0,\overline{r}(t)]\ \ \forall z \in B_{\mathbb{R}^k}\big(z_0(t),\varsigma\big)\ \ \forall e \in [0,\overline{e}(t)]\ \ \forall u \in B_{\mathbb{R}^n}\big(u_0(t),e\big)\ \ \forall \Delta \in \big[0,\overline{e}(t)-e\big] \\ &\exists y \in \Phi(t,z,u)\ \ |y|_{\mathbb{R}^m} \le \varphi(t,\varsigma,e+\Delta) - \varphi(t,\varsigma,e) \\ &\qquad\qquad \Longrightarrow\ \exists v \in B_{\mathbb{R}^n}\big(u_0(t),\overline{e}(t)\big)\ \ 0 \in \Phi(t,z,v),\ \ |u-v|_{\mathbb{R}^n} \le \Delta, \end{aligned}$$

и *условию* $\mathrm{M2}[u_0,\overline{e}]$ с параметром $\mu_0 \in W_+$, если при почти всех $t \in [0,T]$ выполнено соотношение

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0\ \ \forall e \in [0,\overline{e}(t)]\ \ \forall u \in B_{\mathbb{R}^n}\big(u_0(t),e\big) \\ &\forall \varsigma \in [0,\overline{r}(t)]\ \ \forall z \in B_{\mathbb{R}^k}\big(z_0(t),\varsigma\big)\ \ \forall \varsigma' \in [0,\varsigma]\ \ \forall z' \in B_{\mathbb{R}^k}\big(z_0(t),\varsigma'\big) \\ &\big|z-z'\big|_{\mathbb{R}^k} \le \varsigma-\varsigma'\ \Longrightarrow\ \forall y' \in \Phi(t,z',u)\ \ \exists y \in \Phi(t,z,u)\ \ \big|y'-y\big|_{\mathbb{R}^m} \le \varphi(t,\varsigma',e) - \varphi(t,\varsigma,e) + \varepsilon\mu_0. \end{aligned}$$

Лемма 5. *Предположим, что* $|\mathcal{K}(t,s)|_{\mathbb{R}^{k\times n}} \le \kappa(t,s)$ *при п.в.* $(t,s) \in [0,T]\times[0,T]$. *Если функция* φ *и многозначное отображение* Φ *удовлетворяют условию* $\mathrm{M1}[u_0,\overline{e}]$, *то для отображений* g, G, *определенных, соответственно, на* $\mathfrak{I}\times\mathfrak{I}$, $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$ *формулами* (3.3) *и* (3.4), *выполнено соотношение* (2.8). *Если* φ, Φ *удовлетворяют условию* $\mathrm{M2}[u_0,\overline{e}]$ *с параметром* μ_0, *то для отображений* g, G *выполнено соотношение* (2.9). *А при выполнении двух условий* $\mathrm{M1}[u_0,\overline{e}]$, *и* $\mathrm{M2}[u_0,\overline{e}]$ *с параметром* μ_0 *отображение* g *мажорирует многозначное отображение* G *на шаре* $\mathfrak{B}$ *с параметром* μ_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале предположим, что выполнено условие $\mathrm{M1}[u_0,\overline{e}]$, и докажем справедливость соотношения (2.8).

Пусть для $e \in [0,\overline{e}]_{L_{\overline{e}_0+}}$, $u \in B_{L^n_{u_0\,\overline{e}_0}}(u_0,e)$, $\Delta \in [0,\overline{e}-e]_{L_+}$ существует $y \in G(u,u)$ такой, что $\mathcal{P}^{W_+}_{W^m}\big(0,y\big) \le g(e+\Delta,e) - g(e,e)$, т. е.

$$\exists y \in W^m\ \ y(t) \in \Phi\big(t,z(t),u(t)\big),\quad \big|y(t)\big|_{\mathbb{R}^m} \le \varphi\big(t,\varsigma(t),e(t)+\Delta(t)\big) - \varphi\big(t,\varsigma(t),e(t)\big),\quad t \in [0,T],$$

где $z(t) := \int_0^T \mathcal{K}(t,s)u(s)ds$, $\varsigma(t) := \int_0^T \kappa(t,s)e(s)ds$. Заметим, что

$$\big|z(t) - z_0(t)\big|_{\mathbb{R}^k} = \Big|\int\limits_0^T \mathcal{K}(t,s)\big(u(s) - u_0(s)\big)ds\Big|_{\mathbb{R}^k} \leq \int\limits_0^T \kappa(t,s)\big|u(s) - u_0(s)\big|_{\mathbb{R}^n} ds$$

$$\leq \int\limits_0^T \kappa(t,s)\overline{e}(s)ds = \overline{r}(t), \quad \varsigma(t) = \int\limits_0^T \kappa(t,s)e(s)ds \leq \int\limits_0^T \kappa(t,s)\overline{e}(s)ds = \overline{r}(t).$$

Вследствие условия $\mathrm{M1}[u_0, \overline{e}]$ при почти каждом $t \in [0,T]$ существует такой $v \in B_{\mathbb{R}^n}\big(u_0(t), \overline{e}(t)\big)$, что $0 \in \Phi(t, z(t), v)$ и $|v - u(t)|_{\mathbb{R}^n} \leq \Delta(t)$. Отсюда следует включение

$$0 \in \Phi\Bigg(t, \int\limits_0^T \mathcal{K}(t,s)u(s)ds, B_{\mathbb{R}^n}\big(u(t), \Delta(t)\big)\Bigg), \quad t \in [0,T],$$

а из этого включения согласно лемме Филиппова об измеримом выборе получаем, что для некоторой измеримой функции $v \in B_{L^n_{u_0\,\overline{e}_0}}(u, \Delta)$ выполнено

$$0 \in \Phi\Bigg(t, \int\limits_0^T \mathcal{K}(t,s)u(s)ds, v(t)\Bigg) = G(v,u)(t), \quad t \in [0,T].$$

Итак, справедливость соотношения (2.8) установлена.

Проверку остальных утверждений леммы 5 мы опускаем вследствие их очевидности. $\square$

Леммы 4, 5 позволяют применить теорему 1 для исследования включения (3.1) методом сравнения с модельным уравнением (3.2). Таким образом получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть функция φ удовлетворяет условию 1 и для некоторой измеримой функции $y_0 : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ такой, что $y_0(t) \in \Phi\Big(t, \int_0^T \mathcal{K}(t,s)u_0(s)ds, u_0(t)\Big)$, $t \in [0,T]$, справедливо неравенство*

$$|y_0(t)|_{\mathbb{R}^m} \leq -\varphi(t,0,0), \quad t \in [0,T].$$

Положим $\overline{\mu}(t) := -\varphi(t,0,0) - |y_0(t)|_{\mathbb{R}^m}$, $t \in [0,T]$. Пусть функция φ и многозначное отображение Φ удовлетворяют условию $\mathrm{M1}[u_0, \overline{e}]$ и условию $\mathrm{M2}[u_0, \overline{e}]$ с параметром $\overline{\mu}$, а для функций $\mathcal{K}$ и κ выполнено $|\mathcal{K}(t,s)|_{\mathbb{R}^{k\times n}} \leq \kappa(t,s)$ при п.в. $(t,s) \in [0,T]\times[0,T]$. Тогда

- *множество решений уравнения (3.2) со значениями, принадлежащими отрезку $\mathfrak{I}(t) = [0, e(t)]$, не пусто, и в этом множестве есть наименьший элемент ς^*,*

- *при любом $\delta \in (0,1)$ существует решение ς_δ уравнения*

$$\varphi\Bigg(t, \int\limits_0^T \kappa(t,s)\varsigma(s)ds, \varsigma(t)\Bigg) + (1-\delta)\overline{\mu}(t) = 0, \quad t \in [0,T],$$

  такое, что $\varsigma_\delta(t) \in [0, \varsigma^*(t)]$, $t \in [0,T]$, и существует решение x^* включения (3.1) такое, что $|x^*(t) - u_0(t)|_{\mathbb{R}^n} \leq \varsigma_\delta(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1959. 211 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: Dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
4. **Кряжимский А.В., Максимов В.И.** О сочетании процессов реконструкции и гарантирующего управления // Автоматика и телемеханика. 2013. Вып. 8. С. 5–21.
5. **Хлопин Д.В., Ченцов А.Г.** Об одной задаче управления с неполной информацией: квазистратегии и процедуры управления с моделью // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 12. С. 1652–1666.
6. **Пилия А.Д., Федоров В.И.** Особенности поля электромагнитной волны в холодной анизотропной плазме с двумерной неоднородностью // Журнал эксперимент. и теорет. физики. 1971. Т. 60, № 1. С. 389–399.
7. **Давыдов А.А.** Особенности предельных направлений типичных неявных ОДУ высших порядков // Тр. МИАН. 2002. Т. 236. С. 134–141.
8. **Власенко Л.А., Руткас А.Г.** О дифференциальной игре в системе, описываемой неявным дифференциально-операторным уравнением // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 6. С. 785–795. doi: 10.1134/S0374064115060114
9. **Канторович Л.В.** Некоторые дальнейшие применения метода Ньютона // Вестн. Ленинград. университета. 1957. № 7. С. 68–103.
10. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
11. **Zubelevich O.** Coincidence points of mappings in Banach spaces // Fixed Point Theory. 2020. Vol. 21, no. 1. P. 389–394. doi: 10.24193/fpt-ro.2020.1.27
12. **Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.** Теорема Канторовича о неподвижных точках в метрических пространствах и точки совпадения // Тр. МИАН. 2019. Т. 304. С. 68–82. doi: 10.4213/tm3962
13. **Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.** On the stability of fixed points and coincidence points of mappings in the generalized Kantorovichs theorem // Topology Appl. 2020. Vol. 275. doi: 10.1016/j.topol.2019.107030
14. **Жуковский Е.С.** О методе сравнения в исследовании уравнений в метрических пространствах // Мат. заметки. 2020. Т. 108, № 5. С. 702–713. doi: 10.4213/mzm12664
15. **Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E., Zhukovskaya Z.T.** Kantorovich's fixed point theorem and coincidence point theorems for mappings in vector metric spaces // Set-Valued Var. Anal. 2022. Vol. 30. P. 397–423. doi: 10.1007/s11228-021-00588-y
16. **Zhukovskiy E., Panasenko E.** Extension of the Kantorovich theorem to equations in vector metric spaces: applications to functional differential equations // Mathematics. 2024. Vol. 12, no. 1. Art. no. 64. P. 1–17. doi:10.3390/math12010064
17. **Перов А.И.** Многомерная версия принципа обобщенного сжатия М. А. Красносельского // Функц. анализ и его приложения. 2010. Т. 44, № 1. С. 83–87. doi: 10.4213/faa2953
18. **Жуковский Е.С.** О точках совпадения векторных отображений // Изв. вузов. Математика. 2016. № 10. С. 14–28.
19. **Жуковский Е.С.** О точках совпадения многозначных векторных отображений метрических пространств // Мат. заметки. 2016. Т. 100, № 3. С. 344–362. doi: 10.4213/mzm10675
20. **Жуковский Е.С.** О возмущениях векторно накрывающих отображений и системах уравнений в метрических пространствах // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 297–311. doi: 10.17377/smzh.2016.57.206
21. **Panasenko E.A.** On operator inclusions in spaces with vector-valued metrics // Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.) 2023. Vol. 323, Suppl 1. S222–S242. doi: 10.1134/S0081543823060196
22. **Фоменко Т.Н., Ястребов К.С.** Метод поиска нулей функционалов в коническом метрическом пространстве и вопросы его устойчивости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2020. № 2. С. 8–15.
23. **Красносельский М.А., Забрейко П.П.** Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975. 511 с.

24. **Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.** Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology Appl. 2015. Vol. 179, no. 1. P. 13–33. doi: 10.1016/j.topol.2014.08.013
25. **Жуковская Т.В., Филиппова О.В., Шиндяпин А.И.** О распространении теоремы Чаплыгина на дифференциальные уравнения нейтрального типа // Вестник российских университетов. Математика. 2019. Т. 24, вып. 127. С. 272–280. doi: 10.20310/2686-9667-2019-24-127-272-280
26. **Жуковская Т.В., Жуковский Е.С., Серова И.Д.** Некоторые вопросы анализа отображений метрических и частично упорядоченных пространств // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25, вып. 132. С. 345–358. doi: 10.20310/2686-9667-2020-25-132-345-358
27. **Burlakov E.O., Panasenko E.A., Serova I.D., Zhukovskiy E.S.** On order covering set-valued mappings and their applications to the investigation of implicit differential inclusions and dynamic models of economic processes // Advances in Systems Science and Applications. 2022. Vol. 22, no. 1. P. 176–191. doi: 10.25728/assa.2022.22.1.1225
28. **Серова И.Д.** Исследование краевой задачи для дифференциального включения // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28, вып. 144. С. 395–405. doi: 10.20310/2686-9667-2023-28-144-395-405
29. **Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.** Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: ЛИБРОКОМ, 2011. 224 с.

Поступила 15.02.2024
После доработки 26.02.2024
Принята к публикации 4.03.2024

Жуковский Евгений Семенович
д-р физ.-мат. наук, профессор
директор НИИ математики, физики и информатики
Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина
г. Тамбов
e-mail: zukovskys@mail.ru

Панасенко Елена Александровна
канд. физ.-мат. наук, доцент
зав. кафедрой функционального анализа
Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина
г. Тамбов
e-mail: panlena_t@mail.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Stability of motion. Applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay.* Stanford, Stanford Univ. Press, 1963, 188 p. Original Russian text published in Krasovskii N.N., *Nekotorye zadachi teorii ustoichivosti dvizheniya*, Moscow, Gos. Izd. Fiz. Mat. Lit., 1959, 211 p.
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*, NY, Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . This book is substantially revised version of the monograph: Krasovskii N.N., Subbotin A.I., *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
3. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. *Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions*, London, Gordon and Breach, 1995, 625 p. ISBN: 978-2881249440 .
4. Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I. On combination of the processes of reconstruction and guaranteeing control. *Autom. Remote Control*, 2013, vol. 74, no. 8, pp. 1235–1248. doi: 10.1134/S0005117913080018
5. Khlopin D.V., Chentsov A.G. On a control problem with incomplete information: quasi-strategies and control procedures with a model. *Differ. Equ.*, 2005, vol. 41, no. 12, pp. 1727–1742. doi: 10.1007/s10625-006-0009-0
6. Piliya A.D., Fedorov V.I. Singularities of the field of an electromagnetic wave in a cold anisotropic plasma with two-dimensional inhomogeneity. *Soviet Physics — JETP*, 1971, vol. 33, pp. 210.

7. Davydov A.A. Limiting directions singularities of generic implicit higher-order ODEs. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2002, vol. 236, pp. 124–131.
8. Vlasenko L.A., Rutkas A.G. On a differential game in a system described by an implicit differential-operator equation. *Differ. Equ.*, 2015, vol. 51, no. 6, pp. 798–807. doi: 10.1134/S0012266115060117
9. Kantorovich L.V. Some further applications of the Newton method for functional equations. *Vestn. Leningr. Univ.*, 1957, vol. 2, no. 7, pp. 68–103 (in Russian).
10. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Functional Analysis*. Transl. from the 2nd Russian ed. NY, Pergamon Press, 1982, 604 p. doi: 10.1016/C2013-0-03044-7. Original Russian text (3rd ed.) published in Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyi analiz*, Moscow, Nauka Publ., 1984, 752 p.
11. Zubelevich O. Coincidence points of mappings in Banach spaces. *Fixed Point Theory*, 2020, vol. 21, no. 1, pp. 389–394. doi: 10.24193/fpt-ro.2020.1.27
12. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Kantorovichs fixed point theorem in metric spaces and coincidence points. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2019, vol. 304, suppl. 1, pp. 60–73. doi: 10.1134/S008154381901005X
13. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. On the stability of fixed points and coincidence points of mappings in the generalized Kantorovichs theorem. *Topol. Appl.*, 2020, vol. 275, art. no. 107030. doi: 10.1016/j.topol.2019.107030
14. Zhukovskiy E.S. Comparison method for studying equations in metric spaces. *Math. Notes*, 2020, vol. 108, no. 5, pp. 679–687. doi: 10.1134/S0001434620110061
15. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E., Zhukovskaya Z.T. Kantorovich's fixed point theorem and coincidence point theorems for mappings in vector metric spaces. *Set-Valued Var. Anal.*, 2022, vol. 30, pp. 397–423. doi: 10.1007/s11228-021-00588-y
16. Zhukovskiy E., Panasenko E. Extension of the Kantorovich theorem to equations in vector metric spaces: applications to functional differential equations. *Mathematics*, 2024, vol. 12, no. 1, art. no. 64. doi: 10.3390/math12010064
17. Perov A.I. Multidimensional version of M. A. Krasnoselskii's generalized contraction principle. *Funct. Anal. Appl.*, 2010, vol. 44, no. 1, pp. 69–72. doi: 10.1007/s10688-010-0008-z
18. Zhukovskiy E.S. On coincidence points for vector mappings. *Russian Math.*, 2016, vol. 60, no. 10, pp. 10–22. doi: 10.3103/S1066369X16100030
19. Zhukovskiy E.S. On coincidence points of multivalued vector mappings of metric spaces. *Math. Notes*, 2016, vol. 100, no. 3, pp. 363–379. doi: 10.1134/S0001434616090030
20. Zhukovskii E.S. Perturbations of vectorial coverings and systems of equations in metric spaces. *Sib. Math. J.*, 2016, vol. 57, no. 2, pp. 230–241. doi: 10.1134/S0037446616020063
21. Panasenko E.A. On operator inclusions in spaces with vector-valued metrics. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2023, vol. 323, suppl. 1, pp. S222–S242. doi: 10.1134/S0081543823060196
22. Fomenko T.N., Yastrebov K.S. The method of searching for zeros of functionals on a conic metric space and its stability issues. *Moscow Univ. Math. Bull.*, 2020, vol. 75, no. 2, pp. 58–64. doi: 10.3103/S0027132220020023
23. Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P. *Geometrical methods of nonlinear analysis*. Berlin, Springer, 1984, 412 p. ISBN: 978-3-642-69411-0 . Original Russian text published in Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P., *Geometricheskie metody nelineinogo analiza*, Moscow, Nauka publ., 1975, 511 p.
24. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces. *Topol. Appl.*, 2015, vol. 179, pp. 13–33. doi: 10.1016/j.topol.2014.08.013
25. Zhukovskaya T.V., Filippova O.V., Shindyapin A.I. On the extension of Chaplygin's theorem to the differential equations of neutral type. *Russian Universities Reports. Mathematics*, 2019, vol. 24, no. 127, pp. 272–280. doi: 10.20310/2686-9667-2019-24-127-272-280
26. Zhukovskaya T.V., Zhukovskiy E.S., Serova I.D. Some questions of the analysis of mappings of metricand partially ordered spaces. *Vestnik Ross. Univ. Mat.*, 2020, vol. 25, no. 132, pp. 345–358 (in Russian). doi: 10.20310/2686-9667-2020-25-132-345-358
27. Burlakov E.O., Panasenko E.A., Serova I.D., Zhukovskiy E.S. On order covering set-valued mappings and their applications to the investigation of implicit differential inclusions and dynamic models of economic processes. *Advances in Systems Science and Appl.*, 2022, vol. 22, no. 1, pp. 176—191. doi: 10.25728/assa.2022.22.1.1225
28. Serova I.D. Study of the boundary value problem for a differential inclusion. *Vestnik Ross. Univ. Mat.*, 2023, vol. 28, no. 144, pp. 395–405 (in Russian). doi: 10.20310/2686-9667-2023-28-144-395-405

29. Borisovich Yu. G., Gel'man B. D., Myshkis A. D., Obukhovskii V. V. *Vvedenie v teoriyu mnogoznachnykh otobrazhenii i differentsial'nykh vklyuchenii* [Introduction to the theory of multivalued maps and differential inclusions], Moscow, Librokom, 2011, 224 p. ISBN: 978-5-397-01526-4 .

Received February 15, 2024
Revised February 26, 2024
Accepted March 4, 2024

Funding Agency: The work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 24-21-00272), https://rscf.ru/project/24-21-00272/ .

Evgeny Semenovich Zhukovskiy, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Scientific Research Institute of Mathematics, Physics, and Computer Science, Derzhavin Tambov State University, Tambov, 392000 Russia, e-mail: zukovskys@mail.ru .

Elena Aleksandrovna Panasenko, Cand. Phys.-Math. Sci., Docent, Functional Analysis Department, Derzhavin Tambov State University, Tambov, 392000 Russia, e-mail: panlena_t@mail.ru .

Cite this article as: E. S. Zhukovskiy, E. A. Panasenko. The method of comparison with a model equation in the study of inclusions in vector metric spaces. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 68–85 .