ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 2 2024

УДК 519.977

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ ПЕРЕМЕННОЙ РАЗМЕРНОСТИ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

А. С. Бортаковский

Рассматривается задача оптимального управления гибридной системой, непрерывное движение которой чередуется с дискретными изменениями (переключениями) пространств состояний и управлений. Моменты переключений определяются в результате минимизации функционала, в котором учитываются затраты на каждое переключение. Получены достаточные условия оптимальности таких систем при дополнительных ограничениях в моменты переключений. Применение условий оптимальности демонстрируется на академических примерах.

Ключевые слова: гибридные системы, переменная размерность, оптимальное управление.

A. S. Bortakovskii. Sufficient optimality conditions for hybrid systems of variable dimension with intermediate constraints.

An optimal control problem is considered for a hybrid system in which continuous motion alternates with discrete changes (switchings) of the state space and control space. The switching times are determined as a result of minimizing a functional that takes into account the costs of each switching. Sufficient conditions for the optimality of such systems under additional constraints at the switching times are obtained. The application of the optimality conditions is demonstrated using academic examples.

Keywords: hybrid systems, variable dimension, optimal control.

MSC: 34A34, 93C30

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-2-50-67

Введение

Непрерывное движение гибридных систем переменной размерности (ГСПР) описывается дифференциальными уравнениями, а мгновенные изменения состояния (переключения) — рекуррентными уравнениями или включениями. В момент переключения меняется пространство состояний системы, в частности, его размерность. Такие переключения происходят, например, при изменении количества управляемых объектов в задачах управления группами переменного состава [1; 2].

Системы управления с изменяемым пространством состояний исследовались под разными названиями: составные системы [3; 4], системы с переменной структурой и размерностью [5], системы с разветвлением структур [6], ступенчатые системы [7], сложные (многоэтапные) процессы [8], системы со сменой фазового пространства [9], гибридные системы с промежуточными условиями [10; 11]. Большинство работ посвящено линейным системам и касается вопросов устойчивости, управляемости и наблюдаемости [4; 6]. В задачах оптимального управления [3; 7; 9–11], как правило, моменты смены фазового пространства фиксированы или определяются промежуточными условиями, а переключения состояний неуправляемы. Количество переключений задано, а в первых работах [3; 7; 9] по этой тематике переключение единственное. Необходимые условия для гибридных систем с промежуточными условиями, обобщающие принцип максимума [12], получены в работах [10; 11]. В этих работах количество переключений задано, а сами переключения неуправляемы.

В данной статье рассматриваются задачи, в которых количество и моменты переключений заранее не заданы, а сами переключения управляемы. При этом не исключаются процессы с мгновенными многократными переключениями [13]. По сравнению с [1] в постановке задачи учитываются не только терминальные ограничения, но и дополнительные промежуточные ограничения. Это позволяет учитывать зависимость моментов переключений и состояний системы непосредственно перед переключениями. Иначе говоря, появляется возможность математического описания поверхностей переключений в пространстве позиций, что, как правило, необходимо для прикладных задач.

Достаточные условия оптимальности управления динамическими системами, как правило, связаны с определением функции цены (функции Гамильтона — Якоби — Беллмана (ГЯБ)). Для синтеза оптимальных ГСПР приходится искать вспомогательные функции — образующие функции цены и двухпозиционную функцию цены [1]. Дифференциальные и рекуррентные уравнения для этих вспомогательных функций выводятся на основе метода динамического программирования [14], при этом "настоящая" функция цены строится из образующих. Применение условий оптимальности демонстрируется на академических примерах быстродействия.

1. Постановка задачи

Пусть на промежутке времени $T = [t_0, t_F]$ динамическая система совершает N переключений в моменты времени $t_1, \dots, t_N$, образующие вместе с моментом t_F окончания движения неубывающую конечную последовательность $\mathcal{T} = \{t_1, \dots t_N, t_F\}$:

$$t_0 \leqslant t_1 \leqslant \dots \leqslant t_N \leqslant t_{N+1} \triangleq t_F. \tag{1.1}$$

Между неравными последовательными моментами переключений состояние системы изменяется непрерывно, согласно дифференциальному уравнению

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_i(t), u_i(t)), \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N}, \tag{1.2}$$

а в моменты переключений — дискретно в соответствии с рекуррентным уравнением

$$x_i(t_i) = g_i(t_i, x_{i-1}(t_i), v_i), \quad i = 1, \dots, N. \tag{1.3}$$

В (1.2) обозначены: $\mathcal{N} \triangleq \{i = 0, 1, \dots, N \,|t_i < t_{i+1}\}$ — множество номеров ненулевых (по длине) частичных промежутков $T_i = [t_i, t_{i+1}]$ непрерывного движения системы; $x_i(t)$ — состояние системы в момент времени $t \in T_i$, $x_i(t) \in X_i = \mathbb{R}^{n_i}$; $u_i(t)$ — управление непрерывным движением системы в момент времени $t \in T_i$, $u_i(t) \in U_i \subset \mathbb{R}^{p_i}$, U_i — заданное множество допустимых значений управления, $i \in \mathcal{N}$. Функции $f_i \colon T \times X_i \times U_i \to \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 0, 1, \dots, N$, непрерывны на всей области определения вместе с первыми частными производными по компонентам вектора x_i. При $t_i = t_{i+1}$ промежуток T_i, $i \notin \mathcal{N}$, становится точкой $T_i = \{t_i\}$, состояние $x_i(t_i)$ системы определено в этой точке, а значение $u_i(t_i)$ управления несущественно.

В уравнении (1.3) v_i — управление переключением системы в момент $t_i \in \mathcal{T}$, $v_i \in V_i \subset \mathbb{R}^{q_i}$, V_i — заданное множество допустимых управлений переключениями, $i = 1, \dots, N$. Функции $g_i \colon T \times X_{i-1} \times V_i \to \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, \dots, N$, ограничены на всей области определения.

Нижний индекс i в уравнениях движения (1.2), (1.3) показывает количество сделанных переключений. Возможное равенство последовательных моментов в (1.1) означает, что система совершает мгновенные многократные переключения [13].

Начальное состояние системы задано

$$x_0(t_0) = x_0. \tag{1.4}$$

Конечная позиция системы определяется первым достижением терминальной поверхности

$$G_N(t_F, x_N(t_F)) = 0. \tag{1.5}$$

Переключения происходят на поверхностях, которые задаются уравнениями

$$\widehat{G}_{i-1}(t_i, x_{i-1}(t_i)) = 0. \tag{1.6}$$

Функции $G_N\colon [t_0, +\infty) \times X_N \to \mathbb{R}^{r_N}$ и $\widehat{G}_{i-1}\colon [t_0, t_F] \times X_{i-1} \to \mathbb{R}^{\widehat{r}_{i-1}}$, $i = 1, \ldots, N$, определяющие промежуточные (1.6) и терминальные (1.5) ограничения, непрерывно дифференцируемые. Условие (1.4) не исключает одного или нескольких переключений в начальный момент времени t_0, поскольку первые несколько моментов переключений (1.1) могут совпадать. Терминальные условия, аналогичные (1.5), могут накладываться на левый конец траектории [15; 16] либо на оба конца траектории одновременно (например, в случае периодичности).

Множество допустимых процессов $\mathcal{D}_0(t_0, x_0)$ составляют четверки $d = (\mathcal{T}, x(\cdot), u(\cdot), \{v\})$, включающие неубывающую конечную последовательность $\mathcal{T}$ моментов переключений (1.1); последовательность $x(\cdot) \triangleq \{x_i(\cdot)\}$ абсолютно непрерывных функций $x_i\colon T_i \to X_i$, $i \in \mathcal{N}$; последовательность $u(\cdot) \triangleq \{u_i(\cdot)\}$ ограниченных измеримых функций $u_i\colon T_i \to U_i$, $i \in \mathcal{N}$; последовательность $\{v\} \triangleq \{v_i\}_{i=1}^N$ векторов $v_i \in V_i$; причем пары $(x_i(\cdot), u_i(\cdot))$, $i \in \mathcal{N}$, удовлетворяют уравнению (1.2) почти всюду на промежутке T_i; тройки $(x_{i-1}(t_i), x_i(t_i)), v_i)$, $i = 1, \ldots, N$, — рекуррентному уравнению (1.3). В начальный момент времени выполняется условие (1.4), в конечный — терминальное ограничение (1.5), в моменты переключений — промежуточные ограничения (1.6). Подчеркнем, что количество N переключений и моменты $\mathcal{T}$ не фиксированы и у разных допустимых процессов могут не совпадать. При этом не исключается случай отсутствия переключений, когда $N = 0$ и $\mathcal{T} = \{t_F\}$.

На множестве $\mathcal{D}_0(t_0, x_0)$ допустимых процессов задан функционал качества

$$I(t_0, x_0, d) = \sum_{i=0}^{N} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f_i^0(t, x_i(t), u_i(t))dt + \sum_{i=1}^{N} g_i^0(t_i, x_{i-1}(t_i), v_i) + F_N(t_F, x_N(t_F)), \tag{1.7}$$

где функции $f_i^0\colon T \times X_i \times U_i \to \mathbb{R}$, $g_i^0\colon T \times X_{i-1} \times V_i \to \mathbb{R}_+$ и $F_N\colon [t_0, +\infty) \times X_N \to \mathbb{R}$ ограничены снизу и непрерывны. Функции g_i^0 неотрицательные. Последнее условие позволяет рассматривать каждое слагаемое $g_i^0(t_i, x_{i-1}(t_i), v_i)$ в (1.7) как затраты (или "штраф") при переключении $x_{i-1}(t_i) \to x_i(t_i)$ (из состояния $x_{i-1}(t_i)$ в состояние $x_i(t_i)$). В (1.7) момент окончания t_F обозначен также через t_{N+1}.

Требуется найти минимальное значение функционала (1.7) и оптимальный процесс $d^* = (\mathcal{T}^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot), \{v^*\})$, на котором это значение достигается:

$$I(t_0, x_0, d^*) = \min_{d \in \mathcal{D}_0(t_0, x_0)} I_0(t_0, x_0, d). \tag{1.8}$$

Отметим, что управляющие параметры в задаче (1.8) образуют "*управляющий комплекс*", который включает количество переключений N, моменты переключений $t_1, \ldots, t_N$, управление непрерывным движением $u(\cdot)$, управление переключениями $\{v\}$ и момент t_F окончания процесса управления.

Если наименьшее значение (1.8) не существует, то может быть поставлена задача нахождения минимизирующей последовательности допустимых процессов [17]. Количество переключений у процессов минимизирующей последовательности может оставаться конечным или неограниченно возрастать. Бесконечное количество переключений у оптимального процесса становится невозможным, если усилить условие неотрицательности функции g_i^0 в функционале качества (1.7): $g_i^0(t_i, x_i, v_i) \geqslant \mathrm{const} > 0$. Применение таких "штрафов" исключает последовательности процессов с неограниченным ростом числа переключений как неминимизирующие.

2. Образующие функции цены

Применение метода динамического программирования [14] опирается на понятие функции цены (функции ГЯБ), которая определяется минимальным значением функционала оставшихся потерь. Обозначим через $\mathcal{D}_i^k(t,x_i)$ множество допустимых процессов, имеющих k переключений после i-го переключения и удовлетворяющих условию $x_i(t)=x_i$. Пусть оставшиеся переключения происходят в моменты $t_{i+1},\ldots,t_{i+k}$, которые образуют неубывающую последовательность на промежутке $[t,t_F]$

$$t \triangleq t_i \leqslant t_{i+1} \leqslant \ldots \leqslant t_{i+k} \leqslant t_{i+k+1} \triangleq t_F.$$

Моменты переключений $t_{i+1},\ldots,t_{i+k}$ не фиксированы и у разных допустимых процессов могут не совпадать.

На множестве $\mathcal{D}_i^k(t,x_i)$ допустимых процессов с k переключениями после i-го зададим функционал оставшихся потерь

$$I_i^k(t,x_i,d) = \sum_{j=i}^{i+k} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} f_j^0(t,x_j(t),u_j(t))dt + \sum_{j=i+1}^{i+k} g_j^0(t_j,x_{j-1}(t_j),v_j) + F_{i+k}(t_F,x_{i+k}(t_F)), \tag{2.1}$$

Определим *образующую* $\varphi_i^k(t,x_i)$ функции цены как минимальное значение функционала оставшихся потерь (2.1):

$$\varphi_i^k(t,x_i) = \min_{d\in\mathcal{D}_i^k(t,x_i)} I_i^k(t,x_i,d). \tag{2.2}$$

Иначе говоря, значение $\varphi_i^k(t,x_i)$ образующей функции цены равно значению функционала оставшихся потерь (2.1), вычисленному на оптимальном процессе, имеющему k переключений после i-го переключения и удовлетворяющему начальному условию $x_i(t)=x_i$.

Функция цены $\varphi_i(t,x_i)$ после i-го переключения, по определению, равна значению функционала оставшихся потерь (2.1), вычисленному на оптимальном процессе, удовлетворяющем начальному условию $x_i(t)=x_i$. При этом количество k оставшихся переключений у оптимального процесса будет, разумеется, оптимальное. Иначе говоря, функция цены равна минимальному значению функционала оставшихся потерь (2.1) на множестве допустимых процессов $\mathcal{D}_i(t,x_i)$ с любым количеством переключений после i-го:

$$\varphi_i(t,x_i) = \min_{k\in\mathbb{Z}_+} \min_{d\in\mathcal{D}_i^k(t,x_i)} I_i^k(t,x_i,d). \tag{2.3}$$

Таким образом, функция цены находится по своим образующим

$$\varphi_i(t,x_i) = \min_{k\in\mathbb{Z}_+} \varphi_i^k(t,x_i). \tag{2.4}$$

Здесь и далее через $\mathbb{Z}_+$ обозначено множество целых неотрицательных чисел.

3. Двухпозиционная функция цены

Для нахождения образующих применяем так называемую [18] *двухпозиционную* функцию цены $\Phi_i(\theta,x_{i\theta}|\tau,x_{i\tau})$, $i=0,1,\ldots,N$. Она определяется как решение задачи Лагранжа для системы (1.2) с фиксированными концами траектории:

$$\dot{x}_i = f_i(t,x_i(t),u_i(t)),\ \theta \leqslant t \leqslant \tau,\ x_i(\theta)=x_{i\theta},\ x_i(\tau)=x_{i\tau}, \quad \int\limits_{\theta}^{\tau} f_i^0(t,x_i(t),u_i(t))dt \to \min. \tag{3.1}$$

Эта функция как функция “стартовой” позиции $(t,x_i)\to\psi_i(t,x_i|\tau,x_{i\tau})$ удовлетворяет уравнению ГЯБ с нулевыми терминальными условиями

$$\min_{u\in U_i}\left[\frac{\partial\Phi_i(t,x_i|\tau,x_{i\tau})}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_i(t,x_i|\tau,x_{i\tau})}{\partial x_i} f_i(t,x_i,u_i) + f_i^0(t,x_i,u_i)\right] = 0,\ \Phi_i(\tau,x_{i\tau}|\tau,x_{i\tau}) = 0. \tag{3.2}$$

Учитывая “симметрию” $\Phi_i(\tau, x_{i\tau}|\theta, x_{i\theta}) = -\Phi_i(\theta, x_{i\theta}|\tau, x_{i\tau})$, можно записать “противоположное” уравнение для функции $(t, x_i) \to \Phi_i(\theta, x_{i\theta}|t, x_i)$, зависящей от “финишной” позиции. При минимизации левой части уравнения ГЯБ (3.2) получаем так называемое оптимальное *двухпозиционное* управление

$$\mathbf{u}_i(t, x_i|\tau, x_{i\tau}) = \arg\min_{u\in U_i}\left[\frac{\partial\Phi_i(t, x_i|\tau, x_{i\tau})}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_i(t, x_i|\tau, x_{i\tau})}{\partial x_i} f_i(t, x_i, u_i) + f_i^0(t, x_i, u_i)\right]. \qquad (3.3)$$

Считаем, что функция $\Phi_i(\theta, x_{i\theta}|\tau, x_{i\tau})$ определена для всех пар позиций $(\theta, x_{i\theta}) \in T \times X_i$, $(\tau, x_{i\tau}) \in T\times X_i$, $\theta \leqslant \tau$. В тех случаях, когда решение задачи (3.1) не существует, доопределяем функцию цены, полагая $\Phi_i(\theta, x_{i\theta}|\tau, x_{i\tau}) = +\infty$.

4. Уравнения для образующих функции цены

Вывод уравнений, которым удовлетворяют образующие функции цены, опирается на принцип оптимальности Беллмана, модифицированный для задач с переключениями. Согласно этому принципу оптимальный процесс с оставшимися k переключениями после первого переключения является оптимальным процессом с оставшимися $k-1$ переключениями. Предполагаем, что существуют двухпозиционная функции цены $\Phi_i(\theta, x_{i\theta}|\tau, x_{i\tau})$ и двухпозиционное управление $\mathbf{u}_i(t, x_i|\tau, x_{i\tau})$, удовлетворяющие уравнениям (3.2), (3.3).

Каждая нулевая образующая $\varphi_i^0(t, x_i)$, $i = 0, 1, \ldots$, определяется значением функционала (2.1) на оптимальном процессе без скачков. Эти функции удовлетворяют уравнению ГЯБ

$$\min_{u\in U_i}\Big[\frac{\partial\varphi_i^0(t, x_i)}{\partial t} + \frac{\partial\varphi_i^0(t, x_i)}{\partial x_i} f_i(t, x_i, u_i) + f_i^0(t, x_i, u_i)\Big] = 0 \qquad (4.1)$$

с терминальным условием

$$\varphi_i^0(t_F, x_i) = F_i(t_F, x_i) \ \text{ при } \ G_i(t_F, x_i) = 0. \qquad (4.2)$$

Остальные образующие находятся в результате рекуррентной процедуры. Пусть для некоторого натурального k известны образующие φ_i^{k-1}, $i \in \mathbb{Z}_+$. Тогда ввиду принципа оптимальности следующие образующие φ_i^k, $i \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяют уравнению

$$\varphi_i^k(t, x_i) = \min_{(\tau,\widehat{x}_i)\in\widehat{\mathbf{G}}_i}\Big\{\Phi_i(t, x_i|\tau, \widehat{x}_i) + \min_{v\in V_{i+1}}\big[\varphi_{i+1}^{k-1}(\tau, g_{i+1}(\tau, \widehat{x}_i, v)) + g_{i+1}^0(\tau, \widehat{x}_i, v)\big]\Big\}, \qquad (4.3)$$

где $\widehat{\mathbf{G}}_i = \big\{(\tau, \widehat{x}_i) \in [t, t_F] \times X_i \,|\, \widehat{G}_i(\tau, \widehat{x}_i) = 0\big\}$ — поверхность $(i+1)$-го переключения (1.6).

Действительно, непрерывное движение после i-го переключения на промежутке $[t, \tau]$ до первого из оставшихся k переключений происходит, учитывая (3.1), (3.2), при оптимальном управлении (3.3), переводящем систему из позиции (t, x_i) в позицию $(\tau, \widehat{x}_i)$, в которой совершается скачок. Оптимальность $(i+1)$-го переключения обеспечивает операция минимизации по управлению v. Поэтому выражение в фигурных скобках равно минимальному значению функционала оставшихся потерь при заданной позиции $(\tau, \widehat{x}_i)$ переключения. Первая операция минимизации в (4.3) устанавливает лучшую позицию для этого переключения. Таким образом, правая часть (4.3) дает минимальное значение функционала (2.1) с k переключениями, оставшимися после i-го переключения, которое определяет образующую (2.2). Наименьшее значение функционала (2.1) при оптимальном количестве оставшихся переключений вычисляется согласно (2.3), (2.4) по образующим функции цены

$$\min_{k\in Z_+}\ \min_{d\in\mathcal{D}_i^k(t,x_i)} I_i^k(t, x_i, d) = \varphi_i(t, x_i) = \min_{k\in\mathbb{Z}_+}\varphi_i^k(t, x_i). \qquad (4.4)$$

Начальными условиями для уравнения (4.3) служат нулевые образующие $\varphi_i^0(t, x_i)$, $i \in \mathbb{Z}_+$, т. е. функции цены для процессов без переключений (после i-го переключения). Каждая из них находится как решение уравнения ГЯБ (4.1) с терминальным условием (4.2). Однако, если известна двухпозиционная функция цены $\Phi_i(\theta, x_{i\theta}|\tau, x_{i\tau})$, то образующую $\varphi_i^0(t, x_i)$ можно получить, решая задачу конечномерной минимизации

$$\varphi_i^0(t, x_i) = \min_{(t_F, x_F) \in \mathbf{G}_i} \left[\Phi_i(t, x_i | t_F, x_F) + F_i(t_F, x_F)\right], \tag{4.5}$$

где $\mathbf{G}_i = \{(t_F, x_F) \in [t_0, +\infty) \times X_i \,|\, G_i(t_F, x_F) = 0\}$ — терминальная поверхность. Равенство (4.5) выражает связь между решениями задач с функционалами Лагранжа и Больца.

5. Оптимальное позиционное управление

При решении уравнений (4.1), (4.3) выполняются три операции минимизации. В результате минимизации левой части (4.1) определяется оптимальное позиционное управление непрерывным движением без переключений

$$\mathbf{u}_i(t, x_i) = \arg\min_{u \in U_i} \Big[\frac{\partial \varphi_i^0(t, x_i)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_i^0(t, x_i)}{\partial x_i} f_i(t, x_i, u_i) + f_i^0(t, x_i, u_i)\Big]. \tag{5.1}$$

При минимизации по v слагаемого в правой части (4.3) определяются оптимальное позиционное управление переключением системы

$$\mathbf{v}_{i+1}^k(\tau, x_i) = \arg\min_{v \in V_{i+1}} \left[\varphi_{i+1}^{k-1}(\tau, g_{i+1}(\tau, x_i, v) + g_{i+1}^0(\tau, x_i, v)\right] \tag{5.2}$$

и оптимальная позиция $(\boldsymbol{\tau}_i^k, \mathbf{x}_i^k)$ первого из оставшихся переключений

$$(\boldsymbol{\tau}_i^k, \mathbf{x}_i^k) = \arg\min_{(\tau, \widehat{x}_i) \in \widehat{\mathbf{G}}_i} \Big\{\Phi_i(t, x_i | \tau, \widehat{x}_i) + \min_{v \in V_{i+1}} \left[\varphi_{i+1}^{k-1}(\tau, g_{i+1}(\tau, \widehat{x}_i, v)) + g_{i+1}^0(\tau, \widehat{x}_i, v)\right]\Big\}, \tag{5.3}$$

т. е. оптимальный момент $\boldsymbol{\tau}_i^k(t, x_i)$ и оптимальное состояние $\mathbf{x}_i^k(t, x_i)$ перед $(i+1)$-м переключением.

Заметим, что позиционные конструкции (5.1)–(5.3) зависят не только от позиции $(t, x_i) \in T \times X_i$ системы после i-го переключения, но и от количества k оставшихся переключений. Оптимальное количество переключений определяется в (4.4):

$$\mathbf{k}_i(t, x_i) = \arg\min_{k \in \mathbb{Z}_+} \varphi_i^k(t, x_i). \tag{5.4}$$

Еще одна операция минимизации выполняется при нахождении двухпозиционного оптимального управления (3.3). Это управление непрерывным движением системы не зависит от количества оставшихся переключений. Учитывая связь (4.5) между двухпозиционной функцией цены и нулевой образующей, можно выразить управление (5.1) в задаче Больца без переключений через двухпозиционное управление (3.3)

$$\mathbf{u}_i(t, x_i) = \mathbf{u}_i(t, x_i | \boldsymbol{\tau}_i^0, \mathbf{x}_i^0),$$

где $(\boldsymbol{\tau}_i^0, \mathbf{x}_i^0)$ — оптимальная терминальная позиция процесса без переключений, начинающегося в позиции (t, x_i): $(\boldsymbol{\tau}_i^0, \mathbf{x}_i^0) = \arg\min_{(t_F, x_F) \in \mathbf{G}_i} \left[\Phi_i(t, x_i | t_F, x_F) + F_i(t_F, x_F)\right]$.

Таким образом, оптимальное позиционное управление для рассматриваемых систем представляет собой "*управляющий комплекс*" позиционных конструкций, состоящий из шести функций: $\mathbf{u}_i(t, x_i)$ и $\mathbf{u}_i(t, x_i | \tau, \widehat{x}_i)$ — оптимальные управления (5.1), (3.3) непрерывным движением системы, $\mathbf{v}_{i+1}^k(\tau, x_i)$ — оптимальное управление (5.2) $(i+1)$-м переключением, $\boldsymbol{\tau}_i^k(t, x_i)$ и $\mathbf{x}_i^k(t, x_i)$ — оптимальный момент первого из k оставшихся переключений и оптимальное состояние перед этим переключением соответственно, $\mathbf{k}_i(t, x_i)$ — оптимальное количество (5.4) переключений процесса, исходящего из позиции (t, x_i).

Позиционные конструкции (3.3), (5.1)–(5.4) позволяют найти оптимальный процесс. Действительно, пусть система находится в позиции (t_0, x_0), т. е. удовлетворяет начальным условиям $x(t_0) = x_0$. Тогда для этой позиции определяем оптимальное количество оставшихся переключений $N = \mathbf{k}_0(t_0, x_0)$, а также позицию $(t_1, x_0(t_1))$ первого переключения: $t_1 = \boldsymbol{\tau}_0^N(t_0, x_0)$, $x_0(t_1) = \mathbf{x}_0^N(t_0, x_0)$. Если $t_1 = t_0$, то система сразу совершает переключение $x_0(t_1) \to x_1(t_1) = g_1(t_1, x_0(t_1), v_1)$ под действием управления $v_1 = \mathbf{v}_1^N(t_1, x_0(t_1))$. Если $t_1 > t_0$, то на промежутке $[t_0, t_1]$ происходит непрерывное изменение состояния системы согласно уравнению (1.2) с программным управлением $u_0(t) = \mathbf{u}_0(t, x_0(t)|t_1, x_0(t_1))$, а в конце этого промежутка происходит скачок $x_0(t_1) \to x_1(t_1) = g_1(t_1, x_0(t_1), v_1)$. Таким образом, система оказывается в позиции $(t_1, x_1(t_1))$, в которой выполняются те же действия за исключением поиска оптимального количества переключений, так как оно равно $N - 1$. Если в начальной позиции (t_0, x_0) оптимальное количество переключений равно нулю, т. е. $\mathbf{k}_0(t_0, x_0) = 0$, то переключений нет, и непрерывное движение системы совершается ввиду уравнения (1.2) под действием управления $u_0(t) = \mathbf{u}_0(t, x_0(t))$.

6. Достаточные условия оптимальности

Достаточные условия оптимальности в классических задачах управления динамическими системами связаны с функцией цены (функцией ГЯБ) [14] или с функцией Кротова [17]. В формулировке предлагаемых условий вместо функции цены используется последовательность образующих функции цены, а также двухпозиционная функция цены (см. разд. 2). Традиционное оптимальное позиционное управление при этом заменяется “управляющим комплексом” позиционных конструкций (см. разд. 5).

Теорема 1. *Если для задачи* (1.8) *существуют последовательности функций* Φ_i *и* φ_i^k, $i \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{Z}_+$, *удовлетворяющих на области определения уравнениям* (3.2), (4.1)–(4.3), *то для оптимальности процесса* $d = (\mathcal{T}, x(\cdot), u(\cdot), \{v\}) \in \mathcal{D}_0(t_0, x_0)$ *с моментами переключений* $t_1, \ldots, t_N$, *образующими неубывающую последовательность* (1.1), *достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$N = \mathbf{k}_0(t_0, x_0), \tag{6.1}$$

$$u_i(t) = \mathbf{u}_i(t, x_i(t)|t_{i+1}, x_i(t_{i+1})), \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N}, \tag{6.2}$$

$$v_i = \mathbf{v}_i^{N-i+1}(t_i, x_{i-1}(t_i)), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{6.3}$$

$$t_i = \boldsymbol{\tau}_{i-1}^{N-i+1}(t_{i-1}, x_{i-1}(t_{i-1})), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{6.4}$$

$$x_{i-1}(t_i) = \mathbf{x}_{i-1}^{N-i+1}(t_{i-1}, x_{i-1}(t_{i-1})), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{6.5}$$

где $T_i = [t_i, t_{i+1}]$, $\mathcal{N} = \{i = 0, 1, \ldots, N \mid t_i < t_{i+1}\}$. *При* $i = N \in \mathcal{N}$ *управление* (6.2) *заменяется на управление* $u_N(t) = \mathbf{u}_N(t, x_N(t))$, $t \in T_N$. *При* $N = 0$ *формулы* (6.3)–(6.5) *опускаются.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сравним значение функционала $I_0(t_0, x_0, d)$, вычисленного на допустимом процессе d, со значением $\varphi_0(t_0, x_0)$ функции цены. Пусть процесс d имеет переключения (т. е. $N > 0$). На управлении v_{i+1}, полученном по формуле (6.3), достигается наименьшее значение выражения в квадратных скобках в (4.3) при $\tau = t_{i+1}$ и $\widehat{x} = x_i(t_{i+1})$:

$$\begin{gathered}\min_{v \in V_{i+1}} \left[\varphi_{i+1}^{k-1}(t_{i+1}, g_{i+1}(t_{i+1}, x_i(t_{i+1}), v)) + g_{i+1}^0(t_{i+1}, x_i(t_{i+1}), v)\right] \\ = \varphi_{i+1}^{k-1}(t_{i+1}, g_{i+1}(t_{i+1}, x_i(t_{i+1}), v_{i+1})) + g_{i+1}^0(t_{i+1}, x_i(t_{i+1}), v_{i+1}) = \varphi_{i+1}^{k-1}[t_{i+1}] + g^0[t_{i+1}].\end{gathered} \tag{6.6}$$

Здесь и далее для сокращения записей момент времени, заключенный в квадратные скобки как аргумент функции, означает, что величина этой функции вычисляется на допустимом процессе d в указанный момент времени. В (6.6) обозначены $g^0[t_{i+1}] \triangleq g^0(t_{i+1}, x(t_{i+1}), v_{i+1})$ и $\varphi_{i+1}^{k-1}[t_{i+1}] \triangleq \varphi_{i+1}^{k-1}(t_{i+1}, x_{i+1}(t_{i+1}))$, так как $x_{i+1}(t_{i+1}) = g_{i+1}(t_{i+1}, x_i(t_{i+1}), v_{i+1})$ вследствие (1.3).

Позиция $(t_{i+1}, x_i(t_{i+1}))$, удовлетворяющая условиям (6.4), (6.5), обеспечивает достижение наименьшего значения выражения в фигурных скобках в (4.3) при $\tau = t_{i+1}$ и $\widehat{x} = x_i(t_{i+1})$. Поэтому

$$\varphi_i^k[t_i] = \Phi_i(t_i, x_i(t_i)|t_{i+1}, x_i(t_{i+1})) + \varphi_{i+1}^{k-1}[t_{i+1}] + g^0[t_{i+1}]. \tag{6.7}$$

При управлении (6.2) достигается минимум в правой части уравнения (3.2) для $\tau = t_{i+1}$ и $x_{i\tau} = x_i(t_{i+1})$. Значит, для производной функции $\Phi_i^k[t] \triangleq \Phi_i^k(t, x_i(t)|t_{i+1}, x_i(t_{i+1}))$ с учетом (1.2) выполняется соотношение

$$\frac{d}{dt}\Phi_i^k[t] + f_i^0(t, x_i(t), u_i(t)) = 0. \tag{6.8}$$

Интегрируя уравнение (6.8) на промежутке $T_i = [t_i, t_{i+1}]$, получаем для нулевого терминального условия $\Phi_i^k[t_{k+1}] = 0$

$$\Phi_i^k[t_{i+1}] - \Phi_i^k[t_i] + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f_i^0(t, x_i(t), u_i(t))dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_i^k[t_i] = \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f_i^0[t]dt, \tag{6.9}$$

где $f_i^0[t] \triangleq f_i^0(t, x_i(t), u_i(t))$. Подставляя (6.9) в (6.7), приходим к равенству

$$\varphi_{i+1}^{k-1}[t_{i+1}] - \varphi_i^k[t_i] + g^0[t_{i+1}] + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f_i^0[t]dt = 0. \tag{6.10}$$

Преобразуем аналогичным образом уравнение (4.1) для функции $\varphi_N^0(t, x_N)$. При управлении $u_N(t) = \mathbf{u}_N(t, x_N(t))$ достигается минимум в (4.1), и уравнение согласно (1.2) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\varphi_N^0(t, x_N(t)) + f_N^0(t, x_N(t), u_N(t)) = 0. \tag{6.11}$$

Интегрируем уравнение (6.11) на промежутке $T_N = [t_N, t_F]$ и, учитывая терминальное условие (4.2), получаем

$$F_N[t_F] - \varphi_N^0[t_F] + \int\limits_{t_N}^{t_F} f_N^0[t]dt = 0. \tag{6.12}$$

Здесь $F_N[t_F] \triangleq F_N(t_F, x_N(t_F))$, $f_N^0[t] \triangleq f_N^0(t, x_N(t), u_N(t))$, $\varphi_N^0[t_F] \triangleq \varphi_N^0[t_F]$. Суммируя равенства (6.10) с индексами $i = 0, 1, \ldots, \ldots, N-1$ (при этом $k = N - i$) и добавляя к сумме равенство (6.12), приходим к соотношению

$$\sum_{i=0}^{N} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f_i^0[t]dt + \sum_{i=1}^{N} g_i^+(t_i, x_{i-1}(t_i), v_i) + F_N(t_F, x_N(t_F)) - \varphi_0^N[t_0] = 0. \tag{6.13}$$

Здесь, как и ранее, $t_{N+1} \triangleq t_F$. Сравнивая (6.13) с функционалом (1.7), заключаем, что $\varphi_0^N[t_0] = I_0(t_0, x_0, d)$. Тогда из условий (6.1) и (2.4) следует, что $\varphi_0(t_0, x_0) = \varphi_0^N[t_0] = I_0(t_0, x_0, d)$, т.е. функционал (1.7) на допустимом процессе d равен функции цены. Это означает, что процесс d оптимальный ввиду (2.3). Таким образом, теорема доказана при $N > 0$.

При отсутствии переключений (в случае $N = 0$) из уравнения (4.1) при управлении $u_0(t) = \mathbf{u}_0(t, x_0(t))$, учитывая терминальное условие (4.2), получаем

$$F_0[t_F] - \varphi_0^0[t_F] + \int\limits_{t_0}^{t_F} f_0^0[t]dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_0^0[t_0] = I_0(t_0, x_0, d).$$

Так как $N = \mathbf{k}_0(t_0, x_0) = 0$, то $\varphi_0^0[t_0] = \varphi_0(t_0, x_0)$. Имеем $\varphi_0(t_0, x_0) = I_0(t_0, x_0, d)$. Получили равенство значений функционала на процессе d и функции цены. Отсюда следует оптимальность процесса d.

Теорема доказана.

7. Задача быстродействия

Рассмотрим частный случай задачи (1.1)–(1.8), а именно, задачу *быстродействия*

$$
\begin{gathered}
0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_N \leqslant T, \\
\dot{x}_i = f_i(x_i(t), u_i(t)), \quad u_i(t) \in U_i, \quad t_i \leqslant t \leqslant i_{i+1}, \\
x_i(t_i) = g_i(x_{i-1}(t_i), v_i), \quad v_i \in V_i, \\
\widehat{G}_{i-1}(x_{i-1}(t_i)) = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \\
x_0(0) = x_0, \qquad x_N(T) = x_{NT}, \\
I = T + \sum_{i=1}^{N} g_i^0(x_{i-1}(t_i), v_i) \to \min .
\end{gathered} \tag{7.1}
$$

Требуется найти наименьшее значение функционала и оптимальное управление, на котором оно достигается. Количество N и моменты переключений $t_1, \ldots, t_N$ заранее не заданы и находятся при минимизации (7.1).

Сравнивая с общей постановкой, заключаем, что система стационарная, конечное состояние задано, а время окончания процесса свободно. Требуется минимизировать время T достижения конечного состояния с учетом суммарных затрат на переключения. Слагаемые g_i^0 позволяют учитывать при каждом переключении, например, время дополнительного технического обслуживания (заправку топливом, техосмотр и т. п.), продолжительность погрузочно-разгрузочных работ, время разделения объектов управления и т. п. Без учета таких затрат, т. е. при $g_i^0 = 0$, получаем для ГСПР задачу, аналогичную стандартной задаче быстродействия [12], в которой минимизируется время движения.

В задаче (7.1) управления стационарной системой функции цены и ее образующие не зависят от времени, а зависят только от состояния. Поэтому функция цены имеет вид $\varphi_i(x_i)$, а ее образующие — $\varphi_i^k(x_i)$, $i \in Z_+$, $k \in Z_+$. Двухпозиционная функция цены $\Phi_i(x_{i0}|x_{i\tau})$ также зависит только от состояний. Она является решением классической задачи быстродействия

$$
\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t), u_i(t)), \quad u_i(t) \in U_i, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \quad x_i(0) = x_{i0}, \quad x_i(\tau) = x_{i\tau}, \quad \tau \to \min .
$$

Учитывая эти обстоятельства, запишем уравнения (4.1)–(4.3) для образующих функции цены в задаче быстродействия (7.1):

$$
\begin{gathered}
\min_{u_i \in U_i} \Big[\frac{\partial \varphi_i^0(x_i)}{\partial x_i} f_i(x_i, u_i) + 1 \Big] = 0, \quad \varphi_i^0(x_{iT}) = 0, \quad i \in Z_+, \\
\varphi_i^k(x_i) = \min_{\widehat{x}_i \in \widehat{\mathbf{G}}_i} \Big\{ \Phi_i(x_i|\widehat{x}_i) + \min_{v \in V_{i+1}} \big[\varphi_{i+1}^{k-1}(g_{i+1}(\widehat{x}_i, v)) + g_{i+1}^0(\widehat{x}_i, v) \big] \Big\}, \quad k \in Z_+ .
\end{gathered} \tag{7.2}
$$

где $\widehat{\mathbf{G}}_i = \big\{ \widehat{x}_i \in X_i \,|\, \widehat{G}_i(\widehat{x}_i) = 0 \big\}$ — поверхность $(i+1)$-го переключения.

Позиционные конструкции “управляющего комплекса” (см. разд. 5) не зависят от времени и записываются аналогично (3.3), (5.1)–(5.4).

8. Примеры

Покажем методику применения достаточных условий оптимальности в задачах быстродействия. Будем рассматривать плоское движение объекта управления, которое при достижении заданной прямой переключается на движение по этой прямой. Скорости движения до и после переключения разные, причем по прямой объект движется быстрее, чем по плоскости. Требуется найти наименьшее время достижения фиксированной точки на заданной прямой, т. е. решить задачу быстродействия.

В первом примере модель гибридной системы простая. Поэтому решение задачи находится аналитически, причем оптимальность полученного решения подтверждается геометрическими соображениями. Во втором примере модель гибридной системы сложнее, а решение задачи — приближенное (численное).

Пример 8.1. Пусть на промежутке времени $[0,T]$ система совершает одно переключение в момент времени t_1: $0 \leqslant t_1 \leqslant T$. До переключения движение описывается уравнениями

$$\dot{x}(t) = v\cos\gamma(t), \quad \dot{y}(t) = v\sin\gamma(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1; \tag{8.1}$$

после переключения —

$$\dot{x}_1(t) = V, \quad t_1 \leqslant t \leqslant T; \tag{8.2}$$

а в момент переключения —

$$x_1(t_1) = x(t_1). \tag{8.3}$$

В уравнениях (8.1)–(8.3) x, y — прямоугольные координаты положения объекта управления до переключения; γ — угол направления движения, отсчитываемый от положительного направления оси абсцисс; x_1 — координата объекта на заданной прямой (на оси абсцисс) после переключения; v, V — линейные скорости движения по плоскости и по прямой соответственно, причем $V > v > 0$. Функция $\gamma(t)$ служит управлением движения до переключения.

Заданы начальное состояние $x(0) = x_0, y(0) = y_0$; промежуточное ограничение $y(t_1) = 0$ и конечное состояние $x_1(T) = 0$.

Требуется найти наименьшее время T достижения заданного конечного состояния, а также оптимальное позиционное управление, на котором это время достигается, т. е. решить задачу быстродействия

$$T \to \min. \tag{8.4}$$

В задаче (8.4) по сравнению с общей постановкой (7.1) задачи быстродействия переключение одно, отсутствуют управление переключением и управление непрерывным движением после переключения. Несмотря на простоту, рассматриваемая модель относится к ГСПР, так как в момент переключения размерность системы меняется. Будем решать поставленную задачу, применяя достаточные условия оптимальности.

Образующая $\varphi_1^0(x_1)$ функции цены после переключения равна времени передвижения системы из состояния x_1 в нулевое состояние. Так как скорость движения постоянная, то

$$\varphi_1^0(x_1) = \frac{|x_1|}{V}. \tag{8.5}$$

Образующая $\varphi_0^1(x,y)$ функции цены до переключения удовлетворяет уравнению (7.2), которое для рассматриваемой задачи будет иметь вид

$$\varphi_0^1(x,y) = \min_{(\widehat{x}_0,\widehat{y}_0)\in\widehat{\mathbf{G}}_0} \left\{\Phi_0(x,y|\widehat{x},\widehat{y}) + \varphi_1^0(\widehat{x})\right\}. \tag{8.6}$$

Здесь $\widehat{\mathbf{G}}_0$ — линия промежуточного ограничения, которая совпадает с осью абсцисс ($y = 0$); $\Phi_0(x,y|\widehat{x},\widehat{y})$ — двухпозиционная функция цены, которая равна минимальному времени передвижения системы из заданного начального состояния (x,y) в заданное конечное состояние $(\widehat{x},\widehat{y})$. Поскольку скорость движения постоянная, а повороты (изменения угла направления γ) мгновенные, то оптимальное управление состоит в повороте в начальный момент времени и последующем прямолинейном движении к точке переключения. Время такого движения вычисляется по формуле

$$\Phi_0(x,y|\widehat{x},\widehat{y}) = \frac{\sqrt{(x-\widehat{x})^2 + (y-\widehat{y})^2}}{v}. \tag{8.7}$$

Подставляем (8.7) в (8.6), учитывая ограничение $\widehat{y}=0$ и равенство (8.5). Получаем уравнение

$$\varphi_0^1(x,y)=\min_{\widehat{x}\in\mathbb{R}}\left\{\frac{\sqrt{(x-\widehat{x})^2+y^2}}{v}+\frac{|\widehat{x}|}{V}\right\}. \tag{8.8}$$

Будем решать это уравнение при $\widehat{x}\leqslant 0$. В случае $\widehat{x}\geqslant 0$ решение аналогичное, так как уравнение (8.8) не меняется при замене направления оси абсцисс на противоположное. Используя необходимые условия экстремума, находим точку минимума $\widehat{x}=x+\dfrac{v|y|}{\sqrt{V^2-v^2}}$. При этом значении $\widehat{x}$ образующая (8.8) будет имеет вид

$$\varphi_0^1(x,y)=-\frac{x}{V}+\frac{|y|}{vV}\sqrt{V^2-v^2}. \tag{8.9}$$

Если $\widehat{x}=0$, то момент переключения t_1 совпадает с моментом окончания движения T. При этом образующая (8.8) равна времени прямолинейного движения в начало координат

$$\varphi_0^1(x,y)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{v}. \tag{8.10}$$

Функции (8.9) и (8.10) совпадают при $|y|=-\dfrac{x}{v}\sqrt{V^2-v^2}$. Поэтому

$$\varphi_0^1(x,y)=\begin{cases}-\dfrac{x}{V}+\dfrac{|y|}{vV}\sqrt{V^2-v^2}, & x<-\dfrac{v|y|}{\sqrt{V^2-v^2}},\\ \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{v}, & -\dfrac{v|y|}{\sqrt{V^2-v^2}}\leqslant x\leqslant 0.\end{cases} \tag{8.11}$$

Таким образом, все образующие функции цены найдены:

$$\varphi_1^0(x_1)=\frac{|x_1|}{V},\quad \varphi_0^1(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{V}+\dfrac{|y|}{vV}\sqrt{V^2-v^2}, & |x|>\dfrac{v|y|}{\sqrt{V^2-v^2}},\\ \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{v}, & |x|\leqslant\dfrac{v|y|}{\sqrt{V^2-v^2}}.\end{cases} \tag{8.12}$$

Оптимальное двухпозиционное управление до переключения —

$$\boldsymbol{\gamma}(x,y|\widehat{x},\widehat{y})=\operatorname{atan2}(\widehat{y}-y,\widehat{x}-x), \tag{8.13}$$

где $\operatorname{atan2}(y,x)\triangleq\arg(x+iy)$ — двухаргументный арктангенс. Оптимальная точка переключения имеет координаты

$$\widehat{\mathbf{x}}(x,y)=\begin{cases}x-\dfrac{v|y|\operatorname{sign}x}{\sqrt{V^2-v^2}}, & |x|>\dfrac{v|y|}{\sqrt{V^2-v^2}},\\ \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{v}, & |x|\leqslant\dfrac{v|y|}{\sqrt{V^2-v^2}},\end{cases}\qquad \widehat{\mathbf{y}}(x,y)=0, \tag{8.14}$$

а оптимальный момент переключения вычисляется по формуле

$$\mathbf{t}_1(x,y)=\frac{\sqrt{\left[x-\widehat{\mathbf{x}}(x,y)\right]^2+y^2}}{v}. \tag{8.15}$$

Оптимальная траектория представляет собой ломаную, первое звено которой соединяет начальное состояние с промежуточной точкой $x_1=\widehat{\mathbf{x}}(x_0,y_0)$ на оси абсцисс, второе звено — отрезок оси абсцисс от x_1 до нуля. Например, для $V=2$, $v=1$, $x_0=-1$, $y_0=-1$ по формулам (8.12)–(8.15) получаем

$$x_1=-1+\frac{1}{\sqrt{3}},\quad t_1=\frac{2}{\sqrt{3}},\quad \gamma=\frac{\pi}{3},\quad T=\varphi_0^1(-1,-1)=\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Заметим, что оптимальную траекторию можно было построить, используя соображения геометрической оптики. Действительно, минимальное значение времени дает луч света, исходящий из начального состояния и попадающий в начало координат после преломления на оси абсцисс. Отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно отношению скоростей движения по плоскости и по оси абсцисс. Угол падения равен $\pi/2-\gamma$, а угол преломления составляет $\pi/2$. Поэтому

$$\frac{v}{V} = \frac{\sin(\pi/2-\gamma)}{\sin(\pi/2)} = \cos\gamma. \tag{8.16}$$

Проверим, выполняется ли это равенство для траектории, найденной при помощи достаточных условий оптимальности. В самом деле, угол γ находится по формуле (8.13). Например, для $x_0 < -\dfrac{v|y_0|}{\sqrt{V^2-v^2}}$ и $y_0<0$, учитывая (8.14), получаем

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{y_0}{\widehat{x}_0-x_0} = \frac{-y_0\sqrt{V^2-v^2}}{v|y_0|} = \frac{\sqrt{V^2-v^2}}{v} \quad\Rightarrow\quad 1+\operatorname{tg}^2\gamma = \frac{V^2}{v^2} \quad\Rightarrow\quad \cos\gamma = \frac{v}{V},$$

что совпадает с (8.16).

Пример 8.2. Пусть на промежутке времени $[0,T]$ непрерывное движение объекта управления по координатной плоскости Oxy описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}(t) = v(t)\cos\gamma(t), \quad \dot{y}(t) = v(t)\sin\gamma(t), \quad \dot{v}(t) = w(t), \quad \dot{\gamma}(t) = 0, \tag{8.17}$$

а непрерывное движение по заданной прямой (по оси абсцисс) —

$$\dot{X}(t) = V(t), \quad \dot{V}(t) = W(t). \tag{8.18}$$

Поворот на месте, который считается переключением, состоит в мгновенном изменении угла направления

$$x(t_1) = x(t_1-0), \quad y(t_1) = y(t_1-0), \quad v(t_1) = v(t_1-0), \quad \gamma(t_1) = \gamma(t_1-0) + \Delta\gamma(t_1). \tag{8.19}$$

При достижении оси абсцисс движение по плоскости (8.17) заменяется движением по оси абсцисс (8.18). Это изменение также считается переключением, при котором размерность системы уменьшается

$$X(t_2) = x(t_2), \quad V(t_2) = v(t_2). \tag{8.20}$$

В уравнении (8.17) x, y — прямоугольные координаты положения объекта управления на плоскости; γ — ориентированный угол направления движения, отсчитываемый от положительного направления оси абсцисс; v, w — величины линейной скорости и ускорения соответственно.

В уравнении (8.18) X, V, W — координата объекта, скорость и ускорение его движения по оси абсцисс. Ускорения w и W являются управлениями, ограниченными по модулю: $|w| \leqslant \overline{w}$, $|W| \leqslant \overline{W}$, причем $|\overline{w}| < |\overline{W}|$.

В уравнениях (8.19), (8.20) t_1, t_2 — моменты переключений, $\gamma(t_1-0)$, $\gamma(t_1)$ — величина угла направления до и после после поворота соответственно. Приращение $\Delta\gamma(t_1)$ является управлением при повороте в момент t_1, $\Delta\gamma \in \mathbb{R}$.

В начальный момент времени заданы координаты, скорость и направление движения: $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$, $v(0)=v_0$, $\gamma(0)=\gamma_0$. Конечные условия — нулевые: $X(T)=0$, $V(T)=0$.

Допустимые процессы управления переводят систему из начального состояния в конечное. Будем рассматривать допустимые процессы, имеющие не более одного поворота. Такие процессы имеют не более двух переключений в моменты t_1, t_2: $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$. Первое переключение — поворот на месте (8.19) — совершается при нулевой линейной скорости ($v=0$).

Второе переключение (8.20) происходит на оси абсцисс также при нулевой линейной скорости, т. е. при условиях $y = 0$, $v = 0$. Поэтому промежуточные ограничения имеют вид

$$\widehat{\mathbf{G}}_0 = \left\{(x, y, v, \gamma) \in \mathbb{R}^4 |\, v = 0\right\}, \quad \widehat{\mathbf{G}}_1 = \left\{(x, y, v, \gamma) \in \mathbb{R}^4 |\, y = 0,\ v = 0\right\}.$$

Качество управления оценивается функционалом (7.1), который для рассматриваемой задачи имеет вид

$$I = T + \lambda |\Delta\gamma(t_1)|. \tag{8.21}$$

В функционале (8.21) кроме времени T прямолинейного движения учитывается также время поворота, которое пропорционально изменению угла направления ($\lambda > 0$ — коэффициент пропорциональности).

Требуется найти наименьшее значение функционала (8.21) и оптимальное управление, на котором оно достигается, т. е. решить задачу быстродействия.

В задаче не исключаются процессы управления, в которых либо менее двух переключений, либо моменты переключений совпадают, либо момент переключения совпадает с начальным или конечным моментом процесса управления. Например, если в начальный момент времени скорость движения нулевая, то в этот момент возможен поворот на месте, т. е. $t_1 = 0$. Если при этом объект находится на оси абсцисс, то моменты переключений совпадают: $0 = t_1 = t_2$. Если, например, объект управления достигает оси абсцисс именно в нулевой точке, то $t_2 = T$. Наконец, если при начальном направлении траектория прямолинейного движения приводит в начало координат, то поворот не нужен. В этом случае будем считать, что $0 < t_1 = t_2 = T$, причем поворот в момент t_1 фиктивный с нулевым приращением $\Delta\gamma(t_1) = 0$. Качество такого процесса оценивается только временем T прямолинейного движения.

В поставленной задаче по сравнению с общей постановкой (7.1) задачи быстродействия управляемые процессы имеют не более двух переключений. Управления непрерывным движением скалярные, ограниченные по модулю. Ограничений на управление поворотом (8.19) нет. Управление переключением (8.20) отсутствует. Рассматриваемая модель относится к ГСПР, так как в момент второго переключения размерность системы меняется.

Будем решать поставленную задачу, применяя достаточные условия оптимальности. Оптимальная траектория состоит из отдельных участков непрерывного движения по плоскости или по оси абсцисс, а также поворота. Обозначим через $\mathbb{L}$ участок прямолинейного движения (8.17) по плоскости из состояния (x, y, v, γ) в состояние $(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{v}, \gamma)$ с нулевой скоростью $\widehat{v} = 0$. Иначе говоря, движение на участке $\mathbb{L}$ заканчивается остановкой в заданной точке $(\widehat{x}, \widehat{y})$. Разумеется, эта точка должна лежать на пути прямолинейного движения, т. е. $\gamma = \operatorname{atan2}(\widehat{y} - y, \widehat{x} - x)$.

Оптимальное по быстродействию управление на таком участке находим, например, используя принцип максимума Понтрягина. Так как ограниченное по модулю управление w входит в функцию Гамильтона — Понтрягина аффинно, то оптимальное управление будет релейным. Для заданной начальной скорости v и расстояния $S = \sqrt{(x - \widehat{x})^2 + (y - \widehat{y})^2}$ оптимальное управление имеет вид

$$w(t) = \begin{cases} \overline{w}, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ -\overline{w}, & \tau \leqslant t \leqslant t_1, \end{cases} \tag{8.22}$$

где τ — момент переключения релейного управления, а t_1 — время движения до остановки:

$$\tau = \frac{\overline{w}\, t_1 - v}{2\overline{w}}, \qquad t_1 = \frac{-v + \sqrt{2v^2 + 4S\overline{w}}}{\overline{w}}.$$

Двухпозиционная функция цены на участке $\mathbb{L}$ равна времени движения t_1, т. е.

$$\Phi(x, y, v, \gamma | \widehat{x}, \widehat{y}, 0, \gamma) = \frac{-v + \sqrt{2v^2 + 4S\overline{w}}}{\overline{w}}. \tag{8.23}$$

Заметим, что управление (8.22) определено при условии $2S\overline{w} \geqslant v^2$. В противном случае объект управления не успевает затормозить в назначенном положении $(\widehat{x}, \widehat{y})$, при этом $\Phi = +\infty$ по определению. Как было отмечено выше, если $\gamma \neq \operatorname{atan2}(\widehat{y} - y, \widehat{x} - x)$, то траектория прямолинейного движения (8.17) не проходит через назначенную точку $(\widehat{x}, \widehat{y})$. При этом также полагаем $\Phi = +\infty$.

Обозначим через $\mathbb{X}$ участок прямолинейного движения (8.19) по оси абсцисс из состояния (X, V) с нулевой начальной скоростью $V = 0$ в нулевое конечное состояние $(0, 0)$. Оптимальное управление находится так же, как для участка $\mathbb{L}$. Получаем релейное управление

$$W(t) = \begin{cases} -\overline{W} \operatorname{sign} X, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ \overline{W} \operatorname{sign} X, & \tau \leqslant t \leqslant 2\tau, \end{cases}$$

где τ — момент переключения релейного управления: $\tau = \sqrt{\dfrac{|X|}{\overline{W}}}$. Минимальное время движения по участку $\mathbb{X}$ определяет образующую функции цены после двух переключений

$$\varphi_2^0(X, 0) = 2\sqrt{\frac{|X|}{\overline{W}}}. \tag{8.24}$$

Обозначим через $\mathbb{P}$ поворот (8.19) объекта управления, а через $\mathbb{S}$ — скачок (8.20). Тогда оптимальная траектория с одним поворотом будет иметь тип $\mathbb{LPLSX}$, т. е. представлять собой последовательное соединение участка прямолинейного движения по плоскости (первый участок $\mathbb{L}$), поворота ($\mathbb{P}$), движения по плоскости после поворота (второй участок $\mathbb{L}$), переключения $\mathbb{S}$ при достижении оси абсцисс и движение по этой оси (участок $\mathbb{X}$).

Запишем уравнения для образующих функции цены. До первого переключения

$$\varphi_0^2(x, y, v, \gamma) = \min_{(\widehat{x},\widehat{y},\widehat{v},\widehat{\gamma}) \in \widehat{\mathbf{G}}_0} \Big\{ \Phi(x, y, v, \gamma | \, \widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{v}, \widehat{\gamma}) + \min_{\Delta\gamma \in \mathbb{R}} \big[\varphi_1^1(\widehat{x}, \widehat{y}, 0, \gamma + \Delta\gamma) + \lambda |(\Delta\gamma)| \big] \Big\}, \tag{8.25}$$

после первого переключения (поворота) до второго (скачка)

$$\varphi_1^1(x, y, v, \gamma) = \min_{(\widehat{x},\widehat{y},\widehat{v},\widehat{\gamma}) \in \widehat{\mathbf{G}}_1} \big\{ \Phi(x, y, 0, \gamma | \, \widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{v}, \widehat{\gamma}) + \varphi_2^0(\widehat{x}, 0) \big\}. \tag{8.26}$$

Процедура решения полученных уравнений рекуррентная. Сначала решаем уравнение (8.26), в которое входит функция (8.24). Получаем образующую φ_1^1. Затем решаем уравнение (8.25), в котором используется найденная образующая φ_1^1. Получаем образующую φ_0^2. Каждое уравнение представляет собой задачу конечномерной условной минимизации с параметрами. Эти задачи, как правило, решаются численно.

Кроме траекторий $\mathbb{LPLSX}$ или $\mathbb{PLSX}$ с одним поворотом оптимальными могут оказаться также траектории типа $\mathbb{LSX}$ без поворота. Для синтеза оптимального управления такими процессами нужно решать уравнения для образующих φ_0^1 и φ_1^0. Наконец, для процессов без переключений (траектория типа $\mathbb{X}$), когда в начальный момент времени объект управления находится на оси абсцисс ($y_0 = 0$), ищем образующую φ_0^0. Уравнения для указанных образующих записываются аналогично (8.24)–(8.26). При этом оказывается, что $\varphi_0^1 = \varphi_1^1$ и $\varphi_0^0 = \varphi_1^0 = \varphi_2^0$, так как в рассматриваемой задаче образующие зависят только от количества оставшихся переключений и, конечно, от позиции системы. Количество переключений, уже совершенных к текущему моменту времени, не имеет значения.

Заметим, что оптимальных процессов с двумя и более поворотами нет. В самом деле, если, например, траектория типа $\mathbb{LP}_1\mathbb{LP}_2\mathbb{LSX}$ имеет два поворота $\Delta\gamma_1$ и $\Delta\gamma_2$ в одном направлении, то существует траектория $\mathbb{LPLSX}$ с одним поворотом, величина которого $|\Delta\gamma|$ меньше суммы $|\Delta\gamma_1| + |\Delta\gamma_2|$ двух "поворотов" в одном направлении. Если траектория имеет два поворота в разных направлениях, то ее можно заменить траекторией с одним поворотом "средней величины" $|\Delta\gamma|$, которая меньше суммы $|\Delta\gamma_1|+|\Delta\gamma_2|$. Таким образом, траекторию с двумя поворотами всегда можно улучшить, заменив ее траекторией с одним поворотом. Следовательно, у оптимальных траекторий не может быть более одного поворота.

Упростим в уравнении (8.25) операцию минимизации по множеству $\widehat{\mathbf{G}}_0$, исключая из него элементы, для которых $\Phi(x,y,v,\gamma|\,\widehat{x},\widehat{y},\widehat{v},\widehat{\gamma})=+\infty$. При прямолинейном движении угол направления не меняется, т. е. $\widehat{\gamma}=\gamma$. Значит, точка $(\widehat{x},\widehat{y})$ лежит на луче

$$\widehat{x}=x+s\cos\gamma,\quad \widehat{y}=y+s\sin\gamma,\quad s\geqslant\frac{v^2}{2\overline{w}}. \tag{8.27}$$

Последнее неравенство следует из условия $2S\overline{w}\geqslant v^2$ существования функции (8.23). Значит, уравнение (8.25) можно записать так:

$$\begin{aligned}\varphi_0^2(x,y,v,\gamma)=\min_{s\geqslant\frac{v^2}{2\overline{w}}}\big\{&\Phi(x,y,v,\gamma|\,x+s\cos\gamma,y+s\sin\gamma,0,\gamma)\\&+\min_{\Delta\gamma\in\mathbb{R}}\big[\varphi_1^1(x+s\cos\gamma,y+s\sin\gamma,0,\gamma+\Delta\gamma)+\lambda|(\Delta\gamma)|\big]\big\}.\end{aligned} \tag{8.28}$$

Как видим, минимизация в (8.28) выполняется по двум параметрам s и $\Delta\gamma$.

Рассмотрим теперь операцию минимизации в уравнении (8.26). Исключая из множества $\widehat{\mathbf{G}}_1$ элементы, для которых $\Phi(x,y,v,\gamma|\,\widehat{x},\widehat{y},\widehat{v},\widehat{\gamma})=+\infty$, заключаем, что точка $(\widehat{x},\widehat{y})$ принадлежит лучу (8.27) при $s\geqslant 0$ и оси абсцисс одновременно. Точка пересечения существует, если $y\sin\gamma<0$. Ее координаты $\widehat{x}=x-y\operatorname{ctg}\gamma$, $\widehat{y}=0$. Если $y=0$, то начальная точка принадлежит оси абсцисс. Поэтому для любого угла γ имеем $\widehat{x}=x$, $\widehat{y}=0$ и $\Phi=0$. В остальных случаях (при $y\sin\gamma>0$ или $\sin\gamma=0$) пересечения нет и $\Phi=+\infty$.

Следовательно, уравнение (8.26) можно записать без операции минимизации

$$\varphi_1^1(x,y,v,\gamma)=\begin{cases}\Phi(x,y,v,\gamma|\,x-y\operatorname{ctg}\gamma,0,0,\gamma)\ +\varphi_2^0(x-y\operatorname{ctg}\gamma,0), & y\sin\gamma<0,\\ \varphi_2^0(x,0), & y=0,\\ +\infty, & y\sin\gamma>0 \text{ или } \sin\gamma=0.\end{cases} \tag{8.29}$$

Как видим, минимизация в (8.26) свелась к проверке условия ограниченности функции φ_1^1.

Таким образом, оптимальный процесс с одним поворотом определяется в результате решения уравнения (8.28) для образующей φ_0^2. При этом используются образующие φ_1^1 и φ_2^0, которые определяются равенствами (8.29) и (8.24) соответственно. Оптимальный процесс без поворота находится по образующим $\varphi_0^1=\varphi_1^1$ и $\varphi_1^0=\varphi_2^0$. Функция цены по определению равна наименьшему значению $\varphi=\min\{\varphi_0^2,\varphi_0^1\}$. Поэтому оптимальный процесс, начинающийся на координатной плоскости, но не на оси абсцисс, выбирается из двух процессов (с поворотом или без поворота) по значению функции цены. Лучший процесс имеет меньшее значение функционала (8.21), равное функции цены.

Приведем примеры оптимальных траекторий для конкретных значений параметров. Пусть, например, $\overline{w}=1$, $\overline{W}=5$, $x_0=-20$, $y_0=-3$, $v_0=1$, $\gamma_0=\pi/18$, $\lambda=1$. Для этих данных имеем $\varphi_0^2\approx 9.3683$ и $\varphi_0^1\approx 8.978$, т. е. оптимальная траектория $\mathbb{LPLSX}$ с поворотом хуже, чем оптимальная траектория $\mathbb{LSX}$ без поворота, так как $\varphi_0^2>\varphi_0^1$. Оптимальное управление w движением по плоскости до скачка в точке $(-2.9862,0)$ релейное: $w=1$ при $0\leqslant t<3.2162$, $w=-1$ при $3.2162\leqslant t\leqslant 7.4324$; после скачка управление W при движении по оси абсцисс тоже релейное: $W=5$ при $7.4324\leqslant t<8.2052$, $W=-5$ при $8.2052\leqslant t\leqslant 8.978$.

Если начальное положение изменить, полагая $x_0=-30$, получаем $\varphi_0^2\approx 10.3232$ и $\varphi_0^1\approx 10.6556$, т. е. оптимальная траектория $\mathbb{LPLSX}$ с поворотом лучше, чем оптимальная траектория $\mathbb{LSX}$ без поворота, так как $\varphi_0^2<\varphi_0^1$. Оптимальное управление w движения по плоскости до поворота в точке $(-29.4091,-2.8958)$ постоянное: $w=-1$ при $0\leqslant t\leqslant 1.0976$; затем следует поворот на угол $\Delta\gamma=0.7636$, потом релейное управление w при движении по плоскости после поворота до скачка в точке $(-2.9862,0)$: $w=-1$ при $1.0976\leqslant t\leqslant 2.9925$; $w=1$ при

$2.9925 \leqslant t \leqslant 4.8875$; после скачка управление W при движении по оси абсцисс тоже релейное: $W = 5$ при $4.8874 \leqslant t < 7.2235$, $W = -5$ при $7.2235 \leqslant t \leqslant 9.5596$. С учетом времени поворота $\Delta\gamma = 0.7636$ получаем $T = 10.3232$. Приближенное значение образующей φ_0^2 вычислялось с абсолютной погрешностью 0.01 по параметрам s и $\Delta\gamma$, указанным в (8.28). Приближенное значение образующей φ_0^1 находится по точным формулам без методических ошибок (только с погрешностями округления).

Заключение

Предлагаемые достаточные условия применяются для решения задач оптимального управления гибридными системами. Эти задачи гораздо сложнее оптимизации непрерывно-дискретных систем, так как для построения функции цены нужно найти вспомогательные функции — сначала двухпозиционные функции цены, а затем — образующие функций цены. Наиболее сложная операция в этой рекуррентной процедуре — поиск оптимального двухпозиционного управления. Заметим, что в прикладных задачах вместо оптимального управления используют, так называемое, рациональное управление, которое строится из инженерных соображений и, как правило, мало проигрывает оптимальному. Рекуррентная процедура с применением рационального управления сводится к последовательному решению конечномерных задач оптимизации — поиску оптимальных позиций переключения.

Одним из направлений дальнейших исследований является получение достаточных условий оптимальности для других, более общих, классов гибридных систем, например, для задач управления группами составных систем. Другое направление — исследование частных случаев полученных условий оптимальности для гибридных систем постоянной размерности, переключаемых систем и т. п., выяснение связей с известными достаточными условиями для разных типов непрерывно-дискретных систем. Третье направление — разработка алгоритмов численного решения задач оптимального (рационального) управления гибридными системами с промежуточными ограничениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бортаковский А.С.** Достаточные условия оптимальности гибридных систем переменной размерности // Тр. МИАН. 2020. Т. 308. С. 88–100. doi: 10.1134/S0081543820010071
2. **Bortakovskii A.S.** Necessary optimality conditions for hybrid system of variable dimension with intermediate constraints // J. Math. Sci. 2023. Vol. 270. no. 5. P. 640–653. doi: 10.1007/s10958-023- 06376-3
3. **Величенко В.В.** Оптимальное управление составными системами. Докл. АН СССР. 1967. Т. 176. № 4. С. 754–756.
4. **Барсегян В.Р.** Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М: Наука, 2016. 230 с.
5. **Кириллов А.Н.** Динамические системы с переменной структурой и размерностью // Изв. ВУЗов. Сер. Приборостроение. 2009. Т. 52, № 3. С. 23–28.
6. **Кириченко Н.Ф., Сопронюк Ф.А.** Минимаксное управление в задачах управления и наблюдения для систем с разветвлением структур // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1995. Т. 2, № 1. С. 78–91.
7. **Медведев В.А., Розова В.Н.** Оптимальное управление ступенчатыми системами // Автоматика и телемеханика 1972. № 3. С. 15–23.
8. **Гурман В.И.** Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1985. 288 p.
9. **Болтянский В.Г.** Задача оптимизации со сменой фазового пространства // Дифференц. уравнения. 1983. № 3. С. 518–521.
10. **Sussmann H.J.** A maximum principle for hybrid optimal control problems // Proc. 38th IEEE Conf. on Decision and Control. Phoenix. 1999. Vol. 1. P. 425–430. doi: 10.1109/CDC.1999.832814
11. **Dmitruk A.V., Kaganovich A.M.** The hybrid maximum principle is a consequence of Pontryagin maximum principle // Syst. Control Lett. 2008. Vol. 57, no. 11. P. 964–970. doi: 10.1016/j.sysconle.2008.05.006

12. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
13. **Бортаковский А.С.** Синтез оптимальных систем управления со сменой моделей движения // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. 2019.№4. С. 57–74. doi: 10.31857/S000233880002512-2
14. **Беллман Р.** Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 400 с.
15. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
16. **Федоренко Р.П.** Приближенное решение задач оптимального управления, М.: Наука, 1978. 488 с.
17. **Кротов В.Ф., Гурман В.И.** Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973. 446 с.
18. **Бортаковский А.С., Немыченков Г.И.** Оптимальное в среднем управление детерминированными переключаемыми системами при наличии дискретных неточных измерений // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. 2019. № 1. С. 52–77. doi: 10.1134/S0002338819010050

Поступила 20.02.2024
После доработки 18.03.2024
Принята к публикации 25.03.2024

Бортаковский Александр Сергеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет);
профессор
“Национальный исследовательский технологический университет “МИСИС”
г. Москва
e-mail: asbortakov@mail.ru

REFERENCES

1. Bortakovskii A.S. Sufficient optimality conditions for hybrid systems of variable dimension. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2020, vol. 308, pp. 79–91. doi: 10.1134/S0081543820010071
2. Bortakovskii A.S. Necessary optimality conditions for hybrid system of variable dimension with intermediate constraints. *J. Math. Sci.*, 2023, vol. 270, no. 5, pp. 640–653. doi: 10.1007/s10958-023-06376-3
3. Velichenko V.V. Optimal control of composite systems. *Sov. Math. Dokl.*, 1967, vol. 8, pp. 1173–1175.
4. Barseghyan V.R. *Upravlenie sostavnykh dinamicheskikh sistem i sistem s mnogotochechnymi promezhutochnymi usloviyami* [Control of compound dynamic systems and of systems with multipoint intermediate conditions]. Moscow, Nauka Publ., 2016, 230 p. ISBN: 978-5-02-039961-7 .
5. Kirillov A.N. Dynamic systems with variable structure and dimension. *Iz. VUZ. Ser. Priborostroenie*, 2009, vol. 52, no. 3, pp. 23–28 (in Russian).
6. Kirichenko N.F., Sopronyuk F.A. Minimax control in control and observation problems for systems with branching of structures. *Obozr. Prikl. Prom. Mat.*, 1995, vol. 2, no. 1, pp. 78–91 (in Russian).
7. Medvedev V.A., Rozova V.N. Optimal control of stepped systems. *Autom. Remote Control*, 1972, vol. 33, pp. 359–366.
8. Gurman V.I. *Printsip rasshireniya v zadachakh upravleniya* [Extension principle in control problems]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 288 p.
9. Boltyanskii V.G. An optimization problem with change of the phase space. *Differ. Uravn.*, 1983, no. 3, pp. 518–521 (in Russian).
10. Sussmann H.J. A maximum principle for hybrid optimal control problems. In: *Proc. 38th IEEE Conf. on Decision and Control*, Phoenix, IEEE, 1999, vol. 1, pp. 425–430. doi: 10.1109/CDC.1999.832814
11. Dmitruk A.V., Kaganovich A.M. The hybrid maximum principle is a consequence of Pontryagin maximum principle. *Syst. Control Lett.*, 2008, vol. 57, no. 11, pp. 964–970. doi: 10.1016/j.sysconle.2008.05.006
12. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes.* NY, London, Sydney: John Wiley and Sons, Inc., 1962, 360 p. ISBN: 978- 0470693810 . Original Russian text published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow, Phys. Math. Liter. Publ., 1961, 391 p.

13. Bortakovskii A.S. Synthesis of optimal control-systems with a change of the models of motion. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2018, vol. 57, no. 4, pp. 543–560. doi: 10.1134/S1064230718040056
14. Bellman R. *Dynamic programming.* Princeton. N.J.: Princeton University Press, 1957, 365 p. ISBN: 069107951X. Translated to Russian under the title *Dinamicheskoe programmirovanie*, Moscow: Inost. Liter. Publ., 1960, 400 p.
15. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow, Faktorial Press, 2002, 824 p. ISBN: 5- 88688-056-9 .
16. Fedorenko R.P. *Priblizhennoe reshenie zadach optimal'nogo upravleniya* [Approximate solution of optimal control problems]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 488 p.
17. Krotov V.F., Gurman V.I. *Metody i zadachi optimal'nogo upravleniya* [Methods and problems of optimal control]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 446 p.
18. Bortakovskii A.S., Nemychenkov G.I. Optimal in the mean control of deterministic switchable systems given discrete inexact measurements. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2019, vol. 58, no. 1, pp. 50–74. doi: 10.1134/S1064230719010052

Received February 20, 2024
Revised March 18, 2024
Accepted March 25, 2024

Alexandr Sergeevich Bortakovskii, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow Aviation Institute (National Research University); Prof., National University of Science and Technology MISIS, Moscow, Russia, e-mail: asbortakov@mail.ru .

Cite this article as: A. S. Bortakovskii. Sufficient optimality conditions for hybrid systems of variable dimension with intermediate constraints. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 50–67 .