ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 2 2024

УДК 517.977

О МОДЕЛИРОВАНИИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ С ПОМОЩЬЮ УПРАВЛЯЕМЫХ МОДЕЛЕЙ[1]

М. С. Близорукова, В. И. Максимов

Исследуется задача моделирования решения нелинейной системы дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием при неточно известной правой части, а также неточно известном начальном состоянии. Рассмотрен случай, когда правая часть системы является не гладкой (известно лишь, что она измерима по Лебегу) и неограниченной (принадлежащей пространству функцией суммируемых с квадратом евклидовой нормы) функцией. Указывается устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритм решения рассматриваемой системы. Алгоритм основан на конструкциях теории управления по принципу обратной связи. Установлена оценка скорости сходимости алгоритма. Отмечена возможность применения описанного в работе алгоритма для нахождения приближенного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: система с запаздыванием, приближенное решение.

M. S. Blizorukova, V. I. Maksimov. On modeling a solution of systems with constant delay using controlled models.

The problem of modeling a solution is studied for a nonlinear system of differential equations with constant delay, inexactly known right-hand side, and inaccurately given initial state. The case is considered when the right side of the system is a nonsmooth (it is only known that it is Lebesgue measurable) unbounded function (belonging to the space of square integrable functions in the Euclidean norm). An algorithm for solving this system that is stable to information noise and calculation errors is constructed. The algorithm is based on the concepts of feedback control theory. An estimate of the convergence rate of the algorithm is established. The possibility of using the algorithm to find an approximate solution to a system of ordinary differential equations is mentioned.

Keywords: system with delay, approximate solution.

MSC: 91A24, 49N70

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-2-39-49

1. Введение. Постановка задачи

В работе [1] был предложен, а затем получил развитие в работах [2–5] алгоритм моделирования решения n-мерной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \quad x(t_0) = x^0. \tag{1.1}$$

Здесь $t_0 < \vartheta < +\infty$, $x \in \mathbb{R}^n$, $f(t,x)$ — некоторая функции, x — n-мерный вектор с компонентами $x^{(j)}$, $j \in [0:n]$, т.е. $x = \{x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}\}$. Алгоритм основан на известном в теории гарантированного управления методе экстремального сдвига Н. Н. Красовского [6]. Указанный алгоритм удовлетворял двум требованиям. Во-первых, он работает в режиме реального времени. Во-вторых, в каждый момент времени $t \in T$ имеет на выходе некоторое приближение решения системы (1.1) на всем прошлом отрезке времени: от t_0 до t. Метод позволяет решать задачу в случае, когда правая часть системы заранее неизвестна (или известна приближенно). При этом дополнительная информация о правой части поступает в процессе решения. Априори предполагается известным следующее. Во-первых, функция f измерима (в смысле Лебега)

[1]Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2024-1377.

по t и непрерывна по x. Во-вторых, решение системы (1.1) единственно и остается в некоторой ограниченной области $M \subset \mathbb{R}^n$. В-третьих, при всех x из некоторой γ-окрестности области M выполняется неравенство

$$|f(t,x)|_1 \le K \quad \text{для любого} \quad t \in T. \tag{1.2}$$

Причем константы K и γ известны. Здесь и всюду ниже символ $|\cdot|_1$ означает норму в $\mathbb{R}^n$, векторы $y = \{y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}\}$: $|y|_1 = \max_{j\in[1:n]}\{|y^{(j)}|\}$, а символ $|\cdot|$ — модуль числа.

Суть алгоритма из [1] следующая. Вводится вспомогательная n-мерная управляемая система вида

$$\dot{w}(t) = u(t), \quad t \in T, \tag{1.3}$$

с начальным состоянием $w(t_0) = x^*$, $|x^0 - x^*|_1 \le \varepsilon$. На отрезке T взята сетка $\Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$ с узлами $\tau_i, \tau_{i+1} = \tau_i + \delta$, $\delta > 0$, $\tau_0 = t_0$, $\tau_m = \vartheta$. В моменты τ_i находятся вектора

$$u_i = \{u_i^{(1)}, \ldots, u_i^{(n)}\}, \quad u_i^{(j)} = -K\mathrm{sign}\{w^{(j)}(\tau_i) - \xi_i^{(j)}\},$$

где $\xi_i \in \mathbb{R}^n$,

$$\Big|\xi_i - x^0 - \int\limits_{t_0}^{\tau_i} f(t, w(t))\,dt\Big|_1 \le \varepsilon.$$

Здесь и всюду ниже $\varepsilon \in (0,1)$ — величина погрешности измерения. Таким образом, дополнительная информация о функции f, о которой мы упоминали выше, поступает опосредовано через вектора ξ_i. После нахождения u_i на вход системы (1.3) в течение полуинтервала $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$ подается постоянное управление $u(t) = u_i$, в результате действия которого находится решение системы (1.3) на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$. В случае, когда функция f липшицева по совокупности аргументов, в работе [2] приведена оценка скорости сходимости описанного выше алгоритма:

$$\max_{t\in T} |x(t) - w(t)|_1 \le \tilde{C}(\varepsilon + \delta).$$

Здесь $\tilde{C}$ зависит от $|x_0|_1$, K и не зависит от ε, δ.

Методика, изложенная в работах [1–5], оказалась полезной при конструировании алгоритма моделирования решения системы дифференциальных уравнений с запаздыванием нейтрального типа [7], нахождении решений параболических вариационных неравенств [8] или управления [9], а также доказательстве теорем существования и единственности решений дифференциальных включений в гильбертовых пространствах, содержащих субдифференциалы выпуклых функций [10]. Наиболее продуктивно метод позиционно управляемых моделей проявил себя при решении позиционных дифференциальных игр [6], а также задач моделирования траекторий и динамического обращения [11].

В данной работе будет исследоваться задача, аналогичная описанной выше. При этом принципиальное отличие настоящей статьи от цитированных выше работ состоит в отказе от условия типа (1.2), являющегося базовым для обоснования результатов из [1–5]. Вследствие этого алгоритм решения задачи моделирования решения будет являться новым не только для систем с запаздыванием, которые мы будем рассматривать, но и для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1). Следует отметить, что проблемам решения систем с запаздыванием посвящена обширная литература (см., например, [12–16]).

Итак, рассматривается система дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \quad t \in T, \tag{1.4}$$

с начальным состоянием $x(t_0 + s) = x^0(s)$ при $s \in [-\tau, 0]$. Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $\tau = \mathrm{const} > 0$ — запаздывание, функция $x^0(\cdot)$ является элементом $W([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$ пространства дифференцируемых функций, производные которых принадлежат $L_\infty([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$. Норма в этом пространстве задается следующим образом:

$$|p(\cdot)|_W = \big(\max_{s\in[-\tau,0]}|p(s)|^2_{\mathbb{R}^n} + \mathrm{vrai}\max_{s\in[-\tau,0]}|\dot p(s)|^2_{\mathbb{R}^n}\big)^{1/2},$$

где символ $|\cdot|_{\mathbb{R}^n}$ — евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^n$. Функция f полагается измеримой в смысле Лебега по первому аргументу, липшицевой (с постоянной Липшица L) по второму и третьему и удовлетворяющей условию $f(\cdot,0,0)\in L_2(T;\mathbb{R}^n)$. В дальнейшем полагаем эту функцию, а также начальное состояние системы (1.4) известными неточно. Именно, полагаем известной функцию $x^\varepsilon(\cdot)\in W([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$ такую, что

$$|x^0(\cdot)-x^\varepsilon(\cdot)|_W\le\varepsilon,\qquad \sup_{\varepsilon\in(0,1)}|\dot x^\varepsilon(\cdot)|_{L_\infty([-\tau,0];\mathbb{R}^n)}\le c_1<+\infty. \tag{1.5}$$

Кроме того, имеется возможность для каждой тройки $\{t,x,y\}\in T\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ вычислять вектора $f^*(t,x,y)\in\mathbb{R}^n$ такие, что

$$|f(t,x,y)-f^*(t,x,y)|_1\le\varepsilon. \tag{1.6}$$

Задача состоит в построении алгоритма нахождения приближенного решения системы (1.4) по указанной выше информации о системе.

2. Алгоритм решения

Для решения задачи нахождения решения системы (1.4) введем две управляемые n-мерные системы дифференциальных уравнений

$$\dot y_{\delta,\varepsilon}(t)=u_{\delta,\varepsilon}(t),\quad t\in T, \tag{2.1}$$

$$\dot z_{\delta,\varepsilon}(t)=v_{\delta,\varepsilon}(t) \tag{2.2}$$

с начальными состояниями $y_{\delta,\varepsilon}(t_0)=z_{\delta,\varepsilon}(t_0)=x^\varepsilon(0)$. Заметим, что метод, основанный на введении вспомогательных управляемых систем, проявил свою эффективность при решении динамических обратных задач (см., например, монографии [10; 11]).

Работу алгоритма разобьем на $m-1$ однотипных шагов ($m=m_\delta=[(\vartheta-t_0)/\delta]+1$, где $[\dots]$ означает целую часть числа). На первом шаге, осуществляемом на отрезке $[t_0,\tau_1]$, полагаем

$$u^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(t)=0\quad(k\in[1:n]).$$

В таком случае $y_{\delta,\varepsilon}(t)=x^\varepsilon(0)$ при $t\in[t_0,\tau_1]$. После этого, считая

$$v^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(t)=f^*(t,x^\varepsilon(0),x^\varepsilon(-\tau))\ \text{ при }\ t\in[t_0,\tau_1],$$

вычисляем $z_{\delta,\varepsilon}(t)$, $t\in[t_0,\tau_1]$. Пусть управления $u_{\delta,\varepsilon}(\cdot)$, $v_{\delta,\varepsilon}(\cdot)$, а также решения $y_{\delta,\varepsilon}(\cdot)$ и $z_{\delta,\varepsilon}(\cdot)$ систем (2.1) и (2.2) определены при $t\in[t_0,\tau_i]$, $i\in[1:m-1]$. На отрезке $[\tau_i,\tau_{i+1}]$ осуществляются следующие действия. В момент τ_i вычисляем вектор $u_{\delta,\varepsilon,i}$, после чего находим управление в системе (2.1), воспользовавшись формулами

$$u_{\delta,\varepsilon}(t)=\{u^{(k)}_{\delta,\varepsilon,i}\}_{k=1}^n\ \text{ при }\ t\in\delta_i, \tag{2.3}$$

$$u^{(k)}_{\delta,\varepsilon,i}=\begin{cases}0,\quad \text{если}\quad w^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(\tau_i)=y^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(\tau_i)-z^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(\tau_{i-1})=0,\\ -\delta^{-1}\mathrm{sign}\,w^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(\tau_i)\displaystyle\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}|f^{*(k)}(t,y_{\delta,\varepsilon}(\tau_i),y_{\delta,\varepsilon}(\tau_i-\tau))|\,dt,\quad \text{если}\quad w^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(\tau_i)\ne0.\end{cases} \tag{2.4}$$

При $t \in [t_0 - \tau, t_0]$ мы полагаем $y_{\delta,\varepsilon}(t) = x^\varepsilon(t - t_0)$. Затем определяем решение $y_{\delta,\varepsilon}(\cdot)$ системы (2.1) на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$:

$$y_{\delta,\varepsilon}(t) = y_{\delta,\varepsilon}(\tau_i) + (t - \tau_i)u_{\delta,\varepsilon,i}.$$

После этого, зная $y_{\delta,\varepsilon}(t)$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, находим управление в системе (2.2) по формуле

$$v^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(t) = f^{*(k)}(t, y_{\delta,\varepsilon}(\tau_{i+1}), y_{\delta,\varepsilon}(\tau_{i+1} - \tau)) \tag{2.5}$$

и определяем решение $z_{\delta,\varepsilon}(\cdot)$ этой системы на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$. Работу алгоритма заканчиваем в момент ϑ.

Как видно из описанного выше алгоритма, к каждому моменту τ_i определены решения систем (2.1) и (2.2): $y_{\delta,\varepsilon}(t)$, $t \in [t_0, \tau_i]$, и $z_{\delta,\varepsilon}(t)$, $t \in [t_0, \tau_i]$.

Имеет место

Теорема 1. *Можно указать такое число $d > 0$, что равномерно по всем $\varepsilon \in (0,1)$ и $\delta \in (0,1)$ выполняется неравенство*

$$\sup_{t \in T} |x(t) - y_{\delta,\varepsilon}(t)|_1 \le d\phi(\varepsilon, \delta),$$

где $\phi(\varepsilon,\delta) = \varepsilon + \delta^{1/2}$, если $f(\cdot, 0, 0) \in L_2(T; \mathbb{R}^n)$, $\phi(\varepsilon,\delta) = \varepsilon + \delta$, если $f(\cdot,0,0) \in L_\infty(T;\mathbb{R}^n)$.

Прежде, чем перейти к доказательству теоремы, приведем ряд вспомогательных утверждений.

Учитывая (2.3)–(2.5), легко видеть, что справедливы неравенства

$$|w^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(\tau_{i+1})| \le |w^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(\tau_i)| + 2\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |v^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(t)|\, dt. \tag{2.6}$$

Лемма 1. *Если*

$$|w^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(\tau_i)| > \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |v^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(t)|\, dt,$$

то

$$|w^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(\tau_{i+1})| \le |w^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(\tau_i)|, \quad i \in [1 : m-1].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливо равенство

$$w^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(\tau_{i+1}) = w^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(\tau_i) + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} u^{(k)}_{\delta,\varepsilon,i}\, dt - \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} v^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(t)\, dt. \tag{2.7}$$

В таком случае с учетом условий леммы заключаем

$$\Big|w^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(\tau_i) + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} u^{(k)}_i\, dt\Big| = \Big|w^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(\tau_i) - \operatorname{sign} w^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(\tau_i)\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |v^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(t)|\, dt\Big| = |w^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(\tau_i)| - \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |v^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(t)|\, dt. \tag{2.8}$$

Далее из (2.7) получаем

$$|w^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(\tau_{i+1})| \le |w^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(\tau_i) + \delta u^{(k)}_{\delta,\varepsilon,i}| + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |v^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(t)|\, dt.$$

Справедливость леммы следует из (2.8) и последнего неравенства.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Справедливы неравенства*

$$|w_{\delta,\varepsilon}^{(k)}(\tau_{i+1})| \leq 3 \max_{j\in[1:i]} \int\limits_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} |v_{\delta,\varepsilon}^{(k)}(t)|\, dt, \quad i \in [0:m-1].$$

Доказательство проведем методом математической индукции. При $i = 1$

$$|w_{\delta,\varepsilon}^{(k)}(\tau_i)| = 0.$$

Пусть неравенство верно при $i \in [1:j]$. Проверим его справедливость при $i = j+1$. Возможны два случая. В первом случае полагаем, что

$$|w_{\delta,\varepsilon}^{(k)}(\tau_j)| \leq \int\limits_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} |v_{\delta,\varepsilon}^{(k)}(t)|\, dt.$$

Тогда утверждение леммы следует из (2.6). Во втором случае полагаем, что

$$|w_{\delta,\varepsilon}^{(k)}(\tau_j)| > \int\limits_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} |v_{\delta,\varepsilon}^{(k)}(t)|\, dt.$$

Тогда утверждение леммы следует из леммы 1 и предположения индукции.

Лемма доказана.

Лемма 3 [17, с. 955]. *Пусть функция* $\varepsilon(t) \geq 0$ *при* $t \in T$ *и при всех* $i \in [0:m-1]$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) \leq \varepsilon(\tau_i)(1+\beta\delta) + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\varphi(t)|\, dt,$$

где $\tau_i \in \Delta$, $\beta = \mathrm{const} > 0$, $\varphi(\cdot) \in L(T; R)$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\varepsilon(\tau_i) \leq \Big(\varepsilon(t_0) + \int\limits_{t_0}^{\tau_i} |\varphi(t)|\, dt\Big) \exp(\beta(\tau_i - t_0)).$$

Лемма 4. *Можно указать положительное число* c_2 *такое, что*

$$\sup\{|y_{\delta,\varepsilon}(\tau_i)|_1 : i \in [0:m], \delta \in (0,1), \varepsilon \in (0,1)\} \leq c_2.$$

Доказательство. Ввиду (2.3), (2.4) и (1.6) верны неравенства

$$|y_{\delta,\varepsilon}(\tau_{i+1})|_1 \leq |y_{\delta,\varepsilon}(\tau_i)|_1 + \delta\varepsilon + \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |f^*(t, y_{\delta,\varepsilon}(\tau_i), y_{\delta,\varepsilon}(\tau_i - \tau))|\, dt$$

$$\leq |y_{\delta,\varepsilon}(\tau_i)|_1 + \delta\varepsilon + L\delta|y_{\delta,\varepsilon}(\tau_i)|_1 + L\delta|y_{\delta,\varepsilon}(\tau_i - \tau)|_1 + \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |f(t,0,0)|_1\, dt.$$

Таким образом,

$$|y_{\delta,\varepsilon}(\tau_{i+1})|_1 \leq (1+L\delta)|y_{\delta,\varepsilon}(\tau_i)|_1 + \delta\varepsilon + L\delta|y_{\delta,\varepsilon}(\tau_i - \tau)|_1 + \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |f(t,0,0)|_1\, dt.$$

Теперь осталось воспользоваться леммой 3, а также методом шагов, применяя эту лемму на отрезках $[t_0, \tau_1], [\tau_1, \tau_2], \ldots$ вплоть до момента ϑ.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Имеет место неравенство*

$$|x(t) - z_{\delta,\varepsilon}(t)|_1 \le \varepsilon(1 + t - t_0) + c_3\delta + L\int\limits_{t_0}^{t} |x(s) - y_{\delta,\varepsilon}(s)|_1\, ds, \quad t \in T,$$

где $c_3 = \mathrm{const} > 0$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что верно неравенство

$$|x(t) - z_{\delta,\varepsilon}(t)|_1 \le |x^0 - x^\varepsilon(0)|_1 + \sum_{i=0}^{i(t)-1}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} I_i(s)\, ds + \int\limits_{\tau_i(t)}^{t} I_{i(t)}(s)\, ds, \tag{2.9}$$

где $i(t)$ — целая часть t,

$$I_i(s) = f(s, x(s), x(s-\tau)) - f^*(s, y_{\delta,\varepsilon}(\tau_{i+1}), y_{\delta,\varepsilon}(\tau_{i+1}-\tau)).$$

Далее, при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ ввиду (1.6) имеет место неравенство

$$\Big|\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} I_i(s)\, ds\Big|_1 \le \varepsilon\delta + |I_i^0|_1. \tag{2.10}$$

Здесь

$$I_i^0 = \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{f(s, x(s), x(s-\tau)) - f(s, y_{\delta,\varepsilon}(\tau_{i+1}), y_{\delta,\varepsilon}(\tau_{i+1}-\tau))\}\, ds.$$

Кроме того, учитывая липшицевость функции f, получаем

$$\begin{aligned} |I_i^0|_1 &\le \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |f(s, x(s), x(s-\tau)) - f(s, y_{\delta,\varepsilon}(s), y_{\delta,\varepsilon}(s-\tau))|_1\, ds + J_i \\ &\le L\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|x(s) - y_{\delta,\varepsilon}(s)|_1 + |x(s-\tau) - y_{\delta,\varepsilon}(s-\tau)|_1\}\, ds + \delta J_i, \end{aligned} \tag{2.11}$$

где

$$J_i = L\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|y_{\delta,\varepsilon}(s) - y_{\delta,\varepsilon}(\tau_{i+1})|_1 + |y_{\delta,\varepsilon}(s-\tau) - y_{\delta,\varepsilon}(\tau_{i+1}-\tau)|_1\}\, ds.$$

При $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ в силу леммы 4 верна цепочка неравенств

$$|y_{\delta,\varepsilon}(t) - y_{\delta,\varepsilon}(\tau_{i+1})|_1 \le \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |f^*(s, y_{\delta,\varepsilon}(\tau_{i+1}), y_{\delta,\varepsilon}(\tau_{i+1}-\tau))|_1\, ds$$

$$\le \varepsilon\delta + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |f(s, y_{\delta,\varepsilon}(\tau_{i+1}), y_{\delta,\varepsilon}(\tau_{i+1}-\tau))|_1\, ds$$

$$\le \varepsilon\delta + \delta L|y_{\delta,\varepsilon}(\tau_{i+1})|_1 + \delta L|y_{\delta,\varepsilon}(\tau_{i+1}-\tau)|_1 + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |f(s, 0, 0)|_1\, ds.$$

В таком случае

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |y_{\delta,\varepsilon}(s) - y_{\delta,\varepsilon}(\tau_{i+1})|_1\, ds \le (\varepsilon + 2c_1 L)\delta^2 + \delta \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |f(s,0,0)|_1\, ds. \tag{2.12}$$

Отсюда следует, что при всех $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $\tau_i \ge t_0 + \tau$, верны неравенства

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |y_{\delta,\varepsilon}(s-\tau) - y_{\delta,\varepsilon}(\tau_{i+1}-\tau)|_1\, ds \le (\varepsilon + 2c_1 L)\delta^2 + \delta \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |f(s,0,0)|_1\, ds. \tag{2.13}$$

В свою очередь, в силу (1.5) при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $\tau_{i+1} \le t_0$,

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |y_{\delta,\varepsilon}(s-\tau) - y_{\delta,\varepsilon}(\tau_{i+1}-\tau)|_1\, ds \le c_4\delta^2. \tag{2.14}$$

Утверждение леммы следует из (2.9)–(2.14).

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. При $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ имеет место цепочка неравенств

$$\begin{gathered} |y^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(t) - z^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(t)| \le |y^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(\tau_{i+1}) - z^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(\tau_i)| + |y^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(\tau_{i+1}) - y^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(t)| \\ + |z^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(\tau_i) - z^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(t)| \le |w^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(\tau_{i+1})| + \delta|u^{(k)}_{\delta,\varepsilon,i}| + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |v^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(t)|\, dt. \end{gathered} \tag{2.15}$$

По определению $u_{\delta,\varepsilon,i}$

$$\delta|u^{(k)}_{\delta,\varepsilon,i}| \le \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |v^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(t)|\, dt. \tag{2.16}$$

Из (2.15), учитывая (2.16) и лемму 2, получаем справедливое при всех $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ неравенство

$$|y^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(t) - z^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(t)| \le 3 \max_{j\in[1:i]} \int\limits_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} |v^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(t)|\, dt + \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_{i+1}} |v^{(k)}_{\delta,\varepsilon}(t)|\, dt. \tag{2.17}$$

Воспользовавшись (1.5), получаем

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1)} |x^0(0) - x^\varepsilon(0)|_1 \le 1,$$

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1)} \max_{s\in[-\tau,0]} |x^\varepsilon(s)|_1 \le \sup_{\varepsilon\in(0,1)} \max_{s\in[-\tau,0]} |x^0(s) - x^\varepsilon(s)|_1 + |x^0(\cdot)|_W \le 1 + |x^0(\cdot)|_W.$$

Поэтому

$$|y_{\delta,\varepsilon}(\tau_i)|_1 \le \max_{s\in[-\tau,0]} |x^\varepsilon(s)|_1 + \int\limits_{t_0}^{\tau_i} |u_{\delta,\varepsilon}(t)|_1\, dt \le c_5 + \int\limits_{t_0}^{\tau_i} |u_{\delta,\varepsilon}(t)|_1\, dt, \tag{2.18}$$

где $c_5 = 1 + |x^0(\cdot)|_W$. Аналогичная оценка верна и для $|y_{\delta,\varepsilon}(\tau_i - \tau)|_1$. В силу (1.6), (2.18) при п.в. $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$ верны неравенства

$$\begin{gathered} |v_{\delta,\varepsilon}(t)|_1 \le \varepsilon + |f(t, y_{\delta,\varepsilon}(\tau_i), y_{\delta,\varepsilon}(\tau_i - \tau))|_1 \\ \le \varepsilon + |f(t,0,0)|_1 + L|y_{\delta,\varepsilon}(\tau_i)|_1 + L|y_{\delta,\varepsilon}(\tau_i - \tau)|_1 \\ \le \varepsilon + |f(t,0,0)|_1 + 2c_5 L + 2L\int\limits_{t_0}^{\tau_i} |u_{\delta,\varepsilon}(t)|_1\, dt. \end{gathered} \tag{2.19}$$

В свою очередь, учитывая (2.3)–(2.5), заключаем, что справедливо неравенство

$$\int\limits_{t_0}^{\tau_i} |u_{\delta,\varepsilon}(s)|_1\, ds \le \int\limits_{t_0}^{\tau_{i-1}} |v_{\delta,\varepsilon}(s)|_1\, ds \le l_{\delta,\varepsilon}(t) \equiv \int\limits_{t_0}^{t} |v_{\delta,\varepsilon}(s)|_1\, ds, \quad t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]. \tag{2.20}$$

Значит, из (2.19) и (2.20) вытекает оценка

$$l_{\delta,\varepsilon}(t) \le (\varepsilon + 2c_5 L)(t - t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} |f(s,0,0)|_1\, ds + 2L \int\limits_{t_0}^{t} l_{\delta,\varepsilon}(s)\, ds.$$

Воспользовавшись неравенством Гронуолла, отсюда выводим

$$l_{\delta,\varepsilon}(t) \le a_\varepsilon(t) \equiv \{(\varepsilon + 2c_5 L)(\vartheta - t_0) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} |f(s,0,0)|_1\, ds\} \exp\{2L(t - t_0)\}. \tag{2.21}$$

Также из (2.19)–(2.21) следуют неравенства

$$\int\limits_{\tau j-1}^{\tau_j} |v_{\delta,\varepsilon}(t)|_1\, dt \le (1 + 2c_5 L)\delta + \int\limits_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} |f(t,0,0)|_1\, dt + 2L \int\limits_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} a_\varepsilon(t)\, dt, \tag{2.22}$$

$$\int\limits_{\tau_{j-1}}^{\tau_{j+1}} |v_{\delta,\varepsilon}(t)|_1\, dt \le 2(1 + 2c_5 L)\delta + \int\limits_{\tau_{j-1}}^{\tau_{j+1}} |f(t,0,0)|_1\, dt + 2L \int\limits_{\tau_{j-1}}^{\tau_{j+1}} a_\varepsilon(t)\, dt. \tag{2.23}$$

Из (2.17) с учетом (2.22) и (2.23) получаем справедливую при всех $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i \in [1 : m-1]$, оценку

$$\begin{aligned} |y_{\delta,\varepsilon}(t) - z_{\delta,\varepsilon}(t)|_1 &\le 3(1 + 2c_5 L)\delta + 3 \max_{j \in [1:i]} \int\limits_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \{|f(t,0,0)|_1 + L a_\varepsilon(t)\}\, dt \\ &+ 2(1 + 2c_5 L)\delta + \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_{i+1}} \{|f(t,0,0)|_1 + L a_\varepsilon(t)\}\, dt \\ &\le 5(1 + 2c_5 L)\delta + \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_{i+1}} \{|f(t,0,0)|_1 + L a_\varepsilon(t)\}\, dt + 3 \max_{j \in [1:i]} \int\limits_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \{|f(t,0,0)|_1 + L a_\varepsilon(t)\}\, dt. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Далее, при $t \in [t_0, \tau_i]$

$$\begin{aligned} |y_{\delta,\varepsilon}(t) - z_{\delta,\varepsilon}(t)|_1 &\le \int\limits_{t_0}^{t} |f^*(s, x^\varepsilon(0), x^\varepsilon(-\tau))|_1\, ds \le \delta\varepsilon + \int\limits_{t_0}^{t} |f(s, x^\varepsilon(0), x^\varepsilon(-\tau))|_1\, ds \\ &\le \delta(1 + L|x^\varepsilon(0)|_1 + L|x^\varepsilon(-\tau)|_1) + \int\limits_{t_0}^{t} |f(s,0,0)|_1\, ds \le (1 + 2c_5 L)\delta + \int\limits_{t_0}^{t} |f(s,0,0)|_1\, ds. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Кроме того, если $f(\cdot,0,0) \in L_2(T; \mathbb{R}^n)$, то из (2.21) следует существование такого числа $c_* \in (0, +\infty)$, что равномерно по всем $t \in T$, $\varepsilon \in (0,1)$, $\delta \in (0,1)$ верно неравенство $a_\varepsilon(t) \le c_6$. Учитывая последнее неравенство, из леммы 5, а также неравенств (2.24) и (2.25) имеем

$$|x(t) - y_{\delta,\varepsilon}(t)|_1 \le 5(1 + 2c_5 L)\delta + \varepsilon(1 + \vartheta - t_0) + c_3\delta + \Phi_f(\delta) + L \int\limits_{t_0}^{t} |x(s) - y_{\delta,\varepsilon}(s)|_1\, ds, \tag{2.26}$$

где

$$\Phi_f(\delta) = \max_{i\in[1:m-1]} \left\{ 3 \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |f(s,0,0)|_1\, ds + \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_{i+1}} |f(s,0,0)|_1\, ds + 5Lc_6\delta \right\}.$$

Если $f(\cdot,0,0) \in L_2(T;\mathbb{R}^n)$, то $\Phi_f(\delta) \le c_6\delta^{1/2}$, если же $f(\cdot,0,0) \in L_\infty(T;\mathbb{R}^n)$, то $\Phi_f(\delta) \le c_7\delta$. В таком случае справедливость утверждения теоремы следует из (2.26) и неравенства Гронуолла.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Теорема также верна, если рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1). При этом неравенства (1.5) и (1.6) заменяются неравенствами

$$|x^0 - x^\varepsilon|_1 \le \varepsilon, \quad |f(t,x) - f^*(t,x)|_1 \le \varepsilon,$$

управления $u_{\delta,\varepsilon}(t)$ и $v_{\delta,\varepsilon}(t)$ находятся по формулам (2.3)–(2.5), в которых $f^{*(k)}(t, y_{\delta,\varepsilon}(\tau_i), y_{\delta,\varepsilon}(\tau_i - \tau))$ и $f^{*(k)}(t, y_{\delta,\varepsilon}(\tau_{i+1}), y_{\delta,\varepsilon}(\tau_{i+1} - \tau))$ заменяются на $f^{*(k)}(t, y_{\delta,\varepsilon}(\tau_i))$ и $f^{(k)}(t, y_{\delta,\varepsilon}(\tau_{i+1}))$ соответственно. В свою очередь, в формулировке теоремы вместо $f(\cdot,0,0)$ пишется $f(\cdot,0)$.

З а м е ч а н и е 2. Если функция f является липшицевой по совокупности переменных, то в (2.4), (2.5) вместо $f^{*(k)}(t,.,.)$ можно писать $f^{*(k)}(\tau_i,.,.)$. В этом случае необходимость в интегрировании отпадает, так как под интегралом будет стоять число.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В.** О динамическом решении операторных уравнений // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269, № 3. С. 552–556.
2. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В.** О моделировании параметров динамической системы // Задачи управления и моделирования в динамических системах: сб. статей. Свердловск: Изд-во Урал. науч. центра, 1984. С. 47–68.
3. **Кряжимский А.В., Максимов В.И., Осипов Ю.С.** О моделировании управления в динамических системах // Прикл. математика и механика. 1983. Т. 47, № 6. С. 883–890.
4. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О наилучшем приближении оператора дифференцирования в классе неупреждающих операторов // Мат. заметки. 1985. Т. 37, № 2. С. 192–199.
5. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В.** Метод функций Ляпунова в задаче моделирования движения // Устойчивость движения: сб. тр. Новосибирск: Наука, 1985. С. 53–56.
6. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
7. **Максимов В.И.** Позиционное моделирование управлений и начальных функций для систем Вольтерра // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, №. 4. С. 618–629.
8. **Максимов В.И.** Численный метод нахождения приближенных решений параболических вариационных неравенств // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 11. С. 1994–2004.
9. **Maksimov V.** The method of extremal shift in control problems for evolution variational inequalities under uncertainty // Evol. Equ. Control The. 2022. Vol. 11, no. 4. P. 1373–1398. doi: 10.3934/eect.2021048
10. **Максимов В.И.** О существовании сильных решений дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, №. 3. С. 618–629.
11. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Gordon and Breach, 1995. 625 p. ISBN:2-88124-944-2
12. **Banks H.T.** Approximation of nonlinear functional–differential systems// J. Optim. Theory Appl. 1979. Vol. 29. P. 383–408. doi: 10.1007/BF00933142
13. **Kappel F., Schappaher W.** Non-linear functional differential equations and abstract integral equations // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1979. Vol. 84, no. 1–2. P. 71–91. doi: 10.1017/S0308210500016966
14. **Jackiewicz Z.** The numerical solutions of Volterra functional differential equations of neutral type // SIAM J. Numer. Analysis. 1981. Vol. 18, no. 4. P. 615–626. doi: 10.1137/0718040

15. **Ito K., Kappel F.** Approximation of infinite delay and Volterra type equations // Numer. Math. 1989. Vol. 54. P. 405–444. doi: 10.1007/BF01396322
16. **Lasiecka I., Manitius A.** Differentiability and convergence rates of approximating semigroups for retarded functional differential equations // SIAM J. Numer. Analysis. 1988. Vol. 25, no. 4. P. 883–907. doi: 10.1137/0725050
17. **Максимов В.И.** Об отслеживании траектории динамической системы // Прикл. математика и механика. 2011. Т. 75, № 6. С. 951–960.

Поступила 20.03.2024
После доработки 11.04.2024
Принята к публикации 15.04.2024

Близорукова Марина Сергеевна
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: msb@imm.uran.ru

Максимов Вячеслав Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: maksimov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. Dynamic solution of operator equations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1983, vol. 269, no. 3, pp. 552–556 (in Russian).
2. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. Modeling of parameters of a dynamic system. In the book *Problems of control and modeling in dynamic systems*, Akad. Nauk SSSR, Ural. Nauchn. Tsentr, Sverdlovsk, 1984, pp. 47–68 (in Russian).
3. Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I., Osipov Yu.S. On positional simulation in dynamic systems. *J. Appl. Math. Mech.*, 1983, vol. 47, no. 6, pp. 709–714. doi: 10.1016/0021-8928(83)90103-X
4. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. Best approximation of the differentiation operator in a class of nonanticipating operators. *Math. Notes*, 1985, vol. 37, no. 2, pp. 109–114. doi: 10.1007/BF01156754
5. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. Method of Lyapunov functions in the problem of motion modeling. In the book *Motion stability*, Novosibirsk, Nauka, 1985, pp. 53–56 (in Russian).
6. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*, NY, Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . This book is substantially revised version of the monograph: Krasovskii N.N., Subbotin A.I., *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
7. Maksimov V.I. Positional modeling of controls and initial functions for Volterra systems. *Differ. Uravn.*, 1987, vol. 23, no. 4, pp. 618–629 (in Russian).
8. Maksimov V.I. A numerical method for finding approximate solutions of parabolic variational inequalities. *Differ. Equ.*, 1988, vol. 24, no. 11, pp. 1344–1351.
9. Maksimov V.I. The method of extremal shift in control problems for evolution variational inequalities under uncertainty. *Evol. Equ. Control The.*, 2022, vol. 11, no. 4, pp. 1373–1398. doi: 10.3934/eect.2021048
10. Maksimov V.I. Existence of strong solutions of differential equations in a Hilbert space. *Differ. Equ.*, 1988, vol. 24, no. 3, pp. 277–284.
11. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. *Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions*, London, Gordon and Breach, 1995, 625 p. ISBN: 978-2881249440 .
12. Banks H.T. Approximation of nonlinear functional–differential systems. *J. Optim. Theory Appl.*, 1979, vol. 29, pp. 383–408. doi: 10.1007/BF00933142
13. Kappel F., Schappaher W. Non-linear functional–differential and abstract integral equations. *Proc. Roy. Soc.*, Edinburgh, 1979, no. 1–2, pp. 71–91. doi: 10.1017/S0308210500016966

14. Jackiewicz Z. The numerical solutions of Volterra functional–differential equations of neutral type. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1981, vol. 18, no. 4, pp. 615–626. doi: 10.1137/0718040
15. Ito K., Kappel F. Approximation of infinite delay and Volterra type equations. *Numer. Math.*, 1989, vol. 54, no. 4, pp. 405–444. doi: 10.1007/BF01396322
16. Lasiecka I., Manitius A. Differentiability and convergence rates of approximating semigroups for retarded functional differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1988, vol. 25, no. 4, pp. 883–907. doi: 10.1137/0725050
17. Maksimov V.I. The tracking of the trajectory of a dynamical system. *J. Appl. Math. Mech.*, 2011, vol. 75, no. 6, pp. 667-674. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2012.01.007

Received March 20, 2024
Revised April 11, 2024
Accepted April 15, 2024

Funding Agency: The work was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075-02-2024-1377).

Marina Sergeevna Blizorukova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: msb@imm.uran.ru .

Vyacheslav Ivanovich Maksimov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: maksimov@imm.uran.ru .

Cite this article as: M. S. Blizorukova, V. I. Maksimov. On modeling a solution of systems with constant delay using controlled models. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 39–49.