ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 2 2024

УДК 517.977

НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ МНОЖЕСТВ В ПРОСТРАНСТВЕ МЕР И ЗАДАЧА НА ПРОГРАММНЫЙ МИНИМАКС[1]

А. Г. Ченцов, Д. А. Серков

Для конфликтно управляемых динамических систем, удовлетворяющих условиям обобщенной единственности и равномерной ограниченности, изучается разрешимость задачи на минимакс в классе обобщенных управлений. Рассматриваются вопросы согласованности такого расширения, т. е. возможности аппроксимации обобщенных управлений в пространстве стратегических мер вложениями обычных управлений. С этой целью исследуется зависимость множества мер от общего маргинального распределения, заданного на одном из факторов базового пространства. Установлена непрерывность этой зависимости в метрике Хаусдорфа, заданной метрикой, отвечающей $*$-слабой топологии в пространстве мер. Также показана плотность вложений обычных управлений и пар управление-помеха в множества соответствующих обобщенных управлений в $*$-слабых топологиях.

Ключевые слова: обобщенные управления, стратегические меры, задача на минимакс, $*$-слабая сходимость, метрика Хаусдорфа.

A. G. Chentsov, D. A. Serkov. Continuous dependence of sets in a space of measures and a program minimax problem.

For conflict-controlled dynamical systems satisfying the conditions of generalized uniqueness and uniform boundedness, the solvability of the minimax problem in the class of generalized controls is studied. The issues of consistency of such an extension are considered; i. e., the possibility of approximating generalized controls in the space of strategic measures by embeddings of ordinary controls is analyzed. For this purpose, the dependence of the set of measures on the general marginal distribution specified on one of the factors of the base space is studied. The continuity of this dependence in the Hausdorff metric defined by the metric corresponding to the $*$-weak topology in the space of measures is established. The density of embeddings of ordinary controls and control-noise pairs in sets of corresponding generalized controls in the $*$-weak topologies is also shown.

Keywords: generalized controls, strategic measures, minimax problem, $*$-weak convergence, Hausdorff metric.

MSC: 60B05, 60B10, 28A50, 49J15, 49J35

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-2-277-299

Введение

Для конфликтно управляемых динамических систем, удовлетворяющих условиям обобщенной единственности и равномерной ограниченности, изучаются вопросы разрешимости задачи на минимакс в классе обобщенных управлений (такие системы, не обладая, вообще говоря, липшицевостью по фазовой переменной, удовлетворяют теореме об альтернативе Н. Н. Красовского, А. И. Субботина (см. [1; 2]); как показано [3], именно условие обобщенной единственности А. В. Кряжимского позволяет распространить утверждение альтернативы на более широкий класс систем, и вместе с тем условия обычной единственности для этого недостаточны). Рассматриваются также вопросы, связанные с аппроксимацией обобщенных управлений в пространстве стратегических мер обычными управлениями. С этой целью исследуется зависимость множества мер с общим маргинальным распределением при изменении упомянутого распределения. Установлена непрерывность этой зависимости в подходящей метрике Хаусдорфа (см. также [4–7]).

[1]Работа выполнена в рамках исследований Уральского математического центра при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2024-1377).

Установлена также плотность в $*$-слабых топологиях вложений обычных управлений и пар управление-помеха в соответствующие множества обобщенных управлений (см. [8–11]).

Базовым пространством служит декартово произведение $X \times Y$ непустых метрических компактов X, Y с борелевскими σ-алгебрами $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ соответственно. При этом пространство непрерывных вещественнозначных функций на $X \times Y$ сепарабельно. На измеримом пространстве $(X, \mathcal{X})$ задаем непустое множество неотрицательных борелевских мер M, компактное в относительной $*$-слабой топологии. Каждой мере μ из компакта M сопоставляется множество $\mathfrak{N}_\mu$ всех неотрицательных борелевских мер на произведении измеримых пространств $(X, \mathcal{X})$ и $(Y, \mathcal{Y})$ с общим маргинальным распределением μ на $\mathcal{X}$, называемое *программой, отвечающей мере* μ. Пространство борелевских мер на $X \times Y$ оснащаем $*$-слабой топологией. Тогда объединение всех программ $\mathfrak{N}[\mathrm{M}] = \cup_{\mu \in \mathrm{M}} \mathfrak{N}_\mu$ оказывается $*$-слабо замкнутым, сильно ограниченным и, как следствие, метризуемым. Фиксируем метрику ρ, порождающую указанную относительную $*$-слабую топологию на $\mathfrak{N}[\mathrm{M}]$, и вводим метрику Хаусдорфа ρ_H на его непустых замкнутых ограниченных подмножествах. Оценка изменения программ $\mathfrak{N}_\mu$ в метрике ρ_H в зависимости от распределений $\mu \in M$ показала (см. [12]) непрерывность отображения $\mathrm{M} \ni \mu \mapsto \mathfrak{N}_\mu \subset \mathfrak{N}[\mathrm{M}]$, что обобщает результат [13, лемма П.2], адаптируя его для использования в упомянутых системах со свойством обобщенной единственности и равномерной ограниченности (см. [3]). Из указанных свойств конструкции расширения для таких систем следует разрешимость задачи на минимакс в обобщенных управлениях и аппроксимируемость этого решения по функционалу качества в исходной задаче (рассматриваемой в классе обычных управлений) для широкого семейства нелинейных и, вообще говоря, нелипшицевых по фазовой переменной динамических систем.

1. Определения и обозначения

В дальнейшем используется теоретико-множественная символика (кванторы, пропозициональные связки и т. п.); $\varnothing$ — пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению. Если A и B — непустые множества, то через B^A обозначим множество всех отображений из A в B (см. [14, с. 77]).

Пусть $\mathbb{N}$ — натуральный ряд, $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, а $\mathbb{R}_+$ — ее неотрицательная полуось ($0 \in \mathbb{R}_+$). Полагаем, что элементы $\mathbb{N}$ — натуральные числа — множествами не являются. С учетом этого для всяких множества H и числа $m \in \mathbb{N}$ вместо $H^{\overline{1,m}}$, где $\overline{1,m}$ есть множество $\{k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant m\}$, используем традиционное H^m для обозначения множества всех отображений из $\overline{1,m}$ в H, т. е. для обозначения множества всех кортежей в H "длины" m. Обозначим $\mathbf{N} \triangleq \{\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \alpha(k) < \alpha(k+1) \ \ \forall k \in \mathbb{N}\}$.

Семейством называем множество, все элементы которого — множества. Принимаем аксиому выбора. Через $\mathcal{P}(W)$ и $\mathcal{P}'(W)$ условимся обозначать семейства соответственно всех и всех непустых подмножеств (п/м) произвольного множества W. Обозначим через $\mathrm{Fin}(W)$ семейство всех непустых конечных п/м непустого множества W. Для всякого $\mathbf{w} \in \mathrm{Fin}(W)$ обозначим через $\mathbf{bi}(\mathbf{w})$ множество всех биекций из $\overline{1, |\mathbf{w}|}$ на $\mathbf{w}$ (здесь $|\mathbf{w}|$ обозначает мощность множества $\mathbf{w}$). Для любых множества Z и семейства $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(Z))$, обозначим через $\mathbf{FP}(\mathcal{Z} \mid Z)$ семейство всевозможных конечных дизъюнктных покрытий множества Z множествами из $\mathcal{Z}$:

$$\mathbf{FP}(\mathcal{Z} \mid Z) \triangleq \big\{\mathbf{Z} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{Z}) \mid (\varnothing \notin \mathbf{Z}) \ \& \ (\cup_{A \in \mathbf{Z}} A = Z) \ \& \ (\forall A, A' \in \mathbf{Z} \ (A \cap A' \neq \varnothing) \Rightarrow (A = A'))\big\}.$$

При этом для всякого $\mathbf{W} \in \mathbf{FP}(\mathcal{W} \mid W)$, где $\mathcal{W} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(W))$, обозначим через $\mathbf{REP}(\mathbf{W})$ семейство всевозможных отношений представительства для разбиения $\mathbf{W}$: $\mathbf{REP}(\mathbf{W}) \triangleq \prod_{A \in \mathbf{W}} A$. Таким образом, для любых $\mathbf{Z} \in \mathbf{FP}(\mathcal{Z} \mid Z)$, $\mathbf{z} \in \mathbf{REP}(\mathbf{Z})$, где $\mathbf{z} \triangleq (z_A)_{A \in \mathbf{Z}}$, и $H \in \mathbf{Z}$ имеем $\mathbf{z}(H) = z_H \in H$.

Если $\mathfrak{X}$ — непустое семейство, а B — множество, то через $\mathfrak{X}|_B$ будем обозначать след семейства $\mathfrak{X}$ на множестве B: $\mathfrak{X}|_B \triangleq \{Y \cap B \colon Y \in \mathfrak{X}\}$. В качестве $\mathfrak{X}$ может использоваться топология некоторого множества, содержащего B.

Если A — непустое множество, то через $(\sigma{-}\mathrm{alg})[A]$ обозначаем семейство всех σ-алгебр п/м A; при $\mathcal{A} \in (\sigma{-}\mathrm{alg})[A]$ в виде $(A, \mathcal{A})$ имеем стандартное измеримое пространство (ИП). Если при этом $\mathfrak{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$, то через $\sigma_A^0(\mathfrak{E})$ обозначим σ-алгебру п/м A, порожденную (см. [15, п. 1.2]) семейством $\mathfrak{E}$. Если $\mathfrak{E}$ есть топология на A, то $\sigma_A^0(\mathfrak{E})$ есть σ-алгебра борелевских п/м A, отвечающих топологическому пространству (ТП) $(A, \mathfrak{E})$.

При $B \in \mathcal{P}(A)$ полагаем, что $\chi_B[A]$, $\chi_B[A] \in \mathbb{R}^A$, есть индикатор множества B, который определяется правилом

$$\chi_B[A](x) \triangleq \begin{cases} 1, & x \in B, \\ 0, & x \in A \setminus B. \end{cases}$$

При $\mathcal{A} \in (\sigma{-}\mathrm{alg})[A]$ через $\mathrm{B}_0(A, \mathcal{A})$ обозначаем множество всех ступенчатых в смысле ИП $(A, \mathcal{A})$ вещественнозначных (в/з) функций на A:

$$\mathrm{B}_0(A, \mathcal{A}) \triangleq \Big\{ f \in \mathbb{R}^A \mid \exists n \in \mathbb{N} \ \exists (B_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathcal{A}^n \ \exists (\beta_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathbb{R}^n \colon f = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \chi_{B_i}[A] \Big\},$$

т. е. $\mathrm{B}_0(A, \mathcal{A})$ есть линейная оболочка множества всех индикаторов $\chi_B[A]$, $B \in \mathcal{A}$ (линейные операции и порядок в $\mathbb{R}^A$ здесь и ниже определяются поточечно). Множество $\mathbb{B}(A)$ всех ограниченных в/з функций на A рассматриваем как банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_A$, определяемой как

$$\|f\|_A \triangleq \sup\big\{|f(x)| \colon x \in A\big\} \quad \forall f \in \mathbb{B}(A).$$

Тогда множество $\mathrm{B}(A, \mathcal{A})$, где $\mathcal{A} \in (\sigma{-}\mathrm{alg})[A]$, определяется в виде замыкания $\mathrm{B}_0(A, \mathcal{A})$ в топологии на $\mathbb{B}(A)$, порожденной нормой $\|\cdot\|_A$; при этом в данном случае

$$\mathrm{B}(A, \mathcal{A}) = \big\{ f \in \mathbb{B}(A) \mid f^{-1}(\,]-\infty, c[\,) \in \mathcal{A} \ \forall c \in \mathbb{R} \big\}, \tag{1.1}$$

т. е. $\mathrm{B}(A, \mathcal{A})$ является множеством всех ограниченных $\mathcal{A}$-измеримых в/з функций на A.

Если (A, τ) есть топологическое пространство, $A \neq \varnothing$, то через $\mathbb{C}(A, \tau)$ обозначим множество всех непрерывных в/з функций на A (в $\mathbb{R}$ по умолчанию подразумевается заданной топология, порожденная модуль-метрикой $|\cdot|$). При этом в случае, когда $\mathcal{A} = \sigma_A^0(\tau)$, для множества $\mathbb{C}_{\mathbb{B}}(A, \tau)$ всех ограниченных непрерывных в смысле (A, τ) в/з функций на A имеет место вложение $\mathbb{C}_{\mathbb{B}}(A, \tau) \subset \mathrm{B}(A, \mathcal{A})$; данное свойство следует из (1.1). Если (A, τ) — компактное топологическое пространство и $A \neq \varnothing$, то $\mathbb{C}_{\mathbb{B}}(A, \tau) = \mathbb{C}(A, \tau)$. Если A — непустой компакт и из контекста понятна его топология, будем использовать также более простое обозначение $\mathbb{C}(A)$.

Далее, при $\mathcal{A} \in (\sigma{-}\mathrm{alg})[A]$ через $(\sigma{-}\mathrm{add})[\mathcal{A}]$ будем обозначать множество всех в/з счетно-аддитивных (с.-а.) мер на σ-алгебре $\mathcal{A}$; при этом через $(\sigma{-}\mathrm{add})_+[\mathcal{A}]$ обозначим его п/м всех неотрицательных с.-а. мер на σ-алгебре $\mathcal{A}$, а также введем множество $(\sigma{-}\mathrm{add})_P[\mathcal{A}]$ всех вероятностных мер на ИП $(A, \mathcal{A})$:

$$(\sigma{-}\mathrm{add})_P[\mathcal{A}] \triangleq \big\{ \mu \in (\sigma{-}\mathrm{add})_+[\mathcal{A}] \mid \mu(A) = 1 \big\}.$$

Если $\mu \in (\sigma{-}\mathrm{add})_+[\mathcal{A}]$, $f \in \mathrm{B}(A, \mathcal{A})$ и $F \in \mathcal{A}$, то определен (см. [16, гл. III]) μ-интеграл

$$\int\limits_F f \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_F f(x) \mu\,(\mathrm{d}x) \in \mathbb{R}$$

функции f на множестве F (отметим, что в данном сравнительно простом случае можно воспользоваться определением из [17, т. 1, гл. 3]).

2. Основные структуры

Пусть (X, τ_X), (Y, τ_Y) — непустые метризуемые компакты, $\mathcal{X} \in (\sigma{-}\mathrm{alg})[X]$ и $\mathcal{Y} \in (\sigma{-}\mathrm{alg})[Y]$ — борелевские σ-алгебры, порожденные топологиями τ_X и τ_Y соответственно: $\mathcal{X} \triangleq \sigma_X^0(\tau_X)$, $\mathcal{Y} \triangleq \sigma_Y^0(\tau_Y)$. Пусть $\mathfrak{B} \in (\sigma{-}\mathrm{alg})[X \times Y]$, $\mathfrak{B} \triangleq \sigma_{X\times Y}^0(\tau_X \otimes \tau_Y)$, есть σ-алгебра борелевских п/м $X \times Y$, порожденная произведением $\tau_X \otimes \tau_Y$ топологий τ_X, τ_Y. По построению любая мера η из множества $(\sigma{-}\mathrm{add})_+[\mathfrak{B}]$ является регулярной относительно семейства замкнутых множеств топологического произведения $(X \times Y, \tau_X \otimes \tau_Y)$ (см., например, [18, гл. 1, § 1]). Кроме того, σ-алгебра $\mathfrak{B}$ совпадает с σ-алгеброй, порожденной прямым произведением σ-алгебр $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, т. е. семейством всех измеримых прямоугольников $A \times B$, где $(A, B) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ (см. [18, добавление II]).

При этом для всякой (неотрицательной) меры $\eta \in (\sigma{-}\mathrm{add})_+[\mathfrak{B}]$ определена неотрицательная *маргинальная мера* $\mathbf{mrg}[\eta] \in (\sigma{-}\mathrm{add})_+[\mathcal{X}]$ вида

$$\mathbf{mrg}[\eta](B) \triangleq \eta(B \times Y) \quad \forall B \in \mathcal{X}. \tag{2.1}$$

Обозначим через $\mathfrak{B}_X$ и $\mathfrak{B}_Y$ семейства цилиндров из $\mathfrak{B}$ с основаниями из $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ соответственно:

$$\mathfrak{B}_X \triangleq \{A \times Y : A \in \mathcal{X}\}, \quad \mathfrak{B}_Y \triangleq \{X \times B : B \in \mathcal{Y}\}.$$

Так как $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ суть σ-алгебры, то эти семейства образуют σ-подалгебры $\mathfrak{B}$.

Поскольку (X, τ_X), (Y, τ_Y) — метризуемые компакты, то σ-алгебры $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ являются счетно-порожденными (см. [15, гл. 1, п. 1.12.93]), и, следовательно, σ-алгебры $\mathfrak{B}_X$, и $\mathfrak{B}_Y$ также являются счетно-порожденными.

Для всякого множества $\mathrm{M} \in \mathcal{P}'((\sigma{-}\mathrm{add})_+[\mathcal{X}])$ обозначим

$$\mathfrak{N}[\mathrm{M}] \triangleq \bigcup_{\mu \in \mathrm{M}} \mathfrak{N}_\mu, \tag{2.2}$$

где $\mathfrak{N}_\mu$ при $\mu \in (\sigma{-}\mathrm{add})_+[\mathcal{X}]$ есть множество всех мер из $(\sigma{-}\mathrm{add})_+[\mathfrak{B}]$ с маргиналом μ:

$$\mathfrak{N}_\mu \triangleq \big\{\eta \in (\sigma{-}\mathrm{add})_+[\mathfrak{B}] \mid \mathbf{mrg}[\eta] = \mu\big\} \in \mathcal{P}'((\sigma{-}\mathrm{add})_+[\mathfrak{B}]); \tag{2.3}$$

заметим, что множества $\mathfrak{N}_\mu$ и $\mathfrak{N}[\{\mu\}]$ совпадают.

Для произвольно выбранных непустого множества D, $\mathcal{D} \in (\sigma{-}\mathrm{alg})[D]$, и $\lambda \in (\sigma{-}\mathrm{add})[\mathcal{D}]$ сильной нормой меры λ будем называть (и обозначать $\mathbf{Var}(\lambda)$) полную вариацию этой меры, т. е. вариацию λ на D (см., например, [15, гл. 3]). Так как всюду далее будут рассматриваться только неотрицательные меры (меры из $(\sigma{-}\mathrm{add})_+[\mathcal{D}]$), то сильная норма меры $\lambda \in (\sigma{-}\mathrm{add})_+[\mathcal{D}]$ всегда будет совпадать с мерой всего множества D: $\mathbf{Var}(\lambda) = \lambda(D)$. В частности, для произвольных мер $\mu \in (\sigma{-}\mathrm{add})_+[\mathcal{X}]$ и $\eta \in \mathfrak{N}_\mu$ будет выполняться равенство $\mathbf{Var}(\mu) = \mathbf{Var}(\eta)$.

В дальнейшем изложении множество $\mathrm{M} \in \mathcal{P}'((\sigma{-}\mathrm{add})_+[\mathcal{X}])$ со свойством $*$-слабой компактности полагается фиксированным. Таким образом, множество M $*$-слабо замкнуто и сильно ограничено (см. [16, гл. V, § 4]).

3. Свойства $*$-слабой замкнутости множеств $\mathfrak{N}_\mu$ и $\mathfrak{N}[\mathrm{M}]$

Лемма 1. *Множество* $\mathfrak{N}[\mathrm{M}]$ *ограничено в сильной норме* $(\sigma{-}\mathrm{add})[\mathfrak{B}]$ *и замкнуто в $*$-слабой топологии* $(\sigma{-}\mathrm{add})[\mathfrak{B}]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Проверим сильную ограниченность множества $\mathfrak{N}[\mathrm{M}]$. Из определения маргинального распределения следует (см. (2.1), (2.3)), что множество $\mathfrak{N}_\mu$ ограничено сильной нормой меры μ:

$$\sup\big\{\mathbf{Var}(\eta) : \eta \in \mathfrak{N}_\mu\big\} = \mathbf{Var}(\mu).$$

Таким образом, для элементов $\mathfrak{N}[\mathrm{M}]$ имеем равенства

$$\sup\bigl\{\mathbf{Var}(\eta)\colon \eta\in\mathfrak{N}[\mathrm{M}]\bigr\}=\sup\Bigl\{\mathbf{Var}(\eta)\colon \eta\in\bigcup_{\mu\in\mathrm{M}}\mathfrak{N}_\mu\Bigr\}=\sup\bigl\{\mathbf{Var}(\mu)\colon \mu\in\mathrm{M}\bigr\}<+\infty,$$

т. е. $\mathfrak{N}[\mathrm{M}]$ ограничено в сильной норме пространства $(\sigma-\mathrm{add})[\mathfrak{B}]$.

2. Проверим свойство $*$-слабой замкнутости множества $\mathfrak{N}[\mathrm{M}]$. Воспользуемся для этого критерием замкнутости множества в терминах направленностей.

Напомним, что (бинарным) отношением называется п/м декартова произведения некоторых двух множеств. Если имеются непустое множество D и отношение $\sqsubseteq$, $\sqsubseteq\in\mathcal{P}(D\times D)$, то, как обычно, для $\forall x\in D\ \ \forall y\in D$

$$\bigl(x\sqsubseteq y\bigr)\overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}\bigl((x,y)\in\sqsubseteq\bigr).$$

Тогда в виде

$$(\mathrm{Ord})[D]\triangleq\bigl\{\angle\in\mathcal{P}(D\times D)\mid(\forall x\in D\ \ x\angle x)\ \&\ (\forall a,b,c\in D\ \ ((a\angle b)\ \&\ (b\angle c)\Rightarrow(a\angle c)))\bigr\}$$

имеем множество всех предпорядков на D; элементы множества

$$(\mathrm{DIR})[D]\triangleq\bigl\{<\in(\mathrm{Ord})[D]\mid\forall x,y\in D\ \ \exists z\in D\ \ (x<z)\ \&\ (y<z)\bigr\}$$

называем *направлениями на* D. При $\sqsubseteq\in(\mathrm{DIR})[D]$ пару $(D,\sqsubseteq)$ называем *направленным множеством.* Если при этом для множества H задана функция $h\in H^D$, то $(D,\sqsubseteq,h)$ называем *направленностью в* H.

Если (H,τ_H) — топологическое пространство, $(D,\sqsubseteq,h)$ — направленность в H и $q_0\in H$, то элемент q_0 называется *пределом направленности* $(D,\sqsubseteq,h)$ в ТП (H,τ_H) в случае, когда для всякой открытой окрестности $U\in\tau_H$ точки q_0 найдется элемент $\delta_U\in D$ такой, что для любого $\delta\in D$ выполнено

$$\bigl(\delta_U\sqsubseteq\delta\bigr)\Rightarrow\bigl(h(\delta)\in U\bigr).$$

В этом случае будем также говорить, что $(D,\sqsubseteq,h)$ сходится (по Мору — Смиту) к q_0 в (H,τ_H).

База $*$-слабой топологии $\sigma(W^*,W)$ в сопряженном к банахову пространству W пространстве W^* определяется (см., например, [8, с. 41; 19, п. 8.1]) посредством множеств

$$U(\xi,x_1,\dots,x_n,\varepsilon)\triangleq\{\zeta\in W^*\mid|\zeta(x_i)-\xi(x_i)|<\varepsilon,\ \forall i\in\overline{1,n}\},$$

где $\xi\in W^*$, $x_1,\dots,x_n\in W$, $n\in\mathbb{N}$, $\varepsilon>0$; в случае $W\triangleq\mathbb{C}(X\times Y,\tau_X\otimes\tau_Y)$ W^* в оснащении "традиционной" нормой изометрически изоморфно $(\sigma-\mathrm{add})[\mathfrak{B}]$ в оснащении сильной нормой.

При этом сходимость направленности $(D,\sqsubseteq,\mathbf{h})$, $\mathbf{h}\in((\sigma-\mathrm{add})[\mathfrak{B}])^D$, к произвольному элементу $\eta\in(\sigma-\mathrm{add})[\mathfrak{B}]$ в $*$-слабой топологии, отвечающей $\sigma(W^*,W)$, эквивалентна реализации следующих сходимостей:

$$\Bigl(D,\sqsubseteq,\Bigl(\int\limits_{X\times Y}f(x,y)\mathbf{h}(\delta)\,(\mathrm{d}(x,y))\Bigr)_{\delta\in D}\Bigr)\to\int\limits_{X\times Y}f(x,y)\eta\,(\mathrm{d}(x,y))\ \ \forall f\in\mathbb{C}(X\times Y,\tau_X\otimes\tau_Y).\quad(3.1)$$

Аналогично в случае, когда $W\triangleq\mathbb{C}(X,\tau_X)$, W^* изометрически изоморфно $(\sigma-\mathrm{add})[\mathcal{X}]$. При этом сходимость направленности $(D,\sqsubseteq,\mathbf{m})$, $\mathbf{m}\in((\sigma-\mathrm{add})[\mathcal{X}])^D$, к элементу $\mu\in(\sigma-\mathrm{add})[\mathcal{X}]$ в топологии, отвечающей $\sigma(W^*,W)$, т. е. в $*$-слабой топологии, эквивалентна реализации следующих сходимостей:

$$\Bigl(D,\sqsubseteq,\Bigl(\int\limits_X g(x)\mathbf{m}(\delta)\,(\mathrm{d}x)\Bigr)_{\delta\in D}\Bigr)\to\int\limits_X g(x)\mu\,(\mathrm{d}x)\quad\forall g\in\mathbb{C}(X,\tau_X).\quad(3.2)$$

3. Пусть направленность $(D, \sqsubseteq, \mathbf{h})$ в множестве $\mathfrak{N}[\mathrm{M}]$ $*$-слабо сходится к элементу $\eta \in (\sigma{-}\mathrm{add})[\mathfrak{B}]$, т. е. имеют место сходимости (3.1).

Пользуясь вложением $\mathbb{C}(X, \tau_X) \ni f \mapsto g_f \in C(X \times Y, \tau_X \otimes \tau_Y)$ вида $g_f(x,y) \triangleq f(x)$, $(x,y) \in X \times Y$, для любых $\mu \in \mathrm{M}$ и $\nu \in \mathfrak{N}_\mu$, т. е., когда $\mu = \mathbf{mrg}[\nu]$, получим равенства

$$\int\limits_X f(x)\mu\,(\mathrm{d}x) = \int\limits_{X\times Y} g_f(x,y)\nu\,(\mathrm{d}(x,y)) \quad \forall f \in \mathbb{C}(X, \tau_X). \tag{3.3}$$

Из свойств (3.1), (3.2) и равенств (3.3) при условии $*$-слабой сходимости направленности $(D, \sqsubseteq, \mathbf{h})$ в ТП $(\sigma{-}\mathrm{add})[\mathfrak{B}]$ получаем сходимость

$$\Big(D, \sqsubseteq, \Big(\int\limits_X f(x)\mathbf{mrg}[\mathbf{h}(\delta)]\,(\mathrm{d}x)\Big)_{\delta\in D}\Big) \to \int\limits_X f(x)\mathbf{mrg}[\eta]\,(\mathrm{d}x) \quad \forall f \in \mathbb{C}(X, \tau_X),$$

где $(D, \sqsubseteq, (\mathbf{mrg}[\mathbf{h}(\delta)])_{\delta\in D})$ есть направленность в M.

Таким образом, направленность $(D, \sqsubseteq, (\mathbf{mrg}[\mathbf{h}(\delta)])_{\delta\in D})$ по определению $*$-слабой сходимости в ТП $(\sigma{-}\mathrm{add})[\mathcal{X}]$ (см. (3.2) и выше) $*$-слабо в $(\sigma{-}\mathrm{add})[\mathcal{X}]$ сходится к элементу $\mathbf{mrg}[\eta] \in (\sigma{-}\mathrm{add})[\mathcal{X}]$. Следовательно, в силу $*$-слабой замкнутости множества M в $(\sigma{-}\mathrm{add})[\mathcal{X}]$ выполняется включение $\mathbf{mrg}[\eta] \in \mathrm{M}$. Отсюда (см. (2.2)) получаем соотношения $\eta \in \mathfrak{N}_{\mathbf{mrg}[\eta]}$, $\mathfrak{N}_{\mathbf{mrg}[\eta]} \subset \mathfrak{N}[\mathrm{M}]$ и, как следствие, $\eta \in \mathfrak{N}[\mathrm{M}]$.

Так как $*$-слабо сходящаяся в $\mathfrak{N}[\mathrm{M}]$ направленность выбиралась произвольно, то в силу известного критерия замкнутости (см., например, [20, п. 1.6.4]) получаем $*$-слабую замкнутость в $(\sigma{-}\mathrm{add})[\mathfrak{B}]$ множества $\mathfrak{N}[\mathrm{M}]$.

Лемма доказана.

Следствие 1. *Для любой меры* $\mu \in \mathrm{M}$ *множество* $\mathfrak{N}_\mu$ *ограничено в сильной норме и замкнуто в $*$-слабой топологии пространства* $(\sigma{-}\mathrm{add})[\mathfrak{B}]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует рассуждениям из обоснования леммы 1.

Итак, мы получили свойство $*$-слабой компактности множеств $\mathfrak{N}[\mathrm{M}]$ и $\mathfrak{N}_\mu$ при $\mu \in \mathrm{M}$.

4. Леммы об аппроксимации мер

Обозначим $Z \triangleq X \times Y$, т. е. для всякого $z \in Z$ имеем $z = (x,y)$, где $x \in X$, $y \in Y$. Для рассматриваемого набора σ-алгебр $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_X$ и $\mathfrak{B}_Y$ из теоремы [19, теорема 10.10.10] вытекает следующая лемма.

Лемма 2. *Для произвольной меры* $\eta \in (\sigma{-}\mathrm{add})_+[\mathfrak{B}]$ *существует функция* $g \in [0,1]^{\mathfrak{B}_Y \times Z}$ *такая, что*

(i) *для каждого* $E \in \mathfrak{B}_Y$ *функция* $g(E, \cdot)$ $\mathfrak{B}_X$*-измерима;*

(ii) *для каждого* $z \in Z$ *функция* $g(\cdot, z)$ *есть вероятностная мера на* $\mathfrak{B}_Y$;

(iii) *для любых* $E \in \mathfrak{B}_Y$ *и* $F \in \mathfrak{B}_X$ *выполнено равенство*

$$\eta(E \cap F) = \int\limits_E g(F, z)\eta\,(\mathrm{d}z).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, по условиям мера η является совершенной (см. [19, п. 7.5]) мерой, а σ-алгебра $\mathfrak{B}_Y$ — счетно-порожденной, как того требует применение [19, теорема 10.10.10].

Лемма доказана.

Нам потребуются несколько иные представления мер $\eta \in \mathfrak{N}_\mu$, где $\mu \in \mathrm{M}$, в духе леммы 2.

Напомним, что фиксировано непустое $*$-слабо компактное множество $\mathrm{M} \in \mathcal{P}'((\sigma\text{−add})_+[\mathcal{X}])$. Для введенных в разд. 2 σ-алгебр $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ обозначим через $\mathcal{V}$ множество переходных вероятностей (см. [21, III.2; 19, 10.7.1]) вида

$$\mathcal{V} \triangleq \{\nu \in [0,1]^{X \times \mathcal{Y}} \mid (\nu(\cdot, B) \in \mathrm{B}(X, \mathcal{X}) \ \ \forall B \in \mathcal{Y}) \ \& \ (\nu(x, \cdot) \in (\sigma\text{−add})_P[\mathcal{Y}] \ \ \forall x \in X)\}. \quad (4.1)$$

Следствием леммы 2 является приводимое ниже утверждение.

Следствие 2. *Пусть $\mu \in \mathrm{M}$ и $\eta \in \mathfrak{N}_\mu$. Тогда существует функция $\nu \in \mathcal{V}$ такая, что выполняется равенство*

$$\eta(E \times F) = \int\limits_E \nu(x, F)\, \mu(\mathrm{d}x) \quad \forall (E, F) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}. \quad (4.2)$$

Введем для $k \in \mathbb{N}$ множество $\mathbf{cc}[k] \triangleq \{(\xi_i)_{i \in \overline{1,k}} \in (\mathbb{R}_+)^k \mid \sum\limits_{i=1}^{k} \xi_i = 1\}$ наборов коэффициентов всех выпуклых комбинаций k-элементного множества в вещественном линейном пространстве. Рассматривая элементы $\mathbf{cc}[k]$ как барицентрические координаты, можно отождествить их с точками некоторого $(k-1)$-мерного симплекса. Определяя на множестве $\mathbf{cc}[k]$ топологию $\tau_{\mathbf{cc}[k]}$, порожденную евклидовым расстоянием в $\mathbb{R}^k$, получим метрический компакт $(\mathbf{cc}[k], \tau_{\mathbf{cc}[k]})$.

Обозначим через $\mathbb{C}_+(X, \tau_X)$ множество всех в/з неотрицательных непрерывных функций

$$\mathbb{C}_+(X, \tau_X) \triangleq \mathbb{C}(X, \tau_X) \cap (\mathbb{R}_+)^X;$$

положим

$$\mathbb{C}_+^{(k)}(X, \tau_X) \triangleq \{(g_i)_{i \in \overline{1,k}} \in (\mathbb{C}_+(X, \tau_X))^k \mid (g_i(x))_{i \in \overline{1,k}} \in \mathbf{cc}[k] \ \ \forall x \in X\} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Также обозначим через $\mathbb{L}_+(X, \mathcal{X})$ множество всех в/з неотрицательных $\mathcal{X}$-измеримых функций на X

$$\mathbb{L}_+(X, \mathcal{X}) \triangleq \mathbb{L}(X, \mathcal{X}) \cap (\mathbb{R}_+)^X$$

(здесь и ниже $\mathbb{L}(X, \mathcal{X})$ обозначает множество всех в/з функций на X, измеримых относительно борелевской σ-алгебры $\mathcal{X}$) и положим

$$\mathbb{L}_+^{(k)}(X, \mathcal{X}) \triangleq \{(g_i)_{i \in \overline{1,k}} \in (\mathbb{L}_+(X, \mathcal{X}))^k \mid (g_i(x))_{i \in \overline{1,k}} \in \mathbf{cc}[k] \ \ \forall x \in X\} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Нетрудно видеть, что так введенные множества $\mathbb{L}_+^{(k)}(X, \mathcal{X})$ и $\mathbb{C}_+^{(k)}(X, \tau_X)$ изоморфны соответственно множествам измеримых и непрерывных отображений из $(X, \mathcal{X})$ и (X, τ_X) в выпуклый метрический компакт $(\mathbf{cc}[k], \tau_{\mathbf{cc}[k]})$. Определим интересующие нас множества $\mathbb{C}_+^{(\mathbb{N})}(X, \tau_X)$ и $\mathbb{L}_+^{(\mathbb{N})}(X, \mathcal{X})$ вида

$$\mathbb{C}_+^{(\mathbb{N})}(X, \tau_X) \triangleq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{C}_+^{(k)}(X, \tau_X), \quad \mathbb{L}_+^{(\mathbb{N})}(X, \mathcal{X}) \triangleq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{L}_+^{(k)}(X, \mathcal{X}).$$

Напомним, что $(Y, \mathcal{Y})$ — борелевское измеримое пространство на метризуемом компакте Y; обозначим соответствующую метрику, порождающую топологию τ_Y, через ρ_Y (такая метрика не единственна; фиксируем любую из обладающих упомянутым свойством). Для вещественного числа $\xi > 0$ обозначим через $\mathbf{pfb}_\xi(\mathcal{Y})$, где $\mathbf{pfb}_\xi(\mathcal{Y}) \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(\mathcal{Y}))$, множество всех конечных борелевских разбиений множества Y на п/м с диаметрами, не превосходящими ξ:

$$\mathbf{pfb}_\xi(\mathcal{Y}) \triangleq \{\mathbf{H} \in \mathbf{FP}(\mathcal{Y} \,|\, Y) \mid \mathbf{diam}(H) \leqslant \xi \ \ \forall H \in \mathbf{H}\};$$

здесь $\mathbf{diam}(A)$ обозначает диаметр непустого п/м A множества Y:

$$\mathbf{diam}(A) \triangleq \sup_{w,w'\in A} \rho_Y(w,w').$$

Семейство $\mathbf{pfb}_\xi(\mathcal{Y})$, очевидно, непусто при всяком $\xi > 0$ в силу полной ограниченности метрического компакта Y, определения борелевской σ-алгебры $\mathcal{Y}$ и замкнутости этой σ-алгебры относительно операции дополнения множеств.

Для любого $y \in Y$ через δ_y обозначим сужение меры Дирака, сосредоточенной в точке y, на борелевскую σ-алгебру $\mathcal{Y}$; тогда для любых $\mathbf{z} \in \mathrm{Fin}(Y)$, $\mathbf{g} \triangleq (g_y)_{y\in\mathbf{z}} \in (\mathbb{C}_+(X,\tau_X))^{\mathbf{z}}$ таких, что

$$\sum_{y\in\mathbf{z}} g_y(x) = 1 \quad \forall x \in X, \tag{4.3}$$

справедливо включение

$$\sum_{y\in\mathbf{z}} g_y(x)\delta_y \in (\sigma\text{−add})_P[\mathcal{Y}] \quad \forall x \in X.$$

Значит, для таких $\mathbf{z}$ и $\mathbf{g} = (g_y)_{y\in\mathbf{z}}$ определено отображение

$$\Bigl(\sum_{y\in\mathbf{z}} g_y(x)\delta_y\Bigr)_{x\in X} \in ((\sigma\text{−add})_P[\mathcal{Y}])^X,$$

и как следствие отображение из $X \times \mathcal{Y}$ в $[0,1]$ вида

$$(x,A) \mapsto \sum_{y\in\mathbf{z}} g_y(x)\delta_y(A) \tag{4.4}$$

принадлежит множеству $\mathcal{V}$ (см. (4.1)).

Обозначим через $\mathcal{V}_*$ множество всех переходных вероятностей вида (4.4) при переборе всех $\mathbf{z} \in \mathrm{Fin}(Y)$ и $(g_y)_{y\in\mathbf{z}} \in (\mathbb{C}_+(X,\tau_X))^{\mathbf{z}}$, удовлетворяющих (4.3). Соответственно через $\mathcal{V}_0$ обозначим множество всех переходных вероятностей вида (4.4) при переборе всех $\mathbf{z} \in \mathrm{Fin}(Y)$ и $(g_y)_{y\in\mathbf{z}} \in (\mathbb{L}_+(X,\mathcal{X}))^{\mathbf{z}}$, также удовлетворяющих (4.3).

Пусть, как раньше, $\mu \in \mathrm{M}$. Обозначим через $\mathfrak{N}^*_\mu$ (через $\mathfrak{N}^0_\mu$) множество всех мер $\eta \in \mathfrak{N}_\mu$, для которых равенства (4.2) выполнены при некоторой функции $\nu \in \mathcal{V}_*$ (при некоторой функции $\nu \in \mathcal{V}_0$).

Если $(\mu,\nu) \in \mathrm{M}\times\mathcal{V}$, то через $\mu\odot\nu$ обозначим единственную меру $\eta \in \mathfrak{N}_\mu$ со свойством (4.2). В этой связи отметим явное представление такого рода мер в [17, § 5.5]. Из данных определений, в частности, следует, что для произвольной пары $(\nu_*,\mu) \in \mathcal{V}_* \times \mathrm{M}$ мера $\eta \triangleq \mu \odot \nu_*$ имеет следующее свойство непрерывности: для произвольной $f \in \mathbb{C}(X \times Y, \tau_X \otimes \tau_Y)$ отображение $\Psi_f\colon (X,\tau_X) \mapsto \mathbb{R}$ вида $\Psi_f\colon x \mapsto \int\limits_Y f(x,y)\nu_*(x,\mathrm{d}y)$ непрерывно, и выполняются равенства

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)(\mu\odot\nu_*)\,(\mathrm{d}(x,y)) = \int\limits_X \Psi_f(x)\mu\,(\mathrm{d}x).$$

Следовательно, при любых $f \in \mathbb{C}(X \times Y, \tau_X \otimes \tau_Y)$ и $\nu_* \in \mathcal{V}_*$ функционал на M вида

$$\mu \mapsto \int\limits_{X\times Y} f(x,y)(\mu\odot\nu_*)\,(\mathrm{d}(x,y)) \tag{4.5}$$

является непрерывным в (относительной) $*$-слабой топологии. Отметим также представление

$$\mathfrak{N}_\mu = \bigl\{\mu\odot\nu \mid \nu \in \mathcal{V}\bigr\}, \tag{4.6}$$

справедливое для всех $\mu \in \mathrm{M}$.

Следующая лемма опирается на лемму 2 и обобщает [13, лемма П.1].

Лемма 3. *Пусть $\mu \in \mathrm{M}$ и $\gamma \in \mathfrak{N}_\mu$. Тогда найдется последовательность мер $(\gamma_l^*)_{l\in\mathbb{N}}$ из множества $\mathfrak{N}_\mu^*$, сходящаяся в относительной $*$-слабой топологии $\mathfrak{N}_\mu$ к мере γ.*

Доказательство разобьем на два шага: на первом шаге покажем, что $*$-слабое замыкание $\mathfrak{N}_\mu^0$ совпадает со множеством $\mathfrak{N}_\mu$. На втором установим, что $*$-слабое замыкание $\mathfrak{N}_\mu^*$ содержит множество $\mathfrak{N}_\mu^0$. Из этих фактов (с учетом свойств оператора замыкания) будет следовать утверждение леммы.

1. Для мер μ и γ в силу леммы 2 существует (см. (4.6)) функция $\nu \in \mathcal{V}$, удовлетворяющая условию $\gamma = \mu \odot \nu$. Покажем, что имеется последовательность $(\gamma_k^0)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathfrak{N}_\mu^0)^{\mathbb{N}}$, $*$-слабо сходящаяся к мере γ.

Пусть $(\mathbf{A}^k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(\mathbf{A}^k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{pfb}_{\frac{1}{k}}(\mathcal{Y})$, — последовательность измельчающихся невырожденных конечных борелевских разбиений компакта Y. Как уже отмечено, такая последовательность существует в силу определений топологического пространства (Y,τ_Y) и измеримого пространства $(Y,\mathcal{Y})$. Выберем и обозначим $(\mathbf{y}^k)_{k\in\mathbb{N}}$, где $\mathbf{y}^k = (y_H^k)_{H\in\mathbf{A}^k}$, произвольную последовательность из $\prod\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{REP}(\mathbf{A}^k)$. Таким образом, для любых $k \in \mathbb{N}$ и $A \in \mathbf{A}^k$ имеем $\mathbf{y}^k(A) = y_A^k \in A$.

Для всякого $k \in \mathbb{N}$ определим конечный набор $\mathbf{g}^k$ функций из $[0,1]^X$, $\mathbf{g}^k = (g_A^k)_{A\in\mathbf{A}^k}$, следующими соотношениями:

$$g_A^k(x) \triangleq \nu(x,A) \quad \forall A \in \mathbf{A}^k,\ \forall x \in X.$$

Из определения и свойств ν (см. (4.1)) для произвольных $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \prod\limits_{j\in\mathbb{N}} \mathbf{bi}(\mathbf{A}^j)$ следуют включения $\mathbf{g}^k \circ \psi_k \in \mathbb{L}_+^{(|\mathbf{A}^k|)}(X,\mathcal{X})$. Рассмотрим последовательность переходных вероятностей $(\nu_k^0)_{k\in\mathbb{N}}$, где $(\nu_k^0)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{V}_0)^{\mathbb{N}}$, вида

$$\nu_k^0(x,F) \triangleq \sum_{A\in\mathbf{A}^k} g_A^k(x)\delta_{y_A^k}(F) \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \forall F \in \mathcal{Y},\ \forall x \in X$$

и определим последовательность мер $(\gamma_k^0)_{k\in\mathbb{N}}$, где $(\gamma_k^0)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathfrak{N}_\mu^0)^{\mathbb{N}}$, $\gamma_k^0 \triangleq \mu \odot \nu_k^0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Пусть $f \in \mathbb{C}(X\times Y, \tau_X\otimes\tau_Y)$. Переходя от интегрирования по множеству $X\times Y$ к повторному интегрированию, получим

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)\gamma_k^0(\mathrm{d}(x,y))$$

$$= \int\limits_X \int\limits_Y f(x,y) \sum_{A\in\mathbf{A}^k} g_A^k(x)\delta_{y_A^k}(\mathrm{d}y)\,\mu(\mathrm{d}x) = \int\limits_X \Big(\sum_{A\in\mathbf{A}^k} g_A^k(x) \int\limits_Y f(x,y)\delta_{y_A^k}(\mathrm{d}y)\Big)\mu(\mathrm{d}x)$$

$$= \int\limits_X \Big(\sum_{A\in\mathbf{A}^k} g_A^k(x) f(x,y_A^k)\Big)\mu(\mathrm{d}x) = \int\limits_X \Big(\sum_{A\in\mathbf{A}^k} \nu(x,A) f(x,y_A^k)\Big)\mu(\mathrm{d}x).$$

При любом $x \in X$ последняя сумма под интегралом равняется римановой сумме функции $f(x,\cdot)$ на разбиении $\mathbf{A}^k$. Несложно получить равномерную по $x \in X$ оценку близости таких римановых сумм к величине интеграла $\int_Y f(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y)$. В самом деле, обозначим через ω_f модуль непрерывности функции f:

$$\omega_f(\xi) \triangleq \max\big\{|f(x,y) - f(x',y')| \mid x,x' \in X,\ y,y' \in Y\colon \rho_X(x,x') + \rho_Y(y,y') \leqslant \xi\big\}, \quad \xi \geqslant 0,$$

где ρ_X и ρ_Y — метрики, порождаюшие топологии τ_X, τ_Y метризуемых компактов (X,τ_X) и (Y,τ_Y) соответственно. Тогда в силу компактности множеств X, Y равенства $\lim\limits_{\xi\to 0+} \omega_f(\xi) = 0$ для любых $k \in \mathbb{N}$ и $x \in X$ имеем

$$\Big|\int\limits_Y f(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y) - \sum_{A\in\mathbf{A}^k} \nu(x,A) f(x,y_A^k)\Big|$$

$$= \Big|\sum_{A\in\mathbf{A}^k}\int\limits_A (f(x,y)-f(x,y_A^k))\nu\,(x,\mathrm{d}y)\Big| \le \sum_{A\in\mathbf{A}^k}\sup_{y\in A}\big|f(x,y)-f(x,y_A^k)\big|\nu(x,A)$$

$$\le \max_{A\in\mathbf{A}^k}\sup_{y\in A}\big|f(x,y)-f(x,y_A^k)\big|\sum_{A\in\mathbf{A}^k}\nu(x,A)\le\omega_f\big(1/k\big)\nu(x,Y)=\omega_f\big(1/k\big).$$

Понятно, что из указанной равномерной по $x\in X$ оценки следует сходимость

$$\Big(\int\limits_{X\times Y} f(x,y)\gamma_k^0\,(\mathrm{d}(x,y))\Big)_{k\in\mathbb{N}}\to\int\limits_{X\times Y} f(x,y)\gamma\,(\mathrm{d}(x,y))$$

при произвольном выборе непрерывной функции f, а значит, следует и $*$-слабая сходимость $(\gamma_k^0)_{k\in\mathbb{N}}\to\gamma$.

Итак, в силу произвольного выбора γ установлено, что $*$-слабое секвенциальное замыкание $\mathfrak{N}_\mu^0$ содержит множество $\mathfrak{N}_\mu$. Следовательно, $*$-слабое замыкание $\mathfrak{N}_\mu^0$ содержит множество $\mathfrak{N}_\mu$, т. е. с учетом следствия 1 совпадает с $\mathfrak{N}_\mu$.

2. Покажем теперь, что $*$-слабое секвенциальное замыкание $\mathfrak{N}_\mu^*$ содержит множество $\mathfrak{N}_\mu^0$. Пусть $\gamma^0\in\mathfrak{N}_\mu^0$, т. е. мера γ^0 имеет представление (4.2) при $\nu^0\in[0,1]^{X\times\mathcal{Y}}$ вида

$$\nu^0(x,A)\triangleq\sum_{y\in\mathbf{z}}g_y(x)\delta_y(A)\quad\forall x\in X\ \ \forall A\in\mathcal{Y},$$

где $\mathbf{z}\in\mathrm{Fin}(Y)$; $\mathbf{g}=(g_y)_{y\in\mathbf{z}}\in([0,1]^X)^{\mathbf{z}}$; $\mathbf{g}\circ\psi\in\mathbb{L}_+^{(|\mathbf{z}|)}(X,\mathcal{X})$ при $\psi\in\mathbf{bi}(\mathbf{z})$. Пусть $\varepsilon>0$. Преобразуем конечный набор $\mathbf{g}$ в конечный набор $\mathbf{g}^{(\varepsilon)}\triangleq(g_y^{(\varepsilon)})_{y\in\mathbf{z}}\in(\mathbb{C}_+(X,\tau_X))^{\mathbf{z}}$ такой, что $\mathbf{g}^{(\varepsilon)}\circ\psi\in\mathbb{C}_+^{(|\mathbf{z}|)}(X,\tau_X)$, и чтобы эти два набора функций отличались бы лишь на некотором множестве из $\mathcal{X}$ меры не большей, чем ε.

Воспользуемся теоремой Лузина (см., например, [8, п. I.4.19]) в отношении набора функций $\mathbf{g}\circ\psi$ как отображения из $(X,\mathcal{X})$ в метрический компакт $(\mathbf{cc}[|\mathbf{z}|],\tau_{\mathbf{cc}[|\mathbf{z}|]})$. Нетрудно проверить, что все требования данной теоремы выполнены. Значит, найдется замкнутое подмножество $E_\varepsilon\subset X$ такое, что $\mu(X\setminus E_\varepsilon)<\varepsilon$, и при этом сужение указанного отображения $\mathbf{g}\circ\psi$ на множество E_ε непрерывно.

Далее, воспользуемся обобщенной теоремой Титце (см., например, [22, теорема 4.1]). Данное утверждение в дополнение к теореме Титце о непрерывном продолжении говорит, что если пространство, содержащее значения этого непрерывного продолжения (в рассматриваемом случае в силу непрерывного вложения $(\mathbf{cc}[|\mathbf{z}|],\tau_{\mathbf{cc}[|\mathbf{z}|]})$ в $\mathbb{R}^n$ можно использовать $\mathbb{R}^n$ как объемлющее пространство) локально выпукло, то все значения непрерывного продолжения могут быть взяты из выпуклой оболочки значений отображения $\mathbf{g}\circ\psi$ на множестве E_ε, т. е. из $\mathbf{cc}[|\mathbf{z}|]$. Таким образом, исходное непрерывное отображение из E_ε в $\mathbf{cc}[|\mathbf{z}|]\subset\mathbb{R}^n$ можно продолжить до непрерывного отображения $\mathbf{g}^{(\varepsilon)}\circ\psi$ из (X,τ_X) в $(\mathbf{cc}[|\mathbf{z}|],\tau_{\mathbf{cc}[|\mathbf{z}|]})$, т. е. до элемента из множества $\mathbb{C}_+^{(|\mathbf{z}|)}(X,\tau_X)$.

Пусть $\mathbf{g}^{(\varepsilon)}\triangleq(g_y^{(\varepsilon)})_{y\in\mathbf{z}}$. Выбирая в качестве значений ε величины $1/l$, $l\in\mathbb{N}$, построим с использованием счетной аксиомы выбора последовательность мер $(\gamma_l^*)_{l\in\mathbb{N}}\in(\mathfrak{N}_\mu^*)^{\mathbb{N}}$ вида

$$\gamma_l^*(A\times B)=\int\limits_A\sum_{y\in\mathbf{z}}g_y^{(1/l)}(x)\delta_y(B)\mu\,(\mathrm{d}x)\quad l\in\mathbb{N},\ \ (A,B)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}.$$

Покажем, что последовательность $(\gamma_l^*)_{l\in\mathbb{N}}$ $*$-слабо в $(\sigma-\mathrm{add})[\mathfrak{B}]$ сходится к мере γ^0. В самом деле, для любого $f\in\mathbb{C}(X\times Y,\tau_X\otimes\tau_Y)$ выполняются оценки

$$\Big|\int\limits_{X\times Y} f(x,y)\gamma_l^*\,(\mathrm{d}(x,y))-\int\limits_{X\times Y} f(x,y)\gamma^0\,(\mathrm{d}(x,y))\Big|=\Big|\int\limits_X\sum_{y\in\mathbf{z}}f(x,y)[g_y^{(1/l)}(x)-g_y(x)]\mu\,(\mathrm{d}x)\Big|$$

$$= \Big| \int\limits_{X \setminus E_{1/l}} \sum_{y \in \mathbf{z}} f(x,y)[g_y^{(1/l)}(x) - g_y(x)]\mu\,(\mathrm{d}x)\Big| \leq \|f\|_{X\times Y} \int\limits_{X \setminus E_{1/l}} \sum_{y \in \mathbf{z}} |g_y^{(1/l)}(x) - g_y(x)|\,\mu(\mathrm{d}x)$$

$$\leq \|f\|_{X\times Y} |\mathbf{z}| \int\limits_{X \setminus E_{1/l}} \mu\,(\mathrm{d}x) \leq \frac{|\mathbf{z}|\,\|f\|_{X\times Y}}{l}.$$

Так как f выбиралась произвольно, получаем искомую $*$-слабую сходимость последовательности $(\gamma_l^*)_{l\in\mathbb{N}}$ к мере γ^0.

В силу произвольного выбора γ^0 заключаем, что $*$-слабое секвенциальное замыкание $\mathfrak{N}_\mu^*$ содержит множество $\mathfrak{N}_\mu^0$, а стало быть, как отмечено в начале доказательства, данное секвенциальное замыкание, совпадающее с замыканием в силу метризуемости пространства, содержит $\mathfrak{N}_\mu$. Поэтому $\mathfrak{N}_\mu^*$ всюду плотно в $\mathfrak{N}_\mu$.

Лемма доказана.

5. Сходимость множеств $\mathfrak{N}_\mu$ в метрике Хаусдорфа

Как прежде, множество M, $\mathrm{M} \subset (\sigma{-}\mathrm{add})_+[\mathcal{X}]$, ограничено в сильной норме и замкнуто в $*$-слабой топологии. Обозначим через ρ метрику, индуцирующую относительную $*$-слабую топологию на множестве $\mathfrak{N}[\mathrm{M}]$ (напомним (см. [8, теорема I.3.11 (Бишопа)]), что $\mathfrak{N}[\mathrm{M}]$ с упомянутой топологией метризуемо в силу сепарабельности $\mathbb{C}(X\times Y, \tau_X \otimes \tau_Y)$ и свойства сильной ограниченности).

Обозначим через $(H)_\rho^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, открытую ε-окрестность произвольного множества H, $H \in \mathcal{P}'(\mathfrak{N}[\mathrm{M}])$, в метрике ρ. Обозначим также через ρ_H метрику Хаусдорфа, соответствующую метрике ρ и определенную на семействе всех непустых ограниченных и $*$-слабо замкнутых подмножеств $\mathfrak{N}[\mathrm{M}]$.

Теорема 1. *Пусть $\mu \in \mathrm{M}$ и $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathrm{M}^{\mathbb{N}}$. Если последовательность $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ $*$-слабо сходится к μ, то последовательность $(\rho_H(\mathfrak{N}_{\mu_i}, \mathfrak{N}_\mu))_{i\in\mathbb{N}}$ сходится к нулю при $i \to \infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для проверки утверждения покажем, что при выполнении условия $*$-слабой сходимости

$$(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}} \to \mu \tag{5.1}$$

для произвольного $\varepsilon > 0$ найдутся $N_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ и $N_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$ такие, что для всех $i \geqslant N_\varepsilon^1$ и $j \geqslant N_\varepsilon^2$ выполняются соотношения

$$\mathfrak{N}_{\mu_i} \subset (\mathfrak{N}_\mu)_\rho^\varepsilon; \tag{5.2}$$

$$\mathfrak{N}_\mu \subset (\mathfrak{N}_{\mu_j})_\rho^\varepsilon. \tag{5.3}$$

1. Рассуждениями “от противного” установим, что из (5.1) следует (5.2): пусть при выполнении (5.1) для некоторого $\bar\varepsilon > 0$ нашлись подпоследовательность $(\hat\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ последовательности $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ и последовательность $(\mathfrak{m}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ в $\mathfrak{N}[\mathrm{M}]$ такие, что

$$\mathfrak{m}_j \in \mathfrak{N}_{\hat\mu_j} \setminus (\mathfrak{N}_\mu)_\rho^{\bar\varepsilon} \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{5.4}$$

В силу $*$-слабой компактности $\mathfrak{N}[\mathrm{M}]$ выделим из последовательности $(\mathfrak{m}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ $*$-слабо сходящуюся подпоследовательность $(\mathfrak{n}_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Выделим из последовательности $(\hat\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ соответствующую подпоследовательность $(\bar\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$: $\mathfrak{n}_k \in \mathfrak{N}_{\bar\mu_k} \setminus (\mathfrak{N}_\mu)_\rho^{\bar\varepsilon}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. В силу (5.1) эта последовательность будет $*$-слабо сходиться к μ.

Итак, имеются последовательности $(\bar\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(\mathfrak{n}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ и мера $\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}[\mathrm{M}]$ со свойствами $*$-слабой сходимости:

$$(\mathfrak{n}_k)_{k\in\mathbb{N}} \to \mathfrak{n}, \quad (\bar\mu_k)_{k\in\mathbb{N}} \to \mu \quad \text{и} \quad \mathfrak{n}_k \in \mathfrak{N}_{\bar\mu_k} \setminus (\mathfrak{N}_\mu)_\rho^{\bar\varepsilon} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

В силу выбора элементов $\mathfrak{n}_k$ и замкнутости $\mathfrak{N}[\mathrm{M}]\setminus(\mathfrak{N}_\mu)_\rho^{\bar\varepsilon/2}$ имеем $\mathfrak{n}\in\mathfrak{N}[\mathrm{M}]\setminus(\mathfrak{N}_\mu)_\rho^{\bar\varepsilon/2}$. Обозначим через $\bar\mu$ маргинал меры $\mathfrak{n}$ ($\bar\mu\triangleq\mathbf{mrg}[\mathfrak{n}]$), т. е. $\mathfrak{n}\in\mathfrak{N}_{\bar\mu}$. Тогда (в силу данных определений и (5.4)) для любых функции $h\in\mathbb{C}(X,\tau_X)$ и индекса $k\in\mathbb{N}$ имеем соотношения

$$\int\limits_X h(x)\bar\mu_k\,(\mathrm{d}x)=\int\limits_{X\times Y} h(x)\mathfrak{n}_k\,(\mathrm{d}(x,y)),\quad \int\limits_X h(x)\bar\mu\,(\mathrm{d}x)=\int\limits_{X\times Y} h(x)\mathfrak{n}\,(\mathrm{d}(x,y)),$$

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{X\times Y} h(x)\mathfrak{n}_k\,(\mathrm{d}(x,y))=\int\limits_{X\times Y} h(x)\mathfrak{n}\,(\mathrm{d}(x,y)),$$

из которых следует, что для любой $h\in\mathbb{C}(X,\tau_X)$ имеется сходимость

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_X h(x)\bar\mu_k\,(\mathrm{d}x)=\int\limits_X h(x)\bar\mu\,(\mathrm{d}x).$$

В силу (5.1), произвольного выбора h и единственности $*$-слабого предела с учетом сходимости $(\bar\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}\to\mu$ получаем равенство $\bar\mu=\mu$. Значит, выполнено включение $\mathfrak{n}\in\mathfrak{N}_\mu$, противоречащее ранее полученному утверждению $\mathfrak{n}\notin(\mathfrak{N}_\mu)_\rho^{\bar\varepsilon/2}$. Таким образом, исходное предположение было неверно, и для любого $\varepsilon>0$, начиная с некоторого N_ε^1, выполняется включение (5.2).

2. Теперь покажем, что из (5.1) следует также соотношение (5.3). Зафиксируем $\varepsilon>0$ и выберем в метрическом компакте $\mathfrak{N}_\mu$ конечную $\frac{\varepsilon}{4}$-сеть $(\eta^k)_{k\in\overline{1,n}}$. Пользуясь леммой 3, аппроксимируем сеть $(\eta^k)_{k\in\overline{1,n}}$ $\frac{\varepsilon}{2}$-сетью $(\nu^k\odot\mu)_{k\in\overline{1,n}}$ (см. (4.6)), построенной из элементов множества $\mathfrak{N}^*_\mu$. Тогда $\nu^k\in\mathcal{V}_*$ при $k\in\overline{1,n}$. Рассмотрим, наконец, для $m\in\mathbb{N}$ конечный набор мер вида $(\nu^k\odot\mu_m)_{k\in\overline{1,n}}$ из множества $\mathfrak{N}^*_{\mu_m}$. Из непрерывности отображений вида (4.5) при любых $f(\cdot)\in\mathbb{C}(X\times Y,\tau_X\otimes\tau_Y)$ при всех $k\in\overline{1,n}$ имеем свойства $*$-слабой сходимости $\nu^k\odot\mu_m\to\nu^k\odot\mu$ при $m\to\infty$. Значит, при некотором N_ε^2 для любых $m>N_\varepsilon^2$ и $k\in\overline{1,n}$ мы получим неравенства $\rho(\nu^k\odot\mu_m,\nu^k\odot\mu)<\varepsilon/4$.

В итоге для произвольного $\varepsilon>0$ и произвольного элемента $\gamma\in\mathfrak{N}_\mu$ имеется N_ε^2 такое, что для любого $m>N_\varepsilon^2$ найдется элемент $\nu\odot\mu_m\in\{\nu^k\odot\mu_m\colon k\in\overline{1,n}\}\subset\mathfrak{N}_{\mu_m}$, для которого справедливо неравенство $\rho(\gamma,\nu\odot\mu_m)\le\varepsilon$, и, таким образом, выполняется (5.3).

Теорема доказана.

Заметим, что так как M — метрический компакт, установленная непрерывность отображения $\mathrm{M}\ni\mu\mapsto\mathfrak{N}_\mu\subset(\sigma-\mathrm{add})_+[\mathfrak{B}]$ влечет равномерную непрерывность этого отображения. Аналогичный результат получается комбинацией положений работы Дж. Бергина [6]; из последних продвижений см. работу В. И. Богачева и С. Н. Поповой [7].

6. Задача на программный минимакс в системе, удовлетворяющей условию обобщенной единственности

Рассмотрим возможное применение конструкций предыдущих разделов, имея в виду указанную постановку из [23]; однако, в отличие от упомянутой работы, будем накладывать на динамическую систему более общие условия. А именно, речь пойдет об условии обобщенной единственности, предложенном А. В. Кряжимским (см. [3]) в теории дифференциальных игр при доказательстве обобщения фундаментальной теоремы об альтернативе Н. Н. Красовского и А. И. Субботина (см. [1]).

Итак, фиксируем далее $n\in\mathbb{N}$ в качестве размерности фазового пространства системы

$$\dot x=f(t,x,u,v),\quad u\in P,\quad v\in Q,\tag{6.1}$$

функционирующей на конечном временном промежутке $T\triangleq[t_0,\vartheta_0]$, где $t_0\in\mathbb{R}$, $\vartheta_0\in\mathbb{R}$ и при этом $t_0<\vartheta_0$; u и v в (6.1) суть векторы управляющих воздействий; считаем, что P и Q —

непустые метризуемые компакты. Полагаем относительно f в (6.1), что

$$f\colon T \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \mapsto \mathbb{R}^n$$

есть непрерывная по совокупности переменных функция.

Фиксируем $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в качестве начального состояния системы (6.1).

При выборе функций $u(\cdot) = (u(t))_{t\in T} \in P^T$ и $v(\cdot) = (v(t))_{t\in T} \in Q^T$, полагаемых сейчас для простоты кусочно-постоянными, непрерывными справа на $[t_0, \vartheta_0)$ и непрерывными слева в точке ϑ_0 (далее множества этих управлений будем обозначать $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ соответственно), получаем управляемую систему

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), v(t)), \quad x(t_0) = x_0. \tag{6.2}$$

Будем, однако, рассматривать более общие варианты программных управлений.

Итак, рассмотрим непустые компакты $T \times P$ и

$$T \times P \times Q = (T \times P) \times Q \tag{6.3}$$

в оснащении σ-алгебрами $\mathcal{D}$ и $\mathcal{C}$ борелевских п/м соответственно (в связи с (6.3) см. [24, с. 17]). Кроме того, введем σ-алгебру $\mathcal{T}$ борелевских п/м T, а также σ-алгебру $\mathcal{Q}$ борелевских п/м Q. Тогда σ-алгебра $\mathcal{C}$ порождается полуалгеброй $\{E \times M\colon E \in \mathcal{D},\ M \in \mathcal{Q}\}$ п/м $T \times P \times Q$. Аналогично σ-алгебра $\mathcal{D}$ порождается полуалгеброй $\{H \times F\colon H \in \mathcal{T},\ F \in \mathcal{L}\}$, где $\mathcal{L}$ есть σ-алгебра борелевских п/м P. Через λ обозначим след меры Лебега на σ-алгебру $\mathcal{T}$, т. е. меру Лебега — Бореля на $(T, \mathcal{T})$. Мы будем рассматривать меры μ на $\mathcal{D}$ с маргиналом λ. Пусть

$$\mathcal{R} \triangleq \big\{\mu \in (\sigma{-}\mathrm{add})_+[\mathcal{D}] \mid \mu(G \times P) = \lambda(G)\ \ \forall G \in \mathcal{T}\big\}; \tag{6.4}$$

отметим для дальнейшего, что по построению множество $\mathcal{R}$ есть метризуемый компакт в $*$-слабой топологии $(\sigma{-}\mathrm{add})[\mathcal{D}]$; обозначим через $\rho_{\mathcal{R}}$ метрику на $\mathcal{R}$, порождающую упомянутую $*$-слабую топологию.

Мерам из $\mathcal{R}$ сопоставим "программы" в виде п/м $(\sigma{-}\mathrm{add})_+[\mathcal{C}]$ с общим маргиналом: введем в рассмотрение множество

$$\mathcal{H} \triangleq \big\{\eta \in (\sigma{-}\mathrm{add})_+[\mathcal{C}] \mid \eta(G \times P \times Q) = \lambda(G)\ \ \forall G \in \mathcal{T}\big\} \tag{6.5}$$

и семейство μ-"программ" $\pi[\mu]$, порожденное элементами из $\mathcal{R}$, вида

$$\pi[\mu] \triangleq \big\{\eta \in \mathcal{H} \mid \eta(D \times Q) = \mu(D)\ \ \forall D \in \mathcal{D}\big\} \quad \forall \mu \in \mathcal{R}. \tag{6.6}$$

Таким образом, для рассматриваемой задачи дана реализация отображения $\mu \mapsto \mathfrak{N}_\mu$ вида $\mathcal{R} \ni \mu \mapsto \pi[\mu] \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$.

С учетом метризуемости относительной $*$-слабой топологии на $\mathcal{H}$ выберем и зафиксируем метрику $\rho_{\mathcal{H}}$ на $\mathcal{H}$, порождающую данную топологию. Из (6.4), (6.6) следует, что

$$\bigcup_{\mu \in \mathcal{R}} \pi[\mu] \subset \mathcal{H}. \tag{6.7}$$

Покажем обратное вложение; пусть $\bar{\eta} \in \mathcal{H}$. Тогда определена мера

$$\bar{\mu} \triangleq \mathbf{mrg}[\bar{\eta}] \in (\sigma{-}\mathrm{add})_+[\mathcal{D}]. \tag{6.8}$$

В силу определений $\mathcal{R}$ и $\mathcal{H}$ (см. (6.4), (6.5)) при $G \in \mathcal{T}$ имеем

$$\bar{\mu}(G \times P) = \bar{\eta}((G \times P) \times Q) = \bar{\eta}(G \times P \times Q) = \lambda(G).$$

В силу произвольности выбора G из (6.4), (6.8) следует включение $\bar{\mu} \in \mathcal{R}$, и, значит, определена $\bar{\mu}$-программа

$$\pi[\bar{\mu}] = \{\eta \in \mathcal{H} \mid \eta(D \times Q) = \bar{\mu}(D) \ \ \forall D \in \mathcal{D}\}.$$

Тогда в силу выбора $\bar{\eta}$ и определений (6.5), (6.6) и (6.8) выполняется включение $\bar{\eta} \in \pi[\bar{\mu}]$. Таким образом, с учетом произвольного выбора $\bar{\eta}$ получаем искомое обратное вложение $\mathcal{H} \subset \bigcup\limits_{\mu \in \mathcal{R}} \pi[\mu]$ и как следствие (см. (6.7)) равенство $\mathcal{H} = \bigcup\limits_{\mu \in \mathcal{R}} \pi[\mu]$, подобное (2.2).

Теперь можно ввести нужную конкретизацию определений разд. 2. Итак, положим $X \triangleq T \times P$, $Y \triangleq Q$. Обозначим через $\mathfrak{F}_\eta$ множество всех элементов $x(\cdot)$ из $\mathbb{C}_n(T)$, удовлетворяющих уравнению

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{[t_0,t] \times P \times Q} f(s, x(s), u, v)\eta\,(d(s,u,v)) \quad \forall t \in T; \tag{6.9}$$

здесь $\mathbb{C}_n(T)$ обозначает пространство непрерывных отображений из T в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с равномерной нормой $\|\cdot\|_{\mathbb{C}_n(T)}$.

Считаем выполненным следующее условие.

У с л о в и е 1. Для всякой меры $\eta \in \mathcal{H}$ множество $\mathfrak{F}_\eta$ одноэлементно.

Для всякой меры $\eta \in \mathcal{H}$ в силу данного условия определим и обозначим $\varphi(\cdot,\eta) \triangleq (\varphi(t,\eta))_{t\in T}$ — единственный элемент $\mathfrak{F}_\eta$, т. е. единственное обобщенное движение системы (6.2), порожденное мерой η из начальной позиции (t_0, x_0).

Далее предполагаем выполненным также следующее условие.

У с л о в и е 2. Обобщенные траектории $\varphi(\cdot,\eta)$, $\eta \in \mathcal{H}$, равномерно ограничены: существует $K_{(2)} \in \mathbb{R}_+$ такое, что

$$\sup_{\eta\in\mathcal{H}} \|\varphi(\cdot,\eta)\|_{\mathbb{C}_n(T)} \leqslant K_{(2)}.$$

Далее будем обозначать через $X_{(6.1)}$ замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат и радиусом $K_{(2)}$, который в силу условия 2 не покидают траектории системы (6.1).

Для всякого $H \in \mathcal{P}'(\mathcal{H})$ обозначим через $\Phi(H)$ пучок всех решений системы (6.2), порожденных мерами из H: $\Phi(H) \triangleq \{\varphi(\cdot,\eta) \colon \eta \in H\}$.

Отметим, что при выполнении условия 2 из непрерывности правой части (6.2) и определения обобщенного движения в силу теоремы Арцела легко следует, что множество $\Phi(\mathcal{H})$ предкомпактно в ТП $\mathbb{C}_n(T)$.

Качество движений системы (6.1) будем оценивать функционалом J, $J \in \mathbb{R}^{\mathbb{C}_n(T)}$, непрерывным в топологии равномерной сходимости на $\mathbb{C}_n(T)$.

Лемма 4. *Отображение $\mathcal{H} \ni \eta \mapsto \varphi(\cdot,\eta) \in \mathbb{C}_n(T)$ непрерывно как отображение из $\mathcal{H}$ с индуцированной $*$-слабой топологией в ТП $\mathbb{C}_n(T)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольную последовательность мер $(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}}$ и меру $\eta^0 \in \mathcal{H}$ такие, что

$$\lim_{i\to\infty} \rho_{\mathcal{H}}(\eta_i, \eta^0) = 0. \tag{6.10}$$

Для обоснования утверждения в силу упомянутой метризуемости $\mathcal{H}$ достаточно показать, что из сходимости (6.10) следует

$$\lim_{i\to\infty} \|\varphi(\cdot,\eta_i) - \varphi(\cdot,\eta^0)\|_{\mathbb{C}_n(T)} = 0. \tag{6.11}$$

Обозначим $x_j(\cdot) \triangleq \varphi(\cdot,\eta_j)$, где $j \in \mathbb{N}$, и $x^0(\cdot) \triangleq \varphi(\cdot,\eta^0)$. При этом

$$x_j(t) = x_0 + \int\limits_{[t_0,t]\times P\times Q} f(s, x_j(s), u, v)\eta_j(d(s,u,v)) \quad \forall j \in \mathbb{N}, \ \ \forall t \in T.$$

Предположим, что при выполнении (6.10) свойство (6.11) нарушено. Значит, существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всякого $m \in \mathbb{N}$ имеется $l > m$ такое, что $\|x_l(\cdot) - x^0(\cdot)\|_{\mathbb{C}_n(T)} \geqslant \varepsilon$. Иными словами, существует последовательность $\alpha \in \mathbf{N}$, для которой выполнены неравенства

$$\|x_{\alpha(m)}(\cdot) - x^0(\cdot)\|_{\mathbb{C}_n(T)} \geqslant \varepsilon \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{6.12}$$

С учетом предкомпактности множества $\Phi(\mathcal{H})$ в ТП $\mathbb{C}_n(T)$ выберем и обозначим через $(z_i(\cdot))_{i\in\mathbb{N}}$, $z_i(\cdot) \triangleq x_{(\alpha\circ\beta)(i)}(\cdot)$, $i \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbf{N}$, подпоследовательность последовательности $(x_{\alpha(m)}(\cdot))_{m\in\mathbb{N}}$, сходящуюся в $\mathbb{C}_n(T)$ к некоторому элементу $z^0(\cdot)$:

$$\lim_{i\to\infty} \|z_i(\cdot) - z^0(\cdot)\|_{\mathbb{C}_n(T)} = 0, \tag{6.13}$$

где по определению $\zeta_k \triangleq \eta_{(\alpha\circ\beta)(k)}$ и $z_k(\cdot) \triangleq \varphi(\cdot, \zeta_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Покажем, что тогда непременно $z^0(\cdot) = x^0(\cdot)$. При этом согласно (6.12)

$$\|z_k(\cdot) - x^0(\cdot)\|_{\mathbb{C}_n(T)} \geqslant \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{6.14}$$

Пусть $t \in T$. В силу определения обобщенного движения (см. (6.9)) имеем сходимость

$$\left(\int\limits_{[t_0,t]\times P\times Q} f(s, z_k(s), u, v)\zeta_k\,(d(s,u,v)) \right)_{k\in\mathbb{N}} \to (z^0(t) - x_0). \tag{6.15}$$

Обозначая через $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ евклидову норму в $\mathbb{R}^n$, оценим значения

$$\Big\| \int\limits_{[t_0,t]\times P\times Q} f(s, z_k(s), u, v)\zeta_k\,(d(s,u,v)) - \int\limits_{[t_0,t]\times P\times Q} f(s, z^0(s), u, v)\eta^0\,(d(s,u,v)) \Big\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Прибавляя и вычитая под знаком нормы вектор $\int_{[t_0,t]\times P\times Q} f(s, z^0(s), u, v)\zeta_k(d(s,u,v))$, получим оценки

$$\begin{aligned}
&\Big\| \int\limits_{[t_0,t]\times P\times Q} f(s, z_k(s), u, v)\zeta_k\,(d(s,u,v)) - \int\limits_{[t_0,t]\times P\times Q} f(s, z^0(s), u, v)\eta^0\,(d(s,u,v)) \Big\|_{\mathbb{R}^n} \\
&\leq \Big\| \int\limits_{[t_0,t]\times P\times Q} f(s, z_k(s), u, v)\zeta_k\,(d(s,u,v)) - \int\limits_{[t_0,t]\times P\times Q} f(s, z^0(s), u, v)\zeta_k\,(d(s,u,v)) \Big\|_{\mathbb{R}^n} \\
&+ \Big\| \int\limits_{[t_0,t]\times P\times Q} f(s, z^0(s), u, v)\zeta_k\,(d(s,u,v)) - \int\limits_{[t_0,t]\times P\times Q} f(s, z^0(s), u, v)\eta^0\,(d(s,u,v)) \Big\|_{\mathbb{R}^n} \\
&\qquad\leq \int\limits_{T\times P\times Q} \omega_f(\|z_k(\cdot) - z^0(\cdot)\|_{\mathbb{C}_n(T)})\zeta_k\,(\mathrm{d}(s,u,v)) \\
&\qquad+ \Big\| \int\limits_{T\times P\times Q} g(s,u,v)[\zeta_k\,(d(s,u,v)) - \eta^0\,(\mathrm{d}(s,u,v))] \Big\|_{\mathbb{R}^n},
\end{aligned}$$

где ω_f — модуль непрерывности функции f на компакте $T \times X_{(6.1)} \times P \times Q$; $g \in \mathbb{C}_n(T \times P \times Q)$ задана равенствами

$$g(s,u,v) \triangleq f(s, z^0(s), u, v) \quad \forall (s,u,v) \in T \times P \times Q.$$

В силу непрерывности f и сходимости последовательностей $(z_k(\cdot))_{k\in\mathbb{N}}$, $(\zeta_k(\cdot))_{k\in\mathbb{N}}$ последние два слагаемых в приведенных оценках стремятся к нулю. С учетом произвольного выбора t из (6.15) и полученных оценок следуют равенства

$$z^0(t) = x_0 + \int\limits_{[t_0,t]\times P\times Q} f(s, z^0(s), u, v)\eta^0\,(d(s,u,v)) \quad \forall t\in T,$$

т. е. $z^0(\cdot) = \varphi(\cdot,\eta^0) = x^0(\cdot)$. В силу (6.13) это противоречит (6.14). Полученное противоречие влечет сходимость (6.11).

Лемма доказана.

Заметим, что в силу компактности $\mathcal{H}$ в относительной $*$-слабой топологии и метризуемости этой топологии из непрерывности отображения $\eta\mapsto\varphi(\cdot,\eta)\colon \mathcal{H}\mapsto\mathbb{C}_n(T)$ следует его равномерная непрерывность на $\mathcal{H}$.

Введем при $\mu\in\mathcal{R}$ в рассмотрение пучки траекторий $\mathfrak{X}_\mu \triangleq \Phi(\pi[\mu])$. Из определений следует, что это непустые компакты в $\mathbb{C}_n(T)$.

Лемма 5. *Отображение $\mathcal{R}\ni\mu\mapsto\mathfrak{X}_\mu\in\mathcal{P}'(\mathbb{C}_n(T))$ непрерывно как отображение из $\mathcal{R}$ с индуцированной $*$-слабой топологией в пространство непустых замкнутых ограниченных подмножеств $\mathbb{C}_n(T)$ с метрикой Хаусдорфа, порожденной равномерной нормой в $\mathbb{C}_n(T)$.*

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon>0$ и, пользуясь леммой 4, выберем $\delta>0$ так, что $\forall\eta\in\mathcal{H}$, $\forall\eta'\in\mathcal{H}$

$$\big(\rho_{\mathcal{H}}(\eta,\eta')<\delta\big)\Rightarrow\big(\|\varphi(\cdot,\eta)-\varphi(\cdot,\eta')\|_{\mathbb{C}_n(T)}<\varepsilon\big). \tag{6.16}$$

Пользуясь теоремой 1, по выбранному δ подберем $\zeta>0$ такое, что для любых $\mu,\mu'\in\mathcal{R}$ верна импликация

$$\big(\rho_{\mathcal{R}}(\mu,\mu')<\zeta\big)\Rightarrow\big(\rho_H(\pi(\mu),\pi(\mu'))<\delta\big); \tag{6.17}$$

здесь через ρ_H обозначена метрика Хаусдорфа, порожденная метрикой $\rho_{\mathcal{H}}$.

Пусть $\mu_1\in\mathcal{R}$. Выберем $\mu_2\in\mathcal{R}$ так, чтобы $\rho_{\mathcal{R}}(\mu_1,\mu_2)<\zeta$. Выберем $x_1(\cdot)\in\mathfrak{X}_{\mu_1}$. По построению имеем $x_1(\cdot)=\varphi(\cdot,\eta_1)$, где $\eta_1\in\pi[\mu_1]$. Из выбора μ_2 и (6.17) следует, что найдется элемент $\eta_2\in\pi[\mu_2]$ такой, что $\rho_{\mathcal{H}}(\eta_1,\eta_2)<\delta$. Тогда для элемента $x_2(\cdot)\in\mathfrak{X}_{\mu_2}$ вида $x_2(\cdot)=\varphi(\cdot,\eta_2)$ в силу (6.16) выполнено неравенство $\|x_1(\cdot)-x_2(\cdot)\|_{\mathbb{C}_n(T)}<\varepsilon$. Таким образом, имеем включение $x_1(\cdot)\in\mathfrak{X}^{(\varepsilon)}_{\mu_2}$, где $\mathfrak{X}^{(\varepsilon)}_{\mu_2}$ обозначает ε-окрестность множества $\mathfrak{X}_{\mu_2}$ (в равномерной норме $\mathbb{C}_n(T)$). В силу произвольного выбора $x_1(\cdot)$ имеем вложение $\mathfrak{X}_{\mu_1}\subset\mathfrak{X}^{(\varepsilon)}_{\mu_2}$.

В приведенных рассуждениях элементы с индексами 1 и 2 можно поменять местами. При этом получим вложение $\mathfrak{X}_{\mu_2}\subset\mathfrak{X}^{(\varepsilon)}_{\mu_1}$. Два этих вложения в совокупности дают оценку расхождения множеств $\mathfrak{X}_{\mu_1}$ и $\mathfrak{X}_{\mu_2}$, не превосходящую ε в метрике Хаусдорфа, порожденной равномерной нормой в $\mathbb{C}_n(T)$.

Лемма доказана.

Из лемм 4 и 5 следует, что задача на минимакс функционала J имеет решения в пространствах мер $\mathcal{R}$, $\mathcal{H}$: достигается минимакс

$$\min_{\mu\in\mathcal{R}}\max_{\eta\in\pi[\mu]} J(\varphi(\cdot,\eta)) = \min_{\mu\in\mathcal{R}}\max_{x(\cdot)\in\mathfrak{X}_\mu} J(x(\cdot)).$$

А именно, существуют $\mu_0\in\mathcal{R}$ и $\eta_0\in\pi[\mu_0]$, удовлетворяющие условиям

$$\max_{\eta\in\pi[\mu_0]} J(\varphi(\cdot,\eta)) = \min_{\mu\in\mathcal{R}}\max_{\eta\in\pi[\mu]} J(\varphi(\cdot,\eta)),\quad J(\varphi(\cdot,\eta_0)) = \max_{\eta\in\pi[\mu_0]} J(\varphi(\cdot,\eta)). \tag{6.18}$$

7. Согласованность расширения

Содержательно множество $\mathcal{R}$ есть расширение множества обычных управлений $\mathbf{U}$, а элементы множества $\mathcal{H}$ отвечают элементам из произведения $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$.

В этом разделе остановимся на согласованности введенного в (6.3)–(6.6) расширения управляющих воздействий с исходным множеством обычных управлений и помех. А именно, установим, что для рассмотренной задачи управления меры, отвечающие реализациям управлений из $\mathbf{U}$ и парам реализаций из $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$, образуют всюду плотные множества в смысле $*$-слабой топологии в пространствах мер $\mathcal{R}$ и $\mathcal{H}$ соответственно.

В силу леммы 4 такой аппроксимации достаточно, чтобы для функционала J, непрерывного на $\Phi(\mathcal{H})$ в топологии равномерной сходимости, результат минимаксной конструкции (6.18) аппроксимировался значениями этого функционала на движениях, порожденных парами управлений и помех из $\mathbf{U}\times\mathbf{V}$. Отметим, что теорема 1 о непрерывности в метрике Хаусдорфа множеств мер, "ограниченных" маргиналами, и следующие леммы 6, 7 об аппроксимации обобщенных управлений обычными опираются на один и тот же результат [13, лемма П.1]; близкие результаты и конструкции имеются в работах [4; 5, Appendix].

Определим вложения множества $\mathbf{U}$ в $\mathcal{R}$ и множества $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$ в $\mathcal{H}$ следующим образом. Для всякого $u \in \mathbf{U}$ определим и обозначим через μ_u, $\mu_u \in \mathcal{R}$, меру, удовлетворяющую условиям

$$\int\limits_{T\times P} h(t,p)\mu_u\,(\mathrm{d}(t,p)) = \int\limits_T h(t,u(t))\,\mathrm{d}t, \quad \forall h \in \mathbb{C}(T\times P). \tag{7.1}$$

Для всякой пары $(u,v) \in \mathbf{U}\times\mathbf{V}$ обозначим $\eta_{(u,v)}$ меру из $\pi[\mu_u]$, для которой

$$\int\limits_{T\times P\times Q} h(t,p,q)\eta_{(u,v)}\,(\mathrm{d}(t,p,q)) = \int\limits_T h(t,u(t),v(t))\,\mathrm{d}t, \quad \forall h \in \mathbb{C}(T\times P\times Q). \tag{7.2}$$

Из определений (7.1), (7.2) следует существование мер μ_u, $\eta_{(u,v)}$ и включений $\mu_u \in \mathcal{R}$, $\eta_{(u,v)} \in \mathcal{H}$.

Связь множества исходных управлений и помех с соответствующими расширениями дополняют следующие леммы об аппроксимации.

Лемма 6. *Множество $\{\mu_u \mid u \in \mathbf{U}\}$ всюду плотно в $\mathcal{R}$ в относительной $*$-слабой топологии.*

Доказательство. Для произвольной меры $\mu \in \mathcal{R}$ мы построим последовательность управлений $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbf{U}^{\mathbb{N}}$ такую, что соответствующая ей в $\mathcal{R}$ последовательность мер $(\mu_{u_k})_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}$ будет сходиться к μ в относительной $*$-слабой топологии пространства $\mathcal{R}$. Обозначим через $\rho_{\mathcal{R}}$ метрику в $\mathcal{R}$, порождающую указанную топологию. Тогда для искомой последовательности $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ должна выполняться сходимость

$$\lim_{k\to\infty} \rho_{\mathcal{R}}(\mu_{u_k},\mu) = 0, \tag{7.3}$$

которая эквивалентна выполнению равенства

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{T\times P} h(s,u)\mu_{u_k}\,(\mathrm{d}(s,u)) = \int\limits_{T\times P} h(s,u)\mu\,(\mathrm{d}(s,u))$$

при произвольно выбранной функции $h \in \mathbb{C}(T\times P)$.

В силу леммы 3 для произвольного $k \in \mathbb{N}$ найдем меру $\mu_k^* \in (\sigma-\mathrm{add})_+[\mathcal{D}]$ с непрерывной переходной вероятностью

$$\sum_{j=1}^{m_k} g_j^k(\cdot)\delta_{u_j^k}, \tag{7.4}$$

где $(g_j^k(\cdot))_{j\in\overline{1,m_k}}$, $m_k\in\mathbb{N}$, вида (4.3) суть непрерывные нормированные веса, распределенные на точках $u_j^k\in P$, $j\in\overline{1,m_k}$, такую, что

$$\rho_{\mathcal{R}}(\mu_k^*,\mu)\le 1/k. \tag{7.5}$$

Теперь построим последовательность кусочно-постоянных управлений $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathbf{U}^{\mathbb{N}}$, такую, что последовательность мер $(\mu_{u_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(\mu_{u_k})_{k\in\mathbb{N}}\in\mathcal{R}^{\mathbb{N}}$, удовлетворяет при произвольно выбранном $k\in\mathbb{N}$ неравенству

$$\rho_{\mathcal{R}}(\mu_{u_k},\mu_k^*)\le 1/k. \tag{7.6}$$

Зафиксируем произвольное $k\in\mathbb{N}$ и построим указанную реализацию управления u_k.

С этой целью для произвольного $l\in\mathbb{N}$ выберем разбиение интервала управления T конечным набором точек $\Delta_l\triangleq\{\tau_0\triangleq t_0<\ldots<\tau_i<\ldots<\tau_{n_l}\triangleq\vartheta_0\}$ такое, чтобы длина элементов разбиения не превосходила величины $1/l$.

Для произвольно выбранной ячейки $[\tau,\tau')$ разбиения Δ_l определим кортеж $(\bar g_j^k)_{j\in\overline{1,m_k}}$:

$$\bar g_j^k\triangleq\int\limits_{[\tau,\tau')} g_j^k(s)\,\mathrm{d}s,\quad j\in\overline{1,m_k}; \tag{7.7}$$

при этом будут выполнены соотношения $\sum\limits_{j=1}^{m_k}\bar g_j^k=\tau'-\tau$, $\bar g_j^k\geqslant 0$, $j\in\overline{1,m_k}$; определим кусочно-постоянное управление $\bar u_l\in\mathbf{U}$ на интервале $[\tau,\tau')$ следующим образом (сумму пустого множества чисел полагаем равной нулю):

$$\bar u_l(s)\triangleq u_j^k,\quad s\in\Big[\tau+\sum_{i=1}^{j-1}\bar g_i^k,\ \tau+\sum_{i=1}^{j}\bar g_i^k\Big),\quad j\in\overline{1,m_k}. \tag{7.8}$$

Аналогичные построения для управления $\bar u_l$ проведем на всех остальных интервалах разбиения Δ_l.

Выберем произвольно $h\in\mathbb{C}(T\times P)$. В силу компактности множеств T и P существует модуль непрерывности ω_h:

$$\omega_h(\delta)\triangleq\max\big\{|h(s,u)-h(s',u')|\ \mid\ |s-s'|+\rho_{P}(u,u')\leqslant\delta,\ s,s'\in T,\ u,u'\in P\big\},\quad \delta>0,$$

где ρ_P — метрика на P, порождающая топологию, в которой P компактно. Пусть выбрана ячейка $[\tau,\tau')$ разбиения Δ_l. С учетом введенных определений (см. (7.1), (7.4)) оценим величину

$$\begin{aligned}&\Big|\int\limits_{[\tau,\tau')\times P} h(s,u)\mu_k^*(\mathrm{d}(s,u))-\int\limits_{[\tau,\tau')\times P} h(s,u)\mu_{\bar u_l}(\mathrm{d}(s,u)\Big|\\ &=\Big|\int\limits_{\tau}^{\tau'}\sum_{j=1}^{m_k}h(s,u_j^k)g_j^k(s)\,\mathrm{d}s-\int\limits_{\tau}^{\tau'}h(s,\bar u_l(s))\,\mathrm{d}s\Big|.\end{aligned} \tag{7.9}$$

Под знаком модуля в (7.9) прибавим и вычтем величину (равенство выполняется в силу определений (7.7), (7.8))

$$\int\limits_{\tau}^{\tau'}\sum_{j=1}^{m_k}h(\tau,u_j^k)g_j^k(s)\,\mathrm{d}s=\int\limits_{\tau}^{\tau'}h(\tau,\bar u_l(s))\,\mathrm{d}s.$$

Получим (продолжая оценку (7.9))

$$\Big|\int\limits_{\tau}^{\tau'}\sum_{j=1}^{m_k}h(s,u_j^k)g_j^k(s)\,\mathrm{d}s-\int\limits_{\tau}^{\tau'}h(s,\bar u_l(s))\,\mathrm{d}s\Big|$$

$$\le \Big|\int\limits_{\tau}^{\tau'} \sum_{j=1}^{m_k} h(s,u_j^k)g_j^k(s)\,\mathrm{d}s - \int\limits_{\tau}^{\tau'} \sum_{j=1}^{m_k} h(\tau,u_j^k)g_j(s)\,\mathrm{d}s\Big| + \Big|\int\limits_{\tau}^{\tau'} h(\tau,\bar u_l(s))\,\mathrm{d}s - \int\limits_{\tau}^{\tau'} h(s,\bar u_l(s))\,\mathrm{d}s\Big|$$

$$\le \sum_{j=1}^{m_k} \int\limits_{\tau}^{\tau'} \big|h(s,u_j^k) - h(\tau,u_j^k)\big|\, g_j^k(s)\,\mathrm{d}s + \int\limits_{\tau}^{\tau'} \big|h(\tau,\bar u_l(s)) - h(s,\bar u_l(s))\big|\,\mathrm{d}s$$

$$\le \omega_h\big(\,|\tau'-\tau|\,\big)\sum_{j=1}^{m_k} \bar g_j^k + \omega_h\big(\,|\tau'-\tau|\big)\big(\tau'-\tau\big) \le 2\,\omega_h\big(|\tau'-\tau|\big)\big(\tau'-\tau\big).$$

Суммируя эти оценки по всем интервалам соответствующего разбиения Δ_l, получим соотношения

$$\begin{aligned} &\Big|\int\limits_{T\times P} h(s,u)\mu_k^*\,(\mathrm{d}(s,u)) - \int\limits_{T\times P} h(s,u)\mu_{\bar u_l}\,(\mathrm{d}(s,u))\Big| \\ &= \Big|\int\limits_{T} \sum_{j=1}^{m_k} h(s,u_j^k)g_j^k(s)\,\mathrm{d}s - \int\limits_{T} h(s,\bar u_l(s))\,\mathrm{d}s\Big| \le 2\,\omega_h(1/l)(\vartheta_0 - t_0). \end{aligned} \tag{7.10}$$

В силу произвольного выбора h в неравенстве (7.10) получаем $*$-слабую сходимость к мере μ_k^* сосредоточенных мер $(\mu_{\bar u_l})_{l\in\mathbb{N}}$, отвечающих кусочно-постоянным управлениям $(\bar u_l)_{l\in\mathbb{N}}$. Значит, выполняется предельное соотношение $\lim\limits_{l\to\infty} \rho_{\mathcal{R}}(\mu_{\bar u_l},\mu_k^*) = 0$, и, стало быть, найдется $l_k \in \mathbb{N}$, для которого при $u_k \triangleq \bar u_{l_k}$ будет выполнено неравенство (7.6). Проведя эти построения для всех $k \in \mathbb{N}$, получим искомую последовательность управлений $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, а именно, из оценок (7.5), (7.6) и неравенства треугольника для метрики $\rho_{\mathcal{R}}$ будет с очевидностью следовать равенство (7.3).

Лемма доказана.

Лемма 7. *Для всякого $u \in \mathbf{U}$ множество $\{\eta_{(u,v)} \mid v \in \mathbf{V}\}$ всюду плотно в $\pi[\mu_u]$ в относительной $*$-слабой топологии.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этой леммы аналогично доказательству леммы 6.

Из лемм 6 и 7 следует, что решение задачи на минимакс функционала J в пространствах мер $\mathcal{R}$, $\mathcal{H}$ аппроксимируется минимаксными конструкциями в обычных управлениях, а именно, имеют место равенства

$$\inf_{u\in\mathbf{U}}\sup_{v\in\mathbf{V}} J\big(\varphi(\cdot,\eta_{(u,v)})\big) = \min_{\mu\in\mathcal{R}}\max_{\eta\in\pi[\mu]} J\big(\varphi(\cdot,\eta)\big).$$

8. Пример

Рассмотрим в качестве управляемой системы (6.1) следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^3$, т. е. $x \triangleq (x_1,x_2,x_3)$:

$$\begin{aligned} \dot x_1 &= h_1(t,x_2,x_3,u,v), \\ \dot x_2 &= h_2(t,x_3,u,v), \\ \dot x_3 &= h_3(t,u,v), \end{aligned} \tag{8.1}$$

где $(t,u,v) \in T\times P\times Q$; P, Q — метрические компакты; $h_1 \in \mathbb{R}^{T\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times P\times Q}$, $h_2 \in \mathbb{R}^{T\times\mathbb{R}\times P\times Q}$, $h_3 \in \mathbb{R}^{T\times P\times Q}$ — в/з функции, непрерывные по совокупности аргументов. Фиксируем начальное условие

$$x(t_0) = x^0 \triangleq (x_1^0,x_2^0,x_3^0). \tag{8.2}$$

Для любого обобщенного управления $\eta \in \mathcal{H}$ и начального положения x^0 непрерывные функции ζ_i, $i = 1, 2, 3$, вида

$$\begin{aligned}
\zeta_3(t, t_0, x^0, \eta) &\triangleq x_3^0 + \int\limits_{[t_0,t]\times P\times Q} h_3(s, u, v)\, \eta\, (\mathrm{d}(s, u, v)),\\
\zeta_2(t, t_0, x^0, \eta) &\triangleq x_2^0 + \int\limits_{[t_0,t]\times P\times Q} h_2\bigl(s, \zeta_3(s, t_0, x^0, \eta), u, v\bigr)\, \eta\, (\mathrm{d}(s, u, v)),\\
\zeta_1(t, t_0, x^0, \eta) &\triangleq x_1^0 + \int\limits_{[t_0,t]\times P\times Q} h_1\bigl(s, \zeta_2(s, t_0, x^0, \eta), \zeta_3(s, t_0, x^0, \eta), u, v\bigr)\, \eta\, (\mathrm{d}(s, u, v))
\end{aligned} \tag{8.3}$$

реализуют в совокупности обобщенное решение системы (8.1), отвечающее (обобщенному) управлению η и начальным условиям (8.2):

$$x(\cdot, t_0, x^0, \eta) \triangleq \bigl(\zeta_1(\cdot, t_0, x^0, \eta), \zeta_2(\cdot, t_0, x^0, \eta), \zeta_3(\cdot, t_0, x^0, \eta)\bigr) \in \mathfrak{X}_\eta.$$

В силу непрерывности функций в правой части (8.1) и компактности множеств T, P и Q найдется константа $K_{(8.1)}$ такая, что для любого $\eta \in \mathcal{H}$ и любого $x(\cdot) \in \mathfrak{X}_\eta$ будет выполняться оценка $\|x(\cdot)\|_{\mathbb{C}_3(T)} \leqslant K_{(8.1)}$. Иными словами, для системы (8.1) выполняется условие 2 — условие равномерной ограниченности траекторий. При этом из определения (8.3) без труда следует единственность обобщенного решения. Таким образом, система (8.1) удовлетворяет условию 1 обобщенной единственности.

Неограниченность производных функций h_1, h_2, h_3 на некотором множестве не нарушает требований к системе (8.1), но исключает при этом свойство локальной липшицевости правой части системы по фазовой переменной. Приведенный пример указывает на еще одно широкое семейство управляемых систем, подчиненных условиям 1 и 2, в дополнение к постоянно расширяющемуся классу уравнений, удовлетворяющих условию единственности решения задачи Коши (см., например, [25]).

З а м е ч а н и е. Отметим в связи с обсуждаемыми условиями А. В. Кряжимского один естественный класс конфликтно управляемых систем, которые могут быть названы последовательно интегрируемыми. К их числу можно отнести уравнения движения материальной точки

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = s(t, u, v), \tag{8.4}$$

где $t \in [t_0, \vartheta_0]$, $u \in P$, $v \in Q$, $s \in \mathbb{R}^{[t_0,\vartheta_0]\times P\times Q}$ — непрерывная функция. Другая система такого рода часто используется в теории дифференциальных игр (см. игру “шофер-убийца”):

$$\begin{cases}
\dot{x}_1 = c\cos x_3 + v_1,\\
\dot{x}_2 = c\sin x_3 + v_2,\\
\dot{x}_3 = u,
\end{cases} \tag{8.5}$$

где $c > 0$, $u(t) \in [-a, a]$, $(v_1(t), v_2(t))$ — точка из круга радиуса b, $b > 0$. Понятно, что (8.4) и (8.5) хорошо интегрируются. Существенно и то, что данные системы имеют важное прикладное значение.

Системы (8.4), (8.5) допускают естественные аналогии (приведем простейшую):

$$\dot{x}_1 = g(x_2), \quad \dot{x}_2 = s(t, u, v); \tag{8.6}$$

мы воспользовались здесь приемом, указанным в (8.5), вводя нелинейное преобразование одной из компонент траектории (в (8.5) прием реализован в векторном варианте). Отметим, что в (8.6) требуется лишь непрерывность функции g, т. е. допускается вариант нелипшицевой функции. В рамках такого подхода и был предложен пример (8.1). Понятно, что этот пример допускает серьезные обобщения с сохранением условий А. В. Кряжимского (см. условия 1 и 2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикладная математика и механика. 1970. Т. 34, № 6. С. 1005–1022. doi: 10.1016/0021-8928(70)90158-9
2. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Кряжимский А. В.** К теории позиционных дифференциальных игр сближения-уклонения // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239, № 4. С. 779–782.
4. **Hopenhayn H.** Entry, exit, and firm dynamics in long run equilibrium // Econometrica. 1992. Vol. 60. P. 1127–1150.
5. **Bergin J., Bernhardt D.** Anonymous sequential games: Existence and characterization of equilibria // Economic Theory. 1995. Vol. 5. P. 461–489.
6. **Bergin J.** On the continuity of correspondence on sets of measures with restricted marginals // Economic Theory. 1999. Vol. 13. P. 471–481.
7. **Богачев В. И., Попова С. Н.** Расстояния Хаусдорфа между каплингами и оптимальная транспортировка с параметром // Мат. сб. 2024. Т. 215, № 1. С. 33–58.
8. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
9. **Warga J.** Nonsmooth problems with conflicting controls // SIAM J. Control Optim. 1991. Vol. 29. P. 678–701.
10. **Warga J., Zhu Q.J.** A proper relaxation of Shiftedand Delayed Controls // J. Math. Anal. Appl. 1992. Vol. 169 P. 546–561.
11. **Rosenblueth J. F.** Proper relaxation of optimal control problems // J. Optim. Theory Appl. 1992. Vol. 74, no. 3. P. 509–526.
12. **Serkov D. and Chentsov A.** On a property of continuous dependence of sets in the space of measures // Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA-2022): 7 Intern. conf., Irkutsk, Russia, July 15–22, 2022: Proceedings. Irkutsk: ISDCT SB RAS, 2022. P. 106–107. ISBN: 9785604181423.
13. **Ченцов А.Г.** Об одной игровой задаче управления на минимакс // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. 1975. № 1. С. 39–46.
14. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
15. **Богачев В.И.** Основы теории меры. Т. 1. Москва; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2003. 545 с.
16. **Данфорд Н., Шварц Дж.** Линейные операторы. М.: ИЛ, 1962. 895 с.
17. **Ченцов А.Г.** Элементы конечно-аддитивной теории меры, I. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2008. 389 с.
18. **Биллингсли П.** Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
19. **Богачев В.И.** Основы теории меры. Т. 2. Москва; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2003. 578 с.
20. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.
21. **Невё Ж.** Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 309 с.
22. **Dugundji J.** An extension of Tietze’s theorem // Pacific J. Math. 1951. Vol. 1, no. 3. P. 353–367.
23. **Ченцов А.Г.** Максиминное уклонение в дифференциальной игре // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 5. С. 848–856.
24. **Дьедонне Ж.** Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 430 с.
25. **Constantin A.** A uniqueness criterion for ordinary differential equations // J. Diff. Eq. 2023. Vol. 342, no. 5. P. 179–192. doi: 10.1016/j.jde.2022.09.035.

Поступила 11.03.2024
После доработки 27.03.2024
Принята к публикации 1.04.2024

Ченцов Александр Георгиевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
член-корр. РАН
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;

профессор
Институт радиоэлектроники и информационных технологий
Уральский федеральный университет
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Серков Дмитрий Александрович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
профессор
Институт радиоэлектроники и информационных технологий
Уральский федеральный университет
e-mail: serkov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. An alternative for the game problem of convergence. *J. Appl. Math. Mech.*, 1970, vol. 34, no. 6, pp. 948–965. doi: 10.1016/0021-8928(70)90158-9
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Game-theoretical control problems. NY, Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
3. Kryazhimskii A.V. On the theory of positional differential games of convergence-evasion. *Sov. Math. Dokl.*, 1978, vol. 19, pp. 408–412.
4. Hopenhayn H. Entry, exit, and firm dynamics in long run equilibrium. *Econometrica*, 1992, vol. 60, no. 5, pp. 1127–1150.
5. Bergin J., Bernhardt D. Anonymous sequential games: Existence and characterization of equilibria. *Economic Theory*, 1995, vol. 5, pp. 461–489. doi: 10.1007/BF01212329
6. Bergin J. On the continuity of correspondence on sets of measures with restricted marginals. *Economic Theory*, 1999, vol. 13, pp. 471–481. doi: 10.1007/s001990050265
7. Bogachev V.I., Popova S.N. Hausdorff distances between couplings and optimal transportation with a parameter. *Math. Sb.*, 2024, vol. 215, no. 1, pp. 33–58 (in Russian). doi: 10.4213/sm9920
8. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations*, NY, Acad. Press, 1972, 531 p. doi: 10.1016/C2013-0-11669-8 . Translated to Russian under the title *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami*, Moscow, Nauka Publ., 1977, 624 p.
9. Warga J. Nonsmooth problems with conflicting controls. *SIAM J. Control Optim.*, 1991, vol. 29, pp. 678–701. doi: 10.1137/032903
10. Warga J., Zhu Q.J. A proper relaxation of shifted and delayed controls. *J. Math. Anal. Appl.*, 1992, vol. 169, pp. 546–561. doi: 10.1016/0022-247x(92)90095-u
11. Rosenblueth J.F. Proper relaxation of optimal control problems. *J. Optim. Theory Appl.*, 1992, vol. 74, no. 3, pp. 509–526. doi: 10.1007/BF00940324
12. Serkov D.A., Chentsov A.G. On a property of continuous dependence of sets in the space of measures. In: *Proc. of the 7th Inernet. Conf. on "Nonlinear Analysis and Extremal Problems"* (NLA-2022), Irkutsk, 2022, pp. 106–107. ISBN 978-5-6041814-2-3 .
13. Chentsov A.G. On a single game control problem on minimax. *Izv. AN SSSR, Ser. Tekhn. Kibernetika*, 1975, no. 1, pp. 39–46 (in Russian).
14. Kuratowski K., Mostowski *A. Set theory.* Ser. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 53, Amsterdam: North-Holland, 1968, 417 p. ISBN: 9780444534170 . Translated to Russian under the title *Teoriya mnozhestv*, Moscow, Mir Publ., 1970, 416 p.
15. Bogachev V.I. *Osnovy teorii mery* [Basics of measure theory]. Vol. 1. Moscow, Izhevsk: Publ. "Regulyar. Khaotich. Dinamik.", 2003, 545 p. ISBN: 5-93972-195-8 .
16. Dunfrod N., Schwartz J. *Linear operators: General theory.* NY, London, Interscience Publ., 1958. ISBN: 9780470226056. Translated to Russian under the title *Lineinye operatory: Obshchaya teoriya*, Moscow, Inostr. Liter. Publ., 1962, 895 p.
17. Chentsov A.G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery, I* [Elements of finitely additive measure theory, I]. Yekaterinburg, Publ. Ural State Tech. Univ. — Ural Polytech. Inst., 2008, 388 p. ISBN: 978-5-321-01408-0 .

18. Billingsley P. *Convergence of probability measures.* NY: Wiley, 1958. ISBN: 9780471072423 . Translated to Russian under the title *Skhodimost' veroyatnostnykh mer*, Moscow, Nauka Publ., 1977, 352 p.
19. Bogachev V.I. *Osnovy teorii mery* [Basics of measure theory]. Vol. 2. Moscow, Izhevsk: NIZ "Regulyar. Khaotich. Dinamik.", 2003, 578 p. ISBN: 5939721966 .
20. Engelking R. *General topology.* Warszawa, PWN, 1977. Translated to Russian under the title *Obshchaya topologiya*, Moscow, Mir Publ., 1986, 752 p.
21. Neveu J. *Bases mathématiques du calcul des probabilités.* Paris, Masson, 1964, 203 p. ISBN: 978-2-225-61787-4. Translated to Russian under the title *Matematicheskie osnovy teorii veroyatnostei*, Moscow, Mir Publ., 1969, 309 p.
22. Dugundji J. An extension of Tietze's theorem. *Pacific J. Math.*, 1951, vol. 1, no. 3, pp. 353–367.
23. Chentsov A.G. Maximin deviation in a differential game. *Diff. Uravn.*, 1976, vol. 12, pp. 848–856 (in Russian).
24. Dieudonné J. *Foundations of modern analysis.* NY: Acad. Press Inc., 1960, 361 p. Translated to Russian under the title *Osnovy sovremennogo analiza*, Moscow: Mir Publ., 1964, 430 p.
25. Constantin A. A uniqueness criterion for ordinary differential equations. *J. Diff. Eq.*, 2023, vol. 342, no. 5, pp. 179–192. doi: 10.1016/j.jde.2022.09.035 .

Received March 11, 2024
Revised March 27, 2024
Accepted April 1, 2024

Funding Agency: The work was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075-02-2024-1377).

Aleksandr Georgievich Chentsov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Corresponding Member of RAS, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: chentsov@imm.uran.ru .

Dmitrii Aleksandrovich Serkov, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: serkov@imm.uran.ru .

Cite this article as: A. G. Chentsov, D. A. Serkov. Continuous dependence of sets in a space of measures and a program minimax problem. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 277–299 .