ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 2 2024

УДК 517.9

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА ГЕРАСИМОВА С СЕКТОРИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ[1]

В. Е. Федоров, А. Д. Годова

Изучены вопросы существования и единственности решения задачи Коши для разрешенного относительно интегро-дифференциального оператора типа Герасимова первого порядка линейного уравнения в банаховом пространстве с замкнутым оператором при неизвестной функции. Исследованы свойства разрешающих семейств операторов однородных уравнений. Показано, что секториальность, т. е. принадлежность введенному здесь классу операторов $\mathcal{A}_K$, является необходимым и достаточным условием существования аналитического в секторе разрешающего семейства операторов. Получена теорема о возмущении операторов класса $\mathcal{A}_K$, доказаны две версии теоремы о существовании и единственности решения линейного неоднородного уравнения. Абстрактные результаты использованы для исследования начально-краевых задач для уравнения с производной Прабхакара по времени и для системы уравнений в частных производных с производными Герасимова — Капуто различного порядка по времени.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, производная Герасимова — Капуто, задача Коши, секториальный оператор, разрешающее семейство операторов, начально-краевая задача.

V. E. Fedorov, A. D. Godova. Integro-differential equations of Gerasimov type with sectorial operators.

The issues of existence and uniqueness of a solution to the Cauchy problem are studied for a linear equation in a Banach space with a closed operator at the unknown function that is resolved with respect to a first-order integro-differential operator of the Gerasimov type. The properties of resolving families of operators of the homogeneous equations are investigated. It is shown that sectoriality, i.e., belonging to the class of operators $\mathcal{A}_K$ introduced here, is a necessary and sufficient condition for the existence of an analytical resolving family of operators in a sector. A theorem on the perturbation of operators of the class $\mathcal{A}_K$ is obtained, and two versions of the theorem on the existence and uniqueness of a solution to a linear inhomogeneous equation are proved. Abstract results are used to study initial–boundary value problems for an equation with the Prabhakar time derivative and for a system of partial differential equations with Gerasimov–Caputo time derivatives of different orders.

Keywords: integro-differential equation, Gerasimov–Caputo derivative, Cauchy problem, sectorial operator, resolving family of operators, initial–boundary value problem.

MSC: 35R09, 35R11, 34G10

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-2-243-258

Введение

В последние десятилетия большой интерес исследователей привлекают задачи для уравнений с различными дробными производными, которые, в свою очередь, все чаще используются при моделировании различных явлений и процессов в физике, химии, биологии, в технических и социально-гуманитарных науках (см. монографии [1–7] и библиографию в них). Помимо дробных дифференциальных уравнений в последнее время большое количество работ посвящено тесно связанным с ними эволюционным интегральным и интегро-дифференциальным уравнениям [8–10], а также различным уравнениям, интегро-дифференциальные операторы в которых также часто называют дробными производными (см. [11; 12] и др.).

Упрощенно говоря, большинство дробных производных можно отнести к одному из двух типов: они представляют собой композицию свертки с интегральным ядром и производной

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 24-21-20015, https://rscf.ru/project/24-21-20015/) и поддержана Правительством Челябинской области.

целого порядка и представляют собой дробные производные типа Римана — Лиувилля, либо композицию производной целого порядка и свертки и являются дробными производными типа Герасимова — Капуто. Ранее нами были исследованы уравнения в банаховых пространствах с интегро-дифференциальными операторами типа Римана — Лиувилля или типа Герасимова, в которых абстрактная функция ядра свертки является операторнозначной, изучены интегро-дифференциальные уравнения обоих типов для уравнений с ограниченным оператором при искомой функции, в том числе уравнения с вырожденным оператором при интегро-дифференциальном операторе (см. [13]). В работе [14] были рассмотрены разрешенные относительно интегро-дифференциального оператора уравнения типа Римана — Лиувилля с секториальным оператором при искомой функции, т. е. с неограниченным линейным оператором, порождающим аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов соответствующего линейного однородного уравнения.

В настоящей работе мы исследуем задачу Коши $z(0) = z_0$ для интегро-дифференциального уравнения типа Герасимова

$$\int_0^t K(t-s)D^1 z(s)ds = Az(t) + f(t), \quad t \in (0,T], \tag{0.1}$$

с линейным замкнутым оператором A в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$.

Здесь $K \in L_1(0,T;\mathcal{Z})$, D^1 — производная первого порядка, $f \in C([0,T];\mathcal{Z})$. В разд. 2 изучены свойства разрешающих семейств однородного уравнения (0.1), затем введен класс секториальных операторов и показано, что секториальный оператор для уравнения (0.1) порядка более первого является ограниченным, вследствие чего рассматривается только уравнение (0.1) первого порядка. Доказано, что секториальность является необходимым и достаточным условием для существования аналитического в секторе разрешающего семейства операторов однородного уравнения (0.1). В разд. 3 получена теорема о возмущении секториального оператора. В разд. 4 доказаны два варианта теоремы об однозначной разрешимости неоднородного уравнения (0.1). Они использованы в разд. 5, 6 для исследования начально-краевых задач для уравнения с производной Прабхакара по времени, а также для системы уравнений с несколькими дробными производными Герасимова — Капуто различных порядков по времени.

1. Основные определения и предварительные сведения

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ — банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов на $\mathcal{Z}$, $\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ — множество всех линейных замкнутых операторов, плотно определенных в пространстве $\mathcal{Z}$, область определения D_A оператора $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ снабжена нормой графика $\|\cdot\|_{D_A} := \|\cdot\|_{\mathcal{Z}} + \|A\cdot\|_{\mathcal{Z}}$, $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_+ := \{0\} \cup \mathbb{R}_+$, $K \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$, D^m — производная целого порядка $m \in \mathbb{N}$. Определим оператор свертки

$$(J^K z)(t) := \int_0^t K(t-s)z(s)ds$$

и интегро-дифференциальный оператор типа Герасимова

$$(D^{K,m} z)(t) := (J^K D^m z)(t) := \int_0^t K(t-s)D^m z(s)ds.$$

З а м е ч а н и е 1. При $K(t) = \dfrac{t^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)}I$ интегро-дифференциальный оператор типа Герасимова $D^{K,m}$ является оператором дробного дифференцирования Герасимова — Капуто D^α порядка $\alpha \in (m-1, m]$, $m \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим задачу Коши
$$z(0) = z_0 \tag{1.1}$$
для уравнения
$$(D^{K,1}z)(t) = Az(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.2}$$
Решением задачи (1.1), (1.2) называется функция $z \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{Z}) \cap C(\mathbb{R}_+;D_A) \cap C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{Z})$, для которой $D^1 z \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathcal{Z})$, выполняются условие (1.1) и равенство (1.2) при всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Преобразование Лапласа для функции $h : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{Z}$ обозначим через $\widehat{h}$ или через $\mathfrak{L}[h]$, если выражение для h слишком громоздкое.

Следуя монографии [15], введем обозначение $\omega(f) := \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \sup\limits_{t\geq 0} e^{-\omega t}\|f(t)\|_{\mathcal{X}} < \infty\}$ для $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathcal{X})$, где $\mathcal{X}$ — банахово пространство. Для удобства будем иногда пользоваться обозначением $\mathrm{Lap}(\mathcal{X}) := \{f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathcal{X}) : \omega(f) \in \mathbb{R}\}$. Далее будем использовать следующее условие.

($\widehat{K}_0$) Пусть $K \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$, $\omega(K) \in \mathbb{R}$, при некотором $a_K \geq \omega(K)$ для всех $\mathrm{Re}\lambda > a_K$ существует $\widehat{K}(\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$.

Определение 1. Множество $\{S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})\colon t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ называется разрешающим семейством операторов уравнения (1.2), если выполняются следующие условия:

(i) семейство операторов $S(\cdot)$ сильно непрерывно на $\overline{\mathbb{R}}_+$, $S(0) = I$;

(ii) для всех $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ $S(t)[D_A] \subset D_A$, $S(t)Az_0 = AS(t)z_0$ при любом $z_0 \in D_A$;

(iii) для любого $z_0 \in D_A$ функция $S(t)z_0$ является решением задачи (1.1), (1.2).

Лемма 1. *Пусть K удовлетворяет условию ($\widehat{K}_0$), существует разрешающее семейство операторов $\{S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})\colon t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ уравнения (1.2), $\omega(S) \in \mathbb{R}$; существует такое $a_0 \geq \max\{a_K, \omega(S)\}$, что при всех $\mathrm{Re}\lambda > a_0$ $\widehat{K}(\lambda)\widehat{S}(\lambda) = \widehat{S}(\lambda)\widehat{K}(\lambda)$. Тогда при $\mathrm{Re}\lambda > a_0$ имеем $(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$,*
$$\widehat{S}(\lambda) = (\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\widehat{K}(\lambda) \tag{1.3}$$
и разрешающее семейство уравнения (1.2) единственно в классе $\mathrm{Lap}(\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$.

Доказательство. В силу свойств преобразования Лапласа, пп. (ii), (iii) определения 1 при любых $z_0 \in D_A$, $\mathrm{Re}\lambda > a_0$ $\widehat{K}(\lambda)(\lambda\widehat{S}(\lambda)z_0 - z_0) = A\widehat{S}(\lambda)z_0 = \widehat{S}(\lambda)Az_0$. Отсюда получим равенства $\widehat{K}(\lambda)^{-1}(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)\widehat{S}(\lambda)z_0 = \widehat{S}\widehat{K}(\lambda)^{-1}(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)z_0 = z_0$; при этом использовано коммутирование операторов $\widehat{K}(\lambda)^{-1}\widehat{S}(\lambda) = \widehat{S}(\lambda)\widehat{K}(\lambda)^{-1}$, выполняющееся при $\mathrm{Re}\lambda > a_0$. Поэтому оператор $\widehat{K}(\lambda)^{-1}(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A) : D_A \to \mathcal{Z}$ непрерывно обратим, тогда непрерывен оператор $[\widehat{K}(\lambda)^{-1}(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)]^{-1}\widehat{K}(\lambda)^{-1} = (\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}$ и справедливо равенство (1.3). Из (1.3) и единственности обратного преобразования Лапласа следует единственность разрешающего семейства операторов уравнения (1.2) в классе $\mathrm{Lap}(\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$. □

Теорема 1. *Пусть K удовлетворяет условию ($\widehat{K}_0$); существует разрешающее семейство операторов $\{S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})\colon t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ уравнения (1.2), $\omega(S) \in \mathbb{R}$; существует такое $a_0 \geq \max\{a_K, \omega(S)\}$, что при всех $\mathrm{Re}\lambda > a_0$ $\widehat{K}(\lambda)\widehat{S}(\lambda) = \widehat{S}(\lambda)\widehat{K}(\lambda)$. Если предел $\lim\limits_{t\to 0+} S(t) = I$ существует в норме $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$, то $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. Обратное верно при дополнительном условии:*
$$\exists c > 0 \quad \exists \chi > -1 \quad \forall \mathrm{Re}\lambda > a_K \quad \|\widehat{K}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \geq c|\lambda|^{\chi}. \tag{1.4}$$

Доказательство. В силу леммы 1 при $\mathrm{Re}\lambda > a_0$
$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}(S(t) - I)dt = (\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\widehat{K}(\lambda) - \lambda^{-1}I.$$

Пусть функция $\eta(t) := \|S(t) - I\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}$ непрерывна на отрезке $[0,1]$ и $\eta(0) = 0$. Для $\varepsilon > 0$ возьмем такое $\delta > 0$, что $\eta(t) \leq \varepsilon$ при всех $t \in [0,\delta]$, тогда

$$\left\|(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\widehat{K}(\lambda) - \lambda^{-1}I\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \int\limits_0^\delta e^{-\lambda t}\eta(t)dt + \int\limits_\delta^\infty e^{-\lambda t}\eta(t)dt \leq \frac{\varepsilon}{\lambda} + o\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)$$

при $\mathrm{Re}\lambda \to +\infty$, так как $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq Ce^{at}$ при $a > \omega(S)$, и поэтому $\eta(t) \leq Ce^{at} + 1$ для $t \geq 0$. Следовательно, при достаточно больших $\mathrm{Re}\lambda$ $\|\lambda(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\widehat{K}(\lambda) - I\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} < 1$ и оператор $(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\widehat{K}(\lambda)$ непрерывно обратим. С учетом непрерывной обратимости оператора $\widehat{K}(\lambda)$ при достаточно большом $\mathrm{Re}\lambda$ получим, что $\lambda\widehat{K}(\lambda) - A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, а значит, и $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$.

Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $R > a_0$. При $t > 0$ имеем, применяя обратное преобразование Лапласа,

$$S(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{R-i\infty}^{R+i\infty}(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\widehat{K}(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda = I + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{R-i\infty}^{R+i\infty}\lambda^{-1}(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}Ae^{\lambda t}d\lambda$$

$$= I + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{R-i\infty}^{R+i\infty}\frac{1}{\lambda}\sum_{l=1}^\infty \lambda^{-l}(\widehat{K}(\lambda)^{-1}A)^l e^{\lambda t}d\lambda.$$

В силу условия (1.4) $\|\widehat{K}(\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq c^{-1}|\lambda|^{-\chi}$ при всех $\mathrm{Re}\lambda > a_K$. При малых $t > 0$ возьмем $R = 1/t$ и получим

$$\|S(t) - I\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C_1\sum_{l=1}^\infty\int\limits_{R-i\infty}^{R+i\infty}\frac{\|A\|^l_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\|\widehat{K}(\lambda)^{-1}\|^l_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}|d\lambda|}{|\lambda|^{l+1}} \leq C_1\sum_{l=1}^\infty\int\limits_{R-i\infty}^{R+i\infty}\frac{(c^{-1}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})})^l|d\lambda|}{|\lambda|^{(1+\chi)l+1}}$$

$$\leq C_2\sum_{l=1}^\infty\frac{(c^{-1}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})})^l}{R^{(1+\chi)l}} \leq C_3t^{1+\chi}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \to 0$$

при $t \to 0+$, так как $1 + \chi > 0$. □

З а м е ч а н и е 2. Результат, аналогичный теореме 1, хорошо известен для разрешающих полугрупп операторов уравнений 1-го порядка (см., например, [16]). Для разрешающих семейств операторов уравнения с производной Герасимова — Капуто подобный результат был доказан в работе [17], для других типов уравнений с дробными производными — в работах [13; 18–20].

2. Аналитические разрешающие семейства

Теорема 2 (см. [9], теорема 0.1; [15], теорема 2.6.1). *Пусть $\theta_0 \in (\pi/2,\pi)$, $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{X}$ — банахово пространство, задано отображение $H : (a,\infty) \to \mathcal{X}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(i) *Существует аналитическая функция $F : \Sigma_{\theta_0-\pi/2} := \{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \theta_0-\pi/2,\ t \neq 0\} \to \mathcal{X}$, для которой при любом $\theta \in (\pi/2,\theta_0)$ существует такое $c(\theta) > 0$, что при всех $t \in \Sigma_{\theta-\pi/2}$ выполняется неравенство $\|F(t)\|_{\mathcal{X}} \leq c(\theta)e^{a\mathrm{Re}\,t}$; $\widehat{F}(\lambda) = H(\lambda)$ при $\lambda > a$.*

(ii) *Отображение H аналитически продолжимо на $S_{\theta_0,a} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta_0,$ $\mu \neq a\}$; при каждом $\theta \in (\pi/2,\theta_0)$ существует такое $C(\theta) > 0$, что для всех $\lambda \in S_{\theta,a}$ $\|H(\lambda)\|_{\mathcal{X}} \leq C(\theta)|\lambda - a|^{-1}$.*

Разрешающее семейство операторов называется *аналитическим*, если оно имеет аналитическое продолжение в сектор Σ_{ψ_0} при некотором $\psi_0 \in (0,\pi/2]$. Аналитическое разрешающее семейство операторов $\{S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ имеет тип (ψ_0, a_0) при некоторых $\psi_0 \in (0, \pi/2]$, $a_0 \in \mathbb{R}$, если для любого $\psi \in (0, \psi_0)$ существует такое $c(\psi)$, что при всех $t \in \Sigma_\psi$ выполняется неравенство $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le c(\psi)e^{a_0 \operatorname{Re} t}$.

Усилим условие на функцию K.

$(\widehat{K})$ Пусть при некоторых $\theta_K \in (\pi/2, \pi)$, $a_K \ge 0$ существует преобразование Лапласа для $K \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ — однозначная аналитическая функция $\widehat{K} : S_{\theta_K, a_K} \to \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. При этом для всех $\lambda \in S_{\theta_K, a_K}$ существует $\widehat{K}(\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ и

$$\exists c > 0 \quad \exists \chi > -1 \quad \forall \lambda \in S_{\theta_K, a_K} \quad \|\widehat{K}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \ge c|\lambda|^\chi.$$

Определение 2. Пусть K удовлетворяет условию $(\widehat{K})$, $\theta_0 \in (\pi/2, \theta_K]$, $a_0 \ge a_K \ge 0$. Через $\mathcal{A}_K(\theta_0, a_0)$ обозначим класс операторов $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, для которых выполняются следующие условия:

(i) для любого $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$ существует оператор $(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$;

(ii) для любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ найдется такое $C = C(\theta, a) > 0$, что для всех $\lambda \in S_{\theta,a}$

$$\|(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\widehat{K}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le C(\theta, a)|\lambda - a|^{-1}.$$

Обозначим

$$\mathcal{A}_K := \bigcup_{\substack{\theta_0 \in (\pi/2, \pi) \\ a_0 \ge 0}} \mathcal{A}_K(\theta_0, a_0).$$

Замечание 3. Рассмотрим уравнение $(D^{K,m}z)(t) = Az(t)$ при $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и по аналогии с определением 2 введем в рассмотрение класс операторов $\mathcal{A}_{K,m}(\theta_0, a_0)$, для которого вместо условия (ii) потребуем, чтобы выполнялось неравенство $\|(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\widehat{K}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le C(\theta, a)|\lambda - a|^{-1}|\lambda|^{1-m}$ при всех $\lambda \in S_{\theta,a}$ (в соответствии с видом преобразования Лапласа для решения задачи Коши $z(0) = z_0$, $D^k z(0) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$, для уравнения (1.2)). Тогда, рассуждая, как при доказательстве теоремы 2.6 в [17], и, учитывая, что в силу условия $(\widehat{K})$ $(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\widehat{K}(\lambda) = (\lambda^m I - \widehat{K}(\lambda)^{-1}A)^{-1}$, получим ограниченность $\widehat{K}(\lambda)^{-1}A$, а значит, и оператора A, т. е. $A_{K,m}(\theta_0, a_0) \subset \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. Задача Коши (1.1), (1.2) с ограниченным оператором A исследована в работе [13].

Замечание 4. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, K удовлетворяет условию $(\widehat{K})$. Тогда $A \in \mathcal{A}_K$. Действительно,

$$\|(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\widehat{K}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} = \|\lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}\widehat{K}(\lambda)^{-1}A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le 2|\lambda|^{-1}$$

при достаточно больших $|\lambda|$, т. е. при выборе достаточно большого $a_0 > 0$. Здесь используется неравенство $\|\lambda^{-1}\widehat{K}(\lambda)^{-1}A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le c^{-1}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}|\lambda|^{-1-\chi}$.

Лемма 2. *Пусть K удовлетворяет условию $(\widehat{K})$, $A \in \mathcal{A}_K(\theta_0, a_0)$, $\gamma \in \mathbb{R}$,*

$$Y_\gamma(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda^\gamma(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$$Z_\gamma(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda^\gamma(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\widehat{K}(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_0$, $\Gamma_\pm = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon \lambda = a + re^{\pm i\theta}, r \in [\delta, \infty)\}$, $\Gamma_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon \lambda = a + \delta e^{i\varphi}, \varphi \in (-\theta, \theta)\}$ *при некоторых $\delta > 0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$. Тогда Y_γ и Z_γ допускают аналитическое продолжение в сектор $\Sigma_{\theta_0 - \pi/2}$ и при всех $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такое $C_\gamma = C_\gamma(\theta, a)$, что для всех $t \in \Sigma_{\theta - \pi/2}$*

$$\|Y_\gamma(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le C_\gamma(\theta, a)e^{a\mathrm{Re}t}(|t|^{-1} + a)^{\gamma - \chi}, \quad \gamma \ge \chi,$$

$$\|Y_\gamma(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le C_\gamma(\theta,a)e^{a\mathrm{Re}t}|t|^{\chi-\gamma}, \quad \gamma<\chi,$$
$$\|Z_\gamma(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le C_\gamma(\theta,a)e^{a\mathrm{Re}t}(|t|^{-1}+a)^{\gamma}, \quad \gamma\ge 0,$$
$$\|Z_\gamma(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le C_\gamma(\theta,a)e^{a\mathrm{Re}t}|t|^{-\gamma}, \quad \gamma<0.$$

При этом

$$D^kY_\gamma(t)=Y_{\gamma+k}(t), \quad D^kZ_\gamma(t)=Z_{\gamma+k}(t), \quad k\in\mathbb{Z}, \quad t\in\mathbb{R}_+,$$
$$\lim_{t\to 0+}Y_\gamma(t)=0, \quad \gamma<\chi; \quad \lim_{t\to 0+}Z_\gamma(t)=0, \quad \gamma<0.$$

Лемма доказывается так же, как лемма 1 в работе [21]. При этом используются неравенства

$$\|(\lambda\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}=\|(\lambda\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}\widehat{K}(\lambda)\widehat{K}(\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\le C_1|\lambda|^{-1-\chi},$$
$$\|(\lambda\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}\widehat{K}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\le C_1|\lambda|^{-1}.$$

Теорема 3. *Пусть K удовлетворяет условию $(\widehat{K})$.*

(i) *Если $A\in\mathcal{A}_K(\theta_0,a_0)$, для $x\in D_A$ и почти всех $t>0$ $K(t)x\in D_A$, $K(t)Ax=AK(t)x$, то существует единственное в классе $\mathrm{Lap}(\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ аналитическое типа $(\theta_0-\pi/2,a_0)$ разрешающее семейство операторов $\{S(t)\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})\colon t\in\overline{\mathbb{R}}_+\}$ уравнения (1.2). При этом $S(t)=Z_0(t)$, $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$.*

(ii) *Если существует аналитическое разрешающее семейство операторов $\{S(t)\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})\colon t\in\overline{\mathbb{R}}_+\}$ типа $(\theta_0-\pi/2,a_0)$ для уравнения (1.2), при всех $\mathrm{Re}\lambda>a_0$ $\widehat{K}(\lambda)\widehat{S}(\lambda)=\widehat{S}(\lambda)\widehat{K}(\lambda)$, то $A\in\mathcal{A}_K(\theta_0,a_0)$.*

Доказательство. Если $A\in\mathcal{A}_K(\theta_0,a_0)$, то нетрудно показать, что существует преобразование Лапласа $\widehat{Z}_0(\lambda)=(\lambda\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}\widehat{K}(\lambda)$, поэтому в силу теоремы 2 при $\mathcal{X}=\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ семейство операторов $\{Z_0(t)\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})\colon t\in\overline{\mathbb{R}}_+\}$ аналитично и имеет тип $(\theta_0-\pi/2,a_0)$.

Непосредственно проверяется, что выполняется условие (i) определения 1 для семейства $\{Z_0(t)\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})\colon t\in\overline{\mathbb{R}}_+\}$, для этого в силу леммы 2 остается проверить сильную непрерывность в нуле семейства и выполнение равенства $Z_0(0)=I$. Из коммутирования операторов $K(t)$ и A при всех $t>0$ следует коммутирование $\widehat{K}(\lambda)$ и A, а значит, и $\widehat{K}(\lambda)^{-1}$ и A. Тогда для $x\in D_A$

$$A(\lambda\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}\widehat{K}(\lambda)x=A\widehat{K}(\lambda)^{-1}(\lambda I-A\widehat{K}(\lambda)^{-1})^{-1}\widehat{K}(\lambda)x=(\lambda I-A\widehat{K}(\lambda)^{-1})^{-1}Ax$$
$$=(\lambda I-\widehat{K}(\lambda)^{-1}A)^{-1}Ax=(\lambda\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}\widehat{K}(\lambda)Ax.$$

Отсюда с учетом замкнутости оператора A получаем условие (ii) определения 1 для семейства $\{Z_0(t)\in\mathcal{L}(\mathcal{Z}):t\in\overline{\mathbb{R}}_+\}$.

Для $z_0\in D_A$ имеем в силу леммы 2

$$D^1Z_0(t)z_0=Z_1(t)z_0=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma(\lambda\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}(\lambda\widehat{K}(\lambda)-A+A)z_0e^{\lambda t}d\lambda=Y_0(t)Az_0,$$

поэтому $Z_0(\cdot)z_0\in C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{Z})\cap C(\mathbb{R}_+;D_A)$, $D^1Z_0(\cdot)z_0\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathcal{Z})$. Кроме того,

$$Z_0(t)z_0=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\lambda^{-1}(\lambda\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}(\lambda\widehat{K}(\lambda)-A+A)z_0e^{\lambda t}d\lambda=z_0+Y_{-1}(t)Az_0\to z_0$$

при $t\to 0+$ в силу леммы 2, и

$$\mathfrak{L}[J^KD^1Z_0(t)z_0]=\widehat{K}(\lambda)[\lambda(\lambda\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}\widehat{K}(\lambda)z_0-z_0]=A(\lambda\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}\widehat{K}(\lambda)z_0.$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, получим при $t>0$ $J^KD^1Z_0(t)z_0=AZ_0(t)z_0$. Таким образом, $\{Z_0(t)\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})\colon t\in\overline{\mathbb{R}}_+\}$ — разрешающее семейство уравнения (1.2). При этом

$\widehat{K}(\lambda)\widehat{Z}_0(\lambda) = \widehat{Z}_0(\lambda)\widehat{K}(\lambda)$ для $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$, а значит, по лемме 1 разрешающее семейство операторов единственно в классе $\mathrm{Lap}(\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$.

Утверждение (ii) сразу следует из леммы 1 и теоремы 2. □

З а м е ч а н и е 5. Аналогичные этой теореме результаты известны для уравнений первого порядка (теорема о порождении аналитических полугрупп операторов) [16; 22], для эволюционных интегральных уравнений [9], уравнений с дробной производной Герасимова — Капуто [17], с производной Джрбашяна — Нерсесяна [20], с распределенными производными [19], для интегро-дифференциальных уравнений типа Римана — Лиувилля [13].

Следствие 1. *Пусть K удовлетворяет условию $(\widehat{K})$, $A \in \mathcal{A}_K(\theta_0, a_0)$, для любых $x \in D_A$ и почти всех $t > 0$ $K(t)x \in D_A$, $K(t)Ax = AK(t)x$. Тогда*

(i) *функция $z(t) = Z_0(t)z_0$ является единственным решением задачи* (1.1), (1.2) *в классе* $\mathrm{Lap}(\mathcal{Z})$; *это решение аналитично в секторе* $\Sigma_{\theta_0-\pi/2}$;

(ii) *если при всех $t > 0$ существуют операторы* $\left(\int_0^t K(s)ds\right)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, *то $z(t) = Z_0(t)z_0$ является единственным решением задачи* (1.1), (1.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. После теоремы 3 остается доказать единственность решения. Пусть существует два решения z_1 и z_2 задачи (1.1), (1.2) в классе $\mathrm{Lap}(\mathcal{Z})$. Тогда $y = z_1 - z_2$ — решение уравнения (1.2) с начальным условием $y(0) = 0$. Подействуем на обе части уравнения преобразованием Лапласа и получим равенство $(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)\widehat{y} = 0$. Так как $A \in \mathcal{A}_K(\theta_0, a_0)$, действием обратного оператора $(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ получим $\widehat{y} \equiv 0$ для всех $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$. С помощью обратного преобразования Лапласа получим $y \equiv 0$. Аналитичность решения $z(t) = Z_0(t)z_0$ следует из леммы 2.

Теперь не предполагаем принадлежность решения классу $\mathrm{Lap}(\mathcal{Z})$. Рассмотрим решение y задачи Коши с начальным значением $z_0 \in D_A$ для уравнения (1.2). Обозначим $(f * g)(t) := \int_0^t f(t-s)g(s)ds$. Так как $y \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{Z}) \cap C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{Z}) \cap C(\mathbb{R}_+;D_A)$, $J^K D^1 y \in L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{Z})$, то $J^1 J^K D^1 y = J^K J^1 D^1 y = J^K(y - z_0) = J^1 Ay$,

$$z_0 = \left(\int_0^t K(s)ds\right)^{-1}(J^K y(t) - J^1 Ay(t)) = \left(\int_0^t K(s)ds\right)^{-1}(K * y(t) - 1 * Ay(t)).$$

Учитывая, что $Z_0(t)z_0$ — также решение этой задачи Коши, имеем

$$1 * y = 1 * \left(\int_0^t K(s)ds\right)^{-1}(K * Z_0 - 1 * AZ_0)y = \left(\int_0^t K(s)ds\right)^{-1}(K * Z_0 - A * Z_0) * y$$

$$= Z_0 * \left(\int_0^t K(s)ds\right)^{-1}(K - A) * y = Z_0 * z_0 = 1 * Z_0 z_0.$$

После дифференцирования полученного равенства получим $y(t) = Z_0(t)z_0$.

3. Теорема о возмущении

Для класса операторов $A \in \mathcal{A}_K(\theta_0, a_0)$ докажем теорему об аддитивном возмущении. Обозначим через $C_A(\theta, a)$ константу $C(\theta, a)$ из определения 2 для оператора $A \in \mathcal{A}_K(\theta_0, a_0)$.

Теорема 4. *Пусть K удовлетворяет условию $(\widehat{K})$, $A \in \mathcal{A}_K(\theta_0, a_0)$, $B \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, для любых $x \in D_A$ и почти всех $t > 0$ $K(t)x \in D_A$, $K(t)Ax = AK(t)x$, для любых $x \in D_B$ $K(t)x \in D_B$, $K(t)Bx = BK(t)x$, для всех $x \in D_A \subset D_B$*

$$\|Bx\|_{\mathcal{Z}} \leq \beta\|Ax\|_{\mathcal{Z}} + \delta\|x\|_{\mathcal{Z}}, \tag{3.1}$$

где $\beta \in [0,1)$, $\delta \geq 0$; для всех $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ $\beta\,(1 + C_A(\theta, a)) < q$ при некотором $q \in (0,1)$. Тогда $A + B \in \mathcal{A}_K(\theta_0, a_1)$ при достаточно большом $a_1 > a_0$.

Доказательство. Выберем $l \geq 1$, $\lambda \in S_{\theta,la} \subset S_{\theta,a}$ при $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$, тогда из (3.1) следует, что

$$\|B(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \beta\|A(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} + \delta\|(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\widehat{K}(\lambda)\widehat{K}(\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}$$

$$\leq \beta\Big\|\lambda\widehat{K}(\lambda)(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} - I\Big\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} + \frac{\delta C_A(\theta,a)c^{-1}}{|\lambda - a||\lambda|^{\chi}} \leq \beta\Big(1 + \frac{C_A(\theta,a)}{|1 - a/\lambda|}\Big) + \frac{\delta C_A(\theta,a)c^{-1}}{|\lambda - a||\lambda|^{\chi}}$$

$$\leq \beta\Big(1 + \frac{C_A(\theta,a)}{1 - 1/l\sin\theta_0}\Big) + \frac{\delta C_A(\theta,a)c^{-1}}{(l-1)l^{\chi}(a_0\sin\theta_0)^{1+\chi}} \leq q + \frac{\delta C_A(\theta,a)c^{-1}}{(l-1)l^{\chi}(a_0\sin\theta_0)^{1+\chi}} < 1$$

при достаточно большом l. Поэтому, учитывая, что $\widehat{K}(\lambda)$ и $\widehat{K}(\lambda)^{-1}$ коммутируют с операторами A и B,

$$(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A - B)^{-1}\widehat{K}(\lambda) = (\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}(I - B(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1})^{-1}\widehat{K}(\lambda)$$

$$= (\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}(\widehat{K}(\lambda)^{-1} - B\widehat{K}(\lambda)^{-1}(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1})^{-1}$$

$$= (\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}(\widehat{K}(\lambda)^{-1} - B(\lambda\widehat{K}(\lambda)^2 - A\widehat{K}(\lambda))^{-1})^{-1}$$

$$= (\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\widehat{K}(\lambda)(I - B(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1})^{-1} = (\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\widehat{K}(\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}[B(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}]^k,$$

$$\|(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A - B)^{-1}\widehat{K}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{C_A(\theta,a)}{\Big(1 - q - \dfrac{\delta C_A(\theta,a)c^{-1}}{(l-1)l^{\chi}(a_0\sin\theta_0)^{1+\chi}}\Big)|\lambda - a|}$$

$$\leq \frac{C_A(\theta,a)\Big(1 + \dfrac{1}{\sin\theta_0}\Big)}{\Big(1 - q - \dfrac{\delta C_A(\theta)c^{-1}}{(l-1)l^{\chi}(a_0\sin\theta_0)^{1+\chi}}\Big)|\lambda - la|},$$

так как при $\lambda \in S_{\theta,la}$

$$\frac{|\lambda - la|}{|\lambda - a|} = \Big|1 - \frac{(l-1)a}{\lambda - a}\Big| \leq 1 + \frac{1}{\sin\theta_0}.$$

Следовательно, $A + B \in \mathcal{A}_K(\theta_0, a_1)$ при $a_1 = la_0$. □

Замечание 6. Любой оператор $B \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ удовлетворяет условию (3.1) при $\beta = 0$, $\delta = \|B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}$.

Замечание 7. Теорема 4 обобщает теорему о возмущении инфинитезимальных генераторов аналитических полугрупп операторов [22]. Аналогичные результаты для уравнений с распределенными производными получены в работах [19], для уравнений с производной Джрбашяна — Нерсесяна — в [20], для интегро-дифференциальных уравнений типа Римана — Лиувилля — в [13].

4. Неоднородное уравнение

Рассмотрим уравнение

$$D^{K,1}z(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in (0,T], \tag{4.1}$$

где $f \in C([0,T];\mathcal{Z})$. Функция $z \in C([0,T];\mathcal{Z}) \cap C((0,T];D_A) \cap C^1((0,T];\mathcal{Z})$ называется решением задачи Коши

$$z(0) = z_0 \tag{4.2}$$

для уравнения (4.1), если $D^1 z \in L_1(0,T;\mathcal{Z})$, равенство (4.1) справедливо при всех $t \in (0,T]$ и выполняется условие (4.2).

Через $C^1_\beta([0,T];\mathcal{Z})$, $\beta \in \mathbb{R}$, обозначим пространство таких функций $f \in C([0,T];\mathcal{Z}) \cap C^1((0,T];\mathcal{Z})$, что $t^\beta D^1 f(t) \in C([0,T];\mathcal{Z})$.

Теорема 5. *Пусть K удовлетворяет условию $(\widehat{K})$, $A \in \mathcal{A}_K$, для любых $x \in D_A$ и почти всех $t > 0$ $K(t)x \in D_A$, $K(t)Ax = AK(t)x$, $f \in C([0,T];D_A) \cap C^1_\beta([0,T];\mathcal{Z})$, $\beta < 1$, $z_0 \in D_A$. Тогда*

$$z(t) = Z_0(t)z_0 + \int_0^t Y_0(t-s)f(s)ds \tag{4.3}$$

является решением задачи (4.1), (4.2), *единственным в классе* $\mathrm{Lap}(\mathcal{Z})$. *Если к тому же при всех $t > 0$ существуют операторы* $\left(\int_0^t K(s)ds\right)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, *то решение задачи* (4.1), (4.2) *единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу следствия 1 достаточно доказать, что функция

$$z_f(t) := \int_0^t Y_0(t-s)f(s)ds$$

является решением задачи Коши $z(0) = 0$ для уравнения (4.1).

Из коммутирования операторов $K(t)$ и A, а значит, и операторов $(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}$ и A с учетом замкнутости оператора A и условия $f \in C([0,T];D_A)$ следует сходимость интеграла

$$\int_0^t AY_0(t-s)f(s)ds = \int_0^t Y_0(t-s)Af(s)ds.$$

Действительно, в силу леммы 2 при $t \in (0,T]$ $\|Y_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le C_0 t^\chi$, поэтому

$$\|z_f(t)\|_{\mathcal{Z}} \le C_0 \|f\|_{C([0,T];D_A)} \frac{t^{1+\chi}}{1+\chi} \to 0$$

при $t \to 0+$, так как $1 + \chi > 0$,

$$\left\| \int_0^t Y_0(t-s)Af(s)ds \right\|_{\mathcal{Z}} \le C_1 \|f\|_{C([0,T];D_A)} \frac{t^{1+\chi}}{1+\chi}, \quad 1 + \chi > 0.$$

Значит, $z_f(0) = 0$, $z_f(t) \in D_A$ и $Az_f(t) = z_{Af}(t)$ при $t > 0$.

Далее,

$$D^1 z_f(t) = D^1 \int_0^t Y_0(s)f(t-s)ds = Y_0(t)f(0) + \int_0^t Y_0(s)D^1 f(t-s)ds,$$

поэтому ввиду леммы 2 при $t \in (0,T]$

$$\|D^1 z_f(t)\|_{\mathcal{Z}} = \left\|Y_0(t)f(0) + \int\limits_0^t Y_0(s)D^1 f(t-s)ds\right\|_{\mathcal{Z}} \le C_1 t^{\chi} + C_2 \int\limits_0^t s^{\chi}(t-s)^{-\beta}ds \le C_3 t^{\chi},$$

так как $f \in C^1_\beta([0,T];\mathcal{Z})$, $\beta < 1$. Таким образом, $D^1 z_f \in L_1(0,T;\mathcal{Z})$.

Теперь

$$\widehat{D^{K,1}z_f} = \lambda\widehat{K}(\lambda)\widehat{z}_f(\lambda) = \lambda\widehat{K}(\lambda)(\lambda\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}\widehat{f}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda) + A(\lambda\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}\widehat{f}(\lambda).$$

Отсюда с учетом замкнутости A получаем $D^{K,1}z_f(t) - f(t) = Az_f(t)$.

Единственность доказывается так же, как для однородного уравнения. □

Через $C^\gamma([0,T];\mathcal{Z})$ при $\gamma \in (0,1]$ обозначим множество функций, удовлетворяющих условию Гельдера

$$\exists C > 0 \quad \forall s,t \in [0,T] \quad \|f(s) - f(t)\|_{\mathcal{Z}} \le C|s-t|^\gamma.$$

Теорема 6. *Пусть K удовлетворяет условию $(\widehat{K})$, $A \in \mathcal{A}_K$, для любых $x \in D_A$ и почти всех $t > 0$ $K(t)x \in D_A$, $K(t)Ax = AK(t)x$, $f \in C^\gamma([0,T];\mathcal{Z}) \cap C^1_\beta([0,T];\mathcal{Z})$, $\gamma \in (0,1]$, $\beta < 1$, $z_0 \in D_A$. Тогда функция* (4.3) *является решением задачи* (4.1), (4.2), *единственным в классе* $\mathrm{Lap}(\mathcal{Z})$. *Если к тому же при всех $t > 0$ существуют операторы $\left(\int_0^t K(s)ds\right)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, то решение задачи* (4.1), (4.2) *единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как оператор A замкнут, в силу леммы 2 при $t > 0$

$$AY_0(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma A(\lambda\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda\widehat{K}(\lambda)(\lambda\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda(\lambda\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}\widehat{K}(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda = Z_1(t) = D^1 Z_0(t).$$

Поэтому $\|AY_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} = O(t^{-1})$ при $t \to 0+$ и для $s,t \in (0,T]$

$$\|AY_0(t-s)(f(s)-f(t))\|_{\mathcal{Z}} \le C_1|t-s|^{\gamma-1}, \tag{4.4}$$

$$\int\limits_0^t AY_0(t-s)f(s)ds = \int\limits_0^t AY_0(t-s)(f(s)-f(t))ds + \int\limits_0^t D^1 Z_0(t-s)f(t)ds. \tag{4.5}$$

Предпоследний интеграл сходится в силу неравенства (4.4), а для последнего в силу непрерывности на $[0,T]$ и дифференцируемости на $(0,T]$ функции $Z_0(\cdot)x$ при любом $\varepsilon \in (0,t)$ имеем

$$\int\limits_0^{t-\varepsilon} D^1 Z_0(t-s)f(t)ds = (Z_0(t) - Z_0(\varepsilon))f(t). \tag{4.6}$$

Как было показано при доказательстве теоремы 3, для любого $x \in D_A$ $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} Z_0(\varepsilon)x = x$, а в силу леммы 2 $\|Z_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le C$ для всех $t \in (0,T]$, кроме того, D_A плотно в $\mathcal{Z}$. Поэтому по теореме Банаха — Штейнгауза существует предел в сильной топологии s-$\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} Z_0(\varepsilon) := Z_0(0) = I$ в пространстве $\mathcal{Z}$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0+$ в (4.6), получим существование последнего интеграла в (4.5), а значит, и интеграла в левой части равенства (4.5). Таким образом, с учетом замкнутости оператора A получаем, что $z_f(t) \in D_A$ при $t > 0$.

Остальная часть доказательства такая же, как для теоремы 5. □

5. Уравнение с производной Прабхакара

Обобщенная функция Миттаг — Леффлера $E^{\rho}_{\alpha,\beta}$ и ядро Прабхакара $e^{\rho}_{\alpha,\beta,\omega}$ имеют вид [23]

$$E^{\rho}_{\alpha,\beta}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\rho+n)t^n}{\Gamma(\rho)\Gamma(\alpha n+\beta)n!},\quad e^{\rho}_{\alpha,\beta,\omega}(t)=t^{\beta-1}E^{\rho}_{\alpha,\beta}(\omega t^{\alpha}).$$

При $\beta\in(0,1)$, $\alpha,\rho,\omega>0$ производная Прабхакара

$$D^{\rho}_{\alpha,\beta,\omega}h(t):=\int\limits_0^t(t-s)^{\beta-1}E^{\rho}_{\alpha,\beta}(\omega(t-s)^{\alpha})D^1h(s)ds$$

является интегро-дифференциальным оператором Герасимова с ядром $K(s)=e^{\rho}_{\alpha,\beta,\omega}(s)$.

Пусть в ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ с гладкой границей $\partial\Omega$ заданы операторы

$$(\Lambda u)(\xi):=\sum_{|q|\le 2r}a_q(\xi)\frac{\partial^{|q|}u(\xi)}{\partial\xi_1^{q_1}\partial\xi_2^{q_2}\dots\partial\xi_d^{q_d}},\quad a_q\in C^{\infty}(\overline{\Omega}),$$

$$(B_lu)(\xi):=\sum_{|q|\le r_l}b_{lq}(\xi)\frac{\partial^{|q|}u(\xi)}{\partial\xi_1^{q_1}\partial\xi_2^{q_2}\dots\partial\xi_d^{q_d}},\quad b_{lq}\in C^{\infty}(\partial\Omega),\quad l=1,2,\dots,r,$$

$q=(q_1,q_2,\dots,q_d)\in\mathbb{N}_0^d$, где $\mathbb{N}_0:=\mathbb{N}\cup\{0\}$, $|q|:=q_1+\dots+q_d$. Предположим, что пучок операторов $\Lambda,B_1,B_2,\dots,B_r$ регулярно эллиптичен (см. определение в [24]), и зададим оператор $\Lambda_1\in\mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ с областью определения $D_{\Lambda_1}=H^{2r}_{\{B_l\}}(\Omega):=\{u\in H^{2r}(\Omega)\colon B_lu(\xi)=0,\ l=1,2,\dots,r,\ \xi\in\partial\Omega\}$, действующий по правилу $\Lambda_1u:=\Lambda u$. Пусть оператор Λ_1 самосопряжен, тогда его спектр $\sigma(\Lambda_1)$ действителен, дискретен и конечнократен [24]. Предположим, кроме того, что спектр $\sigma(\Lambda_1)$ отрицателен; обозначим через $\{\varphi_k\colon k\in\mathbb{N}\}$ ортонормированную в $L_2(\Omega)$ систему собственных функций оператора Λ_1, занумерованную в порядке невозрастания соответствующих собственных значений $\{\lambda_k\colon k\in\mathbb{N}\}$ с учетом их кратностей.

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$v(\xi,0)=v_0(\xi),\quad \xi\in\Omega, \tag{5.1}$$

$$B_lv(\xi,t)=0,\quad l=1,2,\dots,r,\quad (\xi,t)\in\partial\Omega\times(0,T], \tag{5.2}$$

для уравнения с производной Прабхакара по времени

$$\int\limits_0^t(t-s)^{\beta-1}E^{\rho}_{\alpha,\beta}(\omega(t-s)^{\alpha})\frac{\partial v}{\partial s}(\xi,s)ds=\Lambda v(\xi,t)+g(\xi,t),\quad (\xi,t)\in\Omega\times(0,T]. \tag{5.3}$$

Возьмем $\mathcal{Z}=L_2(\Omega)$, $A=\Lambda_1\in\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $D_A=D_{\Lambda_1}$.

Лемма 3. *Пусть $\beta\in(0,1)$, $\alpha,\rho,\omega>0$. Тогда $e^{\rho}_{\alpha,\beta,\omega}$ удовлетворяет условию $(\widehat{K})$, $A\in\mathcal{A}_K$; для любых $t>0$, $x\in D_A$ $K(t)x\in D_A$, $K(t)Ax=AK(t)x$.*

Доказательство. Коммутирование $K(t)$ при $t>0$ и A очевидно.

Известно [23], что $\widehat{K}(\lambda)=\mathfrak{L}[e^{\rho}_{\alpha,\beta,\omega}](\lambda)=\lambda^{-\beta}(1-\omega\lambda^{-\alpha})^{-\rho}$, поэтому условие $(\widehat{K})$ выполняется при любом $a_K>|\omega|^{1/\alpha}$ и таком θ_K, что круг $\{\mu\in\mathbb{C}\colon|\mu|=|\omega|^{1/\alpha}\}$ лежит левее сектора S_{θ_K,a_K}. При этом можно взять $\chi=-\beta\in(-1,0)$.

Теперь при $\lambda\in S_{\theta_K,a_K}$ $\lambda\widehat{K}(\lambda)-A=\lambda^{1-\beta}(1-\omega\lambda^{-\alpha})^{-\rho}-\Lambda_1$. Поскольку при больших $|\lambda|$ $\lambda^{\beta-1}(1-\omega\lambda^{-\alpha})^{\rho}\sim\lambda^{\beta-1}$, то выбрав достаточно большое $a_0\ge a_K$, получим для $\theta_0\in(\pi/2,\theta_K]$,

$\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$, $\lambda \in S_{\theta,a}$, $k \in \mathbb{N}$ включение $\lambda_k \lambda^{\beta-1}(1-\omega\lambda^{-\alpha})^\rho \in -S_{\theta,0}$, значит, $|\lambda_k \lambda^{\beta-1}(1-\omega\lambda^{-\alpha})^\rho - 1| \geq \sin\theta$ и существует обратный оператор

$$(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \cdot, \varphi_k\rangle \varphi_k}{\lambda^{1-\beta}(1-\omega\lambda^{-\alpha})^{-\rho} - \lambda_k},$$

$$(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\widehat{K}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \cdot, \varphi_k\rangle \varphi_k}{\lambda(1-\lambda_k\lambda^{\beta-1}(1-\omega\lambda^{-\alpha})^{\rho})},$$

$$\|(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\widehat{K}(\lambda)z\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \frac{\sin^{-2}\theta}{|\lambda|^2}\|z\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \left(1 + \frac{1}{\sin\theta_0}\right)^2 \frac{\sin^{-2}\theta_0}{|\lambda - a|^2}\|z\|^2_{L_2(\Omega)}$$

для любого $z \in L_2(\Omega)$. Следовательно, $A \in \mathcal{A}_K(\theta_0, a_0)$. □

Из леммы 3 и теорем 5, 6 сразу получим теорему о разрешимости.

Теорема 7. *Пусть* $\beta \in (0,1)$, $\alpha, \rho, \omega > 0$, $v_0 \in D_A$, $g \in [C([0,T]; D_{\Lambda_1}) \cup C^\gamma([0,T]; L_2(\Omega))] \cap C^1_\delta([0,T]; L_2(\Omega))$, $\gamma \in (0,1]$, $\delta < 1$. *Тогда существует единственное решение задачи* (5.1)–(5.3) *в классе* $\mathrm{Lap}(L_2(\Omega))$.

6. Система уравнений с дробными производными

Возьмем $b_{ij} \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha_{ij} < 1$, $i, j = 1, 2$,

$$K(s) := \begin{pmatrix} b_{11}\dfrac{s^{-\alpha_{11}}}{\Gamma(1-\alpha_{11})} & b_{12}\dfrac{s^{-\alpha_{12}}}{\Gamma(1-\alpha_{12})} \\ b_{21}\dfrac{s^{-\alpha_{21}}}{\Gamma(1-\alpha_{21})} & b_{22}\dfrac{s^{-\alpha_{22}}}{\Gamma(1-\alpha_{22})} \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

Тогда

$$D^{K,1} = \begin{pmatrix} b_{11}D^{\alpha_{11}} & b_{12}D^{\alpha_{12}} \\ b_{21}D^{\alpha_{21}} & b_{22}D^{\alpha_{22}} \end{pmatrix},$$

где $D^{\alpha_{ij}}$ — оператор дробного дифференцирования Герасимова — Капуто порядка α_{ij}.

Положим $\mathcal{Z} = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$, $A = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}l(L_2(\Omega) \times L_2(\Omega))$, $D_A = D_{\Lambda_1} \times D_{\Lambda_1}$, где Λ_1 и D_{Λ_1} определены в разд. 5, ядро $K(s)$ задано формулой (6.1).

Лемма 4. *Пусть в условиях данного раздела* $b_{11} > 0$, $b_{22} > 0$, $b_{12} = 0$, $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{22} \in (0,1]$, $\alpha_{21} \leq \max\{\alpha_{11}, \alpha_{22}\}$. *Тогда K удовлетворяет условию* $(\widehat{K})$, $A \in \mathcal{A}_K$; *для любых* $t > 0$, $x \in D_A$ $K(t)x \in D_A$, $K(t)Ax = AK(t)x$; *при всех* $t > 0$ *существуют операторы* $\left(\int_0^t K(s)ds\right)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$.

Доказательство. Из диагонального вида оператора A и того факта, что A действует на пространственные переменные $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d$, следует коммутирование операторов A и $K(t)$ при всех $t > 0$. При этом для $t > 0$

$$\left(\int_0^t K(s)ds\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\Gamma(2-\alpha_{11})}{b_{11}}t^{\alpha_{11}-1} & 0 \\ -\dfrac{b_{21}\Gamma(2-\alpha_{11})\Gamma(2-\alpha_{22})}{b_{11}b_{22}\Gamma(2-\alpha_{21})}t^{\alpha_{11}+\alpha_{22}-\alpha_{21}-1} & d\frac{\Gamma(2-\alpha_{22})}{b_{22}}t^{\alpha_{22}-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}).$$

Заметим, что

$$\widehat{K}(\lambda) := \begin{pmatrix} b_{11}\lambda^{\alpha_{11}-1} & 0 \\ b_{21}\lambda^{\alpha_{21}-1} & b_{22}\lambda^{\alpha_{22}-1} \end{pmatrix},$$

поэтому выполняется условие $(\widehat{K})$ при любых $\theta_K \in (\pi/2, \pi)$, $a_K > 0$. При этом можно взять $\chi = \max\{\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{22}\} - 1$. При $\lambda \in S_{\theta_K, a_K}$

$$\lambda\widehat{K}(\lambda) - A = \begin{pmatrix} b_{11}\lambda^{\alpha_{11}} - \Lambda_1 & 0 \\ b_{21}\lambda^{\alpha_{21}} & b_{22}\lambda^{\alpha_{22}} - \Lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $D_k := (b_{11}\lambda^{\alpha_{11}} - \lambda_k)(b_{22}\lambda^{\alpha_{22}} - \lambda_k)$, тогда $D_k \sim b_{11}b_{22}\lambda^{\alpha_{11}+\alpha_{22}}$ при $|\lambda| \to \infty$. Поэтому сразу для всех $k \in \mathbb{N}$ $D_k \neq 0$ при достаточно больших $|\lambda|$, в частности при $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$ для достаточно большого $a_0 > 0$. Поэтому для таких $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$ существует обратный оператор

$$(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{D_k}\begin{pmatrix} b_{22}\lambda^{\alpha_{22}} - \lambda_k & 0 \\ -b_{21}\lambda^{\alpha_{21}} & b_{11}\lambda^{\alpha_{11}} - \lambda_k \end{pmatrix}\langle\cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k,$$

тогда

$$(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\widehat{K}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(\lambda)\langle\cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k,$$

$$B_k(\lambda) = \frac{1}{D_k}\begin{pmatrix} (b_{22}\lambda^{\alpha_{22}} - \lambda_k)b_{11}\lambda^{\alpha_{11}-1} & 0 \\ -\lambda_k b_{21}\lambda^{\alpha_{21}-1} & (b_{11}\lambda^{\alpha_{11}} - \lambda_k)b_{22}\lambda^{\alpha_{22}-1} \end{pmatrix}.$$

Возьмем $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$, $\lambda \in S_{\theta, a}$, $k \in \mathbb{N}$ и получим

$$\frac{|(b_{22}\lambda^{\alpha_{22}} - \lambda_k)b_{11}\lambda^{\alpha_{11}-1}|}{|D_k|} = \frac{1}{|\lambda|\Big|1 - \dfrac{\lambda_k}{b_{11}\lambda^{\alpha_{11}}}\Big|} \leq \frac{\sin^{-1}(\alpha_{11}\theta)}{|\lambda|}$$

$$\leq \Big|1 - \frac{a}{\lambda}\Big|\frac{\sin^{-1}\theta_0}{|\lambda - a|} \leq \Big(1 + \frac{1}{\sin\theta_0}\Big)\frac{\sin^{-1}\theta_0}{|\lambda - a|},$$

$$\frac{|(b_{11}\lambda^{\alpha_{11}} - \lambda_k)b_{22}\lambda^{\alpha_{22}-1}|}{|D_k|} = \frac{1}{|\lambda|\Big|1 - \dfrac{\lambda_k}{b_{22}\lambda^{\alpha_{22}}}\Big|} \leq \frac{\sin^{-1}(\alpha_{22}\theta)}{|\lambda|} \leq \Big(1 + \frac{1}{\sin\theta_0}\Big)\frac{\sin^{-1}\theta_0}{|\lambda - a|},$$

$$\frac{|\lambda_k b_{21}\lambda^{\alpha_{21}-1}|}{|D_k|} = \frac{|b_{21}\lambda^{\alpha_{21}-\alpha_{11}}|}{|\lambda|\,|(b_{11} - \lambda^{-\alpha_{11}}\lambda_k)(b_{22}\lambda^{\alpha_{22}}\lambda_k^{-1} - 1)|} \leq \frac{|b_{21}|\sin^{-1}(\alpha_{11}\theta)\sin^{-1}(\alpha_{22}\theta)}{|b_{11}||\lambda|^{1-\alpha_{21}+\alpha_{11}}}$$

$$\leq \Big(1 + \frac{1}{\sin\theta_0}\Big)\frac{|b_{21}|\sin^{-2}\theta_0(a_0\sin\theta_0)^{\alpha_{21}-\alpha_{11}}}{|b_{11}||\lambda - a|} \leq \frac{K}{|\lambda - a|},$$

если $\alpha_{21} \leq \alpha_{11}$; в противном же случае, т. е. при $\alpha_{11} < \alpha_{21} \leq \alpha_{22}$

$$\frac{|\lambda_k b_{21}\lambda^{\alpha_{21}-1}|}{|D_k|} = \frac{|b_{21}\lambda^{\alpha_{21}-\alpha_{22}}|}{|\lambda|\,|(b_{11}\lambda^{\alpha_{11}}\lambda_k^{-1} - 1)(b_{22} - \lambda^{-\alpha_{22}}\lambda_k)|} \leq \frac{|b_{21}|\sin^{-1}(\alpha_{11}\theta)\sin^{-1}(\alpha_{22}\theta)}{|b_{22}||\lambda|^{1-\alpha_{21}+\alpha_{22}}}$$

$$\leq \Big(1 + \frac{1}{\sin\theta_0}\Big)\frac{|b_{21}|\sin^{-2}\theta_0(a_0\sin\theta_0)^{\alpha_{21}-\alpha_{22}}}{|b_{22}||\lambda - a|} \leq \frac{K}{|\lambda - a|}.$$

При этом величина, например, $|b_{11}\lambda^{\alpha_{11}}\lambda_k^{-1} - 1|$ оценивается снизу как расстояние в комплексной плоскости от числа 1 до сектора $-S_{\alpha_{11}\theta, 0}$, в котором ввиду отрицательности $b_{11}\lambda_k^{-1}$ лежат числа $b_{11}\lambda^{\alpha_{11}}\lambda_k^{-1}$ при $\lambda \in S_{\theta, a}$. Таким образом, $A \in \mathcal{A}_K(\theta_0, a_0)$. □

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$v(\xi, 0) = v_0(\xi), \quad w(\xi, 0) = w_0(\xi), \quad \xi \in \Omega, \tag{6.2}$$

$$B_l v(\xi, t) = B_l w(\xi, t) = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, r, \quad (\xi, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \tag{6.3}$$

$$b_{11}D_t^{\alpha_{11}} v(\xi, t) = \Lambda v(\xi, t) + g(\xi, t), \quad (\xi, t) \in \Omega \times (0, T], \tag{6.4}$$

$$b_{21}D_t^{\alpha_{21}}v(\xi,t)+b_{22}D_t^{\alpha_{22}}w(\xi,t)=\Lambda w(\xi,t)+h(\xi,t),\quad (\xi,t)\in\Omega\times(0,T],\tag{6.5}$$

где D_t^{β} — производная Герасимова — Капуто по переменной t. Эта задача в пространстве $\mathcal{Z}=L_2(\Omega)\times L_2(\Omega)$ редуцируется к задаче (4.1), (4.2) с $f(t)=(g(\cdot,t),h(\cdot,t))$, $z_0=(v_0(\cdot),w_0(\cdot))$. В силу леммы 4 и теорем 5, 6 сразу получим однозначную разрешимость исследуемой задачи.

Теорема 8. *Пусть* $b_{11}>0$, $b_{22}>0$, $b_{12}=0$, $\alpha_{11},\alpha_{21},\alpha_{22}\in(0,1)$, $v_0,w_0\in D_{\Lambda_1}$, $g,h\in[C([0,T];D_{\Lambda_1})\cup C^{\gamma}([0,T];L_2(\Omega))]\cap C^1_{\beta}([0,T];L_2(\Omega))$, $\gamma\in(0,1]$, $\beta<1$. *Тогда существует единственное решение задачи* (6.2)–(6.5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
2. **Нахушев А.М.** Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
3. **Нахушев А.М.** Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
4. **Псху А.В.** Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
5. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.** Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier Science Publ., 2006. 540 p. ISBN-13: 978-0444518323
6. **Учайкин В.В.** Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
7. **Tarasov V.E.** Fractional dynamics: Applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media. NY: Springer, 2011. 505 p. ISBN 978-3-642-14003-7
8. **Da Prato G., Iannelli M.** Linear integro-differential equations in Banach spaces // Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. 1980. Tome 62. P. 207–219.
9. **Prüss J.** Evolutionary integral equations and applications. Basel: Springer, 1993. 366 p. doi: 10.1007/978-3-0348-0499-8
10. **Kostić M.** Abstract Volterra integro-differential equations. Boca Raton: CRC Press, 2015. 484 p. doi: 10.1201/b18463
11. **Caputo M., Fabrizio M.** A new definition of fractional derivative without singular kernel // Progress in Fractional Differentiation and Applications. 2015. Vol. 1, no. 2. P. 73–85. doi: 10.12785/pfda/010201
12. **Atangana A., Baleanu D.** New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model // Thermal Science. 2016. Vol. 20. P. 763–769. doi: 10.2298/TSCI160111018A
13. **Fedorov V.E., Godova A.D., Kien B.T.** Integro-differential equations with bounded operators in Banach spaces // Bulletin Karaganda Univ. Math. ser. 2022. No. 2 (106). P. 93–107. doi: 10.31489/2022M2/93-107
14. **Федоров В.Е., Годова А.Д.** Интегро-дифференциальные уравнения в банаховых пространствах и аналитические разрешающие семейства операторов // Соврем. математика. Фундамент. направления. 2023. Т. 69, № 1. С. 166–184. doi: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-166-184
15. **Arendt W., Batty C.J.K., Hieber M., Neubrander F.** Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. Basel: Springer, 2011. 539 p. doi: 10.1007/978-3-0348-0087-7
16. **Pazy A.** Semigroups and linear operators and applications to partial differential equations. NY: Springer, 1983. 279 p. doi: 10.1007/978-1-4612-5561-1
17. **Bajlekova E.G.** Fractional evolution equations in Banach spaces. PhD thesis. Eindhoven: Eindhoven University of Technology, 2001. 107 p.
18. **Fedorov V.E., Filin N.V.** On strongly continuous resolving families of operators for fractional distributed order equations // Fractal and Fractional. 2021. Vol. 5, no. 1. Art. no. 20. 14 p. doi: 10.3390/fractalfract5010020
19. **Sitnik S.M., Fedorov V.E., Filin N.V., Polunin V.A.** On the solvability of equations with a distributed fractional derivative given by the Stieltjes integral // Mathematics. 2022. Vol. 10, no. 16. Art. no. 2979. 20 p. doi: 10.3390/math10162979
20. **Fedorov V.E., Plekhanova M.V., Izhberdeeva E.M.** Analytic resolving families for equations with the Dzhrbashyan–Nersesyan fractional derivative // Fractal and Fractional. 2022. Vol. 6, no. 10. Art. no. 541. 16 p. doi: 10.3390/fractalfract6100541
21. **Бойко К.В.** Линейные и квазилинейные уравнения с несколькими производными Герасимова — Капуто // Челяб. физ.-мат. журн. 2024. Т. 9, вып. 1. С. 5–22. doi: 10.47475/2500-0101-2024-9-1-5-22

22. **Като Т.** Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
23. **Prabhakar T.R.** A singular integral equation with a generalized Mittag–Leffler function in the kernel // Yokohama Math. J. 1971. Vol. 19. P. 7–15.
24. **Трибель Х.** Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980. 664 с.

Поступила 11.03.2024
После доработки 14.03.2024
Принята к публикации 18.03.2024

Федоров Владимир Евгеньевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор кафедры математического анализа
Челябинский государственный университет
г. Челябинск
e-mail: kar@csu.ru

Годова Александра Даниловна
аспирант
Челябинский государственный университет
г. Челябинск
e-mail: sasha.godova97@mail.ru

REFERENCES

1. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications*, Yverdon, Gordon and Breach Publ., 1993, 976 p. ISBN-13: 9782881248641. Original Russian text published in Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya.* Minsk: Nauka i Tekhnika Publ., 1987, 688 p.
2. Nakhushev A.M. *Uravneniya matematicheskoy biologii* [Equations of mathematical biology]. Moscow, Vys. Shk. Publ., 1995, 301 p. ISBN: 5-06-002670-1 .
3. Nakhushev A.M. *Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye* [Fractional calculus and its applications]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003, 272 p. ISBN: 5-9221-0440-3 .
4. Pskhu A.V. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka* [Partial differential equations of fractional order]. Moscow, Nauka Publ., 2005, 199 p. ISBN: 5-02-033721-8 .
5. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and applications of fractional differential equations.* Amsterdam, Elsevier Science Publ., 2006, 540 p. ISBN-13: 978-0444518323 .
6. Uchaykin V.V. *Metod drobnykh proizvodnykh* [Method of fractional derivatives]. Ul'yanovsk, Artichoke Publ., 2008, 512 p. ISBN: 978-5-904198-01-5 .
7. Tarasov V.E. *Fractional dynamics: applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media.* NY, Springer Publ., 2011, 505 p. ISBN: 978-3-642-14003-7 .
8. Da Prato G., Iannelli M. Linear integro-differential equations in Banach spaces. *Rendiconti del seminario matematico della università di Padova*, 1980, vol. 62, pp. 207–219.
9. Prüss J. *Evolutionary integral equations and applications.* Basel, Springer, 1993, 366 p. doi: 10.1007/978-3-0348-0499-8
10. Kostić M. *Abstract Volterra integro-differential equations.* Boca Raton, CRC Press., 2015, 484 p. doi: 10.1201/b18463
11. Caputo M., Fabrizio M. A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progress in fractional differentiation and applications*, 2015, vol. 1, no. 2, pp. 73–85. doi: 10.12785/pfda/010201
12. Atangana A., Baleanu D. New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model. *Thermal Science*, 2016, vol. 20, pp. 763–769. doi: 10.2298/TSCI160111018A
13. Fedorov V.E., Godova A.D., Kien B.T. Integro-differential equations with bounded operators in Banach spaces. *Bull. Karaganda Univ. Math. Ser.*, 2022, no. 2 (106), pp. 93–107. doi: 10.31489/2022M2/93-107

14. Fedorov V.E., Godova A.D. Integro-differential equations in Banach spaces and analytic resolving families of operators. *Sovrem. Matematika. Fundament. Napravleniya*, 2023, vol. 69, no. 1, pp. 166–184 (in Russian). doi: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-166-184
15. Arendt W., Batty C.J.K., Hieber M., Neubrander F. *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems.* Basel, Springer Publ., 2011, 539 p. doi: 10.1007/978-3-0348-0087-7
16. Pazy A. *Semigroups and linear operators and applications to partial differential equations.* NY, Springer Publ., 1983, 279 p. doi: 10.1007/978-1-4612-5561-1
17. Bajlekova E.G. Fractional evolution equations in Banach spaces. *PhD thesis*, Eindhoven, Eindhoven University of Technology, Netherlands, 2001, 107 p. doi: 10.6100/IR549476
18. Fedorov V.E., Filin N.V. On strongly continuous resolving families of operators for fractional distributed order equations. *Fractal and Fractional*, 2021, vol. 5, no. 1, art. no. 20, 14 p. doi: 10.3390/fractalfract5010020
19. Sitnik S.M., Fedorov V.E., Filin N.V., Polunin V.A. On the solvability of equations with a distributed fractional derivative given by the Stieltjes integral. *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 16, art. no. 2979, 20 p. doi: 10.3390/math10162979
20. Fedorov V.E., Plekhanova M.V., Izhberdeeva E.M. Analytic resolving families for equations with the Dzhrbashyan–Nersesyan fractional derivative. *Fractal and Fractional*, 2022, vol. 6, no. 10, art. no. 541, 16 p. doi: 10.3390/fractalfract6100541
21. Boyko K.V. Linear and quasilinear equations with several derivatives Gerasimov–Caputo. *Chelyab. Fiz.-Mat. Zhurn.*, 2024, vol. 9, iss. 1, pp. 5–22 (in Russian). doi: 10.47475/2500-0101-2024-9-1-5-22
22. Kato T. *Perturbation theory for linear operators.* Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1966, 623 p. doi: 10.1007/978-3-642-66282-9. Translated to Russian under the title *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov*, Moscow, Mir Publ., 1972, 740 p.
23. Prabhakar T.R. A singular integral equation with a generalized Mittag–Leffler function in the kernel. *Yokohama Math. J.*, 1971, vol. 19, pp. 7–15.
24. Triebel H. *Interpolation theory. Function spaces. Differential operators.* Amsterdam: North-Holland Publ. co., 1978, 528 p. Translated to Russian under the title *Teoriya interpolyatsii. Funktsional'nyye prostranstva. Differentsial'nyye operatory*, Moscow, Mir Publ., 1980, 664 p. doi: 10.1002/zamm.19790591227

Received March 11, 2024
Revised March 14, 2024
Accepted March 18, 2024

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 24-21-20015, https://rscf.ru/project/24-21-20015/) and by the Government of the Chelyabinsk region.

Vladimir Evgenyevich Fedorov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: kar@csu.ru .

Aleksandra Danilovna Godova, doctoral student, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: sasha.godova97@mail.ru .

Cite this article as: V. E. Fedorov, A. D. Godova. Integro-differential equations of Gerasimov type with sectorial operators. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 243–258 .