ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 2 2024

УДК 517.977

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО СТИМУЛИРОВАНИЯ СПРОСА

А. С. Асеев, С. П. Самсонов

Изучается задача оптимального стимулирования спроса, основанная на управляемой версии модели экономических циклов Калдора. При помощи метода аппроксимаций доказан вариант принципа максимума Понтрягина в нормальной форме, содержащий дополнительное поточечное условие на сопряженную переменную. Полученные результаты развивают и усиливают предыдущие результаты в этом направлении.

Ключевые слова: оптимальное управление, модель экономических циклов Калдора, принцип максимума Понтрягина.

A. S. Aseev, S. P. Samsonov. On the problem of optimal stimulation of demand.

We study the problem of optimal stimulation of demand based on a controlled version of Kaldor's business cycle model. Using the approximation method, we prove a version of Pontryagin's maximum principle in the normal form, containing an additional pointwise condition on the adjoint variable. The results obtained develop and strengthen the previous results in this direction.

Keywords: optimal control, Kaldor's business cycle model, Pontryagin's maximum principle.

MSC: 49K15

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-2-23-38

Введение

Начиная с классической работы Рамсея [1] одним из важнейших направлений в математической экономике является исследование моделей оптимального экономического роста. Эти модели обычно формулируются в виде задач оптимального управления с бесконечным горизонтом (на бесконечном интервале времени), что существенно затрудняет их исследование по сравнению со стандартными задачами на конечных интервалах. Данной тематике посвящена обширная литература (см. [2–4]), при этом, как правило, рассматриваются задачи оптимального управления основными производственными фондами (капиталом) и запасами ресурсов.

Настоящая работа продолжает начатое в [5] изучение модели оптимального экономического роста, в которой управление осуществляется посредством стимулирования спроса. Данная модель построена на основе известной модели экономических циклов Калдора [6]. В качестве управления в ней рассматривается доля сбережений, перераспределяемая в каждый момент времени в потребление в результате проводимой центральным планирующим органом политики стимулирования спроса. Критерий качества процесса управления задается несобственным интегралом с дисконтированием от функции мгновенной полезности, характеризующей темпы роста национального дохода с учетом расходов на стимулирование спроса.

Ранее управляемая версия модели Калдора, в которой в качестве управления также выступала доля сбережений, перераспределяемая в потребление, рассматривалась в работе [7], где, в частности, показано, что в некоторых ситуациях стимулирование спроса ($\equiv$ потребления) приводит к качественному улучшению долговременной динамики системы. Однако в работе [7] рассмотрение было сфокусировано на вопросах оптимизации ее стационарных режимов.

Целью настоящей работы является развитие и усиление результатов, полученных в [5]. Усилен результат об аппроксимации исходной задачи с бесконечным горизонтом последовательностью стандартных задач на конечных интервалах (см. [5], лемма 2.1). Дано развернутое доказательство ключевой леммы о равномерной отделимости допустимых траекторий от нуля — леммы 1.2 из [5]. При помощи развитого метода получен вариант принципа максимума Понтрягина для рассматриваемой задачи в нормальной форме с сопряженной переменной, удовлетворяющей дополнительному поточечному условию.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления (см. [5]):

$$J(Y(\cdot),u(\cdot)) = \int_0^\infty e^{-\rho t}\Big[\ln Y(t) - \frac{\omega\gamma^2}{2}\,(u(t)Y(t))^2\Big]\,dt \to \max, \tag{1.1}$$

$$\dot Y(t) = \alpha\,[I(Y(t),K(t)) - (1-u(t))S(Y(t))]\,, \tag{1.2}$$

$$\dot K(t) = I(Y(t),K(t)) - \delta K(t), \tag{1.3}$$

$$Y(0) = Y_0, \quad K(0) = K_0, \tag{1.4}$$

$$u(t) \in U = [0,1]. \tag{1.5}$$

Здесь $Y(t)$, $K(t)$ — величины национального дохода и капитала в момент времени $t \geq 0$, $\alpha > 0$ — поправочный коэффициент, характеризующий скорость реакции системы, $\delta > 0$ — норма амортизации основных фондов. Параметр дисконтирования $\rho > 0$ характеризует временное предпочтение, а параметр $\omega > 0$ характеризует стоимость стимулирования спроса. Начальные состояния $Y_0 > 0$ и $K_0 > 0$ считаются фиксированными.

Функции инвестиций $I(Y,K)$ и сбережений $S(Y)$ имеют вид

$$I(Y,K) = \begin{cases} I(Y) - \beta K & \text{при } \ K \leq \dfrac{I(Y)}{\beta}, \\ 0 & \text{при } \ K > \dfrac{I(Y)}{\beta}, \end{cases} \qquad S(Y) = \gamma Y, \tag{1.6}$$

где $\beta > 0$, $0 < \gamma < 1$, а функция $I\colon [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^1$ логистическая. Параметр γ характеризует эндогенную величину сбережений $S(Y(t)) = \gamma Y(t)$ в момент $t \geq 0$.

Функция мгновенной полезности в задаче (1.1)–(1.5) имеет вид (см. (1.1))

$$g(Y,u) := \ln Y - \varphi(Y,u) = \ln Y - \frac{\omega\gamma^2}{2}(uY)^2. \tag{1.7}$$

Здесь логарифмическая часть функции $g(\cdot,\cdot)$ является частным случаем используемой в экономике (см. [2], Ch. 2) изоэластичной функции мгновенной полезности $c_\theta(\cdot)$ вида

$$c_\theta(Y) = \begin{cases} \dfrac{Y^{1-\theta}-1}{1-\theta} & \text{при } \ \theta \geq 0, \quad \theta \neq 1, \\ \ln Y & \text{при } \ \theta = 1, \end{cases} \qquad Y > 0,$$

в случае $\theta = 1$.

Заметим, что с точки зрения максимизации функционала (1.1) использование в качестве функции мгновенной полезности логарифма национального дохода (функции $t \mapsto \ln Y(t)$) эквивалентно использованию его темпов роста (т. е. функции $t \mapsto \dot Y(t)/Y(t)$) (см. [8], пример 1.3).

В экономической литературе расходы на осуществление инвестиций часто моделируются при помощи квадратичной функции (см. [9], Part 1). Поэтому квадратичная часть

$$\varphi(Y,u) = \frac{\omega\gamma^2}{2}(uY)^2$$

функции мгновенной полезности (1.7) может интерпретироваться как расходы, связанные со стимулированием спроса на величину $\gamma u Y$ с коэффициентом пропорциональности $\omega/2 > 0$.

В качестве фазовой переменной в задаче (1.1)–(1.5) будем рассматривать вектор $x = (x^1, x^2) = (Y, K)$. В качестве допустимых управлений системы (1.2), (1.3) будем рассматривать все измеримые по Лебегу функции $u\colon [0,\infty) \to [0,1]$. Если заданы начальное состояние $x_0 = (Y_0, K_0) \in G = \{(Y,K))\colon Y > 0, K_0 > 0\}$ и допустимое управление $u(\cdot)$, то соответствующая допустимая траектория $x(\cdot) = (Y(\cdot), K(\cdot))$ есть определенное на некотором интервале $[0,\tau)$, $\tau > 0$, в G локально абсолютно непрерывное решение системы (1.2), (1.3) с начальным состоянием $x(0) = (Y(0), K(0)) = x_0$. Для любого начального состояния $x_0 \in G$ и произвольного допустимого управления $u(\cdot)$ соответствующая допустимая траектория $x(\cdot) = (Y(\cdot), K(\cdot))$ определена в G на всем бесконечном интервале $[0,\infty)$, и справедлива оценка ([5], лемма 1.1)

$$Y_0 e^{-\alpha\gamma t} \le Y(t) < Y_0 + \alpha\gamma I_\infty t, \quad t \ge 0. \tag{1.8}$$

Нетрудно видеть, что в силу оценки (1.8) существуют такие постоянные $A \ge 0$ и $B \ge 0$, что для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$, $x(\cdot) = (Y(\cdot), K(\cdot))$, при всех $t \ge 0$ имеем

$$e^{-\rho t}\left| \ln Y(t) - \frac{\omega\gamma^2}{2}\,(u(t)Y(t))^2 \right| \le \delta(t) = e^{-\rho t}\left(A + Bt^2\right). \tag{1.9}$$

Отсюда получаем, что для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ несобственный интеграл в (1.1) сходится. Оптимальность допустимой пары $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$, $x_*(\cdot) = (Y_*(\cdot), K_*(\cdot))$, будем понимать в сильном смысле, т.е. в смысле максимизации функционала (1.1). В силу теоремы 2.1 из [8] в задаче (1.1)–(1.5) существует оптимальное допустимое управление.

2. Построение последовательности аппроксимирующих задач

Для краткости будем записывать управляемую систему (1.2), (1.3) в следующем виде:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) = f_0(x) + f_1(x)u, \tag{2.1}$$

где

$$f_0(x) = \left(\alpha(I(x^1,x^2) - \gamma x^1), I(x^1,x^2) - \delta x^2\right), \quad f_1(x) = \left(\alpha\gamma x^1, 0\right).$$

Здесь $x = (x^1, x^2) = (Y, K)$, $x_0 = (Y_0, K_0) \in G$ и $u \in [0,1]$.

Для функции мгновенной полезности будем использовать обозначение (см. (1.7))

$$g(x,u) = \ln x^1 - \frac{\omega\gamma^2}{2}\left(ux^1\right)^2, \quad x = (x^1, x^2) = (Y, K) \in G, \quad u \in [0,1]. \tag{2.2}$$

Тогда задача (1.1)–(1.5) принимает вид

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int\limits_0^\infty e^{-\rho t} g(x(t), u(t))\,dt \to \max, \tag{2.3}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \tag{2.4}$$

$$x(0) = x_0, \tag{2.5}$$

$$u(t) \in U = [0,1]. \tag{2.6}$$

В рассматриваемом здесь случае функция $f(\cdot,\cdot)$, вообще говоря, не является непрерывно дифференцируемой по фазовой переменной x, она удовлетворяют только условию Липшица. Заметим также, что функция $f(\cdot,\cdot)$ аффинная по управлению u (см. (2.1)), а функция $g(\cdot,\cdot)$ содержит логарифмическую особенность по переменной x^1 вблизи нуля (см. (2.2)).

Задачи оптимального управления с бесконечным горизонтом изучались многими авторами в случае, когда обе функции $f(\cdot,\cdot)$ и $g(\cdot,\cdot)$ непрерывно дифференцируемы по фазовой переменной x (см. [4; 8; 10–14]). В случае, когда функции $f(\cdot,\cdot)$ и $g(\cdot,\cdot)$ липшицевы, эта задача рассматривалась в работах [15; 16]. Однако в силу логарифмической особенности функции мгновенной полезности задача (2.3)–(2.6) не укладывается в рамки сделанных в этих работах предположений. Далее для получения необходимых условий оптимальности для задачи (2.3)–(2.6) будет использоваться метод аппроксимаций (см. [8; 11]).

Опишем используемую аппроксимационную схему. Данная схема является модификацией аппроксимационной схемы из ([8], § 7) применительно к случаю задачи (2.3)–(2.6).

Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$, $x_*(\cdot) = (Y_*(\cdot), K_*(\cdot))$ — некоторая оптимальная пара в задаче (2.3)–(2.6). Выберем такую монотонно возрастающую последовательность $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ положительных моментов времени T_i, что $\lim\limits_{i\to\infty} T_i = \infty$ и (см. (1.9))

$$\Delta(T_i) = \int\limits_{T_i}^{\infty} \delta(t)\, dt \le \frac{1}{i2^i}. \tag{2.7}$$

При $i = 1, 2, \dots$ рассмотрим следующую задачу на конечном интервале $[0, T_i]$:

$$\widetilde{J}_i(x(\cdot), u(\cdot)) = \int\limits_0^{T_i} e^{-\rho t}\Big[g(x(t), u(t)) - \frac{1}{i}\|u(t) - u_*(t)\|^2\Big]\, dt \to \max, \tag{2.8}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \tag{2.9}$$

$$x(0) = x_0 = (Y_0, K_0), \tag{2.10}$$

$$u(t) \in [0, 1]. \tag{2.11}$$

Здесь все данные в задаче (2.8)–(2.11) те же самые, что и в задаче (2.3)–(2.6). Основное ее отличие от задачи (2.3)–(2.6) состоит в том, что она рассматривается на конечном интервале времени $[0, T_i]$, а интегральный функционал содержит штрафующий член $-\dfrac{1}{i}\|u(t) - u_*(t)\|^2$.

Для любого $i = 1, 2, \dots$ в задаче (2.8)–(2.11) существует оптимальная допустимая пара $(x_i(\cdot), u_i(\cdot))$ (см. [17]). Продолжим ее на весь бесконечный интервал $[0, \infty)$ произвольным допустимым для задачи (2.3)–(2.6) способом.

Следующий результат усиливает лемму 2.1 из [5]. Его доказательство с небольшими изменениями проводится аналогично доказательству леммы 7.1 из работы [8].

Лемма 1. *Пусть $u_*(\cdot)$ — оптимальное допустимое управление в задаче* (2.3)–(2.6), *а* (2.8)–(2.11), *$i = 1, \dots,$ — соответствующая $u_*(\cdot)$ последовательность аппроксимирующих задач. Наконец, пусть $u_i(\cdot)$ — оптимальное управление в задаче* (2.8)–(2.11). *Тогда при п.в. $t \ge 0$ имеем*

$$u_i(t) \to u_*(t) \quad \textit{при} \quad i \to \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольное $T > 0$. Пусть i_1 — такое натуральное число, что $T_{i_1} \ge T$. Тогда для каждого $i \ge i_1$ имеем

$$\widetilde{J}_i(x_i(\cdot), u_i(\cdot)) = \int\limits_0^{T_i} e^{-\rho t}\Big[g(x_i(t), u_i(t)) - \frac{1}{i}\|u_i(t) - u_*(t)\|^2\Big]\, dt$$

$$\le \int\limits_0^{T_i} e^{-\rho t} g(x_i(t), u_i(t))\, dt - \frac{e^{-\rho T}}{i}\int\limits_0^{T} \|u_i(t) - u_*(t)\|^2\, dt,$$

где $x_i(\cdot) = (Y_i(\cdot), K_i(\cdot))$ — допустимая траектория управляемой системы (2.9), соответствующая управлению $u_i(\cdot)$.

Пусть $x_*(\cdot) = (Y_*(\cdot), K_*(\cdot))$ — допустимая траектория, соответствующая управлению $u_*(\cdot)$. В силу оптимальности управления $u_i(\cdot)$ в задаче (2.8)–(2.11) и оптимальности управления $u_*(\cdot)$ в задаче (2.3)–(2.6), условия (2.7), а также допустимости пары $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ в задаче (2.8)–(2.11) и допустимости пары $(x_i(\cdot), u_i(\cdot))$ в задаче (2.3)–(2.6) для всех $i \geq i_1$ получаем

$$\frac{e^{-\rho T}}{i} \int_0^T \|u_i(t) - u_*(t)\|^2\, dt \leq \int_0^{T_i} e^{-\rho t} g(x_i(t), u_i(t))\, dt - \widetilde{J}_i(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$$

$$\leq \int_0^{T_i} e^{-\rho t} g(x_i(t), u_i(t))\, dt - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) + \frac{1}{i2^i}$$

$$\leq J(x_i(\cdot), u_i(\cdot)) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) + \frac{2}{i2^i} \leq \frac{1}{i2^{i-1}}.$$

Следовательно,

$$\int_0^T \|u_i(t) - u_*(t)\|^2\, dt \leq \frac{e^{\rho T}}{2^{i-1}}. \tag{2.12}$$

Для $k = 1, 2, \ldots$ положим

$$\chi_k(t) = \sum_{i=1}^{k} \|u_i(t) - u_*(t)\|^2, \quad t \in [0, \infty).$$

Тогда последовательность неотрицательных функций $\{\chi_k(\cdot)\}$ монотонно не убывает, все функции $\chi_k(\cdot)$ интегрируемы на $[0, T]$ и ввиду (2.12)

$$\int_0^T \chi_k(t)\, dt \leq \frac{e^{\rho T}}{2}\Big(1 - \frac{1}{2^k}\Big) < \frac{e^{\rho T}}{2}.$$

Следовательно, в силу теоремы Леви ([18], гл. V, § 5, теорема 7) при п.в. $t \in [0, T]$ существует конечный предел $\chi(t) = \lim\limits_{k\to\infty} \chi_k(t)$, т. е. ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|u_i(t) - u_*(t)\|^2 = \lim_{k\to\infty} \chi_k(t) = \chi(t)$$

сходится. Значит, при п.в. $t \geq [0, T]$ имеем $\lim\limits_{i\to\infty} \|u_i(t) - u_*(t)\| = 0$. В силу произвольности $T > 0$ отсюда вытекает, что $\lim\limits_{i\to\infty} u_i(t) = u_*(t)$ при п.в. $t \geq 0$.

Лемма доказана.

Вследствие аффинности системы (2.9) по управлению и леммы 1 для любого $T > 0$ имеем $x_i(\cdot) = (Y_i(\cdot), K_i(\cdot)) \to x_*(\cdot) = (Y_*(\cdot), K_*(\cdot))$ равномерно на интервале $[0, T]$ при $i \to \infty$.

3. Вспомогательные результаты

Пусть $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — заданная вектор-функция, т. е. $F(\cdot) = (f^1(\cdot), \ldots, f^m(\cdot))$, где $f^i(\cdot)$ — скалярные функции, $x \in \mathbb{R}^n$ и функция $F(\cdot)$ липшицева в окрестности точки x. Тогда в силу теоремы Радемахера функция $F(\cdot)$ дифференцируема почти всюду в окрестности точки x.

Обозначим через Ω_F множество (нулевой меры), где функция $F(\cdot)$ недифференцируема. Тогда обобщенным якобианом функции $F(\cdot)$ в точке x называется множество (см. [19])

$$\partial F(x) = \operatorname{conv}\{\lim_{x_k\to x} F_x(x_k)\colon x_k \to x,\ x_k \notin \Omega_F\}. \tag{3.1}$$

Здесь $F_x(x_k)$ обозначает матрицу с компонентами $f^i_{x^j}(x_k)$, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$, где $f^i_{x^j}(x_k)$ — частная производная функции $f^i(\cdot)$ по переменной x^j в точке x_k.

В рассматриваемом здесь случае липшицевой функции

$$f(x,u) = \left(I(x^1,x^2) - \gamma(1-u)x^1, I(x^1,x^2) - \delta x^2\right), \quad x = (x^1,x^2) = (Y,K),$$

для любого $u \in [0,1]$ частный обобщенный якобиан функции $f(\cdot,\cdot)$ по переменной x может быть вычислен в каждой точке $(x,u) \in G\times[0,1]$ в силу определения функции $I(\cdot,\cdot)$ (см. (1.6)).

Определим кривую Γ равенством

$$\Gamma = \left\{(x^1,x^2)\in\mathbb{R}^2\colon x^2 = \frac{I(x^1)}{\beta},\ x^1 \ge 0\right\}. \tag{3.2}$$

Следующий результат несложно вытекает из равенства (3.1).

Лемма 2. *Для любой не принадлежащей кривой* Γ *(см.* (3.2)*) точки* $(x^1,x^2)\in G$ *и любого* $u\in[0,1]$ *имеем*

$$\partial_x f(x^1,x^2,u) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \alpha\left(I'(x^1) - \gamma(1-u)\right) & -\alpha\beta \\ I'(x^1) & -(\beta+\delta)\end{pmatrix}, & x^2 < \dfrac{I(x^1)}{\beta}, \\ \begin{pmatrix} -\alpha\gamma(1-u) & 0 \\ 0 & -\delta\end{pmatrix}, & x^2 > \dfrac{I(x^1)}{\beta}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Для любой точки $(x^1,x^2)\in G$*, лежащей на кривой* Γ*, и любого* $u\in[0,1]$ *имеем*

$$\begin{aligned} \partial_x f(x^1,x^2,u) &= \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix} \alpha\left(I'(x^1) - \gamma(1-u)\right) & -\alpha\beta \\ I'(x^1) & -(\beta+\delta)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\alpha\gamma(1-u) & 0 \\ 0 & -\delta\end{pmatrix}\right\} \\ &= \bigcup_{\xi\in[0,1]} \begin{pmatrix} \xi\alpha I'(x^1) - \alpha\gamma(1-u) & -\xi\alpha\beta \\ \xi I'(x^1) & -\xi\beta - \delta\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Рассмотрим поведение допустимых траекторий системы (2.4) вблизи оси $x^1 = 0$.

Определим множество

$$\operatorname{hyp}\Gamma = \left\{(Y,K)\in\mathbb{R}^2\colon\ K \le \frac{I(Y)}{\beta},\ Y \ge 0\right\} \tag{3.5}$$

— подграфик кривой Γ и множество

$$\operatorname{epi}\Gamma = \left\{(Y,K)\in\mathbb{R}^2\colon\ K \ge \frac{I(Y)}{\beta},\ Y \ge 0\right\}$$

— надграфик этой кривой Γ.

Лемма 3. *Для любого начального состояния* $x_0 = (Y_0,K_0)\in\operatorname{hyp}\Gamma$*,* $Y_0 > 0$*,* $K_0 > 0$*, существуют такие числа* $Y_{\min} > 0$ *и* $Y_{\max} > 0$*,* $Y_{\min} \le Y_0 \le Y_{\max}$*, что произвольная допустимая траектория* $x(\cdot) = (Y(\cdot),K(\cdot))$ *с начальным условием* $x(0) = x_0$ *может пересечь кривую* Γ *(см.* (3.2)*) из множества* $\operatorname{hyp}\Gamma$ *в множество* $\operatorname{epi}\Gamma$ *в некоторый точке* $(\widetilde{Y},\widetilde{K})\in\Gamma$ *только в случае, когда выполняются неравенства* $Y_{\min}\le\widetilde{Y}\le Y_{\max}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. С точностью до положительного множителя нормаль $n(Y,K)$ к подграфику кривой Γ (см. (3.5)) в точке $(Y,K)\in\Gamma$ имеет вид $n(Y,K)=\Big(-\dfrac{I'(Y)}{\beta},1\Big)$. Отсюда в силу управляемой системы (1.2), (1.3) получаем, что допустимая траектория $(Y(\cdot),K(\cdot))$ может пересечь кривую Γ из множества $\operatorname{hyp}\Gamma$ в некоторой точке $(\widetilde{Y},\widetilde{K})=\Big(\widetilde{Y},\dfrac{I(\widetilde{Y})}{\beta}\Big)\in\Gamma$, $Y_0<\widetilde{Y}$, с управлением $\tilde{u}\in[0,1]$ только в том случае, когда

$$\Big\langle\Big(-\frac{I'(\widetilde{Y})}{\beta},1\Big),\Big(-\alpha\gamma(1-\tilde{u})\widetilde{Y},-\frac{\delta I(\widetilde{Y})}{\beta}\Big)\Big\rangle\geq 0$$

или

$$\frac{I'(\widetilde{Y})}{I(\widetilde{Y})}\geq\frac{\delta}{\alpha\gamma(1-\tilde{u})}\frac{1}{\widetilde{Y}}\geq\frac{\delta}{\alpha\gamma}\frac{1}{\widetilde{Y}}. \tag{3.6}$$

Интегрируя последнее неравенство на интервале $[Y_0,\widetilde{Y}]$, получаем

$$\ln I(\widetilde{Y})-\ln I(Y_0)\geq\ln(\widetilde{Y})^{\frac{\delta}{\alpha\gamma}}-\ln(Y_0)^{\frac{\delta}{\alpha\gamma}}$$

или

$$\frac{I(\widetilde{Y})}{\widetilde{Y}^{\frac{\delta}{\alpha\gamma}}}\geq\frac{I(Y_0)}{Y_0^{\frac{\delta}{\alpha\gamma}}}. \tag{3.7}$$

Поскольку

$$\lim_{Y\to\infty}\frac{I(Y)}{Y^{\frac{\delta}{\alpha\gamma}}}=0,$$

то существует такое $Y_{\max}>Y_0$, что при всех $\widetilde{Y}\geq Y_{\max}$ неравенство (3.7) нарушается. Поэтому ни одна допустимая траектория $x(\cdot)=(Y(\cdot),K(\cdot))$ не может пересечь кривую Γ из множества $\operatorname{hyp}\Gamma$ правее точки $Y_{\max}$.

Далее, в силу управляемой системы (1.2), (1.3), интегрируя неравенство (3.6) на интервале $[\widetilde{Y},Y_0]$, $\widetilde{Y}<Y_0$, получаем, что допустимая траектория $x(\cdot)=(Y(\cdot),K(\cdot))$ может пересечь кривую Γ из множества $\operatorname{hyp}\Gamma$ в некоторой точке $(\widetilde{Y},\widetilde{K})=\Big(\widetilde{Y},\dfrac{I(\widetilde{Y})}{\beta}\Big)\in\Gamma$, $\widetilde{Y}<Y_0$, с управлением $\tilde{u}\in[0,1]$ только в том случае, когда $\ln I(\widetilde{Y})-\ln I(Y_0)\leq\ln(\widetilde{Y})^{\frac{\delta}{\alpha\gamma}}-\ln(Y_0)^{\frac{\delta}{\alpha\gamma}}$ или

$$\frac{I(\widetilde{Y})}{\widetilde{Y}^{\frac{\delta}{\alpha\gamma}}}\leq\frac{I(Y_0)}{Y_0^{\frac{\delta}{\alpha\gamma}}}. \tag{3.8}$$

Поскольку

$$\lim_{Y\to 0}\frac{I(Y)}{Y^{\dfrac{\delta}{\alpha\gamma}}}=\infty,$$

то существует такое $0<Y_{\min}<Y_0$, что при всех $0<\widetilde{Y}\leq Y_{\min}$ неравенство (3.8) нарушается. Поэтому ни одна допустимая траектория $(Y(\cdot),K(\cdot))$ не может пересечь кривую Γ из множества $\operatorname{hyp}\Gamma$ левее точки $Y_{\min}$.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Для любого начального состояния $x_0=(Y_0,K_0)\in G$ существует такое число $\widetilde{Y}_{\min}>0$, что для любой допустимой траектории $x(\cdot)=(Y(\cdot),K(\cdot))$ с начальным условием $x(0)=x_0$ и произвольного $t\geq 0$ выполняется неравенство $Y(t)\geq\widetilde{Y}_{\min}$.*

Доказательство. Покажем, что существует такое $Y'_{\min} > 0$ (зависящее от начального состояния $x_0 = (Y_0, K_0)$), что ни одна допустимая траектория $x(\cdot) = (Y(\cdot), K(\cdot))$ с начальным состоянием $x(0) = x_0$ не может пересечь кривую Γ из множества $\operatorname{epi}\Gamma$ в множество $\operatorname{hyp}\Gamma$ левее точки $Y'_{\min}$.

Действительно, предположим, что в некоторый момент времени $\tau_0 \geq 0$ имеем $(Y(\tau_0), K(\tau_0)) \in \operatorname{int}\operatorname{epi}\Gamma$. Тогда возможны следующие два случая: 1) $x_0 \in \operatorname{epi}\Gamma$ и для всех $t \in [0, \tau_0]$, $\tau_0 \geq 0$, траектория $x(\cdot)$ лежит в множестве $\operatorname{epi}\Gamma$; 2) $x_0 \in \operatorname{hyp}\Gamma$ и существует такое $\tau'_0 > 0$, что в момент τ'_0 траектория $x(\cdot)$ пересекает Γ и $x(t) \in \operatorname{epi}\Gamma$ для всех $t \in [\tau'_0, \tau_0]$, $\tau_0 > \tau'_0$. Поэтому в силу леммы 3, не ограничивая общности, можно считать, что существуют такие числа $Y_{\min}$ и $Y_{\max}$, что $Y_{\min} \leq Y(\tau_0) \leq Y_{\max}$.

В множестве $\operatorname{epi}\Gamma$ система (1.2), (1.3) принимает вид

$$\dot{Y}(t) = -\alpha\gamma Y(t), \tag{3.9}$$

$$\dot{K}(t) = -\delta K(t). \tag{3.10}$$

Поэтому в силу теоремы о единственности решения задачи Коши траектории системы (1.2), (1.3) не пересекаются и их координаты убывают вплоть до попадания их траектории на кривую Γ.

Пусть $\tilde{x}(\cdot) = (\widetilde{Y}(\cdot), \widetilde{K}(\cdot))$ — траектория системы (3.9), (3.10) с начальным условием $\tilde{x}(\tau_0) = (\widetilde{Y}(\tau_0), \widetilde{K}(\tau_0)) = (Y_{\min}, I_\infty/\beta)$. В силу системы (3.9), (3.10) в некоторый момент времени $\tau_1 > \tau_0$ она попадет на кривую Γ.

Так как $K(\tau_0) < I_\infty/\beta$, траектория $x(\cdot)$ с начальным условием $x(\tau_0) = (Y(\tau_0), K(\tau_0))$ для всех значений $t \geq \tau_0$, при которых $x(t) \in \operatorname{epi}\Gamma$, вплоть до ее попадания на кривую Γ будет лежать в множестве $\operatorname{epi}\Gamma$ ниже траектории $\tilde{x}(\cdot)$. Следовательно, она пересечет кривую Γ правее точки $\tilde{x}(\tau_1) = (\widetilde{Y}(\tau_1), \widetilde{K}(\tau_1))$.

При движении в множестве $\operatorname{epi}\Gamma$ из точки $\tilde{x}(\tau_0)$ вплоть до ее попадания на кривую Γ в момент $\tau_1 \geq \tau_0$ для траектории $\tilde{x}(\cdot)$ выполняются равенства

$$\widetilde{Y}(t) = e^{-\alpha\gamma \int\limits_{\tau_0}^{t} (1-u(s))\, ds} Y_{\min}, \quad \widetilde{K}(t) = e^{-\delta(t-\tau_0)} \frac{I_\infty}{\beta}, \quad t \in [\tau_0, \tau_1].$$

Поскольку $(\widetilde{Y}(\tau_1), \widetilde{K}(\tau_1)) \in \Gamma$, то $\widetilde{K}(\tau_1) = I(\widetilde{Y}(\tau_1))/\beta$. Следовательно,

$$e^{-\delta(\tau_1-\tau_0)} \frac{I_\infty}{\beta} = \frac{I(\widetilde{Y}(\tau_1))}{\beta} \geq \frac{I_0}{\beta}.$$

Отсюда получаем неравенство $\tau_1 - \tau_0 \leq \dfrac{\ln I_\infty - \ln I_0}{\delta}$. Откуда в силу (3.9) имеем

$$\widetilde{Y}(\tau_1) \geq e^{-\alpha\gamma(\tau_1-\tau_0)} \widetilde{Y}(\tau_0) \geq Y'_{\min} := e^{\frac{-\alpha\gamma}{\delta} \ln \frac{I_\infty}{I_0}} \widetilde{Y}(\tau_0) = e^{\frac{-\alpha\gamma}{\delta} \ln \frac{I_\infty}{I_0}} Y_{\min}.$$

Таким образом, ни одна допустимая траектория, исходящая из x_0, не может пересечь кривую Γ из множества $\operatorname{epi}\Gamma$ левее точки $Y'_{\min}$.

Рассмотрим поведение траекторий системы (1.2), (1.3) в множестве $\operatorname{hyp}\Gamma$ при $Y \leq Y'_{\min}$.

В множестве $\operatorname{hyp}\Gamma$ система (1.2), (1.3) принимает вид

$$\dot{Y}(t) = \alpha\left(I(Y(t)) - \beta K(t) - \gamma(1-u(t))Y(t)\right), \tag{3.11}$$

$$\dot{K}(t) = I(Y(t)) - (\beta+\delta)K(t).$$

Пусть $Y_\gamma > 0$ — наименьший корень уравнения $I(Y) - \gamma Y = 0$. Определим кривую Γ_1 равенством

$$\Gamma_1 = \Big\{(Y, K) \in \mathbb{R}^2_+ \colon\ K = \frac{I(Y)}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta} Y,\ Y \in [0, Y_\gamma]\Big\}.$$

Нетрудно видеть, что в силу (3.11) в множестве $\operatorname{hyp}\Gamma$ ниже кривой Γ_1 координата $Y(\cdot)$ любой траектории $x(\cdot)$ системы (1.2), (1.3) не убывает.

Далее, в силу определения системы (1.2), (1.3) для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдутся такие точка $A_0 \in \Gamma_1$, лежащая ниже кривой Γ, и точка $A_1 \in \Gamma$, причем A_1 лежит между $(0, I_0/\beta)$ и $(Y'_{\min}, I(Y'_{\min}/\beta))$, что точки A_0 и A_1 отстоят от точки $(0, I_0/\beta)$ не более чем на ε и отрезок $[A_0, A_1]$ является трансверсалью системы (1.2), (1.3) при любом выборе $u(t) \in [0,1]$. Действительно, положим $h = (1,-1) \in \mathbb{R}^2$ и для произвольного достаточно малого $\varepsilon > 0$ определим отрезок $[A_0, A_1]$ как произвольный ортогональный вектору h отрезок с концами $A_0 \in \Gamma_1$ и $A_1 \in \Gamma$, причем такими, что A_0 находится левее точки A_1, а A_1 — левее прямой $\{(Y,K)\colon Y = Y_{\min}\}$ и отстоит от точки $(0, I_0/\beta)$ не более чем на ε. В силу непрерывности функции $I(\cdot)$ при $Y \in [0, \widehat{Y}]$ и равенства $I(Y_\gamma) - \gamma Y_\gamma = 0$ для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ такой отрезок существует. Далее, в ε-окрестности точки $(0, I_0/\beta)$ в множестве $\operatorname{hyp}\Gamma$ для векторного поля системы (1.2), (1.3) при произвольном выборе $u(t) \in [0,1]$ имеем

$$\langle f(Y,K), h\rangle = \alpha\,[I(Y) - \beta K - \gamma(1-u(t))Y] - (I(Y) - \beta K) + \delta K$$

$$\geq \alpha\,[I(Y) - \beta K - \gamma Y] - (I(Y) - \beta K) + \delta K \to \frac{\delta}{\beta} I_0 > 0 \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0.$$

Таким образом, при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ отрезок $[A_0, A_1]$ является трансверсалью системы (1.2), (1.3) при любом выборе $u(t) \in [0,1]$.

Отсюда получаем, что ни одна допустимая траектория системы (1.2), (1.3) не может пересечь отрезок $[A_0, A_1]$ справа из множества $\operatorname{hyp}\Gamma$. Поскольку ни одна допустимая траектория $x(\cdot)$ не может также пересечь кривую Γ_1 справа из множества $\operatorname{hyp}\Gamma$ и не может попасть в множество $\operatorname{hyp}\Gamma$ из множества $\operatorname{epi}\Gamma$ левее точки $(Y'_{\min}, I(Y'_{\min}/\beta))$, то отсюда заключаем, что ни одна траектория системы (1.2), (1.3) с начальным условием $x(0) = x_0$ ни при каком $t \geq 0$ не может иметь координату $Y(t)$ меньше, чем $\widetilde{Y}_{\min}$, где $\widetilde{Y}_{\min}$ есть Y-координата точки A_0.

Следовательно, для любой допустимой траектории $x(\cdot) = (Y(\cdot), K(\cdot))$ имеем

$$Y(t) \geq \widetilde{Y}_{\min}, \quad t \geq 0.$$

Лемма доказана.

Из леммы 4 следует, что при некотором $\kappa \geq 0$ для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$, $x(\cdot) = (Y(\cdot), K(\cdot))$ выполняется неравенство

$$\|g_x(x(t), u(t))\| \leq \kappa\left(1 + x^1(t)\right). \tag{3.12}$$

Действительно, в силу леммы 4 для любого $t \geq 0$ имеем

$$\|g_x(x(t), u(t))\| \leq \frac{1}{\widetilde{Y}_{\min}} + \omega\gamma^2 x^1(t),$$

откуда получаем оценку (3.12).

Лемма 5. *Существуют такие числа $C_1 \geq 0$ и $C_2 \geq 0$, что для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$, $x(\cdot) = (Y(\cdot), K(\cdot))$ и всех $t \geq 0$ выполняется неравенство*

$$x^1(t) \leq C_1 + C_2 t, \quad t \geq 0. \tag{3.13}$$

Кроме того, с постоянной

$$\mu = \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) I'(\widehat{Y}) + \frac{\alpha\beta}{2} \tag{3.14}$$

справедлива оценка

$$\|Z(t)\,[Z^*(s)]^{-1}\| \leq \sqrt{2} e^{\mu(s-t)} \quad \text{для любых} \quad 0 \leq t < s, \tag{3.15}$$

где $Z(\cdot)$ — нормированное в нулевой момент времени фундаментальное матричное решение дифференциального включения

$$\dot{z}(t) \in -\left[\partial_x f(x(t), u(t))\right]^* z(t). \tag{3.16}$$

Здесь при п.в. $t \geq 0$ частный обобщенный якобиан $\partial_x f(x(t), u(t))$ определяется равенствами (3.3) *и* (3.4).

Доказательство. Пусть $(x(\cdot), u(\cdot))$ — допустимая пара. Тогда в силу оценки (1.9), ограниченности функции $I(\cdot)$ и дифференциального уравнения (1.3) для пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ неравенство (3.13) выполняется с некоторыми постоянными $C_1 \geq 0$ и $C_2 \geq 0$.

Рассмотрим теперь дифференциальное включение (3.16). Определим многозначное отображение $F(\cdot)$ с выпуклыми компактными значениями равенством $F(t) = \partial_x f(x(t), u(t))$, $t \geq 0$. Тогда многозначное отображение $F(\cdot)$ измеримо по Лебегу (см. [19], гл. 3, § 3.1).

Пусть $y(\cdot)$ — некоторое решение дифференциального включения, сопряженного к (3.16):

$$\dot{y}(t) \in \partial_x f(x(t), u(t)) y(t)$$

при заданной допустимой паре $(x(\cdot), u(\cdot))$.

Тогда в силу леммы Филиппова [20] и леммы 2 существует такая измеримая по Лебегу функция $\xi(\cdot)$, $\xi\colon\ [0, \infty) \to [0, 1]$, что для п.в. $t \geq 0$ справедливо равенство

$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} \alpha\left[\xi(t) I'(x^1(t)) - \gamma(1 - u(t))\right] & -\xi(t)\alpha\beta \\ \xi(t) I'(x^1(t)) & -\xi(t)\beta - \delta \end{pmatrix} y(t). \tag{3.17}$$

При п.в. $t \geq 0$ определим матрицу системы (3.17) равенством

$$A(t) = \begin{pmatrix} \alpha\left[\xi(t) I'(x^1(t)) - \gamma(1 - u(t))\right] & -\xi(t)\alpha\beta \\ \xi(t) I'(x^1(t)) & -\xi(t)\beta - \delta \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Соответственно, если $z(\cdot)$ — некоторое решение дифференциального включения (3.16), то функция $z(\cdot)$ является решением линейной системы

$$\dot{z}(t) = -A^*(t) z(t)$$

с некоторой матрицей $A(\cdot)$ вида (3.18).

Покажем, что при п.в. $t \geq 0$ система (3.17) удовлетворяет в $\mathbb{R}^2$ одностороннему условию Липшица с постоянной μ (см. (3.14)), т. е.

$$\langle A(t)(y_1 - y_2), y_1 - y_2 \rangle \leq \mu \|y_1 - y_2\|^2, \quad y_i \in \mathbb{R}^2, \quad i = 1, 2. \tag{3.19}$$

Действительно,

$$\langle A(t)(y_1 - y_2), y_1 - y_2 \rangle = \alpha\left[\xi(t) I'(x^1(t)) - \gamma(1 - u(t))\right](y_1^1 - y_2^1)^2$$

$$- \xi(t)\alpha\beta(y_1^1 - y_2^1)(y_1^2 - y_2^2) + \xi(t) I'(x^1(t))(y_1^1 - y_2^1)(y_1^2 - y_2^2)$$

$$- (\xi(t)\beta + \delta)(y_1^2 - y_2^2)^2 \leq \left(\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) I'(x^1(t)) + \frac{\alpha\beta}{2}\right)\|y_1 - y_2\|^2 = \mu\|y_1 - y_2\|^2.$$

Таким образом, одностороннее условие Липшица (3.19) доказано.

Из условия (3.19) вытекает оценка (3.15).

Лемма доказана.

4. Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального стимулирования спроса

Для задачи вида (2.3)–(2.6) определим функцию Гамильтона — Понтрягина $\mathcal{H}\colon [0,\infty)\times G\times[0,1]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^1$ и гамильтониан $H\colon [0,\infty)\times G\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^1$ в нормальной форме (т.е. с $\psi^0=1$) стандартным образом:

$$\mathcal{H}(t,x,u,\psi)=\langle\psi,f(x,u)\rangle+e^{-\rho t}g(x,u),$$

$$H(t,x,\psi)=\max_{u\in[0,1]}\mathcal{H}(t,x,u,\psi).$$

Здесь $x\in G$, $u\in[0,1]$, $\psi=(\psi^1,\psi^2)\in\mathbb{R}^2$, $t\geq 0$.

Для задачи (2.8)–(2.11) будем использовать аналогичное обозначение с соответствующим индексом $i=1,2,\dots$, а именно

$$\mathcal{H}_i(t,x,u,\psi)=\langle\psi,f(t,x,u)\rangle+e^{-\rho t}\Big[g(x,u)-\frac{1}{i}\|u-u_*(t)\|^2\Big],\quad H_i(t,x,\psi)=\max_{u\in[0,1]}\mathcal{H}_i(t,x,u,\psi).$$

Доказательство следующего варианта принципа максимума Понтрягина для задачи (1.1)–(1.5) основано на лемме 5, оценках (3.12)–(3.15) и проводится по схеме доказательства теоремы 12.1 из [8] при помощи предельного перехода в соотношениях принципа максимума Понтрягина для липшицевых систем (см. теорему 5.2.1 из [19]) для задач (2.8)–(2.11) при $i\to\infty$. Заметим, что в общем случае, без дополнительных условий, принцип максимума Понтрягина для задач с бесконечным горизонтом необязательно выполняется в нормальной форме, а условия трансверсальности на бесконечности могут нарушаться (подробнее см. [8]).

Теорема 1. *Пусть выполняется условие доминирования дисконтирующего множителя $\rho>\mu$ и $(x_*(\cdot),u_*(\cdot))$, $x_*(\cdot)=(Y_*(\cdot),K_*(\cdot))$ — оптимальная допустимая пара в задаче* (1.1)–(1.5)*. Тогда существует такое нормированное в момент времени $t=0$ матричное решение $Z_*(\cdot)$ дифференциального включения*

$$\dot z(t)=-\left[\partial_x f(x_*(t),u_*(t))\right]^* z(t),$$

что интеграл

$$I_*(t)=\int\limits_t^\infty e^{-\rho s}\left[Z_*(s)\right]^{-1}\left(\frac{1}{Y_*(t)}-\omega\gamma^2u_*(s)^2Y_*(s),0\right)ds \tag{4.1}$$

сходится абсолютно для любого $t\geq 0$, сопряженная переменная

$$\psi(t)=(\psi^1(t),\psi^2(t))=Z_*(t)I_*(t),\quad t\geq 0, \tag{4.2}$$

локально абсолютно непрерывна и является решением сопряженного включения

$$\dot\psi(t)\in-\left[\partial_x f(x_*(t),u_*(t))\right]^*\psi(t)-e^{-\rho t}g_x(x_*(t),u_*(t)), \tag{4.3}$$

выполняется условие максимума в нормальной форме

$$-\alpha u_*(t)\psi^1(t)-e^{-\rho t}\frac{\omega\gamma}{2}u_*^2(t)Y_*(t)\overset{\text{п.в.}}{=}\max_{u\in[0,1]}\left[-\alpha u\psi^1(t)-e^{-\rho t}\frac{\omega\gamma}{2}u^2Y_*(t)\right]. \tag{4.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $i=1,2,\dots$ рассмотрим соответствующую паре $(x_*(\cdot),u_*(\cdot))$ аппроксимирующую задачу (2.8)–(2.11) на интервале $[0,T_i]$. При каждом $i=1,2,\dots$ в задаче (2.8)–(2.11) существует оптимальная допустимая пара $(x_i(\cdot),u_i(\cdot))$. Поскольку задача (2.8)–(2.11) удовлетворяет всем предположениям варианта принципа максимума Понтрягина для задач с липшицевыми управляемыми системами на конечных интервалах времени (см. [19], § 2.2), то для оптимальной пары $(x_i(\cdot),u_i(\cdot))$ существует такая абсолютно непрерывная функция $\psi_i\colon[0,T_i]\to\mathbb{R}^2$, $\psi_i(\cdot)=(\psi_i^1(\cdot),\psi_i^2(\cdot))$, что выполняются следующие условия.

1) Функция $\psi_i(\cdot)$ удовлетворяет сопряженному включению

$$\dot{\psi}_i(t) \overset{\text{п.в.}}{\in} -\left[\partial_x f_i(x_i(t), u_i(t))\right]^* \psi_i(t)) - e^{-\rho t} g_x(x_i(t), u_i(t)).$$

2) Выполняется условие максимума

$$\mathcal{H}_i(t, x_*(t), u_*(t), \psi_i(t)) \overset{\text{п.в.}}{=} H_i(t, x_*(t), \psi_i(t)).$$

3) Выполняется условие трансверсальности в правом конце

$$\psi_i(T_i) = 0.$$

Отметим, что условие 3) выполняется в силу того, что в задаче (2.8)–(2.11) отсутствуют ограничения на правый конец траектории (в момент времени T_i). По этой же причине принцип максимума выполняется здесь в нормальной форме (т. е. с $\psi^0 = 1$).

Функция Гамильтона — Понтрягина в нормальной форме для задачи (2.8)–(2.11) имеет вид

$$\mathcal{H}_i(t, x, u, \psi) = \alpha\left[I(Y, K) - \gamma(1 - u)Y\right]\psi^1 + \left[I(Y, K) - \delta K\right]\psi^2$$
$$+\, e^{-\rho t}\Big(\ln Y - \frac{\omega}{2}(u\gamma Y)^2 - \frac{1}{i}\|u - u_*(t)\|^2\Big), \quad x = (Y, K) \in G, \quad u \in [0, 1], \quad \psi = (\psi^1, \psi^2) \in \mathbb{R}^2.$$

В силу условий 1) и 3) функция $\psi_i(\cdot)$ является решением линейной системы

$$\dot{\psi}(t) = -\left[A_i(t)\right]^* \psi(t) - e^{-\rho t} g_x(x_i(t), u_i(t))$$

на интервале $[0, T_i]$ с краевым условием $\psi_i(T_i) = 0$.

Здесь $A_i\colon\ [0, T_i] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ — измеримая по Лебегу матричная функция, удовлетворяющая при п.в. $t \geq 0$ условию $A_i(t) \in \partial_x f_i(x_i(t), u_i(t))$. Тогда матричная функция $A_i(\cdot)$ определяется равенством (см. (3.17))

$$A_i(t) = \begin{pmatrix} \alpha\left[\xi_i(t) I'(x_i^1(t)) - \gamma(1 - u_i(t))\right] & -\xi_i(t)\alpha\beta \\ \xi_i(t) I'(x_i^1(t)) & -\xi_i(t)\beta - \delta \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T_i],$$

с некоторой измеримой функцией $\xi_i\colon\ [0, T_i] \to\ [0, 1]$.

В силу формулы Коши для решений линейных дифференциальных уравнений ([21], гл. IV, § 2) и условий 1), 3) для любого $i = 1, 2, \ldots$ получаем

$$\psi_i(t) = Z_i(t)\left[Z(T_i)^*\right]^{-1}\psi_i(T_i) - Z_i(t)\int\limits_{T_i}^{t} e^{-\rho s}\left[Z_i(s)\right]^{-1} g_x(x_i(s), u_i(s))\, ds$$

$$= Z_i(t)\int\limits_{t}^{T_i} e^{-\rho s}\left[Z_i(s)\right]^{-1} g_x(x_i(s), u_i(s))\, ds, \quad t \in [0, T_i],$$

где $Z_i(\cdot)$ — матричное решение линейной системы (см. (3.16))

$$\dot{z}(t) = -\left[A_i(t)\right]^* z(t),$$

удовлетворяющее начальному условию $Z_i(0) = Id$, где Id — единичная диагональная матрица.

Будем считать, что каждая функция $\psi_i(\cdot)$ продолжена с интервала $[0, T_i]$ на бесконечный интервал $[0, \infty)$ нулем по непрерывности, т. е. положим $\psi_i(t) \equiv 0$ при $t > T_i$. Соответственно, пусть каждая функция $\xi_i(\cdot)$ продолжена нулем на весь бесконечный интервал $[0, \infty)$. В силу равномерной ограниченности последовательности $\{\xi_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$, не ограничивая общности, можно считать, что для любого $T>0$ имеем $\xi_i(\cdot) \to \xi_*(\cdot)$ слабо в $L^1[0,T]$ при $i \to \infty$, где $\xi_*\colon [0,\infty) \to [0,1]$ — некоторая измеримая по Лебегу функция.

Ввиду леммы 1 для любого $T > 0$ имеем $x_i(\cdot) \to x_*(\cdot)$ в равномерной метрике при $i \to \infty$. Поэтому на любом конечном интервале $[0,T]$, $T > 0$, матричные функции $A_i(\cdot)$ равномерно ограничены. Следовательно, на любом конечном интервале $[0,T]$ последовательность матричных функций $\{Z_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ равностепенно непрерывна и в силу начального условия $Z_i(0) = Id$ равномерно ограничена. По теореме Арцела ([18], гл. II, § 7), не ограничивая общности, можно считать, что на любом конечном интервале $[0,T]$ имеем $Z_i(\cdot) \to Z_*(\cdot)$ равномерно при $i \to \infty$.

Далее, в силу леммы 1 на любом конечном интервале $[0,T]$ имеем $x_i(\cdot) \to x_*(\cdot)$ равномерно при $i \to \infty$, и $u_i(t) \to u_*(t)$ почти всюду при $i \to \infty$. Поскольку на любом конечном интервале $[0,T]$ имеем $\xi_i(\cdot) \to \xi_*(\cdot)$ слабо в $L_1[0,T]$ при $i \to \infty$, $Z_i(\cdot) \to Z_*(\cdot)$ равномерно при $i \to \infty$, и функции $\xi_i(\cdot)$ входят в матричные функции $A_i(\cdot)$ линейно, то $Z_*(\cdot)$ — нормированное в нулевой момент времени матричное решение линейной системы

$$\dot{z}(t) = -\left[A_*(t)\right]^* z(t), \quad t \geq 0,$$

с матрицей $A_*(\cdot)$, определяемой равенством

$$A_*(t) = \begin{pmatrix} \alpha\left[\xi_*(t) I'(x_*^1(t)) - \gamma(1-u_*(t))\right] & -\xi_*(t)\alpha\beta \\ \xi_*(t) I'(x_*^1(t)) & -\xi_*(t)\beta - \delta \end{pmatrix}, \quad t \in [0,\infty).$$

При этом в силу леммы 2 и равномерной сходимости $x_i(\cdot)$ к $x_*(\cdot)$ на любом интервале $[0,T]$, $T > 0$, получаем, что при п.в. $t \geq 0$ выполняется равенство

$$A_*(t) \in -\left[\partial_x f(x_*(t), u_*(t))\right]^*.$$

Поскольку все пары $(x_i(\cdot), u_i(\cdot))$, $i = 1, 2, \ldots$, и пара $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ допустимые, то ввиду леммы 5 для них выполняются оценки (3.13) и (3.15).

Рассмотрим последовательность $\{\psi_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$. В силу леммы 5 при п.в. $t \geq 0$ имеем

$$e^{-\rho t}\left\| \left[Z_i(t)\right]^{-1} g_x(x_i(t), u_i(t))\right\| \leq \kappa\sqrt{2} e^{-(\rho-\mu)t}(C_1 + C_2 t) \leq C_3 e^{-(\rho-\mu)t}(1+t).$$

Здесь постоянная $C_3 \geq 0$, а число μ задано формулой (3.14).

Из последнего неравенства в силу условия доминирования дисконтирующего множителя $\rho > \mu$ вытекает абсолютная сходимость интеграла

$$I_i(t) = \int\limits_t^{\infty} e^{-\rho s}\left[Z_i(s)\right]^{-1} g_x(x_i(t), u_i(t))\, ds.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $i \to \infty$, в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла ([18], гл. V, § 5) получаем, что для любого $t \geq 0$ интеграл $I_*(t)$, определенный равенством (4.1), сходится абсолютно. Следовательно, функция $\psi(\cdot)$, заданная равенством (4.2), локально абсолютно непрерывна, и на любом конечном интервале времени $[0,T]$ последовательность $\{\psi_i(\cdot)\}$ сходится равномерно к функции $\psi(\cdot)$.

Условие максимума (4.4) получается при помощи предельного перехода при $i \to \infty$ из условия максимума 3) для пары $(x_i(\cdot), u_i(\cdot))$ с сопряженной переменной $\psi_i(\cdot)$, сходимости последовательности $\{x_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ к $x_*(t)$ при всех $t \geq 0$ и сходимости последовательности $\{u_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ к $u_*(t)$ при п.в. $t \geq 0$.

Прямым дифференцированием проверяется, что функция $\psi(\cdot)$, определенная равенством (4.2), является решением сопряженного дифференциального включения (см. (4.3))

$$\dot{\psi}(t) \in -\left[\partial_x f(x_*(t), u_*(t))\right]^* - e^{-\rho t} g_x(x_*(t), u_*(t)).$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Тогда для сопряженной переменной* $\psi(\cdot)$ *выполняется следующее условие трансверсальности на бесконечности:*

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \langle x_*(t), \psi(t)\rangle = 0.$$

Действительно, в силу оценок (3.13) и (3.12) и формулы (4.2) имеем

$$\|\psi(t)\| \leq e^{-\mu t} \int\limits_t^{\infty} e^{-(\rho-\mu)s}\, ds = \frac{e^{-\mu} e^{-(\rho-\mu)t}}{\rho-\mu} = \frac{1}{\rho-\mu} e^{-\rho t} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

$$|\langle x_*(t), \psi(t)\rangle| \leq (C_1 + C_2 t) e^{-\mu t} \int\limits_t^{\infty} e^{-(\rho-\mu)s}\, ds$$

$$= \frac{(C_1 + C_2 t) e^{-\mu t} e^{-(\rho-\mu)t}}{\rho-\mu} = \frac{(C_1 + C_2 t)}{\rho-\mu} e^{-\rho t} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Заметим, что в соотношениях принципа максимума Понтрягина для задачи (1.1)–(1.5) (см. доказанную выше теорему 1) можно перейти к новым сопряженным переменным $\lambda^1(\cdot)$, $\lambda^2(\cdot)$: $\lambda^1(t) = e^{\rho t}\psi^1(t)$, $\lambda^2(t) = e^{\rho t}\psi^2(t)$, $t \geq 0$. Тогда в терминах этих сопряженных переменных соотношения принципа максимума для задачи (1.1)–(1.5) примут автономный вид.

Заключение

Для рассмотренной задачи оптимального управления спросом получен вариант принципа максимума Понтрягина в нормальной форме с сопряженной переменной, определяемой дополнительным поточечным условием, из которого следуют стандартные условия трансверсальности на бесконечности. Полученные результаты могут быть использованы для построения численных алгоритмов решения рассмотренной задачи оптимального управления спросом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ramsey F.P.** A mathematical theory of saving // The Economic Journal. 1928. Vol. 38. P. 543–559. doi: 10.1111/ecoj.12229
2. **Барро Р.Дж., Сала-и-Мартин Х.** Экономический рост. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. 824 p. ISBN: 978-5-94774-790-4
3. **Acemoglu D.** Introduction to modern economic growth. Princeton N.J.: Princeton Univ. Press, 2008. 1008 p.
4. **Carlson D.A., Haurie A.B., Leizarowitz A.** Infinite horizon optimal control. Deterministic and stochastic systems. Berlin: Springer-Verlag, 1991. 332 p. doi: 10.1007/978-3-642-76755-5
5. **Aseev A.S.** Optimal economic growth problem // J. Math. Sci. 2023. Vol. 276. P. 37–47. doi: 10.1007/s10958-023-06723-4
6. **Kaldor N.** A model of trade cycle // The Economic Journal. 1940. Vol. 50, no. 197. P. 78–92. doi: 10.2307/2225740
7. **Асеев А.С.** Оптимальные стационарный режимы в управляемой модели бизнес-цикла Калдора // Мат. моделирование. 2019. Т. 31, № 2. С. 33–47. doi: 10.1134/S0234087919020035
8. **Асеев С.М., Кряжимский А.В.** Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Тр. МИАН. 2007. Т. 257. С. 3–271.
9. **Weitzman M.J.** Income, wealth, and the maximum principle. Cambridge MA: Harvard University Press, 2003. 358 p.
10. **Seierstad A., Sydsæter K.** Optimal control theory with economic applications. Amsterdam: North-Holland, 1987. 472 p.
11. **Асеев С.М., Бесов К.О., Кряжимский А.В.** Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени в экономике // Успехи мат. наук. 2012. Т. 67, № 2. С. 3–64.

12. **Aseev S.M., Veliov V.M.** Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems under weak regularity assumptions // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, no. 3. С. 41–57.
13. **Pickenhain S.** Infinite horizon optimal control problems in the light of convex analysis in Hilbert spaces // J. Set-Valued Var. Anal. 2015. Vol. 23, no. 1. P. 169–189. doi: 10.1007/s11228-014-0304-5
14. **Tauchnitz N.** The Pontryagin maximum principle for nonlinear optimal control problems with infinite horizon // J. Optim. Theory Appl. 2015. Vol. 167, no. 1. P. 27–48. doi: 10.1007/s10957-015-0723-y
15. **Cannarsa P., Frankowska H.** Value function, relaxation, and transversality conditions in infinite horizon optimal control // J. Math. Anal. Appl. 2018. Vol. 457. P. 1118–1217. doi: 10.1016/j.jmaa.2017.02.009
16. **Ye J.J.** Nonsmooth maximum principle for infinite-horizon problems // J. Optim. Theory Appl. 1993. Vol. 76, no. 3. 1993. P. 485–500. doi: 10.1007/BF00939379
17. **Cesari L.** Optimization — theory and applications. Problems with ordinary differential equations. NY: Springer-Verlag, 1983. doi: 10.1007/978-1-4613-8165-5
18. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.**, Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. лит., 1976. 544 p.
19. **Clarke F.H.** Optimization and nonsmooth analysis. NY: J. Wiley, 1983. 308 p.
20. **Филиппов А.Ф.** О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестн. Москов. университета. 1959. No. 2. С. 25–32.
21. **Хартман Ф.** Обыкновенные дифференциальный уравнения. М.: Мир, 1970. 720 p.

Поступила 1.04.2024
После доработки 5.04.2024
Принята к публикации 8.04.2024

Асеев Антон Сергеевич
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: anton.ser.as@gmail.com

Самсонов Сергей Петрович
канд. физ.-мат. наук, доцент
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: samsonov@cs.msu.ru

REFERENCES

1. Ramsey F.P. A mathematical theory of saving. *The Economic Journal*, 1928, vol. 38, pp. 543–559. doi: 10.1111/ecoj.12229
2. Barro R.J., Sala-i-Martin X. *Economic growth.* 2nd ed. Cambridge, The MIT Press, 2004. ISBN: 978-0-262-02553-9 . Translated to Russian under the title *Ekonomicheskii rost*, Moscow, BINOM. Laboratoriya znanii Publ., 2010, 824 p.
3. Acemoglu D. *Introduction to modern economic growth.* Princeton N.J.: Princeton Univ. Press, 2009, 1008 p. ISBN: 978-0-691-13292-1 .
4. Carlson D.A., Haurie A.B., Leizarowitz A. *Infinite horizon optimal control. Deterministic and stochastic systems.* Berlin, Springer-Verlag, 1991, 332 p. doi: 10.1007/978-3-642-76755-5
5. Aseev A.S. Optimal economic growth problem. *J. Math. Sci.*, 2023, vol. 276, no. 1, pp. 37–47. doi: 10.1007/s10958-023-06723-4
6. Kaldor N. A model of trade cycle. *The Economic J.*, 1940, vol. 50, no. 197, pp. 78–92. doi: 10.2307/2225740
7. Aseev A.S. Optimal stationary regimes in Kaldor's business-cycle controlled model. *Math. Models Comput. Simul.*, 2019, vol. 11, iss. 5, pp. 750–758. doi: 10.1134/S2070048219050028
8. Aseev S.M., Kryazhimskii A.V. The Pontryagin maximum principle and optimal economic growth problems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2007, vol. 257, pp. 1–255. doi: 10.1134/S0081543807020010
9. Weitzman M.J. *Income, wealth, and the maximum principle*, Cambridge MA, Harvard Univ. Press, 2003, 358 p. ISBN-13: 978-0-674-01044-4 .
10. Seierstad A., Sydsæter K. *Optimal control theory with economic applications*, Amsterdam, North-Holland Publ., 1987, 472 p. ISBN-13: 978-0444879233 .

11. Aseev S.M., Besov K.O., Kryazhimskiy A.V. Infinite-horizon optimal control problems in economics. *Russian Math. Surveys*, 2012, vol. 67, no. 2, pp. 195–253. doi: 10.1070/rm2012v067n02abeh004785
12. Aseev S.M., Veliov V.M. Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems under weak regularity assumptions. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 291, suppl. 1, pp. S22–S39. doi: 10.1134/S0081543815090023
13. Pickenhain S. Infinite horizon optimal control problems in the light of convex analysis in Hilbert spaces. *J. Set-Valued Var. Anal.*, 2015, vol. 23, no. 1, pp. 169–189. doi: 10.1007/s11228-014-0304-5
14. Tauchnitz N. The Pontryagin maximum principle for nonlinear optimal control problems with infinite horizon. *J. Optim. Theory Appl.*, 2015, vol. 167, no. 1, pp. 27–48. doi: 10.1007/s10957-015-0723-y
15. Cannarsa P., Frankowska H. Value function, relaxation, and transversality conditions in infinite horizon optimal control. *J. Math. Anal. Appl.* , 2018, vol. 457, no. 2, pp. 1188–1217. doi: 10.1016/j.jmaa.2017.02.009
16. Ye J.J. Nonsmooth maximum principle for infinite-horizon problems. *J. Optim. Theory and Appl.*, 1993, vol. 76, no. 3, pp. 485–500. doi: 10.1007/BF00939379
17. Cesari L. *Optimization — theory and applications. Problems with ordinary differential equations*, NY, Springer-Verlag, 1983. doi: 10.1007/978-1-4613-8165-5
18. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis.* (Two volumes in one, translated from the first Russian edition 1957–1961). Martino Fine Books, United States, 2012, 280 p. ISBN: 1614273049 . The 4th edition of Russian text published in *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza.* Moscow, Nauka Publ., 1976, 544 p.
19. Clarke F.H. *Optimization and nonsmooth analysis*, NY, Wiley Interscience, 1983, 308 p. ISBN: 9780471875048 .
20. Filippov A.F. On some issues in the theory of optimal regulation. *Vestnik Moskovskogo Universiteta*, 1959, vol. 2, pp. 25–32 (in Russian).
21. Hartman P. *Ordinary differential equations.* NY, London, Sydney, The Johns Hopkins university John Wiley & Sons, Inc., 1964, 640 p. Translated to Russian under the title *Obyknovennyye differentsial'nye uravneniya*, Moscow, Mir Publ., 1970, 720 p.

Received April 1, 2024
Revised April 5, 2024
Accepted April 8, 2024

Anton Sergeevich Aseev, Lomonosov Moscow State University, Leninskiye Gory 1, Moscow, 119991 Russia, e-mail: anton.ser.as@gmail.com .

Sergey Petrovich Samsonov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Lomonosov Moscow State University, Leninskiye Gory 1, Moscow, 119991 Russia, e-mail: samsonov@cs.msu.ru .

Cite this article as: A. S. Asev, S. P. Samsonov. On the problem of optimal stimulation of demand. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 23–38 .