ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 2 2024

УДК 517.977+517.23

ЗАДАЧА ПАКЕТНОГО НАВЕДЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДРОБНОГО ПОРЯДКА[1]

П. Г. Сурков

Для линейной управляемой динамической системы, описываемой дифференциальными уравнениями с дробной производной типа Капуто, рассмотрена задача гарантированного позиционного наведения на заданное множество в заданный момент времени. Начальное состояние априори неизвестно, но принадлежит конечному заданному множеству. Информация о положении системы поступает в режиме онлайн в виде сигнала наблюдения. Анализ разрешимости задачи наведения для рассматриваемой управляемой системы проводится с помощью метода пакетов программ Осипова — Кряжимского. В работе приведен краткий обзор результатов, в которых метод пакетов программ развивается или используется в задачах наведения для различных классов систем. Данный метод позволяет связать условие разрешимости задачи гарантированного позиционного наведения для исходной системы с условием разрешимости задачи программного наведения для специальной расширенной системы. Следуя технике метода пакетов программ, мы выводим критерий разрешимости поставленной задачи наведения для системы дробного порядка. В случае разрешимости задачи приводим специальную процедуру построения наводящего пакета программ. Разработанная техника анализа задачи гарантированного позиционного наведения и построения гарантирующего управления при неизвестном начальном состоянии системы иллюстрируется на примере конкретной линейной механической управляемой системы с дробной производной Капуто.

Ключевые слова: управление, неполная информация, линейные системы, дробная производная Капуто.

P. G. Surkov. Package guidance problem for a fractional-order system.

The problem of guaranteed closed-loop guidance to a given set at a given time is studied for a linear dynamical control system described by differential equations with a fractional derivative of the Caputo type. The initial state is a priori unknown, but belongs to a given finite set. The information on the position of the system is received online in the form of an observation signal. The solvability of the guidance problem for the control system is analyzed using the method of Osipov–Kryazhimskii program packages. The paper provides a brief overview of the results that develop the method of program packages and use it in guidance problems for various classes of systems. This method allows us to connect the solvability condition of the guaranteed closed-loop guidance problem for an original system with the solvability condition of the open-loop guidance problem for a special extended system. Following the technique of the method of program packages, a criterion for the solvability of the considered guidance problem is derived for a fractional-order system. In the case where the problem is solvable, a special procedure for constructing a guiding program package is given. The developed technique for analyzing the guaranteed closed-loop guidance problem and constructing a guiding control for an unknown initial state is illustrated by the example of a specific linear mechanical control system with a Caputo fractional derivative.

Keywords: control, incomplete information, linear systems, Caputo fractional derivative.

MSC: 34A08, 93C05, 93C41, 93B50

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-2-222-242

1. Введение

Задачи управления динамическими системами с неполной информацией являются важной частью математической теории управления. Структурно не полная информация может иметь различную природу: это и неизвестное начальное состояние (см., например, [1]), и наблюдение части фазовых координат системы, а также различные неопределенности и помехи. Нас будет интересовать случай неполной информации о начальном состоянии системы. Приведем необходимые для постановки задачи определения.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-10070, https://rscf.ru/project/21-71-10070/ .

Определение 1 [2, с. 69]. Интеграл дробного порядка $\gamma \in (0,1)$ с началом в точке σ от произвольной функции $f \in L_1(T, \mathbb{R}^d)$ определяется формулой

$$[I^\gamma_{\sigma+} f](t) := \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int\limits_\sigma^t (t-s)^{\gamma-1} f(s)\,ds, \quad \gamma \in (0,1), \quad t \in T := [\sigma, \theta],$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция [2, с. 15].

Определение 2 [2, с. 91]. Для функции $x\colon T \to \mathbb{R}^d$ и произвольного действительного числа $\gamma \in (0,1)$ выражение

$$[D^\gamma_* x](t) := \frac{d}{dt}[I^{1-\gamma}_{\sigma+}(x - x(\sigma))](t)$$

называется дробной производной Капуто (Герасимова — Капуто) порядка γ.

Рассматривается линейная управляемая динамическая система, описываемая дифференциальными уравнениями с дробной производной Капуто:

$$[D^\gamma_* x](t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in T := [\sigma, \theta], \tag{1.1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^d$ — фазовый вектор системы в момент времени t, $u(t) \in \mathbb{R}^v$ — управление. Предполагаем, что временной отрезок T ненулевой длины и элементы матриц $A(t) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ и $B(t) \in \mathbb{R}^{d\times v}$ являются непрерывными функциями на T.

Под *программой* (*программным управлением*) будем понимать всякую измеримую по Лебегу функцию $u(\cdot)\colon T \to P$, где $P \subset \mathbb{R}^v$ — выпуклый компакт, и обозначим множество всех программ символом $\mathcal{U}$.

Для произвольного начального состояния $x_0 \in X_0$ и всякой программы $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ *струной* из начального состояния x_0 под действием программы $u(\cdot)$ будем называть решение (по Каратеодори) дифференциального уравнения с дробной производной (1.1), определенное на отрезке T и удовлетворяющее условию

$$x(\sigma) = x_0, \tag{1.2}$$

и обозначим его как $x(\cdot|x_0, u(\cdot))$.

Пусть задано непустое конечное множество *допустимых начальных состояний* $X_0 \subset \mathbb{R}^d$, а также выпуклое и замкнутое целевое множество $M \subset \mathbb{R}^d$. Будем считать, что априори известна принадлежность начального состояния системы $x(\sigma)$ ко множеству X_0, но само это значение неизвестно. Пусть для каждого $t \in T$ сигнал наблюдения о состоянии $x(t)$ системы имеет вид

$$y(t) := Q(t)x(t) \tag{1.3}$$

с матрицей наблюдения $Q(t) \in \mathbb{R}^{q\times d}$, имеющей в качестве элементов непрерывные на T функции.

Для системы (1.1) ставится задача *гарантированного позиционного наведения* на заданное целевое множество в заданный момент времени, т. е. требуется сформировать такое управление $u(\cdot)$, которое гарантировало бы попадание позиции системы $x(\theta)$ в заранее заданную ε-окрестность целевого множества M. В процессе функционирования системы формируемое управление строится по принципу обратной связи в соответствии с сигналом $y(t)$. Следуя классической методологии из теории гарантированного управления, будем предполагать, что стратегии с обратной связью предполагают коррекции управления $u(\cdot)$ в заранее заданные моменты времени $\sigma = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = \theta$. В каждый из этих моментов t_i, $i = 1, \ldots, k-1$, управление на интервале $[t_i, t_{i+1})$ формируется согласно накопленным к данному моменту наблюдениям и истории управления $t \to u(t)$ на $[\sigma, t_i)$. Таким образом, мы приходим к следующей формулировке задачи гарантированного позиционного наведения, назовем ее задача (Ps): для произвольного заданного $\varepsilon > 0$ требуется выбрать позиционную стратегию с обратной связью, которая для любого начального состояния $x_0 \in X_0$ обеспечивала бы наведение струны системы (1.1), исходящей в момент времени σ из точки x_0, в ε-окрестность целевого множества M в момент времени θ.

Классические постановки рассматриваемых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и методы их решения можно найти, например, в [3–5]. В настоящее время большое количество исследователей обращаются к такой области математики, как дробный анализ. Находится все большее количество приложений дробных производных для объяснения физических процессов [6–9]. Также естественно возрастает интерес исследователей к задачам управления системами дробного порядка (см., например, [10–12] и др.).

В настоящей работе для решения задачи (Ps) мы будем использовать метод *пакетов программ Осипова — Кряжимского.*

1.1. Краткий обзор результатов, посвященных методу пакетов программ Осипова — Кряжимского

В этом подразделе мы опишем результаты, полученные в ходе развития данного метода исследования задач гарантированного позиционного управления. В обзоре будут сохранены авторские обозначения.

Теоретические основы метода были заложены Ю. С. Осиповым в работе [13]. В ней была дана наиболее общая постановка задачи наведения системы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [t_0, \vartheta], \tag{1.4}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, функция $f(\cdot)\colon [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ непрерывна, управление $u(\cdot)\colon [t_0, \vartheta] \to P$ — измеримая по Лебегу функция, P – заданный компакт в $\mathbb{R}^m$. До начала движения управляющей стороне известен компакт $X_0 \subset \mathbb{R}^n$, которому заведомо принадлежит начальное состояние системы $x(t_0) = x_0$. В течение процесса управления информация о системе поступает в качестве сигнала

$$y(t) = s(x(t)) + \xi(t), \tag{1.5}$$

где функция $s(\cdot)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ непрерывна, $\xi(t)$ — помеха наблюдения, $\|\xi(t)\|_{\mathbb{R}^r} \leqslant h$ и h характеризует точность наблюдения. Перед управляющей стороной стоит задача формирования программного управления, которое гарантирует попадание системы $x(\vartheta)$ в момент ϑ на заданное замкнутое целевое множество $M \subset \mathbb{R}^n$.

В работе [13] было введено понятие *пакетов программ*, представляющих собой специальные семейства программ, параметризованных начальными точками и функциями $\xi(\cdot)$, которое связано с понятием квазистратегии [5]. Основной ее результат статьи — теорема об одновременной разрешимости (неразрешимости) задач позиционного наведения и пакетного наведения.

Дальнейшему развитию метода посвящена совместная статья Ю. С. Осипова и А. В. Кряжимского (см. [14]), в которой также рассматривалась задача позиционного наведения для системы (1.4), но предполагалось, что сигнал (1.5) с нулевыми помехами $\xi(t) \equiv 0$. Поэтому было введено понятие *идеализированных пакетов программ*, т. е. параметризация происходит только по начальным состояниям. Соответственно были поставлены *аппроксимационная идеализированная задача пакетного наведения* (с ε-наводящим идеализированным пакетом программ) и *точная идеализированная задача пакетного наведения* (с 0-наводящим идеализированным пакетом программ). В случае, когда множество начальных состояний X_0 — компакт, была доказана разрешимость аппроксимационной идеализированной задачи пакетного наведения, если разрешима задача пакетного наведения. Основным результатом работы является теорема равносильности утверждений о разрешимости задачи позиционного наведения, задачи пакетного наведения и аппроксимационной идеализированной задачи пакетного наведения, когда множество начальных состояний X_0 конечно.

Следующий этап развития метода — статья Ю. С. Осипова и А. В. Кряжимского [15]. Авторы перешли к исследованию задачи наведения для линейной системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + c(t), \quad t \in [t_0, \vartheta], \tag{1.6}$$

где $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ — непрерывные отображения отрезка $[t_0, \vartheta]$ в нормированные пространства матриц размерностей $n \times n$ и $n \times m$ соответственно, функция $c(\cdot)\colon [t_0, \vartheta] \mapsto \mathbb{R}^n$ непрерывна. Предполагалось, что мгновенный ресурс управления P является выпуклым компактом и сигнальная функция имеет более простой по сравнению с (1.5) конкретный вид — она линейна:

$$s(x) = Qx, \quad (x \in \mathbb{R}^n). \tag{1.7}$$

Здесь постоянная матрица Q имеет размерность $r \times n$. Наложены условия на множество начальных состояний X_0 и целевое множество M:

(K) $\qquad X_0$ конечно;

(M) $\qquad M \subset \mathbb{R}^n$ выпукло и замкнуто.

В статье [15] была доказана теорема о равносильности утверждений о разрешимости задач наведения: позиционного, точного идеализированного пакетного и аппроксимационного и введено в рассмотрение понятие *допустимых однородных сигналов*, основанное на фундаментальной матрице системы (1.6) и сигнальной функции (1.7). Это дало возможность рассмотреть семейства программ, параметризованные допустимыми однородными сигналами, называемые *квазипакетом программ*, если они удовлетворяют условию неупреждаемости. Также для каждого однородного сигнала $g(\cdot)$ была определена *последовательность временны́х скачков*, на основании которой задается разбиение множества начальных состояний. Для исследования разрешимости задачи квазипакетного наведения (а значит, и точной идеализированной задачи пакетного наведения) была предложена специальная, довольно громоздкая, попятная конструкция.

Накопленный теоретический потенциал позволил получить А. В. Кряжимскому и Н. В. Стрелковскому глубокие конструктивные результаты с прозрачной практической реализацией в работе [16]. Для системы (1.6) рассматривалась задача позиционного наведения из неизвестного заранее начального состояния $x_0 \in X_0$, для X_0 выполнено условие (K). Управляющая сторона формирует программу управления, получая сигнал

$$y(t) = Q(t)x(t), \tag{1.8}$$

где $Q(\cdot)$ — непрерывная функция, принимающая значения в нормированном пространстве матриц размерности $q \times n$. В работе также были введены одни из основных конструктивных понятий — однородные сигналы и их *моменты расслоения*. Далее, с использованием параметризации по допустимым начальным состояниям были введены расширенные программные управления с расширенным мгновенным ресурсом, расширенное фазовое пространство и расширенное целевое множество. На основании теоремы об отделимости выпуклых множеств авторы получили важнейший результат — критерий разрешимости каждой из трех задач наведения: расширенной задачи программного наведения, задачи пакетного наведения и задачи гарантированного позиционного наведения.

Данный результат оказался настолько технически удобным, что вызвал лавинообразную череду публикаций, которые можно разделить на несколько групп. Первая группа — это развитие вглубь "классической" постановки (для системы (1.6)), вторая группа — распространение метода пакетов программ для задач наведения для различного вида систем. Исследования по этим направлениям продолжили сотрудники факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

(Москва), Международного института прикладного системного анализа (Лаксенбург, Австрия) А. В. Кряжимский, Н. В. Стрелковский, С. М. Орлов, а также сотрудники отдела дифференциальных уравнений Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН (Екатеринбург) В. И. Максимов, М. С. Близорукова, В. Л. Розенберг, П. Г. Сурков. Третья группа исследований — использование разработанного метода для задач наведения специального вида, например, терминального управления. В этом направлении работали сотрудники факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (Москва) под руководством Н. Л. Григоренко.

Рассмотрим сначала первую группу таких работ. В статье [17] для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.6) получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи гарантированного позиционного наведения с условиями (K) и (M) и сигналом (1.8) в момент времени, предшествующий конечному заданному.

Для линейных систем вида (1.6) в [18] также с условиями (K) и (M) и сигналом (1.8) с кусочно-непрерывной матрицей-функцией $Q(t)$ предложен метод поиска наводящего пакета программ.

В работе [19] рассмотрена управляемая система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + c(t). \tag{1.9}$$

Здесь $t \in T = [t_0, \vartheta]$ — переменная времени; $t_0 < \vartheta < +\infty$; $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы; $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$ — значение управляющего вектора; U — выпуклый компакт; A и B — матрицы подходящих размерностей; $c(\cdot)\colon T \to \mathbb{R}^n$ — кусочно-непрерывная функция. Управляющей стороне априори неизвестно начальное состояние системы x_0, но $x_0 \in X_0$ и удовлетворяет условию (K). Для каждого начального состояния $x_0 \in X_0$ вводится множество

$$\begin{gathered} M_{x_0} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon f(x) \leqslant J_{x_0}\}, \quad J_{x_0} = f\left(x(\vartheta; t_0, x_0, u^{\mathrm{opt}}_{x_0}(\cdot))\right), \\ u^{\mathrm{opt}}_{x_0} = \operatorname{argmin}\bigl\{f\left(x(\vartheta; t_0, x_0, u(\cdot))\right) : u(\cdot) \in \mathcal{U}\bigr\}, \end{gathered} \tag{1.10}$$

где $f(\cdot)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — собственная функция. Для системы (1.9) с помощью метода пакетов программ решена задача гарантированного позиционного наведения на систему целевых множеств (1.10), заключающаяся в формировании управляющего воздействия системы (1.9), обеспечивающего приведение ее фазовой траектории на множество $M_{\bar{x}_0}$, где $\bar{x}_0$ — истинное начальное состояние.

В публикации [20] для задачи гарантированного позиционного наведения системы (1.6) с условием (K) на специальное целевое множество

$$M = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_l \in [a, b]\}$$

был применен метод пакетов программ с использованием систем линейных неравенств.

Развитие конструктивных алгоритмов построения пакетов программ было продолжено в работах [21; 22], где также рассматривалась задача наведения для системы (1.6) с условиями (K) и (M) и пакеты программ строились с помощью последовательных приближений, а также в случае особых кластеров множества начальных состояний.

В исследовании [23] управляемая система имеет вид (1.6), но сигнал наблюдения в отличие от (1.8) имеет вид

$$y(t) = \int\limits_{\sigma}^{t} (Q(t,s)x(s) + R(t,s)y(s))\,ds + c(t), \quad t \in T = [\sigma, \theta],$$

где матрицы $Q(\cdot,\cdot)$ и $R(\cdot,\cdot)$ — размерностей $q \times n$ и $q \times q$ соответственно, а элементы этих матриц являются непрерывными по первому аргументу и непрерывно-дифференцируемыми по второму на $T \times T$, функция $c(\cdot)\colon T \to \mathbb{R}^q$ дифференцируема. Для такого типа сигнала с помощью метода пакетов программ решена задача позиционного наведения системы (1.6) с условиями (K) и (M) в момент θ в заданную ε-окрестность целевого множества M.

Новый подход был использован в работе [24], где рассматривалась нелинейная система

$$\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + Bu(t), \quad t \in T = [\sigma, \theta]. \tag{1.11}$$

Здесь отрезок времени T ненулевой; $x(t) \in D \subset \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы; D — некоторое компактное множество; $u(t) \in P \subset \mathbb{R}^m$ — управление в момент t; нелинейные элементы матрицы $A(x)$ принадлежат $C^2(D, \mathbb{R})$ и B — постоянная $n \times m$ матрица. Критерий разрешимости задачи наведения системы (1.11) с условиями (K) и (M) при использовании сигнала наблюдения (1.8) доказан с привлечением нечетких систем Такаги — Сугено [25].

Развитие метода пакетов программ путем расширения классов рассматриваемых систем было продолжено в [26]. В этой работе рассматривалась конфликтно управляемая система вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + Bu(t) - Cv(t) + f(t), \tag{1.12}$$

где $t \in T = [t_0, \vartheta]$ — конечный отрезок; $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы; $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$ — управление игрока-союзника; $v(t) \in V \subset \mathbb{R}^q$ — управление игрока-противника (неизвестное возмущение) в момент t; U и V — выпуклые компактные множества. Функции $A(\cdot)$ и $f(\cdot)$ удовлетворяют условию Липшица, матрицы B и C постоянные. Истинное начальное состояние x_0 управляющей стороне неизвестно. С помощью пакетов программ для системы (1.12) была решена задача гарантированного позиционного наведения при условии (K) на заданное множество $M \subset \mathbb{R}^n$ в заданный момент времени ϑ.

Далее, в работе [27] была выбрана система (1.12) с постоянной матрицей A, и выполнено условие (K). В ней на основе метода пакетов программ и теории динамического обращения [28] решена задача гарантированного позиционного наведения к моменту ϑ: привести состояние системы $x(t)$ в малую окрестность целевого множества $M_1 \subset \mathbb{R}^n$, оставаясь внутри множества фазовых ограничений $N_1 \subset \mathbb{R}^n$, по сигналу о состоянии системы $y(t) = Dx(t)$, если на систему действует неизвестное возмущение $v(t) \in Q \subset \mathbb{R}^q$, Q — ограниченное замкнутое множество.

В статье [29] объектом исследования стала уже система с распределенными параметрами вида

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= A_1 y(t) + B_1(u(t) - v(t)) + f_1(t), \\ \dot{z}(t) &= A_2 z(t) + B_2(u(t) - v(t)) + f_2(t). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Здесь $(Y, |\cdot|_Y)$ и $(Z, |\cdot|_Z)$ — гильбертовы пространства; A_1 и A_2 являются генераторами сильно непрерывных полугрупп линейных ограниченных операторов $\mathcal{Y}(t)\colon Y \to Y$ и $\mathcal{Z}(t)\colon Z \to Z$ соответственно; $f_1(\cdot) \in L_2(T; Y)$ и $f_2(\cdot) \in L_2(T; Z)$ являются заданными возмущениями; B_1 и B_2 — линейные операторы, определяемые формулами

$$B_1 u = \sum_{j=1}^{m} \omega_j u_j, \quad \omega_j \in Y, \quad |\omega_j|_Y \neq 0,$$

$$B_2 u = \sum_{j=1}^{m} \omega_j u_j, \quad \Omega_j \in Z, \quad u_j \in \mathbb{R}, \quad |\Omega_j|_Y \neq 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Предполагается, что множество допустимых начальных состояний имеет вид $\{y_0, Z_0\}$, $Z_0 \subset Z$ — конечное множество, элемент $y_0 \in Y$ известен игроку-союзнику. Матрица наблюдения для сигнала вида (1.8) имеет вид $Q(t) = \mathrm{diag}(E, G(t))$, где $E\colon Y \to Y$ — тождественный оператор, $G(t)$ — семейство ненулевых линейных непрерывных операторов $Z \to Z_1$, $(Z_1, |\cdot|_{Z_1})$ — гильбертово пространство. С учетом того, что положение системы (1.13) измеряется с погрешностью h, на основании метода пакетов программ и теории динамического обращения [28] решается задача гарантированного позиционного наведения системы (1.13) в заданный момент времени $t = \vartheta$ в ε-окрестность заданного целевого множества M для любого возмущения $v(\cdot) \in \mathcal{V}$.

Система стохастических дифференциальных уравнений, рассматриваемая в работе [30], может быть представлена как

$$dx(t,\omega) = (A(t)x(t,\omega) + B_1(t)u_1(t) + f(t))\,dt + B_2(t)U_2(t)\,d\xi(t,\omega), \quad x(t_0,\omega) = x_0,$$

где $t \in T = [t_0, \vartheta]$; $x \in \mathbb{R}^n$; $\xi \in \mathbb{R}^k$, $\omega \in \Omega$; (Ω, F, P) — вероятностное пространство; $\xi(t,\omega)$ — стандартный винеровский процесс; функция $f(\cdot)$ непрерывна, как и элементы матриц $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$, $B_1(t) = \{b_{1ij}(t)\}$, $B_2(t) = \{b_{2ij}(t)\}$ размерностей $n \times n$, $n \times r$ и $n \times k$ соответственно. Начальное состояние x_0 принадлежит конечному множеству X_0, которое состоит из распределенных по нормальному закону случайных величин с числовыми параметрами (m_0, D_0), m_0 — математическое ожидание, D_0 — ковариационная матрица. Для данной системы с помощью метода пакетов программ решена задача гарантированного позиционного наведения, заключающаяся в нахождении управлений $(u_1(\cdot), U_2(\cdot))$, обеспечивающих попадание в конечный момент ϑ математического ожидания $m(\vartheta)$ и ковариационной матрицы $D(\vartheta)$ в ε-окрестности целевых множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{D}$.

Управляемая система в работе [31] имеет запаздывание в управлении

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_1(t)u(t) + B_2(t)u(t-\nu) + C(t), \tag{1.14}$$

$$u_{t_0}(s) = u_0(s) \in C([-\nu, 0]; \mathbb{R}^n). \tag{1.15}$$

Здесь временной отрезок $T = [t_0, \vartheta]$ конечный и фиксированный; $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — фазовое состояние системы в момент t; $u(t) \in P \subset \mathbb{R}^m$ — управление в момент t; P — выпуклый компакт; $\nu > 0$ — постоянное запаздывание; $A(t)$, $B_1(t)$ и $B_2(t)$ — непрерывные на T матричные функции соответствующих размерностей; $C(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор-функция. Для системы (1.14) с заданным начальным условием (1.15) и условиями (K), (M) решена задача пакетного наведения на целевое множество M по сигналу (1.8).

В работах [32; 33] метод пакетов программ применялся для задачи позиционного наведения управляемой системы с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-r) + B(t)u(t) + f(t), \quad t \in [\sigma, T],$$

где отрезок времени ненулевой; $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы в момент t; $r > 0$ — запаздывание; элементы матриц $A_0(t)$, $A_1(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ являются непрерывными функциями на $[\sigma, T]$; $u(t) \in P \subset \mathbb{R}^m$ — значение управляющей функции; P — выпуклый компакт, $f(t) \in \mathbb{R}^n$. В одном случае (см. [32]) множество допустимых начальных состояний считается компактным $\bar{X}_0 \subset H = \mathbb{R}^n \times L_2([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, сигнал наблюдения имеет вид (1.8) и ε-окрестность целевого множества M достигается в конечный момент времени T. В другом случае (см. [33]) множество допустимых начальных состояний конечно $\bar{X}_0 \subset H$ и ε-окрестность целевого множества M достигается системой в некоторый момент времени, предшествующий заданному T.

К заключительной, третьей, группе работ можно отнести [34], где исследовалась управляемая система с параметром

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \mu), \quad x(0) \in X_0 \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in P \subset \mathbb{R}^r, \quad \mu \in M_0 \subset \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, \theta]; \tag{1.16}$$

здесь P — компактное множества; X_0, M_0 — конечные множества; $f(x, u, \mu)$ — непрерывная функция аргументов. Уравнение наблюдения задано в виде

$$y = C(x)x, \quad C(x) = \begin{cases} 0, & x \notin m + B_\ell(0), \\ E, & x \in m + B_\ell(0), \end{cases} \tag{1.17}$$

где 0 — нулевая $n \times n$-матрица; E — единичная $n \times n$-матрица; $B_\ell(0)$ — шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле радиуса $\ell > 0$; $m \in \mathbb{R}^n$ — заданный вектор. Перед управляющей стороной ставилась задача нахождения допустимого управления, строящегося по сигналу (1.17) о системе, которое при неизвестных начальной позиции $x_0 \in X_0$ и параметре $\mu \in M_0$ приводило бы систему (1.16) на множество $m + B_\ell(0)$ не позже момента времени $T \leqslant \theta$. Для конкретной управляемой системы вида

$$\ddot{x}(t) + \alpha\|\dot{x}(t)\|\dot{x}(t) = \rho u(t), \quad u \in \mathbb{R}^2, \quad \|u(t)\| \leqslant 1, \quad t \geqslant 0;$$

здесь $\alpha, \rho > 0$; $X_0 = \{x(0) = x_{0i}; \dot{x}(0) = \dot{x}_{0i}, i = 1,2\}$; $M_0 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$; $x(T) = (m_{11}, m_{12})$; $\dot{x}(T) = (m_{21}, m_{22})$, построен пакет программ $P_{1,\alpha_1,\alpha_2;2,\alpha_1,\alpha_2}$, гарантирующий нахождение фазового вектора системы в целевой точке.

В публикации [35] рассматривалась задача построения гарантирующего программного управления с помощью пакетов программ для линейной системы

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) \in X_0 \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in P \subset \mathbb{R}^r, \quad t \in [0, \theta],$$

где X_0 — компактное множество; P — выпуклое компактное множество; $u(t)$ — параметр управления; постоянные матрицы A и B — соответственно размерностей $n \times n$ и $n \times r$; момент времени θ задан и сигнал определяется формулой (1.17).

В работе [36] изучалась конкретная нелинейная система второго порядка:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -(u_1(t) - v(t))\sin(\theta(t)), \\ \ddot{z}(t) = (u_1(t) - v(t))\cos(\theta(t)) - 1, \\ \ddot{\theta}(t) = u_2(t). \end{cases} \tag{1.18}$$

Здесь $t \in [0, T]$; $v(t) \in [-\sigma, \sigma]$ — параметр помехи (заранее не заданный); $u_1(t)$, $u_2(t)$ — управляющие параметры; $-\rho_1 \leqslant u_1 \leqslant \rho + \rho_1$; $|u_2| \leqslant l$. Начальное положение

$$x(0) = x_0, \quad z(0) = z_0, \quad \theta(0) = \theta_0 \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\Big], \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, \tag{1.19}$$

и также задано конечное положение

$$\begin{gathered} x(T) = x_T, \quad z(T) = z_T, \quad \theta(T) = \theta_T \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\Big], \\ \dot{x}(T) = \dot{x}_T, \quad \dot{z}(T) = \dot{z}_T, \quad \dot{\theta}(T) = \dot{\theta}_T. \end{gathered} \tag{1.20}$$

Для системы (1.18) с заданными условиями решена задача терминального управления на отрезке $[0, T]$ при наличии помехи, т.е. нахождение момента времени T и управления $u = (u_1, u_2)$, переводящего систему (1.18) из положения (1.19) в малую окрестность конечного положения (1.20) за время T при любой допустимой реализации помехи $v(\cdot)$.

1.2. Вспомогательные результаты из дробного анализа

В данном подразделе представлены определения и вспомогательные результаты, необходимые для применения метода пакетов программ к задаче наведения для системы дробного порядка (1.1).

О п р е д е л е н и е 3 [2, с. 70]. Для функции $x\colon T \to \mathbb{R}^d$ и произвольного действительного числа $\gamma \in (0, 1)$ выражение

$$[D^\gamma_{\sigma+}x](t) := \frac{d}{dt}[I^{1-\gamma}_{\sigma+}x](t)$$

называется дробной производной Римана — Лиувилля порядка γ.

О п р е д е л е н и е 4 [2]. Через $AC^{\gamma}(T;\mathbb{R}^d)$ определим класс функций $x\colon T\to\mathbb{R}^d$, представимых дробным интегралом порядка $\gamma\in(0,1)$ от суммируемой функции: $x(t)=[I^{\gamma}_{\sigma+}\varphi](t)$, $t\in T$, $\varphi\in L_\infty(T;\mathbb{R}^d)$.

О п р е д е л е н и е 5. Функция $x\colon T\to\mathbb{R}^d$ называется решением задачи Коши для системы (1.1), начинающимся в точке x_0, если $x(\cdot)\in AC^{\gamma}(T;\mathbb{R}^d)$, имеет место (1.2) и равенство (1.1) выполнено для п.в. $t\in T$.

Как следует из теоремы 6 [37], решение задачи Коши (1.1), (1.2) определяется формулой

$$x(t)=Z_*(t,\sigma)x_0+\int\limits_{\sigma}^{t}Z(t,s)B(s)u(s)\,ds,\quad t\in T,\tag{1.21}$$

где $Z_*(t,\sigma)$ — фундаментальная матрица, являющаяся решением матричной задачи Коши

$$\begin{gathered}[D^{\gamma}_{*}Z_*(\cdot,\sigma)](t)=A(t)Z_*(t,\sigma),\\ Z_*(\sigma,\sigma)=I_d,\end{gathered}\tag{1.22}$$

а фундаментальная матрица $Z(t,s)$ есть решение матричной задачи Коши

$$\begin{gathered}[D^{\gamma}_{s+}Z(\cdot,s)](t)=A(t)Z(t,s),\\ [I^{1-\gamma}_{s+}Z(\cdot,s)](s)=I_d\end{gathered}\tag{1.23}$$

для $s\in T$, $s<t$. Здесь $I_d\in\mathbb{R}^{d\times d}$ — единичная матрица.

О п р е д е л е н и е 6 [38, с. 56]. Двухпараметрической функцией Миттаг — Леффлера называется целая функция, представимая степенным рядом

$$E_{\gamma,\beta}(z):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\gamma k+\beta)}$$

при $\gamma>0$, $\beta\in\mathbb{C}$.

З а м е ч а н и е 1. Если матрица $A(t)$ в системе (1.1) постоянная, $A(t)\equiv A$, то фундаментальные матрицы, определяемые задачами (1.22), (1.23), имеют вид

$$Z_*(t,s)=E_{\gamma,1}((t-s)^{\gamma}A),\quad Z(t,s)=(t-s)^{\gamma-1}E_{\gamma,\gamma}((t-s)^{\gamma}A).$$

Далее будем рассматривать случай, когда матрицы системы (1.1) постоянны, т. е. система имеет вид

$$[D^{\gamma}_{*}x](t)=Ax(t)+Bu(t),\quad t\in T.\tag{1.24}$$

Введем понятие управляемости изучаемой системы аналогично определению 19.1 из [39]. Для систем дробного порядка вопросам управляемости посвящено много исследований (см., например, работы [40–42]).

О п р е д е л е н и е 7 [40, определение 1]. Система (1.24) называется управляемой (вполне управляемой) на T, если для каждых x_0, $x_1\in\mathbb{R}^d$ существует управление $u(\cdot)$ такое, что струна $x(\cdot|x_0,u(\cdot))$, выходящая в момент времени σ из x_0, в момент θ приходит в x_1, т. е. $x(\theta|x_0,u(\cdot))=x_1$.

Далее будем предполагать выполнение условий существования решения задачи управляемости для системы (1.24) с ограниченным управлением аналогично задаче 4.1 из [39], т. е. найдется управление $u(\cdot)\colon T\to P$ такое, что струна $x(\cdot|x_0,u(\cdot))$, выходящая в момент времени σ из x_0, в момент θ приходит на множество M $(x(\theta|x_0,u(\cdot))\in M)$.

В классической формулировке этого условия (см., например, [43]) используется верхняя $\rho^+(\cdot|E)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ и нижняя $\rho^-(\cdot|E)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ опорные функции произвольного непустого множества $E \subset \mathbb{R}^d$:

$$\rho^+(\ell|E) := \sup_{e\in E}(\ell, e), \quad \rho^-(\ell|E) := \inf_{e\in E}(\ell, e), \quad \ell \in \mathbb{R}^d, \tag{1.25}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. Если обозначить множество достижимости системы (1.24) в виде

$$X(t, x_0) := \left\{ Z_*(t,\sigma)x_0 + \int\limits_{\sigma}^{t} Z(t,s)B(s)u(s)\,ds \colon u(\cdot) \in \mathcal{U} \right\}, \quad t \in T, \tag{1.26}$$

то задача управляемости разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие (следствие 2.1 из [43]):

$$\min_{\|\ell\|=1} \left(\rho^+(\ell|X(\theta, x_0)) + \rho^+(-\ell|M)\right) \geqslant 0.$$

Отметим, что отличием рассматриваемой в работе задачи гарантированного наведения от задачи управляемости является то, что начальное значение x_0 заранее неизвестно и присутствует сигнал о позиции систем (1.3).

2. Конструкции метода пакетов программ

Данный этап решения задачи позиционного наведения (Ps) представляет собой априорный анализ системы до начала ее функционирования. На этом этапе производится определение вспомогательных систем и конструкций метода пакетов программ. Далее мы будем следовать терминологии метода, предложенной в [16].

2.1. Задача пакетного наведения

Сначала рассмотрим однородную систему $[D_*^\gamma x](t) = Ax(t)$; для нее формула решения (1.21) запишется в виде $x(t) = Z_*(t,\sigma)x_0$, $t \in T$. Используя определение сигнала наблюдения $y(\cdot)$, каждому допустимому начальному состоянию $x_0 \in X_0$ поставим в соответствие функцию

$$g_{x_0}(t) := Q(t)Z_*(t,\sigma)x_0, \quad t \in T,$$

которую назовем *однородным сигналом*. Множество всех допустимых начальных состояний x_0, соответствующих однородному сигналу $g(\cdot)$ до момента времени $\tau \in T$, обозначим $X_0(\tau|g(\cdot))$; таким образом, имеем

$$X_0(\tau|g(\cdot)) := \{x_0 \in X_0 \colon g(\cdot)|_{[\sigma,\tau]} = g_{x_0}(\cdot)|_{[\sigma,\tau]}\}, \quad \tau \in T.$$

Здесь и далее символом $g(\cdot)|_{[\sigma,\tau]}$ обозначено сужение однородного сигнала $g(\cdot)$ на отрезок $[\sigma,\tau]$.

Одним из ключевых инструментов метода пакетов программ является *условие неупреждаемости* [13]: для любых однородного сигнала $g(\cdot)$, момента $\tau \in (\sigma,\theta]$ и допустимых начальных состояний $x_0', x_0'' \in X_0(\tau|g(\cdot))$ при всех $t \in [\sigma,\tau]$ выполняется равенство $u_{x_0'}(t) = u_{x_0''}(t)$.

Семейство $u_{X_0}(\cdot) := (u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ программ называем *пакетом программ*, если оно удовлетворяет условию неупреждаемости. Пакет программ $u_{X_0}(\cdot)$ называем *наводящим*, если для любого $x_0 \in X_0$ струна $x(\theta|x_0, u_{X_0}(\cdot)) \in M$. Если существует наводящий пакет программ, то говорим, что *разрешима задача пакетного наведения* (задача (Pk)).

Нетрудно установить справедливость следующей леммы, основываясь на методике доказательства теоремы 2.2 из [14].

Лемма 1. *Пусть множество начальных состояний X_0 конечно. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) *разрешима задача позиционного наведения* (Ps);

2) *разрешима задача пакетного наведения* (Pk).

2.2. Структура множества начальных состояний

Пусть G — множество всех однородных сигналов. Для каждого однородного сигнала $g(\cdot) \in G$ существует конечный набор моментов расслоения $\tau_j(g(\cdot))$, $j = 1, \ldots, n(g(\cdot))$, (см. § 2 [16]), где номер $n(g(\cdot)) \geqslant 1$ такой, что $\tau_{n(g(\cdot))}(g(\cdot)) = \theta$. Введем множество

$$\mathcal{T} := \bigcup_{g(\cdot)\in G} \{\tau_j(g(\cdot))\colon j = 1, \ldots, n(g(\cdot))\}.$$

Нетрудно показать, что оно представимо в виде $\mathcal{T} = \{\tau_1, \ldots, \tau_N\}$, где $\tau_1 < \ldots < \tau_N$.

Для каждого $k = 1, \ldots, N$ в момент τ_k введем *кластер начальных состояний* $X_k := X_0(\tau_k|g(\cdot))$ и *кластерную позицию* $\mathcal{X}(\tau_k) := \{X_0(\tau_k|g(\cdot))\colon g(\cdot) \in G\}$. Тогда для каждого $k = 1, \ldots, N$ кластеры начальных состояний в момент τ_k образуют разбиение множества X_0:

$$X_0 = \bigcup_{X_k\in\mathcal{X}(\tau_k)} X_k,$$

причем $X'_k \bigcap X''_k = \varnothing$, $X'_k, X''_k \in \mathcal{X}(\tau_k)$. Каждый кластер $X_{k-1} \in \mathcal{X}(\tau_{k-1})$ при $k = 2, \ldots, N$ представляет собой объединение конечного числа кластеров из кластерной позиции $\mathcal{X}(\tau_k)$; обозначим его как $\mathcal{X}_k(X_{k-1}) \subset \mathcal{X}(\tau_k)$; тогда

$$X_{k-1} = \bigcup_{X_k\in\mathcal{X}_k(X_{k-1})} X_k.$$

Основываясь на условии неупреждаемости, можно показать для рассматриваемой задачи справедливость леммы 2 из [16]:

Утверждение 1. *Семейство $u_{X_0}(\cdot)$ программ является пакетом программ тогда и только тогда, когда для всякого $k = 1, \ldots, N$, всякого кластера $X_k \in \mathcal{X}(\tau_k)$ и любых начальных состояний x'_0, $x''_0 \in X_k$ выполняется равенство $u_{x'_0}(t) = u_{x''_0}(t)$ при всех $t \in (\tau_{k-1}, \tau_k]$ $(k > 1)$ и при всех $t \in [\sigma, \tau_1]$ $(k = 1)$.*

2.3. Расширенная задача программного наведения

Далее будем представлять пакеты программ как расширенные программные управления. Обозначим через $\mathcal{P}$ множество всех семейств u_{X_0} векторов из P. Всякую измеримую (по Лебегу) функцию $u_{X_0}(\cdot)\colon T \to \mathcal{P}$ назовем *расширенной программой* и всякое семейство $u_{X_0}(\cdot)$ программ будем отождествлять с расширенной программой $t \mapsto u_{X_0}(t)$.

Для каждого $k = 1, \ldots, N$ введем множество $\mathcal{P}_k$ всех семейств $u_{X_0} \in \mathcal{P}$ таких, что для всякого кластера $X_k \in \mathcal{X}(\tau_k)$ и любых начальных состояний $x', x'' \in X_k$ выполняется равенство $u_{x'} = u_{x''}$. Расширенная программа u_{X_0} будет называться *допустимой*, если для каждого $k = 1, \ldots, N$ выполняется $u_{X_0}(t) \in \mathcal{P}_k$ при всех $t \in (\tau_{k-1}, \tau_k]$ в случае $k > 1$ и при всех $t \in [\sigma, \tau_1]$ в случае $k = 1$.

Рассмотрим *расширенную систему*, состоящую из копий системы (1.1), параметризованных допустимыми начальными состояниями $x_0 \in X_0$. Каждая из систем имеет свое соответствующее начальное состояние x_0 и управляется по некоторой программе $u_{x_0}(\cdot)$. Таким образом, имеем следующую расширенную систему:

$$[D^\gamma_* x_{x_0}](t) = Ax_{x_0}(t) + Bu_{x_0}(t), \quad x_{x_0}(\sigma) = x_0, \quad x_0 \in X_0. \tag{2.1}$$

Фазовым пространством этой системы будет $\mathcal{R}^d$, которое назовем *расширенным пространством.* Под $\mathcal{R}^d$ будем понимать конечномерное гильбертово пространство всех семейств векторов $(\ell_{x_0})_{x_0\in X_0}$ из $\mathbb{R}^d$ со скалярным произведением

$$\langle \ell', \ell'' \rangle := \sum_{x_0\in X_0} (\ell'_{x_0}, \ell''_{x_0}), \quad \ell' := (\ell'_{x_0})_{x_0\in X_0} \in \mathcal{R}^d, \quad \ell'' := (\ell''_{x_0})_{x_0\in X_0} \in \mathcal{R}^d. \tag{2.2}$$

Соответственно значение расширенных программ считаем элементами пространства $\mathcal{R}^v$, а само множество допустимых расширенных программ обозначим $\mathcal{U}_p$.

Под *пучком струн* расширенной системы, соответствующим допустимой расширенной программе $u_{X_0}(\cdot)$, будем понимать функцию $t \mapsto x(t|x_0, u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0} \colon T \to \mathcal{R}^d$.

Расширенным целевым множеством будем называть множество $\mathcal{M}$ всех семейств $x_{X_0} := (x_{x_0})_{x_0\in X_0} \in \mathcal{R}^d$ таких, что $x_{x_0}(\theta) \in M$ для всех $x_0 \in X_0$.

Допустимую расширенную программу $u_{X_0}(\cdot)$ будем называть *наводящей для расширенной системы*, если для пучка струн $x(\cdot|x_0, u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ расширенной системы, соответствующего $u_{X_0}(\cdot)$, выполняется условие $x(\theta|x_0, u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0} \in \mathcal{M}$. Тогда *расширенная задача программного наведения* (задача (Pm)) разрешима, если существует допустимая расширенная программа, являющаяся наводящей для расширенной системы. Доказательство следующей леммы проводится аналогично доказательству теоремы 1 из [16].

Лемма 2. *Задача пакетного наведения* (Pk) *разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача* (Pm).

2.4. Критерий разрешимости задачи (Pm)

Обозначим символом $\mathcal{A}$ *множество достижимости* расширенной системы (2.1) в момент θ:

$$\mathcal{A} := \{(x(\theta|x_0, u_{x_0}(\cdot)))_{x_0\in X_0} \colon u_{X_0}(\cdot) \in \mathcal{U}_p\}. \tag{2.3}$$

Здесь $\mathcal{U}_p \subset L_2(T, \mathcal{R}^v)$ — множество допустимых расширенных программ.

Лемма 3. *Пусть $\gamma \in (1/2, 1)$. Тогда множество $\mathcal{A}$ представляет собой выпуклый компакт в $\mathcal{R}^d$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя формулу Коши (1.21), можно записать элементы множества $\mathcal{A}$ для $u_{X_0}(\cdot) \in \mathcal{U}_p$ в виде

$$(x(\theta|x_0, u_{x_0}(\cdot)))_{x_0\in X_0} = \left(Z_*(\theta, \sigma)x_0 + \int_\sigma^\theta Z(\theta, s)B(s)u_{x_0}(s)\, ds \right)_{x_0\in X_0}$$

Рассмотрим подынтегральное выражение в последней формуле. Учитывая замечание 1, имеем

$$Z(\theta, s) = (\theta - s)^{\gamma-1} E_{\gamma,\gamma}((\theta - s)^\gamma A), \quad s \in T,$$

где двухпараметрическая функция Миттаг — Леффлера ограничена [38, с. 62], а особенность при $s = \theta$ интегрируема. Поскольку допустимые расширенные ресурсы $\mathcal{P}_k$, $k = 1, \ldots, N$, равномерно ограничены и выпуклы, то множество $\mathcal{U}_p$ ограничено и выпукло. Тогда множество $\mathcal{A}$ ограничено и выпукло. Если рассмотреть оператор Абеля $A_\gamma \colon L_2[T, \mathcal{R}^v] \to C(T, \mathcal{R}^d)$, задаваемый формулой

$$A_\gamma u(t) := \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_\sigma^t \frac{K(t, s)u(s)}{(t - s)^{1-\gamma}}\, ds,$$

где $K(t, s) := \Gamma(\gamma)E_{\gamma,\gamma}((t - s)^\gamma A)B(s)$ — непрерывная матричная функция на множестве $\{(t, s) \in \mathbb{R}^2 \colon \sigma \leqslant s \leqslant t \leqslant \theta\}$, то, используя теорему 4.3.2 [44], можно показать, что этот оператор является вполне непрерывным. Здесь используется ограничение на порядок дробной производной $\gamma \in (1/2, 1)$. Далее доказательство проводится по схеме леммы 5 из [16]. $\square$

Расширим определения (1.25) для произвольного непустого множества $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}^d$, т.е. имеем его нижнюю $\rho^-(\cdot|\mathcal{E})\colon \mathcal{R}^d \to \mathbb{R}$ и верхнюю $\rho^+(\cdot|\mathcal{E})\colon \mathcal{R}^d \to \mathbb{R}$ опорные функции

$$\rho^-(\ell|\mathcal{E}) := \inf_{e\in\mathcal{E}}\langle \ell, e\rangle, \quad \rho^+(\ell|\mathcal{E}) := \sup_{e\in\mathcal{E}}\langle \ell, e\rangle, \quad \ell \in \mathcal{R}^d.$$

Также будем использовать для мгновенного ресурса управления P в $\mathbb{R}^v$ нижнюю опорную функцию $\rho^-(\ell|P) := \min_{u\in P}(\ell, u)$, $\ell \in \mathbb{R}^v$.

Пусть S — подпространство пространства $\mathbb{R}^d$, ортогональное всем $\ell \in \mathbb{R}^d$ таким, что для всех $x_0 \in X_0$ имеем $\rho^+(\ell|M) = +\infty$. Зафиксируем подмножество $L \subset S$, являющееся образом единичной сферы в S, т. е. содержащее все направления, и длины векторов лежат в промежутке $[r_1, r_2]$, $0 < r_1 < r_2$. Тогда множество всех $\ell_{X_0} := (\ell_{x_0})_{x_0\in X_0} \in \mathcal{R}^d$ таких, что $\ell_{x_0} \in L$ при всех $x_0 \in X_0$, обозначим через $\mathcal{L}$. Теперь можно установить справедливость следующего критерия разрешимости задачи (Pm).

Теорема 1. *Пусть $\gamma \in (1/2, 1)$, и для каждого $\ell_{X_0} \in \mathcal{R}^d$ определена величина*

$$d_a(\ell_{X_0}) := \sum_{x_0\in X_0} (\ell_{x_0}, Z_*(\theta,\sigma)x_0) + \sum_{k=1}^{N}\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \sum_{X_k\in\mathcal{X}(\tau_k)} \rho^-\Bigg(\sum_{x_0\in X_k} B^\top Z^\top(\theta,s)\ell_{x_0}|aP\Bigg)\,ds$$
$$-\sum_{x_0\in X_0}\rho^+(\ell_{x_0}|M). \tag{2.4}$$

Положим $a = 1$. Задача (Pm) *разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{\ell_{X_0}\in\mathcal{L}} d_1(\ell_{X_0}) \leqslant 0. \tag{2.5}$$

Доказательство. На основании леммы 3 нетрудно видеть (см. также теорему 2 из [16]), что критерием разрешимости задачи (Pm) является наличие ненулевого вектора из пересечения $\mathcal{A} \cap \mathcal{M}$, т. е. для каждого $\ell_{X_0} \in \mathcal{R}^d$ выполнено неравенство $\rho^-(\ell_{X_0}|\mathcal{A}) \leqslant \rho^+(\ell_{X_0}|\mathcal{M})$, которое можно переписать в виде $\sup_{\ell_{X_0}\in\mathcal{R}^d}(\rho^-(\ell_{X_0}|\mathcal{A}) - \rho^+(\ell_{X_0}|\mathcal{M})) \leqslant 0$. Преобразуем выражение для нижней опорной функции расширенного множества достижимости, учитывая обозначения (2.2), (2.3), формулу Коши (1.21) и структуру множества начальных данных (см. подразд. 2.2):

$$\rho^-(\ell_{X_0}|\mathcal{A}) = \inf_{u_{X_0}\in\mathcal{U}_p}\sum_{x_0\in X_0}(\ell_{x_0}, x(\theta|x_0, u_{x_0}))$$

$$= \inf_{u_{X_0}\in\mathcal{U}_p}\sum_{x_0\in X_0}\Bigg((\ell_{x_0}, Z_*(\theta,\sigma)x_0) + \int_{\sigma}^{\theta}(\ell_{x_0}, Z(\theta,s)Bu_{x_0}(s))\,ds\Bigg)$$

$$= \inf_{u_{X_0}\in\mathcal{U}_p}\sum_{x_0\in X_0}(\ell_{x_0}, Z_*(\theta,\sigma)x_0) + \inf_{u_{X_0}\in\mathcal{U}_p}\sum_{k=1}^{N}\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}\sum_{x_0\in X_k}(B^\top Z^\top(\theta,s)\ell_{x_0}, u_{x_0}(s))\,ds.$$

Далее доказательство проводим по методике доказательства леммы 3 и теоремы 2 из [16]. $\square$

Замечание 2. При выборе множества L можно потребовать его выпуклость и компактность, что удобно для применения численных методов при проверке условия (2.5).

Для непосредственного конструирования пакетов программ в рассматриваемой задаче можно использовать утверждения (лемма 6, теорема 2 [18]), которые остаются справедливыми.

Лемма 4. *Пусть* $\gamma \in (1/2, 1)$, *и выполнено условие* (2.5), *нулевой пакет программ не является наводящим для расширенной системы. Тогда существует* $a^* \in (0, 1]$ *такое, что*

$$\max_{\ell_{X_0} \in \mathcal{L}} d_{a^*}(\ell_{X_0}) = 0. \tag{2.6}$$

Теорема 2. *Пусть* $\gamma \in (1/2, 1)$, *множество* P *строго выпуклое и содержит в себе нулевой элемент, а также выполнено условие* (2.6) *и* $\ell^*_{X_0} \in \mathcal{L}$ *является вектором, на котором достигается этот максимум, причем вектор* $B^\top Z^\top(\theta, \tau) \sum_{x_0 \in X_k} \ell^*_{x_0} \neq 0$ *при всех* $\tau \in T$. *Пусть расширенная программа* $t \to u_{X_0}(t)$ *такая, что* $u_{x_0}(t) \in a^* P$ *для всех* $x_0 \in X_0$, *и для произвольного* $k = 1, \ldots, N$, *для всех* $t \in [\tau_{k-1}, \tau_k)$ *и произвольного кластера* $X_k \in \mathcal{X}(\tau_k)$ *выполняется равенство*

$$\Big(B^\top Z^\top(\theta, t) \sum_{x_0 \in X_k} \ell^*_{x_0}, u_{X_k}(t)\Big) = \rho^- \Big(B^\top Z^\top(\theta, t) \sum_{x_0 \in X_k} \ell^*_{x_0} | a^* P\Big), \quad t \in [\tau_{k-1}, \tau_k).$$

Тогда расширенная программа $t \to u_{X_0}(t)$ *является наводящей.*

3. Пример

Пусть линейная система дробного порядка представляет собой уравнение маятника [45]

$$m[D^{2\gamma}_* x](t) + kx(t) = q(t).$$

Параметры m и k имеют смысл некоторой *псевдомассы* и *псевдожесткости*, $q(t)$ — обобщенные силы. Преобразуем последнюю систему, вводя новые переменные и управление:

$$\begin{aligned} &[D^\gamma_* x_1](t) = x_2(t), \\ &[D^\gamma_* x_2](t) = -a x_1(t) + u(t). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь $x_1(t) := x(t)$, $x_2(t) := [D^\gamma_* x](t)$, $a := k/m$, $u(t) := q(t)/m$, $\gamma = 0.8 \in (1/2, 1)$. Пусть значения управления $u(t)$ ограничены отрезком $[-1, 1]$, а также $a = 1/2$. Таким образом, имеем следующие параметры системы (1.1): $d = 2$, $P = [-1, 1]$ и матрицы A и B имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Зададим временной отрезок функционирования системы $T = [\sigma, \theta] = [0, 2]$, и пусть множество допустимых начальных состояний состоит из двух различных точек

$$X_0 = \{x', x''\}, \quad x' = (1, -1)^\top, \quad x'' = (1, 0.1)^\top. \tag{3.2}$$

Будем считать, что данные о положении системы на отрезке $[0, 1]$ будут недоступны для наблюдения, а на полуинтервале $(1, 2]$ состояние системы будет полностью отслеживаться, т. е. для сигнала вида $y(t) = Q(t)x(t)$ матрица наблюдения определяется формулой

$$Q(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1], \\ (t-1)I_2, & t \in (1, 2], \end{cases}$$

где $I_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ — единичная матрица.

Задача гарантированного позиционного управления состоит в том, чтобы привести координату x_1 системы (3.1) в момент времени 2 в некоторую ε-окрестность целевого множества

$M_1 = [1.2, 2]$. Другими словами, целевым множеством задачи наведения для системы (3.1) будет цилиндрическое множество с ограниченным основанием

$$M = \big\{(x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 \in M_1, x_2 \in \mathbb{R}\big\}.$$

Сначала проверим, что не существует тривиального наводящего пакета программ, т.е. найдется $x_0 \in X_0$ такое, что $x_1(2; x_0, 0) \notin M$. Для этого сначала вычисляем собственные числа матрицы A, они равны $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}i/2$, и находим матрицу, приводящую A к жордановой форме:

$$A = VJV^{-1}, \quad J = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2), \quad V = \begin{pmatrix} \sqrt{2}i & -\sqrt{2}i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда в формуле Коши (1.21) фундаментальные матрицы определяются формулами

$$Z_*(t, s) = VE_{\gamma,1}((t-s)^\gamma J)V^{-1}, \tag{3.3}$$

$$Z(t, s) = (t-s)^{\gamma-1} VE_{\gamma,\gamma}((t-s)^\gamma J)V^{-1},$$

где значения матричной функции Миттаг — Леффлера легко вычисляются (см. также [46, с. 46]):

$$E_{\gamma,1}((t-s)^\gamma J) = \operatorname{diag}(E_{\gamma,1}(\lambda_1(t-s)^\gamma), E_{\gamma,1}(\lambda_2(t-s)^\gamma)),$$
$$E_{\gamma,\gamma}((t-s)^\gamma J) = \operatorname{diag}(E_{\gamma,\gamma}(\lambda_1(t-s)^\gamma), E_{\gamma,\gamma}(\lambda_2(t-s)^\gamma)),$$

Поскольку собственные числа комплексно сопряженные, $\lambda_1 = \overline{\lambda}_2$, то, принимая во внимание определение 6, нетрудно видеть, что

$$E_{\gamma,1}(\overline{\lambda}_2(t-s)^\gamma) = \overline{E}_{\gamma,1}(\lambda_2(t-s)^\gamma), \quad E_{\gamma,\gamma}(\overline{\lambda}_2(t-s)^\gamma) = \overline{E}_{\gamma,\gamma}(\lambda_2(t-s)^\gamma).$$

Тогда, вводя обозначения

$$r_*(t, s) := \operatorname{Re}(E_{\gamma,1}(\lambda_1(t-s)^\gamma)), \quad j_*(t, s) := \operatorname{Im}(E_{\gamma,1}(\lambda_1(t-s)^\gamma)),$$

$$r(t, s) := \operatorname{Re}(E_{\gamma,\gamma}(\lambda_1(t-s)^\gamma)), \quad j(t, s) := \operatorname{Im}(E_{\gamma,\gamma}(\lambda_1(t-s)^\gamma)),$$

вычисляем фундаментальные матрицы

$$Z_*(t, s) = \begin{pmatrix} r_*(t, s) & -\sqrt{2} j_*(t, s) \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} j_*(t, s) & r_*(t, s) \end{pmatrix}, \quad Z(t, s) = (t-s)^{\gamma-1} \begin{pmatrix} r(t, s) & -\sqrt{2} j(t, s) \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} j(t, s) & r(t, s) \end{pmatrix},$$

т. е. все элементы матриц — действительные функции.

Подставляя (3.3) в (1.21) с учетом последних формул, для каждого начального состояния (3.2) вычисляем

$$x_1(2; x', 0) = 1.33, \quad x_1(2; x'', 0) = 0.085,$$

т. е. концы струн из начальных точек x' и x'' в момент θ при тривиальном пакете программ не принадлежат целевому множеству M.

Однородный сигнал, соответствующий допустимому начальному состоянию x', имеет вид

$$g_{x'}(t) = Q(t)Z_*(t, \sigma)x' = \begin{cases} (0, 0)^\top, & t \in [0, 1], \\ (t-1)Z_*(t, \sigma)x', & t \in (1, 2], \end{cases}$$

аналогичным образом находится $g_{x''}(t)$. Поскольку начальные состояния различаются, $x' \neq x''$, то $\tau_1 = 1$ — первый момент расслоения для каждого из этих однородных сигналов, и конечный момент $\theta = 2$ будет вторым моментом расслоения τ_2, следовательно, число N моментов расслоения однородных сигналов равно 2. Следуя построениям из подразд. 2.2, получаем, что кластерная позиция $\mathcal{X}(1)$ содержит единственное множество X_0, а кластерная позиция $\mathcal{X}(2)$ содержит два одноэлементных множества, $\{x'\}$ и $\{x''\}$.

Выберем в качестве $\mathcal{S}$ множество всех семейств

$$\begin{pmatrix} (\ell_1', \ell_2')^\top \\ (\ell_1'', \ell_2'')^\top \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^2$$

таких, что выполнено одно из соотношений $|\ell_1'| = 1,\ |\ell_1''| \leqslant 1$, или $|\ell_1'| \leqslant 1,\ |\ell_1''| = 1$. Тогда подмножество $\mathcal{L} \subset \mathcal{S}$ составим из векторов, для которых верны равенства $\ell_2' = \ell_2'' = 0$.

Вычислим значения опорных функций $\rho^-(\ell|P) = |\ell|,\ \rho^+((\ell,0)^\top|M) = 2|\ell|$. Тогда формула (2.4) при $a = 1$ примет вид

$$d_1((\ell',0)^\top,(\ell'',0)^\top) = (r_*(2,0) + \sqrt{2}j_*(2,0))\ell' + \Big(r_*(2,0) - \frac{\sqrt{2}}{2}j_*(2,0)\Big)\ell''$$
$$- \sqrt{2}|\ell' + \ell''| \int_0^1 (2-s)^{\gamma-1} j(2,s)\,ds - \sqrt{2}(|\ell'| + |\ell''|) \int_1^2 (2-s)^{\gamma-1} j(2,s)\,ds - 2|\ell'| - 2|\ell''|.$$

В результате находим значение

$$\max_{\ell',\ell''\in\mathcal{L}} d((\ell',0)^\top,(\ell'',0)^\top) = -2.27 \leqslant 0,$$

которое достигается при $l' = 1$ и $l'' = 0$ и удовлетворяет критерию разрешимости (2.5). Таким образом, мы имеем по лемме 1, лемме 2 и теореме 1, что все три задачи наведения ((Ps), (Pk) и (Pm)) разрешимы.

Далее, можно построить следующий пакет программ:

$$u_{x'}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1], \\ -1, & t \in (1,2], \end{cases} \qquad u_{x''}(t) = 1, \quad t \in [0,2].$$

Применяя данные управления для струн системы (3.1), выходящих из точек x' и x'', получаем их конечные значения

$$x_1(2|x', u_{x'}(\cdot)) = 1.56, \quad x_1(2|x'', u_{x''}(\cdot)) = 1.22,$$

т. е. струны приходят на целевое множество M в момент времени $\theta = 2$.

Заключение

В работе рассмотрена задача гарантированного позиционного наведения для динамической управляемой системы, описываемой системой дифференциальных уравнений с дробной производной типа Капуто. Предполагается, что управляющей стороне неизвестно начальное состояние системы, но известно конечное множество, которому оно принадлежит. Выбор управляющего воздействия определяется в режиме онлайн по сигналу наблюдения с целью достижения системой в заданный момент времени заданного множества. Для решения задачи используется такой инструмент, как метод программных пакетов Осипова — Кряжимского. В одном из разделов работы также приведен обзор результатов, посвященных развитию данного метода. На основании конструкций метода пакетов программ выводится критерий разрешимости задачи гарантированного позиционного наведения для системы дробного порядка. Рассмотрен пример конкретной управляемой механической системы с дробной производной типа Капуто, для нее проводится анализ разрешимости задачи гарантированного позиционного наведения с использованием разработанной техники, и строится наводящий пакет программ. Применение полученных в работе результатов возможно в частично наблюдаемых системах с наследственными свойствами, являющимися математическими моделями процессов в медицине, в производстве современных материалов и других областях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
2. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.** Theory and applications of fractional differential equations. NY: Elsevier Science, 2006. 540 p.
3. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
4. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
6. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
7. **Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.** Applications of fractional calculus to dynamic problem linear and nonlinear hereditary mechanics of solids // Appl. Mech. Rev. 1997. Vol. 50, no. 1. P. 15–67. doi: 10.1115/1.3101682
8. **Tarasov V.E.** Geometric interpretation of fractional-order derivative // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2016. Vol. 19, no. 5. P. 1200–1221. doi: 10.1515/fca-2016-0062
9. **Uchaikin V.V.** Fractional derivatives for physicists and engineers: vol. I: Background and theory; vol. II: Applications. Heidelberg: Springer, 2013. 385 p. doi: 10.1007/978-3-642-33911-0
10. **Мачтакова А.И., Петров Н.Н.** О двух задачах преследования группы убегающих в дифференциальных играх с дробными производными // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2024. Т. 34, № 1. С. 65–79. doi: 10.35634/vm240105
11. **Gomoyunov M.I.** Fractional derivatives of convex Lyapunov functions and control problems in fractional order systems // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2018. Vol. 21, no. 5. P. 1238–1261. doi: 10.1515/fca-2018-0066
12. **Matychyn I., Onyshchenko V.** Time-optimal control of linear fractional systems with variable coefficients // Internat. J. Appl. Math. Comp. Sci. 2021. Vol. 31, no. 3. P. 375–386. doi: 10.34768/amcs-2021-0025
13. **Осипов Ю.С.** Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, № 4 (370). С. 25–76. doi: 10.4213/rm1760
14. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** Идеализированные пакеты программ и задачи позиционного управления с неполной информацией // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 139–157.
15. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О разрешимости задач гарантирующего управления для частично наблюдаемых линейных динамических систем // Тр. МИАН. 2012. Т. 277. С. 152–167.
16. **Кряжимский А.В., Стрелковский Н.В.** Программный критерий разрешимости задачи позиционного наведения с неполной информацией. Линейные управляемые системы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 132–147.
17. **Кряжимский А.В., Стрелковский Н.В.** Задача гарантированного позиционного наведения линейной управляемой системы к заданному моменту времени при неполной информации. Программный критерий разрешимости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 168–177.
18. **Стрелковский Н.В.** Построение стратегии гарантированного позиционного наведения для линейной управляемой системы при неполной информации // Вестн. Москов. ун-та. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 2015. № 3. С. 27–34.
19. **Максимов В.И., Сурков П.Г.** О разрешимости задачи гарантированного пакетного наведения на систему целевых множеств // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2017. Т. 27, № 2. С. 344–354. doi: 10.20537/vm170305
20. **Орлов С.М.** Об одном классе расширенных задач программного управления на целевое множество // Вестн. Москов. ун-та. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 2018. № 1. С. 6–16.
21. **Орлов С.М., Стрелковский Н.В.** Вычисление элементов наводящего пакета программ для особых кластеров множества начальных состояний в задаче пакетного наведения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 1. С. 150–165. doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-1-150-165

22. **Стрелковский Н.В., Орлов С.М.** Алгоритм построения гарантирующего пакета программ в задаче управления при неполной информации // Вестн. Москов. ун-та. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 2018. № 2. С. 20–31.
23. **Сурков П.Г.** Задача пакетного наведения с неполной информацией при интегральном сигнале наблюдения // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Т. 15. С. 373–388. doi: 10.17377/semi.2018.15.034
24. **Surkov P.G.** On the problem of package guidance for nonlinear control system via fuzzy approach // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, no. 32. P. 733–738. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.459
25. **Takagi T., Sugeno M.** Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. 1985. Vol. SMC-15, no. 1. P. 116–132. doi: 10.1109/TSMC.1985.6313399
26. **Максимов В.И.** Дифференциальная игра наведения при неполной информации о фазовых координатах и неизвестном начальном состоянии // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 12. С. 1676–1685.
27. **Максимов В.И.** Об одной задаче гарантированного наведения при неполной информации // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 2. С. 199–210. doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-199-210
28. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: Изд-во ИММ УрО РАН, 2011. 292 с.
29. **Максимов В.И.** Задача наведения распределенной системы: случай неполной информации о фазовых координатах и неизвестном начальном состоянии // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 11. С. 1495–1505. doi: 10.1134/S0374064116110066
30. **Розенберг В.Л.** Об одной задаче управления при дефиците информации для линейного стохастического дифференциального уравнения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 292–302.
31. **Близорукова М.С.** Об одной задаче управления линейной системой с запаздыванием в управлении // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 2. С. 55–62. doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-55-62
32. **Сурков П.Г.** О задаче пакетного наведения с неполной информацией для линейной управляемой системы с запаздыванием // Проблемы динамического управления : сб. науч. тр. под ред. Ю.С. Осипова / фак. ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова. № 7. М.: Изд. отдел фак-та ВМиК МГУ; МАКС Пресс, 2016. С. 94–108.
33. **Сурков П.Г.** Задача пакетного наведения к заданному моменту времени для линейной управляемой системы с запаздыванием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 2. С. 267–276. doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-267-276
34. **Григоренко Н.Л., Румянцев А.Е.** Об одном классе задач управления при неполной информации // Тр. МИАН. 2015. Т. 291. С. 76–85. doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-113-121
35. **Григоренко Н.Л., Кондратьева Ю.А., Лукьянова Л.Н.** Задача нахождения гарантирующего программного управления при неполной информации для линейной системы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 41–49.
36. **Григоренко Н.Л., Румянцев А.Е.** Терминальное управление нелинейным процессом при наличии помех // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 2. С. 113–121. doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-113-121
37. **Bourdin L.** Cauchy–Lipschitz theory for fractional multi-order dynamics: State-transition matrices, Duhamel formulas and duality theorems // Differential and Integral Equations. 2018. Vol. 31, no. 7/8. P. 559–594. doi: 10.57262/die/1526004031
38. **Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V.** Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications. Berlin: Springer-Verlag, 2014. 454 p.
39. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
40. **Balachandran K., Kokila J.Y.** On the controllability of fractional dynamical systems // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2012. Vol. 22, no. 3. P. 523–531. doi: 10.2478/v10006-012-0039-0
41. **Kulczycki P., Korbicz J., Kacprzyk J.** Fractional dynamical systems: methods, algorithms and applications. Cham: Springer, 2022. 397 p. doi: 10.1007/978-3-030-89972-1
42. **Matignon D., d'Andréa-Novel B.** Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems // Computational Engineering in Systems Applications. Citeseer, 1996. Vol. 2. P. 952–956.
43. **Matychyn I., Onyshchenko V.** Optimal control of linear systems with fractional derivatives // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2018. Vol. 21, no. 1. P. 134–150. doi: 10.1515/fca-2018-0009

44. **Gorenflo R., Vessella S.** Abel Integral Equations: Analisys and Applications. Berlin: Springer, 1991. 222 p. doi: 10.1007/BFb0084665
45. **Agarwal O.P.** A new Lagrangian and a new Lagrange equation of motion for fractionally damped systems // J. Appl. Mech. 2001. Vol. 68, no. 2. pp. 339–341. doi: 10.1115/1.1352017
46. **Monje C.A., Chen Y., Vinagre B.M., Xue D., Feliu V.** Fractional-order systems and controls: Fundamentals and applications. London: Springer-Verlag, 2014. 415 p. doi: 10.1007/978-1-84996-335-0

Поступила 15.04.2024
После доработки 02.05.2024
Принята к публикации 06.05.2024

Сурков Платон Геннадьевич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
доцент
кафедра прикладной математики и механики
Институт естественных наук и математики
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: spg@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Kurzhanskii A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and observation under the conditions of uncertainty]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 392 p.
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and applications of fractional differential equations.* Amsterdam, Elsevier Science Publ., 2006, 540 p. ISBN-13: 978-0444518323 .
3. Krasovskii N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii* [Game problems on the encounter of motions]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 420 p.
4. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* NY, Springer, 1988, 528 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . This book is substantially revised version of the monograph *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
5. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniy* [Guarantee optimization in control problems]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 288 p.
6. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications.* Switzerland, Gordon and Breach Sci. Publ., 1993, 976 p. ISBN: 9782881248641. Original Russian text published in Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya*, Minsk, Nauka i Tekhnika Publ., 1987, 688 p.
7. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Applications of fractional calculus to dynamic problem linear and nonlinear hereditary mechanics of solids. *Appl. Mech. Rev.*, 1997, vol. 50, no. 1, pp. 15–67. doi: 10.1115/1.3101682
8. Tarasov V.E. Geometric interpretation of fractional-order derivative. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2016, vol. 19, no. 5, pp. 1200–1221. doi: 10.1515/fca-2016-0062
9. Uchaikin V.V. *Fractional derivatives for physicists and engineers: vol. I Background and theory, vol. II Applications.* Heidelberg: Springer, 2013, 385 p. doi: 10.1007/978-3-642-33911-0
10. Machtakova A.I., Petrov N.N. On two problems of pursuit of a group of evaders in differential games with fractional derivatives. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2024, vol. 34, no. 1, pp. 65–79 (in Russian). doi: 10.35634/vm240105
11. Gomoyunov M.I. Fractional derivatives of convex Lyapunov functions and control problems in fractional order systems. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2018, vol. 21, no. 5, pp. 1238–1261. doi: 10.1515/fca-2018-0066
12. Matychyn I., Onyshchenko V. Time-optimal control of linear fractional systems with variable coefficients. *Inter. J. Appl. Math. and Comp. Sci.*, 2021, vol. 31, no. 3, pp. 375–386. doi: 10.34768/amcs-2021-0025
13. Osipov Yu.S. Control packages: an approach to solution of positional control problems with incomplete information. *Russ. Math. Surv.*, 2006, vol. 61, no. 4, pp. 611–661. doi: 10.1070/RM2006v061n04ABEH004342

14. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. Idealized program packages and problems of positional control with incomplete information On the solvability of problems of guaranteeing control for partially observable linear dynamical systems. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2010, vol. 268, suppl. 1, pp. S155–S174. doi: 10.1134/S0081543810050123
15. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. On the solvability of problems of guaranteeing control for partially observable linear dynamical systems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2012, vol. 277, pp. 144–159. doi: 10.1134/S0081543812040104
16. Kryazhimskii A.V., Strelkovskii N.V. An Open-loop criterion for the solvability of a closed-loop guidance problem with incomplete information: Linear control systems. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2015, vol. 291, suppl. 1, pp. S113–S127. doi: 10.1134/S0081543815090084
17. Kryazhimskii A.V., Strelkovskii N.V. A problem of the guaranteed positional guidance of a linear control system to a given moment in time under incomplete information. Program criterion for solvability. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2014, vol. 20, no. 4, pp. 168–177 (in Russian).
18. Strelkovskii N.V. Constructing a strategy for the guaranteed positioning guidance of a linear controlled system with incomplete data. *Moscow Univ. Comput. Math. Cybern.*, 2015, vol. 39, pp. 126–134. doi: 10.3103/S0278641915030085
19. Maksimov V.I., Surkov P.G. On the solvability of the problem of guaranteed package guidance to a system of target sets. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2017, vol. 27, no. 3, pp. 344–354 (in Russian). doi: 10.20537/vm170305
20. Orlov S.M. Ivestigating one class of extended open-loop guidance problems. *Moscow Univ. Comput. Math. Cybern.*, 2018, vol. 42, pp. 5–14. doi: 10.3103/S0278641918010077
21. Orlov S.M., Strelkovskii N.V. Calculation of elements of a guiding program package for singular clusters of the set of initial states in the package guidance problem. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2020, vol. 308, suppl. 1, pp. S163–S177. doi: 10.1134/S0081543820020133
22. Strelkovskii N.V., Orlov S.M. Algorithm for constructing a guaranteeing program package in a control promlem with incomplete information. *Moscow Univ. Comput. Math. Cybern.*, 2018, vol. 42, pp. 69–79. doi: 10.3103/S0278641918020061
23. Surkov P.G. The problem of package guidance under incomplete information and integral signal of observation. *Sib. Electron. Math. Rep.*, 2018, vol. 15, pp. 373–388 (in Russian). doi: 10.17377/semi.2018.15.034
24. Surkov P.G. On the problem of package guidance for nonlinear control system via fuzzy approach. *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, no. 32, pp. 733–738. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.459
25. Takagi T., Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transact. Syst., Man, and Cybernetics*, 1985, vol. SMC-15, no. 1, pp. 116–132. doi: 10.1109/TSMC.1985.6313399
26. Maksimov V.I. Differential guidance game with incomplete information on the state coordinates and unknown initial state. *Diff. Equ.*, 2015, vol. 51, no. 12, pp. 1656–1665. doi: 10.1134/S0012266115120137
27. Maksimov V.I. On a guaranteed guidance problem under incomplete information. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2017, vol. 297, suppl. 1, pp. S147–S158. doi: 10.1134/S0081543817050157
28. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I. *Metody dinamicheskogo vosstanovleniya vkhodov upravlyaemykh sistem* [Methods for dynamic reconstruction of inputs of control systems]. Ekaterinburg, Ural Branch of RAS Publ., 2011, 291 p.
29. Maksimov V.I. Guidance problem for a distributed sytem with incomplete information on the state coordinates and an unknown initial state. *Diff. Equ.*, 2016, vol. 52, no. 11, pp. 1442–1452. doi: 10.1134/S0012266116110069
30. Rozenberg V.L. A control problem under incomplete information for a linear stochastic differential equation. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2016, vol. 295, suppl. 1, pp. S145–S155. doi: 10.1134/S0081543816090157
31. Blizorukova M.S. On a control problem for a linear system with delay in the control. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2017, vol. 297, suppl. 1, pp. S35–S42. doi: 10.1134/S0081543817050054
32. Surkov P.G. The problem of package guidance with incomplete information for a linear control system with a delay. *Comput. Math. Model.*, 2017, vol. 28, pp. 504–516. doi: 10.1007/s10598-017-9377-y
33. Surkov P.G. The problem of package guidance by a given time for a linear control system with delay. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 291, no. 1, pp. S68–S77. doi: 10.1134/S0081543815080076
34. Grigorenko N.L., Rumyantsev A.E. On a class of control problems with incomplete information. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 291, no. 1, pp. 68–77. doi: 10.1134/S0081543815080076

35. Grigorenko N.L., Kondrat'eva Yu.A., Luk'yanova L.N. The problem of finding a guaranteed program control under incomplete information for a linear system. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2015, vol. 21, no. 2, pp. 41–49 (in Russian).
36. Grigorenko N.L., Rumyantsev A.E. Terminal control of a nonlinear process under disturbances. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2017, vol. 297, suppl. 1, pp. S108–S116. doi: 10.1134/S0081543817050121
37. Bourdin L. Cauchy — Lipschitz theory for fractional multi-order dynamics: State-transition matrices, Duhamel formulas and duality theorems. *Differ. Int. Equations*, 2018, vol. 31, no. 7/8, pp. 559–594. doi: 10.57262/die/1526004031
38. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. *Mittag — Leffler Functions, Related Topics and Applications*. Berlin, Springer-Verlag, 2014, 454 p.
39. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Motion control theory]. Moscow, Nauka Publ, 1968, 476 pp.
40. Balachandran K., Kokila J.Y. On the controllability of fractional dynamical systems. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 2012, vol. 22, no. 3, pp. 523–531. doi: 10.2478/v10006-012-0039-0
41. Kulczycki P., Korbicz J., Kacprzyk J. *Fractional dynamical systems: methods, algorithms and applications*. Cham, Springer, 2022, 397 p. doi: 10.1007/978-3-030-89972-1
42. Matignon D., d'Andréa-Novel B. Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems. *Comput. Engin. Syst. Appl.*, 1996, vol. 2. pp. 952–956.
43. Matychyn I., Onyshchenko V. Optimal control of linear systems with fractional derivatives. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2018, vol. 21, no. 1, pp. 134–150. doi: 10.1515/fca-2018-0009
44. Gorenflo R., Vessella S. *Abel Integral Equations: Analisys and Applications*. Berlin, Springer, 1991, 222 p. doi: 10.1007/BFb0084665
45. Agarwal O.P. A new Lagrangian and a new Lagrange equation of motion for fractionally damped systems. *J. Appl. Mech.*, 2001, vol. 68, no. 2, pp. 339–341. doi: 10.1115/1.1352017
46. Monje C.A., Chen Y., Vinagre B.M., Xue D., Feliu V. *Fractional-order systems and controls: fundamentals and applications*. London, Springer-Verlag, 2014, 415 p. doi: 10.1007/978-1-84996-335-0

Received April 15, 2024
Revised May 2, 2024
Accepted May 6, 2024

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 21-71-10070, https://rscf.ru/project/21-71-10070/).

Platon Gennad'evich Surkov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: spg@imm.uran.ru .

Cite this article as: P. G. Surkov. Package guidance problem for a fractional-order system. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 222–242 .