ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 2 2024

УДК 517.9

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПРАВИЛА МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА В ВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧАХ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ[1]

М. И. Сумин

Рассматривается регуляризация правила множителей Лагранжа (ПМЛ) в недифференциальной форме в выпуклой задаче на условный экстремум с операторным ограничением-равенством в гильбертовом пространстве и конечным числом функциональных ограничений-неравенств. Целевой функционал задачи предполагается сильно выпуклым, а выпуклое замкнутое множество ее допустимых элементов также принадлежит гильбертову пространству. Ограничения задачи содержат аддитивно входящие в них параметры, что обеспечивает возможность применения для ее исследования так называемого метода возмущений. Основное предназначение регуляризованного ПМЛ — устойчивое генерирование обобщенных минимизирующих последовательностей (ОМП), аппроксимирующих посредством экстремалей регулярного функционала Лагранжа точное решение задачи. Само же регуляризованное ПМЛ можно трактовать как ОМП-образующий (регуляризирующий) оператор, который каждому набору исходных данных задачи на условный экстремум ставит в соответствие экстремаль ее отвечающего этому набору регулярного функционала Лагранжа, двойственная переменная в котором генерируется в соответствии с той или иной процедурой стабилизации двойственной задачи. Главное внимание в статье уделяется: 1) изучению связи процедуры двойственной регуляризации с субдифференциальными свойствами функции значений исходной задачи; 2) доказательству сходимости этой процедуры в случае разрешимости двойственной задачи; 3) соответствующему обновлению регуляризованного ПМЛ; 4) получению классического ПМЛ как предельного варианта его регуляризованного аналога.

Ключевые слова: выпуклая задача на условный экстремум, правило множителей Лагранжа, регуляризация, метод возмущений, функция значений, субдифференциал, двойственная задача, обобщенная минимизирующая последовательность, регуляризирующий алгоритм.

M. I. Sumin. The perturbation method and a regularization of the Lagrange multiplier rule in convex problems for constrained extremum.

We consider a regularization of the Lagrange multiplier rule (LMR) in the nondifferential form in a convex problem for constrained extremum with an operator equality-constraint in a Hilbert space and a finite number of functional inequality-constraints. The objective functional of the problem is assumed to be strongly convex, and the convex closed set of its admissible elements also belongs to a Hilbert space. The constraints of the problem contain additively included parameters, which makes it possible to use the so-called perturbation method to study it. The main purpose of the regularized LMR is the stable generation of generalized minimizing sequences (GMSs), which approximate the exact solution of the problem using extremals of the regular Lagrange functional. The regularized LMR itself can be interpreted as a GMS-generating (regularizing) operator, which assigns to each set of input data of the constrained extremum problem the extremal of its corresponding regular Lagrange functional, in which the dual variable is generated in accordance with one or another procedure for stabilizing the dual problem. The main attention is paid to: (1) studying the connection between the dual regularization procedure and the subdifferential properties of the value function of the original problem; 2) proving the convergence of this procedure in the case of solvability of the dual problem; (3) an appropriate update of the regularized LMR; (4) obtaining the classical LMR as a limiting version of its regularized analog.

Keywords: convex problem for constrained extremum, Lagrange multiplier rule, regularization, perturbation method, value function, subdifferential, dual problem, generalized minimizing sequence, regularizing algorithm.

MSC: 49K27, 49N15, 47A52, 90C46, 90C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-2-203-221

[1]Результаты исследований автора, представленные в разд. 1–3, получены за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-20020, https://rscf.ru/project/23-11-20020/; результаты исследований, представленные в разд. 4, получены за счет гранта Министерства образования и науки Тамбовской области № 2-ФП-2023.

Введение

Считается устоявшимся мнение о том, что правило множителей Лагранжа (ПМЛ) обязано своим появлением без малого два с половиной века тому назад потребностям решения задач самого различного характера, связанных с практической деятельностью людей [1–3]. С того времени теория принципа Лагранжа получила фундаментальное развитие, ее методы вошли в основной аппарат многих разделов современной математики, других естественных наук. И в самое последнее время многообразие, сложность и актуальность задач на условный экстремум, или, как еще говорят, задач на экстремум при наличии ограничений, безусловно служат мотивацией для развития различных связанных с множителями Лагранжа аспектов математической теории данного направления (см., например, [3–6]).

Главная особенность настоящей работы, отличающая ее от подавляющего числа других публикаций, связанных с ПМЛ в задачах на условный экстремум, состоит в том, что она посвящена регуляризации этого классического правила. Эта регуляризация объясняется просто и связана с его некорректностью (необходимые подробности можно найти, например, в [7]), на которую можно смотреть как на естественное следствие хорошо известной некорректности "самих" задач условной оптимизации в целом [8]. Некорректность правила множителей неизбежно заставляет учитывать связанные с ней проблемы при решении на его основе многих актуальных задач современного естествознания. Она является тем данным ему природой свойством, которое выявляет недостаточность "формального выписывания" его соотношений [1–3] при практическом решении задач условной оптимизации.

Рассматривать правило множителей как "типичный" математический объект получившей фундаментальное развитие в последние шесть десятков лет теории некорректных задач (см., например, [9–12]) и регуляризовать его на основе двойственного подхода к регуляризации [13] было предложено в работе [14]. Основная идея такого подхода заключается в организации процедуры стабилизации по Тихонову [9] в двойственной к исходной задаче на условный экстремум. Эта стабилизация в свою очередь приводит к конструктивному устойчивому приближению к решению исходной задачи посредством экстремалей ее регулярного функционала Лагранжа, двойственная переменная в котором вырабатывается в соответствии с указанной тихоновской стабилизацией [7;14]. Как результат регуляризованное ПМЛ в недифференциальной форме — регуляризованный принцип Лагранжа: 1) выражается в форме носящей секвенциальный характер теоремы существования обобщенных минимизирующих последовательностей (ОМП)[2] в задаче условной минимизации с одновременным конструктивным представлением их конкретных представителей вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная задача; 2) полностью сохраняет структурное устройство своего классического "недифференциального" аналога и приводит к нему "в пределе"; 3) представляет собой ОМП-образующий алгоритм в смысле [17] в задаче на условный экстремум (см. ниже определение 1).

Следует подчеркнуть, что обсуждаемая "регуляризация в задаче на условный экстремум посредством регуляризации в ней ПМЛ" существенно отличается от хорошо известной регуляризации "непосредственно самой" задачи на условный экстремум [8, гл. 9]. В последнем случае, как известно [8, гл. 9], аппроксимация точного решения исходной задачи происходит посредством экстремалей функционалов Тихонова соответствующих вспомогательных оптимизационных задач общего вида (без ограничений типа равенства и неравенства), организуемых на основе тех или иных соображений в силу исходной задачи на условный экстремум.

Данную работу можно считать прямым продолжением работы [14]. Здесь рассматривается такая же, как и в [14], но при несколько менее ограничительных предположениях об исходных данных (см. ниже замечание 1) каноническая параметрическая выпуклая задача на условный экстремум (см. [1, п. 3.3.2]) в гильбертовом пространстве с непрерывным сильно выпуклым

[2]Понятие ОМП совпадает с известным в математическом программировании понятием обобщенного оптимального плана в смысле [15], а также с используемым в оптимальном управлении понятием минимизирующего приближенного решения в смысле Дж. Варги [16, гл. III].

функционалом цели, с содержащими аддитивно входящие в них параметры операторным (т. е. задаваемым оператором с бесконечномерным образом) ограничением-равенством в гильбертовом пространстве и конечным числом функциональных ограничений-неравенств. Именно наличие параметров в ограничениях задачи обусловило присутствие словосочетания "метод возмущений" в названии работы. Необходимую информацию об этом методе можно найти, например, в [1, п. 3.3.2].

Ниже в отличие от [14] основной упор делается на: 1) изучение связи процедуры двойственной регуляризации с субдифференциальными свойствами функции значений исходной задачи (разд. 1–4); 2) доказательство сходимости этой процедуры в случае разрешимости двойственной задачи (разд. 2); 3) соответствующее обновление регуляризованного ПМЛ в недифференциальной форме (разд. 3, теорема 1); 4) получение классического "недифференциального" ПМЛ как предельного варианта его регуляризованного аналога (разд. 4). Заметим, что регуляризация ПМЛ для выпуклых задач на условный экстремум, целевые функционалы которых не являются сильно выпуклыми, рассматривалась в [17] на основе его же регуляризации для задач с сильно выпуклыми целевыми функционалами [14].

Укажем, наконец, на существенные особенности процедуры регуляризации двойственной задачи [13; 14] при обосновании сходимости всей процедуры двойственной регуляризации к решению исходной задачи по сравнению со стандартной процедурой стабилизации по Тихонову в [8, гл. 9; 18]. Заметим прежде всего, что в обоих случаях речь идет о стабилизации совпадающих по форме выпуклых задач (с точностью до знака целевого функционала) общего вида (без ограничений типа равенства и неравенства). Во-первых, решение двойственной задачи может и не существовать (задача может не обладать вектором Куна — Таккера), и, во-вторых, в случае существования такого решения может отсутствовать нужная (для стандартной тихоновской стабилизации [8, гл. 9; 18]) оценка отклонения возмущенной целевой функции двойственной задачи от точной. Последняя ситуация реализуется в рассматриваемой ниже задаче в случае неограниченного множества допустимых элементов.

1. Постановка задачи, необходимые понятия и конструкции, вспомогательные утверждения

1.1. Постановка задачи

Итак, объектом нашего внимания в работе является параметрическая (т. е. зависящая от параметров) задача выпуклого программирования

$$(P_{p,r}) \qquad f(z) \to \min, \quad Az = h + p, \quad g_i(z) \le r_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad z \in \mathcal{D} \subset Z.$$

Здесь $p \in H$; $r = (r_1, \dots, r_m)^* \in \mathbb{R}^m$ — параметры; $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^1$ — непрерывный сильно выпуклый функционал с постоянной сильной выпуклости κ; $A : Z \to H$ — линейный ограниченный оператор; $h \in H$ — заданный элемент; $g_i : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^1$, $i = 1, \dots, m$, — непрерывные выпуклые функционалы; $g(z) \equiv (g_1(z), \dots, g_m(z))^*$; $\mathcal{D} \subseteq Z$ — выпуклое замкнутое множество; Z, H — гильбертовы пространства. Будем обозначать единственное решение задачи $(P_{p,r})$, если оно существует, через $z^0_{p,r}$. Будем считать, что выполняется следующее

У с л о в и е $\mathcal{A}$: функционалы f, g_i, $i = 1, \dots, m$, непрерывны на $\mathcal{D}$, их значения равномерно по $z \in \mathcal{D} \cap S_M$ ограничены на $\mathcal{D} \cap S_M$ при каждом фиксированном $M > 0$, где $S_M \equiv \{z \in Z : \|z\| \le M\}$.

З а м е ч а н и е 1. Все полученные в [14] результаты сохраняют силу и в том случае, когда условие локальной липшицевости исходных данных в [14, условие (1.1)] заменяется сформулированным выше условием $\mathcal{A}$ их непрерывности и равномерной ограниченности на ограниченных подмножествах множества $\mathcal{D}$.

1.2. Необходимые понятия и конструкции

Ниже центральную роль для нас будет играть понятие обобщенной минимизирующей последовательности (ОМП) в задаче $(P_{p,r})$. Напомним, что под ОМП в задаче $(P_{p,r})$ понимается такая последовательность $z^i \in \mathcal{D}, i = 1, 2, \dots,$ для которой справедливы соотношения

$$f(z^i) \le \beta(p,r) + \delta^i, \quad z^i \in \mathcal{D}^{\epsilon^i}_{p,r}$$

для некоторых последовательностей сходящихся к нулю неотрицательных чисел δ^i, ϵ^i, $i = 1, 2, \dots$. Здесь $\beta(p,r)$ — обобщенное значение задачи (обобщенная нижняя грань):

$$\beta(p,r) \equiv \beta_{+0}(p,r) \equiv \lim_{\epsilon \to +0} \beta_\epsilon(p,r), \quad \beta_\epsilon(p,r) \equiv \inf_{z \in \mathcal{D}^\epsilon_{p,r}} f(z), \quad \beta_\epsilon(p,r) \equiv +\infty, \text{ если } \mathcal{D}^\epsilon_{p,r} = \varnothing,$$

$$\mathcal{D}^\epsilon_{p,r} \equiv \{z \in \mathcal{D} : \|Az - h - p\| \le \epsilon,\ g_i(z) \le r_i + \epsilon,\ i = 1, \dots, m\}, \quad \epsilon \ge 0.$$

Очевидно, в общей ситуации $\beta(p,r) \le \beta_0(p,r) \equiv \inf_{z \in \mathcal{D}^0_{p,r}} f(z)$, где величина $\beta_0(p,r) \equiv \{f(z^0_{p,r})$, если $z^0_{p,r}$ существует; $+\infty$ в ином случае$\}$ является классическим значением (классической нижней гранью) задачи. Справедлива следующая

Лемма 1. *Имеют место следующие утверждения.*

1. *Выполняется равенство $\beta_0(p,r) = \beta(p,r)\ \forall\,(p,r) \in H \times \mathbb{R}^m$, функционал $\beta\colon H \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ является полунепрерывным снизу и выпуклым.*

2. *Пусть $\beta(p,r) < +\infty$. Тогда для любой* ОМП *$z^i, i = 1, 2, \dots,$ в разрешимой в этом случае задаче $(P_{p,r})$ справедливы предельные соотношения*

$$f(z^i) \to f(z^0_{p,r}) = \beta_0(p,r) = \beta(p,r), \quad z^i \to z^0_{p,r} \text{ слабо в } Z, \quad i \to \infty.$$

Если же в дополнение к условию $\mathcal{A}$ сильно выпуклый функционал f является субдифференцируемым (в смысле выпуклого анализа) в точках $\mathcal{D}$, то указанная выше слабая сходимость является сильной, т. е. $\|z^i - z^0_{p,r}\| \to 0, i \to \infty$.

Доказательство первого утверждения леммы 1 проводится по схеме доказательства следствия 1 в [1, п. 3.3.2]. Доказательство второго основано на стандартных для подобного рода ситуаций рассуждениях, использующих слабую компактность ограниченного замкнутого выпуклого множества и слабую полунепрерывность снизу непрерывного выпуклого функционала в гильбертовом пространстве. □

Справедливо также следующее важное в контексте данной статьи утверждение о плотности субдифференцируемости в смысле выпуклого анализа (см., например, [19, теорема 4.3]).

Лемма 2. *Субдифференциал собственной выпуклой полунепрерывной снизу функции $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$, где $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, не пуст в точках плотного в $\mathrm{dom}\, f$ множества.*

Рассмотрим далее множество всевозможных наборов исходных данных $\mathsf{f} \equiv \{f, A, h, g\}$, $g(z) \equiv (g_1(z), \dots, g_m(z))^*$, каждый из которых состоит из непрерывного сильно выпуклого на $\mathcal{D}$ с независящей от набора постоянной сильной выпуклости $\kappa > 0$ функционала f, линейного ограниченного оператора A, элемента h и выпуклых на $\mathcal{D}$ функционалов g_i, $i = 1, \dots, m$, удовлетворяющих условию $\mathcal{A}$. Определим наборы невозмущенных f^0 и возмущенных f^δ исходных данных соответственно: $\mathsf{f}^0 \equiv \{f^0, A^0, h^0, g^0\}$ и $\mathsf{f}^\delta \equiv \{f^\delta, A^\delta, h^\delta, g^\delta\}$, $\delta \in (0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$ — некоторое число. Будем считать, что

$$\begin{gathered} |f^\delta(z) - f^0(z)| \le C\delta(1 + \|z\|^2), \quad \|A^\delta z - A^0 z\| \le C\delta(1 + \|z\|)\ \forall z \in \mathcal{D}, \\ \|h^\delta - h^0\| \le C\delta, \quad |g^\delta(z) - g^0(z)| \le C\delta(1 + \|z\|^2)\ \forall z \in \mathcal{D}, \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $C > 0$ не зависит от δ, $g^\delta \equiv (g_1^\delta, \dots, g_m^\delta)^*$.

Задачу $(P_{p,r})$, множество $\mathcal{D}_{p,r}^\epsilon$, соответствующие исходным данным f^δ, $\delta \geq 0$, будем обозначать через $(P_{p,r}^\delta)$, $\mathcal{D}_{p,r}^{\delta,\epsilon}$, $\mathcal{D}_{p,r}^{0,\epsilon} \equiv \mathcal{D}_{p,r}^\epsilon$. Задачу $(P_{p,r}^\delta)$ при $\delta > 0$ будем называть возмущенной; при $\delta = 0$, соответственно, будем говорить о точной задаче. Для обобщенного значения точной задачи $(P_{p,r}^0)$ будем использовать введенное выше обозначение $\beta(p,r)$. Введем определение ОМП-образующего алгоритма [17] в задаче выпуклого программирования $(P_{p,r}^0)$.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $\delta^k \in (0, \delta_0), k = 1, 2, \dots,$ — сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Зависящий от $\delta^k, k = 1, 2, \dots,$ оператор $R(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных $(f^{\delta^k}, A^{\delta^k}, h^{\delta^k}, g^{\delta^k})$, удовлетворяющих оценкам (1.1) при $\delta = \delta^k$, элемент $z^{\delta^k} \in \mathcal{D}$, называется ОМП-образующим в задаче $(P_{p,r}^0)$, если последовательность $z^{\delta^k}, k = 1, 2, \dots,$ есть ОМП в этой задаче.

Введем далее регулярный функционал Лагранжа

$$L_{p,r}^\delta(z, \lambda, \mu) \equiv f^\delta(z) + \langle \lambda, A^\delta z - h^\delta - p \rangle + \langle \mu, g^\delta(z) - r \rangle, \quad z \in \mathcal{D}, \quad \lambda \in H, \quad \mu \in \mathbb{R}^m,$$

а также двойственную задачу

$$V_{p,r}^\delta(\lambda, \mu) \equiv \inf_{z \in \mathcal{D}} L_{p,r}^\delta(z, \lambda, \mu) \to \sup, \quad \lambda \in H, \quad \mu \in \mathbb{R}_+^m.$$

Здесь и ниже $\mathbb{R}_+^m \equiv \{x = (x_1, \dots, x_m)^* \in \mathbb{R}^m \colon x_i \geq 0,\, i = 1, \dots, m\}$.

Ввиду сильной выпуклости и непрерывности по z функционала Лагранжа для любой пары $(\lambda, \mu) \in H \times \mathbb{R}_+^m$ значение $V_{p,r}^\delta(\lambda, \mu)$ достигается на единственном элементе $z^\delta[\lambda, \mu] \equiv \operatorname{argmin}\{L_{p,r}^\delta(z, \lambda, \mu),\, z \in \mathcal{D}\}$, причем этот элемент не зависит от h^δ.

1.3. Вспомогательные утверждения

В данном подразделе сформулируем необходимые вспомогательные леммы. Имеет место следующая лемма, доказательство которой аналогично доказательству леммы 3.1 в [14]).

Лемма 3. *При условии $\mathcal{A}$ элемент $z^\delta[\lambda, \mu]$ непрерывно зависит от $(\lambda, \mu) \in H \times \mathbb{R}_+^m$. Функционал $V_{p,r}^\delta$; $H \times \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}^1$ вогнут и непрерывен.*

Получим далее важную для дальнейших построений оценку.

Лемма 4. *Имеет место оценка*

$$|V_{p,r}^\delta(\lambda, \mu) - V_{p,r}^0(\lambda, \mu)| \leq C_V \delta(\|\lambda\| + |\mu|), \tag{1.2}$$

в которой постоянная $C_V > 0$ в случае ограниченного $\mathcal{D}$ зависит от $\sup_{z \in \mathcal{D}} \|z\|$, но не зависит от δ, p, r, $(\lambda, \mu) \in H \times \mathbb{R}^m$, а в случае неограниченного $\mathcal{D}$ зависит от постоянной $M > 0$ такой, что нормы $z^\delta[\lambda, \mu]$, $z^0[\lambda, \mu]$ равномерно по $\delta \in [0, \delta_0]$ ограничены числом M: $\|z^\delta[\lambda, \mu]\| \leq M$, $\|z^0[\lambda, \mu]\| \leq M$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства этой оценки предположим без ограничения общности рассуждений, что $V_{p,r}^\delta(\lambda, \mu) \geq V_{p,r}^0(\lambda, \mu)$. Тогда можем записать цепочку равенств и неравенств

$$\begin{aligned}
|V_{p,r}^\delta(\lambda, \mu) - V_{p,r}^0(\lambda, \mu)| &= V_{p,r}^\delta(\lambda, \mu) - V_{p,r}^0(\lambda, \mu) \\
&= V_{p,r}^\delta(\lambda, \mu) - \inf_{z \in \mathcal{D} \cap S_M} (L_{p,r}^0(z, \lambda, \mu) - L_{p,r}^\delta(z, \lambda, \mu) + L_{p,r}^\delta(z, \lambda, \mu)) \\
&\leq V_{p,r}^\delta(\lambda, \mu) - V_{p,r}^\delta(\lambda, \mu) - \inf_{z \in \mathcal{D} \cap S_M} (L_{p,r}^0(z, \lambda, \mu) - L_{p,r}^\delta(z, \lambda, \mu)) \\
&= - \inf_{z \in \mathcal{D} \cap S_M} (L_{p,r}^0(z, \lambda, \mu) - L_{p,r}^\delta(z, \lambda, \mu)) \leq \sup_{z \in \mathcal{D} \cap S_M} |L_{p,r}^\delta(z, \lambda, \mu) - L_{p,r}^0(z, \lambda, \mu)|,
\end{aligned}$$

очевидным следствием которой с учетом оценок (1.1) и является оценка (1.2). $\square$

1.4. Супердифференциал и производная Фреше целевого функционала двойственной задачи

При обосновании процедуры двойственной регуляризации центральная роль принадлежит представлению для супердифференциала функционала $V^\delta_{p,r}$ на $H \times \mathbb{R}^m_+$ при $\delta \geq 0$ в случае задачи выпуклого программирования $(P^\delta_{p,r})$ с сильно выпуклым целевым функционалом (см. также лемму 3.3 в [14]). Напомним, что под супердифференциалом вогнутого функционала V понимается субдифференциал с обратным знаком выпуклого функционала $-V$. При получении указанного представления ниже потребуются некоторые сведения из негладкого анализа, связанные с так называемой проксимальной нормальной формулой [20–23].

1.4.1. Проксимальные нормали, проксимальный субградиент. Для формулировки проксимальной нормальной формулы введем, прежде всего, понятие проксимальной нормали (см., например, [20–23]) и сформулируем некоторые связанные с ним факты.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $S \subset \mathcal{H}$ — замкнутое множество, $\bar{s} \in S$. Вектор $\zeta \in \mathcal{H}$ называется проксимальной нормалью к множеству S в точке $\bar{s} \in S$, если существует постоянная $M > 0$ такая, что $\langle \zeta, s - \bar{s} \rangle \leq M \|s - \bar{s}\|^2 \quad \forall\, s \in S$.

З а м е ч а н и е 2. Можно показать, что ζ есть проксимальная нормаль к S в $\bar{s}$ тогда и только тогда, когда $\bar{s}$ есть ближайшая в S точка к некоторой точке вида $\bar{s} + t\zeta,\ t > 0$.

Справедлив следующий критерий проксимальной нормальности (см. [20; 22; 24]).

Лемма 5. *Для того чтобы ненулевой вектор $v \in \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, был проксимальной нормалью к множеству $\Omega \subset \mathcal{H}$ в точке x из его замыкания $\overline{\Omega}$, необходимо и достаточно, чтобы при некотором $\lambda > 0$ выполнялось неравенство*

$$\langle \lambda v, c - x \rangle \leq \frac{1}{2}\|c - x\|^2 \ \forall c \in \overline{\Omega}.$$

Следующее понятие проксимального субградиента функции [20–23]) является одним из полезных обобщений понятия классической дифференцируемости.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ — полунепрерывная снизу функция на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $f(x) \neq +\infty$. Назовем элемент $x^* \in \mathcal{H}$ проксимальным субградиентом к f в x, если элемент $(x^*, -1)$ является проксимальной нормалью к надграфику $\mathrm{epi}\, f$ в $(x, f(x))$. Множество всех проксимальных субградиентов к f в x обозначим через $\partial^P f(x)$.

Оказывается, множество тех точек, в которых функция имеет проксимальный субградиент, является достаточно богатым.

Лемма 6 [20–23]. *Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ задана полунепрерывная снизу функция f. Тогда множество $\{x \in \mathcal{H} : \partial^P f(x) \neq \varnothing\}$ всюду плотно в $dom\, f$.*

1.4.2. Проксимальная нормальная формула. Сформулируем, наконец, упомянутую выше и нужную нам ниже теорему о представлении обобщенного градиента Кларка локально липшицевой функции в терминах ее проксимальных субградиентов или, другими словами, проксимальную нормальную формулу для обобщенного градиента Кларка локально липшицевой функции (подробности см. в [21, теорема 7.3, следствие 7.3], [23, теорема 2.6.1]).

Лемма 7. *Пусть f — локально липшицевая функция, заданная на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда справедливо следующее представление для обобщенного градиента Кларка $\partial_C f(x)$ функции f в точке x:*

$$\partial_C f(x) = \overline{co}\ w - \limsup_{x' \to x} \partial^P f(x'),$$

где $w - \limsup\limits_{x' \to x} \partial^P f(x')$ означает совокупность всевозможных слабых пределов таких ограниченных последовательностей элементов $y^n, n = 1, 2, \ldots,$ для которых имеет место включение $y^n \in \partial^P f(x^n)$ при $x^n \to x$, $n \to \infty$, $\overline{co}\, A$ означает замыкание выпуклой оболочки множества A.

1.4.3. Супердифференциал целевой функции двойственной задачи. Опираясь на определения 2, 3 и леммы 5–7, получим далее представление для супердифференциала функционала $V^\delta_{p,r}$. Используем ниже обозначение $int\, A$ для внутренности множества A.

Лемма 8. *Производная Фреше функционала $V^\delta_{p,r}$, рассматриваемого лишь на множестве $H \times \mathbb{R}^m_+$, в точке $(\lambda,\mu) \in int(H \times \mathbb{R}^m_+)$ равна*

$$\partial V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu) = (A^\delta z^\delta[\lambda,\mu] - h^\delta - p, g^\delta(z^\delta[\lambda,\mu]) - r). \tag{1.3}$$

Одновременно для всех точек $(\lambda,\mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+$ имеет место включение

$$(A^\delta z^\delta[\lambda,\mu] - h^\delta - p, g^\delta(z^\delta[\lambda,\mu]) - r) \in \partial V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu), \tag{1.4}$$

где $\partial V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu)$ — супердифференциал в смысле выпуклого анализа в точке $(\lambda,\mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+$ функционала $V^\delta_{p,r}$. Элемент $(A^\delta z^\delta[\lambda,\mu] - h^\delta - p, g^\delta(z^\delta[\lambda,\mu]) - r)$ зависит непрерывно от (λ,μ) на множестве $H \times \mathbb{R}^m_+$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как функционал $-V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu)$ непрерывный (см. лемму 3), выпуклый и конечный на множестве $H \times \mathbb{R}^m_+$, то он является локально липшицевым на его внутренности (см., например, [19, теорема 2.1, следствие 2.3], [25, предложение 4.3.13, следствие 4.3.15]) и его субдифференциал (в смысле выпуклого анализа) $\partial(-V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu))$ не пуст и ограничен $\forall\,(\lambda,\mu) \in \mathrm{int}(H \times \mathbb{R}^m_+)$ (см. [19, теорема 4.2]), а также совпадает с обобщенным градиентом Кларка $\partial_C(-V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu)) = -\partial_C V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu)$ [20, предложения 2.2.7, 2.3.1].

Пусть $(\lambda^i,\mu^i),\ (\theta^i,\zeta^i) \in H \times \mathbb{R}^m,\ i = 1,2,\ldots,$ — такие последовательности, что

$$(\lambda^i,\mu^i) \to (\lambda,\mu) \in \mathrm{int}(H \times \mathbb{R}^m_+), \quad V^\delta_{p,r}(\lambda^i,\mu^i) \to V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu), \tag{1.5}$$

$$((\theta^i,\zeta^i),-1) \text{ — проксимальная нормаль к } \mathrm{epi}\, V^\delta_{p,r} \text{ в точке } ((\lambda^i,\mu^i), V^\delta_{p,r}(\lambda^i,\mu^i)),$$

$$(\theta^i,\zeta^i) \in \partial^P V^\delta_{p,r}(\lambda^i,\mu^i), \quad (\theta^i,\zeta^i) \to (\theta,\zeta) \text{ слабо в } H \times \mathbb{R}^m, \quad (\theta,\zeta) \in \partial_C V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu).$$

Существование таких последовательностей следует из проксимальной нормальной формулы для градиента Кларка леммы 7.

Отсюда в силу леммы 5 следует существование при каждом i числа $\xi^i > 0$ такого, что $(\|((\lambda,\mu),V)\| \equiv \sqrt{\|(\lambda,\mu)\|^2 + V^2})$

$$\big\langle (\xi^i(\theta^i,\zeta^i), -\xi^i), ((\lambda',\mu'),V) - ((\lambda^i,\mu^i), V^\delta_{p,r}(\lambda^i,\mu^i)\big\rangle$$

$$\le \frac{1}{2}\|((\lambda',\mu'),V) - ((\lambda^i,\mu^i), V^\delta_{p,r}(\lambda^i,\mu^i))\|^2 \ \forall\,(\lambda',\mu') \in H \times \mathbb{R}^m_+, \quad V \ge V^\delta_{p,r}(\lambda',\mu'),$$

откуда в свою очередь следует, что

$$\xi^i V^\delta_{p,r}(\lambda^i,\mu^i) - \langle \xi^i(\theta^i,\zeta^i), (\lambda^i,\mu^i)\rangle \le \xi^i V - \langle \xi^i(\theta^i,\zeta^i), (\lambda',\mu')\rangle$$

$$+ \frac{1}{2}\|(\lambda',\mu') - (\lambda^i,\mu^i)\|^2 + \frac{1}{2}|V - V^\delta_{p,r}(\lambda^i,\mu^i)|^2 \ \forall(\lambda',\mu') \in H \times \mathbb{R}^m_+, \quad V \ge V^\delta_{p,r}(\lambda',\mu').$$

Таким образом, можно утверждать, что элемент $z^\delta[\lambda^i,\mu^i] \in \mathcal{D}$, доставляющий минимум в задаче

$$L^\delta_{p,r}(z,\lambda^i,\mu^i) \to \inf, \quad z \in \mathcal{D},$$

является минимизирующим и в задаче

$$\begin{gathered} I^i(z,\lambda',\mu') \equiv \xi^i L^\delta_{p,r}(z,\lambda',\mu') - \langle \xi^i(\theta^i,\zeta^i), (\lambda',\mu')\rangle + \frac{1}{2}\|(\lambda^i,\mu^i) - (\lambda',\mu')\|^2 \\ + \frac{1}{2}|L^\delta_{p,r}(z,\lambda',\mu') - V^\delta_{p,r}(\lambda^i,\mu^i)|^2 \to \inf, \quad z \in \mathcal{D}, \quad (\lambda',\mu') \in H \times \mathbb{R}^m_+, \end{gathered} \tag{1.6}$$

в том смысле, что минимизирующей в ней является тройка $(z^\delta[\lambda^i,\mu^i],\lambda^i,\mu^i)$, на которой функционал в (1.6) принимает значение

$$\xi^i V^\delta_{p,r}(\lambda^i,\mu^i) - \langle \xi^i(\theta^i,\zeta^i),(\lambda^i,\mu^i)\rangle,$$

равное его нижней грани в задаче (1.6).

Запишем условие оптимальности этой пары в части, касающейся лишь компоненты (λ^i,μ^i). Так как в силу первого предельного соотношения в (1.5) без ограничения общности можно считать, что $(\lambda^i,\mu^i)\in\operatorname{int}(H\times\mathbb{R}^m_+)$, таким условием, очевидно, является равенство

$$(A^\delta z^\delta[\lambda^i,\mu^i]-h^\delta-p, g^\delta(z^\delta[\lambda^i,\mu^i])-r)=(\theta^i,\zeta^i).$$

Отсюда в силу непрерывной зависимости элемента $z^\delta[\lambda,\mu]$ от $(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+$ (см. лемму 3), сходимости $(\lambda^i,\mu^i)\to(\lambda,\mu)\in\operatorname{int}(H\times\mathbb{R}^m_+)$, $i\to\infty$, и слабой сходимости в (1.5) получаем

$$(A^\delta z^\delta[\lambda,\mu]-h^\delta-p, g^\delta(z^\delta[\lambda,\mu])-r)=(\theta,\zeta).$$

Последнее равенство в силу единственности элемента $z^\delta[\lambda,\mu]$, минимизирующего функционал $L^\delta_{p,r}(z,\lambda,\mu)$ на $\mathcal{D}$ при $(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+$, означает, что обобщенный градиент Кларка $\partial_C V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu)$ состоит из единственного элемента (θ,ζ), т. е. в силу равенства $\partial_C(-V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu))=-\partial_C V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu)$ и совпадения субдифференциала в смысле выпуклого анализа $\partial(-V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu))$ с обобщенным градиентом Кларка $\partial_C(-V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu))$ взятый с обратным знаком субдифференциал выпуклого функционала $-V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu)$ (т. е. супердифференциал вогнутого функционала $V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu)$) в каждой точке $(\lambda,\mu)\in\operatorname{int}(H\times\mathbb{R}^m_+)$ состоит лишь из одного элемента $(A^\delta z^\delta[\lambda,\mu]-h^\delta-p, g^\delta(z^\delta[\lambda,\mu])-r)$. В силу леммы 3 этот элемент непрерывно зависит от $(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+$. Последнее обстоятельство одновременно означает, что функционал $V^\delta_{p,r}$ непрерывно дифференцируем по Фреше (см. [25, лемма 1.4.1, теорема 4.3.17]) в точках $(\lambda,\mu)\in\operatorname{int}(H\times\mathbb{R}^m_+)$.

Покажем, наконец, что имеет место и включение (1.4). В каждой внутренней точке множества $H\times\mathbb{R}^m_+$ оно выполняется, так как выполняется уже доказанное равенство (1.3). Пусть (λ,μ) — граничная точка этого множества и $(\lambda^i,\mu^i)\to(\lambda,\mu)$, $i\to\infty$, причем $(\lambda^i,\mu^i)\in\operatorname{int}(H\times\mathbb{R}^m_+)$. Тогда, так как элемент $\partial V^\delta_{p,r}(\lambda^i,\mu^i)$ является градиентом и одновременно супердифференциалом функции $V^\delta_{p,r}$ в точке (λ^i,μ^i), можем записать

$$V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu)-V^\delta_{p,r}(\lambda^i,\mu^i)\le\big\langle(A^\delta z^\delta[\lambda^i,\mu^i]-h^\delta-p, g^\delta(z^\delta[\lambda^i,\mu^i])-r),(\lambda,\mu)-(\lambda^i,\mu^i)\big\rangle\ \forall\,(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+.$$

Переходя к пределу при $i\to\infty$ в последнем неравенстве в силу непрерывности элемента $z^\delta[\lambda,\mu]$ по $(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+$ (см. лемму 3), получаем включение (1.4). □

2. Сходимость метода двойственной регуляризации

В этом разделе рассмотрим, опираясь на сформулированные выше леммы 1, 2, 4, 8, вопрос сходимости метода двойственной регуляризации по основной и двойственным переменным.

2.1. Сходимость метода двойственной регуляризации по основной переменной

Пусть задача $(P^0_{p,r})$ разрешима, при этом разрешимость двойственной к $(P^0_{p,r})$ задачи не предполагается. Обозначим через $(\lambda^{\delta,\alpha}_{p,r},\mu^{\delta,\alpha}_{p,r})$ единственную в $H\times\mathbb{R}^m_+$ точку, дающую на этом множестве при $\alpha>0$ максимум сильно вогнутому функционалу

$$R^{\delta,\alpha}_{p,r}(\lambda,\mu)\equiv V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu)-\alpha\|\lambda\|^2-\alpha|\mu|^2,\quad (\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+.$$

Пусть выполняется условие согласования

$$\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \to 0, \quad \alpha(\delta) \to 0, \quad \delta \to 0. \tag{2.1}$$

Вопрос сильной сходимости по переменной z регуляризованных элементов $z^\delta[\lambda_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}]$ к решению $z_{p,r}^0$ задачи $(P_{p,r}^0)$ при $\delta \to 0$ был подробно рассмотрен в работе [14]. Соответствующие результаты сформулированы в теореме 3.1 этой работы. Доказательство указанной сходимости опирается прежде всего на лемму 8, влекущую выполнение в точке максимума $(\lambda_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)})$ функционала $R_{p,r}^{\delta,\alpha}(\lambda,\mu)$, $(\lambda,\mu) \in H \times \mathbb{R}_+^m$ неравенства

$$\begin{gathered}\Big\langle \big(A^\delta z^\delta[\lambda_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}] - h^\delta - p, g^\delta(z^\delta[\lambda_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}]) - r\big) - 2\alpha(\delta)\big(\lambda_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}\big),\\ (\lambda,\mu) - (\lambda_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)})\Big\rangle \le 0 \ \forall\, (\lambda,\mu) \in H \times \mathbb{R}_+^m.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Неравенство (2.2) совпадает с неравенством (3.9) работы [14]. Все дальнейшие построения работы [14], связанные с обоснованием сильной сходимости метода двойственной регуляризации по переменной z, могут быть практически дословно повторены и в случае задачи $(P_{p,r}^0)$ настоящей работы. При этом следует подчеркнуть, что хотя условия на исходные данные в работе [14] были несколько более жесткие (см. условия локальной липшицевости (1.1) в [14]), все ее построения при доказательстве обсуждаемой сходимости сохраняют силу и при условии непрерывности исходных данных (условие $\mathcal{A}$) данной работы. Ниже при рассмотрении вопроса сходимости метода двойственной регуляризации по двойственной переменной нам понадобится также следующее утверждение, полученное в [14] при доказательстве теоремы 3.1 (см. оценку (3.25) в [14] и ее обоснование).

Лемма 9. *Семейство элементов* $\{z^\delta[\lambda_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}],\ \delta \in (0,\delta_0)\}$ *равномерно по* $\delta \in (0,\delta_0)$ *ограничено, т. е.* $\|z^\delta[\lambda_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}]\| \le L$, *где постоянная* $L > 0$ *не зависит от* $\delta \in (0,\delta_0)$.

З а м е ч а н и е 3. В формулировке теоремы 3.1 в [14] были, к сожалению, пропущены полученные при ее доказательстве некоторые слагаемые: слагаемое $\psi(\delta)$ (см. неравенства (3.23), (3.26) в [14]) — в выражении для $\psi_1(\delta)$ во второй выключной формуле; слагаемое $C\delta(2+L)$ — в правой части неравенства третьей выключной формулы; слагаемое $C\delta(1+L^2)$ — в правой части неравенства четвертой выключной формулы. В формулировке теоремы 1 в [17], аналоге теоремы 3.1 в [14], все указанные слагаемые восстановлены.

2.2. Сходимость метода двойственной регуляризации по двойственной переменной

В силу теоремы 3.1 в [14], с учетом замечания 3, выполняется предельное соотношение

$$\lim_{\delta\to+0} V_{p,r}^0(\lambda_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}) = \sup_{(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}_+^m} V_{p,r}^0(\lambda,\mu) = f^0(z_{p,r}^0). \tag{2.3}$$

С учетом (2.3), если функционал $V_{p,r}^0$ не достигает на $H \times \mathbb{R}_+^m$ максимума, то, очевидно, $\|(\lambda_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)})\| \to \infty$, $\delta \to 0$.

2.2.1. Сходимость метода двойственной регуляризации по двойственной переменной в случае ограниченного $\mathcal{D}$. Если функционал $V_{p,r}^0$ имеет на $H \times \mathbb{R}_+^m$ точку максимума, то в случае ограниченного $\mathcal{D}$ можно утверждать, что

$$(\lambda_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}) \to (\lambda_{p,r}^0, \mu_{p,r}^0), \quad \delta \to 0, \tag{2.4}$$

где $(\lambda_{p,r}^0, \mu_{p,r}^0) \in H \times \mathbb{R}_+^m$ — минимальный по норме элемент среди всех элементов, доставляющих максимум функционалу $V_{p,r}^0$. В последнем случае предельное соотношение (2.4) является следствием оценки (1.2) леммы 4 и условия согласования (2.1), так как процедура регуляризации двойственной задачи является обычной обеспечивающей сильную сходимость процедурой ее регуляризации по Тихонову (см., например, [8, гл. 9, § 4, теорема 2]).

Замечание 4. Легко сообразить, что в качестве регуляризованной возмущенной двойственной задачи в методе двойственной регуляризации может быть взята задача

$$V^{\delta}_{p,r}(\lambda,\mu) - \alpha(\delta)\|(\lambda,\mu) - (\widetilde{\lambda},\widetilde{\mu})\|^2 \to \sup, \quad (\lambda,\mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+,$$

где $(\widetilde{\lambda},\widetilde{\mu}) \in H \times \mathbb{R}^m_+$ — произвольный фиксированный элемент. Тогда, в соответствии с классической теорией тихоновской стабилизации (см., например, [8, гл. 9, §4, теорема 2]), в этом случае в качестве предельной точки $(\lambda^0_{p,r}, \mu^0_{p,r})$ предельного соотношения (2.4) выступает элемент, доставляющий минимальное значение функционалу $\|(\lambda,\mu) - (\widetilde{\lambda},\widetilde{\mu})\|^2$, $(\lambda,\mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+$ среди всех решений двойственной к $(P^0_{p,r})$ задачи. При этом все полученные выше результаты, связанные с процедурой двойственной регуляризации, сохраняют силу.

2.2.2. Сходимость метода двойственной регуляризации по двойственной переменной в отсутствие условия ограниченности $\mathcal{D}$. Если же условия ограниченности $\mathcal{D}$ нет, то для доказательства предельного соотношения (2.4) в случае разрешимости двойственной к $(P^0_{p,r})$ задачи мы напрямую не можем применить теорему о сходимости метода стабилизации (см., например, [8, гл. 9, § 4, теорема 2]) из-за отсутствия в этом случае нужной для применения указанной теоремы оценки, вытекающей в случае ограниченного $\mathcal{D}$ из оценки (1.2) леммы 4. Воспользуемся в этой ситуации для доказательства предельного соотношения (2.4) доказанными в [14] ограниченностью семейства $z^{\delta}[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}]$, $\delta \in (0,\delta_0)$, т. е. свойством, сформулированным в лемме 9, и параметрическим принципом Лагранжа в [14, теорема 2.1] и в [26, теорема 1.1].

Кроме того, на этом пути нам понадобится следующая вспомогательная лемма, утверждение которой является следствием критерия минимума выпуклой полунепрерывной снизу функции на выпуклом замкнутом множестве в [25, следствие 4.3.6 (c)].

Лемма 10. *Пусть задан вогнутый полунепрерывный сверху функционал $\varphi : H \times \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}^1$. Тогда точка $(\lambda^*, \mu^*) \in H \times \mathbb{R}^m_+$ доставляет максимум в задаче $\varphi(\lambda,\mu) \to max$, $(\lambda,\mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+$ тогда и только тогда, когда $\langle \partial\varphi(\lambda^*,\mu^*), (\lambda,\mu) - (\lambda^*,\mu^*)\rangle \le 0\, \forall\, (\lambda,\mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+$, где $\partial\varphi(\lambda^*,\mu^*)$ — супердифференциал φ в точке (λ^*,μ^*).*

Используем обозначение (см. лемму 8)

$$\widetilde{\partial V^{\delta}_{p,r}(\lambda,\mu)} \equiv \big(A^{\delta} z^{\delta}[\lambda,\mu] - h^{\delta} - p, g^{\delta}(z^{\delta}[\lambda,\mu]) - r\big) \in \partial V^{\delta}_{p,r}(\lambda,\mu)$$

и в дальнейших построениях данного раздела принимаем во внимание леммы 4, 8, 9 и 10.

Пусть $(\lambda^0_{p,r}, \mu^0_{p,r})$ — минимальная по норме точка максимума функционала $V^0_{p,r}(\lambda,\mu)$, $(\lambda,\mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+$. Так как выполняется равенство $\sup\limits_{(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+} V^0_{p,r}(\lambda,\mu) = f^0(z^0_{p,r})$ (см. (2.3)) и двойственная задача разрешима, то каждая точка максимума в ней является вектором Куна — Таккера в задаче $(P^0_{p,r})$, т. е. к этой задаче применима обычная теорема Куна — Таккера (см. первые части теоремы 2.1 в [14] и теоремы 1.1 в [26]). В соответствии с этими теоремами множество всех таких точек максимума $(\lambda^*, \mu^*) \in H \times \mathbb{R}^m_+$ полностью составляет множество $-\partial\beta(p,r)$, и только для каждой из них выполняется совокупность соотношений

$$\begin{gathered}\langle \widetilde{\partial V^0_{p,r}(\lambda^*,\mu^*)}, (\lambda,\mu) - (\lambda^*,\mu^*)\rangle \le 0\ \forall\, (\lambda,\mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+, \quad \widetilde{\partial V^0_{p,r}(\lambda^*,\mu^*)} \in \partial V^0_{p,r}(\lambda^*,\mu^*),\\ \widetilde{\partial V^0_{p,r}(\lambda^*,\mu^*)} = (A^0 z^0_{p,r} - h^0 - p, g^0(z^0_{p,r}) - r), \\ z^0_{p,r} = \operatorname*{argmin}_{z\in\mathcal{D}} L^0_{p,r}(z,\lambda^*,\mu^*) \equiv z^0[\lambda^*,\mu^*], \quad \langle \mu^*, g^0(z^0_{p,r}) - r\rangle = 0,\end{gathered} \tag{2.5}$$

в которых неравенство доказывается точно так же, как и неравенство (2.2) (т. е. неравенство (3.9) в [14] с применением вариационного принципа Экланда [27] и последующим предельным переходом в семействе вспомогательных необходимых условий оптимальности).

Пусть $M > 0$ — такое достаточно большое число, что $z^0_{p,r} \in \mathcal{D} \cap S_M$, $S_M \equiv \{z \in Z\colon \|z\| \le M\}$. Рассмотрим сужение задачи $(P^0_{p,r})$

$$(P^0_{M,p,r}) \qquad f^0(z) \to \min, \quad A^0 z = h^0 + p, \quad g^0(z) \le r, \quad z \in \mathcal{D} \cap S_M,$$

единственным решением которой будет также элемент $z^0_{p,r}$. Пусть β^M — функция значений суженной параметрической задачи

$$(P^0_{M,p',r'}) \qquad f^0(z) \to \min, \quad A^0 z = h^0 + p', \quad g^0(z) \le r', \quad z \in \mathcal{D} \cap S_M,$$

с $(p', r') \in H \times \mathbb{R}^m$. Так как $\beta^M(p,r) = \beta(p,r) = f^0(z^0_{p,r})$ и надграфик функции значений β^M принадлежит надграфику β, то $\partial\beta(p,r) \subseteq \partial\beta^M(p,r)$. Таким образом, можно утверждать, что каждый вектор Куна — Таккера задачи $(P^0_{p,r})$ является таковым и для задачи $(P^0_{M,p,r})$ или, другими словами, каждая точка максимума в задаче, двойственной к $(P^0_{p,r})$, является таковой же и в задаче, двойственной к $(P^0_{M,p,r})$:

$$V^0_{M,p,r}(\lambda,\mu) \equiv \inf_{z \in \mathcal{D}\cap S_M} L^0_{p,r}(z,\lambda,\mu) \to \sup, \quad (\lambda,\mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+.$$

При этом, очевидно, как и в исходной задаче $(P^0_{p,r})$, только точки максимума этой вспомогательной двойственной задачи удовлетворяют всей совокупности соотношений

$$\begin{gathered} \langle \widetilde{\partial V^0_{M,p,r}(\lambda^*}, \mu^*), (\lambda,\mu) - (\lambda^*,\mu^*)\rangle \le 0 \ \forall\, (\lambda,\mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+, \\ \widetilde{\partial V^0_{M,p,r}(\lambda^*}, \mu^*) \in \partial V^0_{M,p,r}(\lambda^*,\mu^*), \\ \widetilde{\partial V^0_{M,p,r}(\lambda^*}, \mu^*) = (A^0 z^0_{p,r} - h^0 - p, g^0(z^0_{p,r}) - r), \\ z^0_{p,r} = \operatorname*{argmin}_{z \in \mathcal{D}\cap S_M} L^0_{p,r}(z,\lambda^*,\mu^*), \quad \langle \mu^*, g^0(z^0_{p,r}) - r\rangle = 0. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Так как благодаря сильной выпуклости $L^0_{p,r}(\cdot,\lambda^*,\mu^*)$ при $(\lambda^*,\mu^*) \in H \times \mathbb{R}^m_+$ точка (λ^*,μ^*), удовлетворяющая совокупности соотношений (2.6), удовлетворяет и аналогичной совокупности (2.5), то, очевидно, других точек максимума для функционала $V^0_{M,p,r}$ на $H \times \mathbb{R}^m_+$, кроме указанных выше точек максимума функционала $V^0_{p,r}$ на $H \times \mathbb{R}^m_+$, нет, т. е. эти два множества точек максимума совпадают.

Далее, так как множество $\mathcal{D} \cap S_M$ ограничено, то для разности $V^\delta_{M,p,r} - V^0_{M,p,r}$ справедлива оценка точно такая же, как и оценка (1.2) в случае ограниченного $\mathcal{D}$. При этом максимум функционала $R^\delta_{M,p,r}(\lambda,\mu) \equiv V^\delta_{M,p,r}(\lambda,\mu) - \alpha(\delta)\|(\lambda,\mu)\|^2$, $(\lambda,\mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+$ достигается в единственной точке $(\tilde\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, \tilde\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r})$ такой, что

$$\Big\langle \partial V^\delta_{M,p,r}(\widetilde{\tilde\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}}, \tilde\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}) - 2\alpha(\delta)(\tilde\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, \tilde\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}), (\lambda,\mu) - (\tilde\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, \tilde\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r})\Big\rangle \le 0 \ \forall\, (\lambda,\mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+,$$

$$\begin{gathered} \partial V^\delta_{M,p,r}(\widetilde{\tilde\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}}, \tilde\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}) \in \partial V^\delta_{M,p,r}(\tilde\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, \tilde\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}), \\ \partial V^\delta_{M,p,r}(\widetilde{\tilde\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}}, \tilde\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}) = \Big(A^\delta z^\delta[\tilde\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, \tilde\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}] - h^\delta - p, g^\delta(z^\delta[\tilde\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, \tilde\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}]) - r\Big), \\ z^\delta[\tilde\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, \tilde\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}] \equiv \operatorname*{argmin}_{z \in \mathcal{D}\cap S_M} L^\delta_{p,r}(z, \tilde\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, \tilde\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}). \end{gathered}$$

Одновременно в силу ограниченности $\mathcal{D} \cap S_M$, следствием которой является в этом случае необходимая для применения теоремы о сходимости метода стабилизации (см., например, [8, гл. 9, § 4, теорема 2]) оценка (1.2), но уже для разности $V^\delta_{M,p,r} - V^0_{M,p,r}$, справедливо и предельное соотношение

$$(\tilde\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, \tilde\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}) \to (\lambda^0_{p,r}, \mu^0_{p,r}), \quad \delta \to 0.$$

Но в качестве такой пары $(\tilde\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, \tilde\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r})$ в силу доказанной выше ограниченности семейства $z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}]$, $\delta \in (0, \delta_0)$, единственности точки максимума функционала $R^\delta_{M,p,r}(\lambda,\mu) \equiv V^\delta_{M,p,r}(\lambda,\mu) - \alpha(\delta)\|(\lambda,\mu)\|^2$, $(\lambda,\mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+$ и выбора достаточно большого M может выступать только пара $(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r})$, удовлетворяющая соотношениям

$$z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}] \equiv \operatorname*{argmin}_{z\in\mathcal{D}} L^\delta_{p,r}(z, \lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}) = \operatorname*{argmin}_{z\in\mathcal{D}\cap\mathcal{S}_\mathcal{M}} L^\delta_{p,r}(z, \lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}),$$

$$V^\delta_{p,r}(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}) = V^\delta_{M,p,r}(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}),$$

$$\Big\langle \partial V^\delta_{p,r}(\widetilde{\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}}) - 2\alpha(\delta)(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}), (\lambda,\mu) - (\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}) \Big\rangle \le 0 \quad \forall\, (\lambda,\mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+,$$

$$\partial V^\delta_{p,r}(\widetilde{\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}}) = \partial V^\delta_{M,p,r}(\widetilde{\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}})$$
$$= \Big(A^\delta z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}] - h^\delta - p, g^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}]) - r\Big),$$

свидетельствующим, если принять во внимание утверждение леммы 10, о том, что эта пара доставляет максимальное значение как функции $R^\delta_{p,r}(\lambda,\mu) \equiv V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu) - \alpha(\delta)\|(\lambda,\mu)\|^2$, $(\lambda,\mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+$, так и функции $R^\delta_{M,p,r}(\lambda,\mu) \equiv V^\delta_{M,p,r}(\lambda,\mu) - \alpha(\delta)\|(\lambda,\mu)\|^2$, $(\lambda,\mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+$. Таким образом, можно утверждать, что и в случае неограниченного $\mathcal{D}$ предельное соотношение (2.4) справедливо.

З а м е ч а н и е 5. Можно заметить, что сделанное выше замечание 4 полностью сохраняет силу и в случае неограниченного множества $\mathcal{D}$. А именно, если вместо функционала

$$R^{\delta,\alpha}_{p,r}(\lambda,\mu) \equiv V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu) - \alpha\|\lambda\|^2 - \alpha|\mu|^2, \quad (\lambda,\mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+,$$

использовать функционал

$$R^{\delta,\alpha}_{p,r}(\lambda,\mu) \equiv V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu) - \alpha\|\lambda - \tilde\lambda\|^2 - \alpha|\mu - \tilde\mu|^2, \quad (\lambda,\mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+,$$

где $(\tilde\lambda, \tilde\mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+$ — произвольная фиксированная точка, то все полученные выше утверждения останутся в силе. Однако в случае, когда функционал $V^0_{p,r}$ достигает максимума на $H \times \mathbb{R}^m_+$, в предельном соотношении (2.4) в качестве предельной точки $(\lambda^0_{p,r}, \mu^0_{p,r})$ должен быть взят элемент, минимизирующий функционал $\|(\lambda,\mu) - (\tilde\lambda,\tilde\mu)\|^2$, $(\lambda,\mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+$ на множестве всех элементов, максимизирующих функционал $V^0_{p,r}$ на $H \times \mathbb{R}^m_+$.

3. Регуляризованное ПМЛ в задаче выпуклого программирования с сильно выпуклым функционалом цели

Результаты предыдущего раздела позволяют сформулировать и доказать регуляризованное ПМЛ в недифференциальной форме в задаче выпуклого программирования с сильно выпуклым целевым функционалом.

Теорема 1 [Регуляризованное ПМЛ]. *Пусть задана произвольная последовательность $\delta^k \in \mathbb{R}^1$, $k = 1, 2, \dots$, сходящихся к нулю неотрицательных чисел. Для существования ограниченной ОМП в задаче $(P^0_{p,r})$ необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $(\lambda^k, \mu^k) \in H \times \mathbb{R}^m_+$, $k = 1, 2, \dots$, такая, что выполняются соотношения*

$$\begin{gathered}\delta^k\|(\lambda^k,\mu^k)\|^2 \to 0, \quad z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k] \in \mathcal{D}^{\delta^k,\epsilon^k}_{p,r}, \quad \epsilon^k \to 0, \\ \big\langle(\lambda^k,\mu^k), A^{\delta^k} z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k] - h^{\delta^k} - p, g^{\delta^k}(z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]) - r\big\rangle \to 0, \quad k \to \infty,\end{gathered} \tag{3.1}$$

а последовательность $z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]$, $k=1,2,\ldots$, *была ограничена. Эта последовательность* $z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]$, $k=1,2,\ldots$, *является искомой* ОМП *в задаче* $(P^0_{p,r})$. *В случае же субдифференцируемости* f^0 *на* $\mathcal{D}$ *вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к* $(P^0_{p,r})$ *задача,* $z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]\to z^0_{p,r}$, $k\to\infty$. *Другими словами, оператор* $R(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\delta^k)$, *который задается равенством* $R(f^{\delta^k},A^{\delta^k},h^{\delta^k},g^{\delta^k},\delta^k)=z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]$, *является* ОМП*-образующим (регуляризирующим) в задаче* $(P^0_{p,r})$ *в смысле определения* 1 *и порождает сходящуюся при* $k\to\infty$ *к* $z^0_{p,r}$ ОМП *в случае субдифференцируемости* f^0 *на* $\mathcal{D}$.

Кроме того, выполняется предельное соотношение

$$V^0_{p,r}(\lambda^k,\mu^k)\to\sup_{(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+}V^0_{p,r}(\lambda,\mu)=f^0(z^0_{p,r}),\quad k\to\infty. \tag{3.2}$$

В качестве последовательности $(\lambda^k,\mu^k)\in H\times\mathbb{R}^m_+$, $k=1,2,\ldots$, *может быть взята последовательность* $(\lambda^{\delta^k,\alpha(\delta^k)}_{p,r},\mu^{\delta^k,\alpha(\delta^k)}_{p,r})$, $k=1,2,\ldots$, $\delta^k/\alpha(\delta^k)\to 0$, $k\to\infty$, *генерируемая алгоритмом двойственной регуляризации теоремы* 3.1 *в* [14], *в соответствии с которым* $(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r})\equiv\operatorname{argmax}\{V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu)-\alpha(\delta)\|(\lambda,\mu)\|^2,\ (\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+\}$ *и выполняется условие согласования* (2.1). *Тогда в случае существования ограниченной* ОМП *и разрешимости двойственной к* $(P^0_{p,r})$ *задачи имеет место предельное соотношение* $(\lambda^k,\mu^k)\to(\lambda^0_{p,r},\mu^0_{p,r})$, $k\to\infty$, *где* $(\lambda^0_{p,r},\mu^0_{p,r})\in H\times\mathbb{R}^m_+$ — *нормальное (минимальное по норме) решение двойственной задачи.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства *необходимости*, прежде всего, заметим, что задача $(P^0_{p,r})$ разрешима благодаря существованию ограниченной ОМП и условиям на исходные данные (функционалы $f^0(z)$, $\|A^0z-h^0-p\|$, $g^0_i(z)$, $i=1,\ldots,m$, $z\in\mathcal{D}$, слабо полунепрерывны снизу на $\mathcal{D}$). Теперь выполнимость соотношений (3.1), (3.2) теоремы вытекает из теоремы 3.1 в [14], если в качестве точек (λ^k,μ^k) и $z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]$ взять соответственно точки $(\lambda^{\delta^k,\alpha(\delta^k)}_{p,r},\mu^{\delta^k,\alpha(\delta^k)}_{p,r})$ и $z^{\delta^k}[\lambda^{\delta^k,\alpha(\delta^k)}_{p,r},\mu^{\delta^k,\alpha(\delta^k)}_{p,r}]$, $k=1,2,\ldots$. При этом в случае разрешимости двойственной к $(P^0_{p,r})$ задачи или, другими словами, в случае $\partial\beta(p,r)\neq\varnothing$, помимо (3.2) имеет место и сходимость $(\lambda^k,\mu^k)\to(\lambda^0_{p,r},\mu^0_{p,r})$, $k\to\infty$, где $(\lambda^0_{p,r},\mu^0_{p,r})\in H\times\mathbb{R}^m_+$ — нормальное решение двойственной задачи.

Для доказательства *достаточности* заметим, прежде всего, что задача $(P^0_{p,r})$ разрешима ввиду включения $z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]\in\mathcal{D}^{\delta^k,\epsilon^k}_{p,r}$, ограниченности последовательности $z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]$, $k=1,2,\ldots$, и уже отмеченных выше условий на исходные данные. Далее, так как точка $z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]$ минимизирует функционал $L^{\delta^k}_{p,r}(\cdot,\lambda^k,\mu^k)$, можем записать

$$f^{\delta^k}(z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k])+\big\langle(\lambda^k,\mu^k),A^{\delta^k}z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]-h^{\delta^k}-p,g^{\delta^k}(z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k])-r\big\rangle$$

$$\le f^{\delta^k}(z)+\big\langle(\lambda^k,\mu^k),A^{\delta^k}z-h^{\delta^k}-p,g^{\delta^k}(z)-r\big\rangle\ \forall\, z\in\mathcal{D}.$$

В силу третьего условия (3.1) отсюда следует, что

$$f^{\delta^k}(z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k])\le f^{\delta^k}(z)+\big\langle(\lambda^k,\mu^k),A^{\delta^k}z-h^{\delta^k}-p,g^{\delta^k}(z)-r\big\rangle+\psi^k\ \ \forall\, z\in\mathcal{D},\quad \psi^k\to 0,\quad k\to\infty.$$

Положим здесь $z=z^0_{p,r}$ и используем условие согласования $\delta^k\|(\lambda^k,\mu^k)\|^2\to 0$, $k\to\infty$ и ограниченность последовательности $z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]$, $k=1,2,\ldots$. Тогда, во-первых, можем говорить о равномерной ограниченности по $k=1,2,\ldots$ величин $f^{\delta^k}(z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k])$ и, во-вторых, получаем оценку $f^0(z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k])\le f^0(z^0_{p,r})+\widetilde{\psi}^k$, $\widetilde{\psi}^k\to 0$, $k\to\infty$. Так как одновременно мы имеем включение $z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]\in\mathcal{D}^{\delta^k,\epsilon^k}_{p,r}$, а следовательно, и $z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]\in\mathcal{D}^{0,\bar\epsilon^k}_{p,r}$, $\bar\epsilon^k\to 0$, $k\to\infty$, то можем утверждать, что последовательность $z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]$, $k=1,2,\ldots$, является ОМП в задаче $(P^0_{p,r})$ и, более того, $z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]\to z^0_{p,r}$, $k\to\infty$, в случае субдифференцируемости f^0 на $\mathcal{D}$.

Далее, покажем, что наряду с ограниченностью последовательности $z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]$, $k=1,2,\dots$, ограниченной является и последовательность $z^0[\lambda^k,\mu^k]$, $k=1,2,\dots$. Запишем с этой целью в силу оценок (1.1) неравенство

$$|L^{\delta^k}_{p,r}(z,\lambda^k,\mu^k)-L^0_{p,r}(z,\lambda^k,\mu^k)|$$
$$\le C\delta^k(1+\|z\|^2)+C\delta^k\|\lambda^k\|(1+\|z\|)+C\delta^k\|\lambda^k\|+C\delta^k|\mu^k|(1+\|z\|^2). \tag{3.3}$$

Кроме того, можем записать

$$L^0_{p,r}(z^0[\lambda^k,\mu^k],\lambda^k,\mu^k)=V^0_{p,r}(\lambda^k,\mu^k)\le\sup_{(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+}V^0_{p,r}(\lambda,\mu)\le f^0(z^0_{p,r}).$$

Отсюда и из (3.3) получаем

$$L^{\delta^k}_{p,r}(z^0[\lambda^k,\mu^k],\lambda^k,\mu^k)\le f^0(z^0_{p,r})+L^{\delta^k}_{p,r}(z^0[\lambda^k,\mu^k],\lambda^k,\mu^k)-L^0_{p,r}(z^0[\lambda^k,\mu^k],\lambda^k,\mu^k)$$
$$\le f^0(z^0_{p,r})+C\delta^k(1+\|z^0[\lambda^k,\mu^k]\|^2)+C\delta^k\|\lambda^k\|(1+\|z^0[\lambda^k,\mu^k]\|)+C\delta^k\|\lambda^k\|+C\delta^k|\mu^k|(1+\|z^0[\lambda^k,\mu^k]\|^2).$$

Так как функционал $L^{\delta^k}_{p,r}$ является сильно выпуклым с постоянной κ (таковым является функционал f^{δ^k}), то благодаря хорошо известной оценке для сильно выпуклых функционалов (см. [8, гл.8, §2, теорема 10]) и последнему неравенству можем записать

$$\kappa\|z^0[\lambda^k,\mu^k]-z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]\|^2\le L^{\delta^k}_{p,r}(z^0[\lambda^k,\mu^k],\lambda^k,\mu^k)-L^{\delta^k}_{p,r}(z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k],\lambda^k,\mu^k)$$
$$\le f^0(z^0_{p,r})+C\delta^k(1+\|z^0[\lambda^k,\mu^k]\|^2)+C\delta^k\|\lambda^k\|(1+\|z^0[\lambda^k,\mu^k]\|)$$
$$+C\delta^k\|\lambda^k\|+C\delta^k|\mu^k|(1+\|z^0[\lambda^k,\mu^k]\|^2)-L^{\delta^k}_{p,r}(z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k],\lambda^k,\mu^k).$$

Полученная оценка благодаря ограниченности семейства элементов $z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]$, $k=1,2,\dots$, первому и третьему условиям (предельным соотношениям) в (3.1), уже установленной выше равномерной ограниченности по $k=1,2,\dots$ величин $f^{\delta^k}(z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k])$ и равенству

$$L^{\delta^k}_{p,r}(z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k],\lambda^k,\mu^k)\equiv f^{\delta^k}(z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k])+\langle\lambda^k,A^{\delta^k}z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]-h^{\delta^k}-p\rangle+\langle\mu^k,g^{\delta^k}(z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k])-r\rangle$$

находится в очевидном противоречии с предположением о неограниченности при достаточно больших k элементов $z^0[\lambda^k,\mu^k]$. Полученное противоречие позволяет нам утверждать, что это семейство элементов действительно является ограниченным при $k=1,2,\dots$.

Далее, в силу равномерной по $k=1,2,\dots$ ограниченности элементов $z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]$, $z^0[\lambda^k,\mu^k]$ и оценки (1.2) получаем предельное соотношение $V^{\delta^k}_{p,r}(\lambda^k,\mu^k)-V^0_{p,r}(\lambda^k,\mu^k)\to 0$, $k\to\infty$. Так как при этом в силу доказанной сходимости $f^0(z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k])\to f^0(z^0_{p,r})$, $k\to\infty$, и третьего из условий (3.1) имеет место сходимость $V^{\delta^k}_{p,r}(\lambda^k,\mu^k)\to f^0(z^0_{p,r})$, $k\to\infty$, то получаем окончательно (3.2). $\square$

З а м е ч а н и е 6. В соответствии с замечаниями 4, 5 вместо функционала

$$R^{\delta,\alpha}_{p,r}(\lambda,\mu)\equiv V^{\delta}_{p,r}(\lambda,\mu)-\alpha\|\lambda\|^2-\alpha|\mu|^2,\quad(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+,$$

в алгоритме двойственной регуляризации можно использовать функционал

$$R^{\delta,\alpha}_{p,r}(\lambda,\mu)\equiv V^{\delta}_{p,r}(\lambda,\mu)-\alpha\|\lambda-\tilde\lambda\|^2-\alpha|\mu-\tilde\mu|^2,\quad(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+,$$

где $(\tilde\lambda,\tilde\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+$ — произвольная фиксированная точка. Можно заметить, что в этом случае все утверждения теоремы 1, кроме двух последних, останутся в силе. В то же время два эти последние утверждения должны быть переформулированы следующим образом.

В качестве последовательности $(\lambda^k, \mu^k) \in H \times \mathbb{R}^m_+$, $k = 1, 2, \dots$, может быть взята последовательность $(\lambda^{\delta^k, \alpha(\delta^k)}_{p,r}, \mu^{\delta^k, \alpha(\delta^k)}_{p,r})$, $k = 1, 2, \dots$, $\delta^k/\alpha(\delta^k) \to 0$, $k \to \infty$, генерируемая алгоритмом двойственной регуляризации теоремы 3.1 в [14] с учетом замечаний 4, 5, в соответствии с которыми $(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}) \equiv \operatorname{argmax}\{V^\delta_{p,r}(\lambda, \mu) - \alpha(\delta)\|(\lambda, \mu) - (\widetilde{\lambda}, \widetilde{\mu})\|^2, (\lambda, \mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+\}$, $\delta/\alpha(\delta) \to 0$, $\alpha(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$. Тогда в случае существования ограниченной ОМП и разрешимости двойственной к $(P^0_{p,r})$ задачи имеет место предельное соотношение $(\lambda^k, \mu^k) \to (\lambda^0_{p,r}, \mu^0_{p,r})$, $k \to \infty$, где $(\lambda^0_{p,r}, \mu^0_{p,r})$ — элемент, минимизирующий функционал $\|(\lambda, \mu) - (\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})\|^2$, $(\lambda, \mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+$ на множестве всех решений двойственной задачи.

Итак, в заключение данного замечания можно утверждать, что за счет произвола в выборе $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{\mu}) \in H \times \mathbb{R}^m_+$ в случае существования ограниченной ОМП и разрешимости двойственной к $(P^0_{p,r})$ задачи можно без ограничения общности, в рамках теоремы 1, считать, что имеет место предельное соотношение $(\lambda^k, \mu^k) \to (\lambda^0_{p,r}, \mu^0_{p,r})$, $k \to \infty$, где в качестве $(\lambda^0_{p,r}, \mu^0_{p,r}) \in H \times \mathbb{R}^m_+$ может быть взято любое наперед выбранное и фиксированное решение двойственной задачи, например, нормальное (т. е. минимальное по норме) в случае $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = 0$. При этом ввиду совпадения множества всех решений двойственной к $(P^0_{p,r})$ задачи или, другими словами, множества всех ее векторов Куна — Таккера со взятым с обратным знаком ее субдифференциалом $\partial\beta(p, r)$, т. е. с $-\partial\beta(p, r)$ (см., например, [26]), в качестве $(\lambda^0_{p,r}, \mu^0_{p,r}) \in H \times \mathbb{R}^m_+$ может быть взят любой наперед выбранный и фиксированный элемент из $-\partial\beta(p, r)$.

4. Классическое ПМЛ как предельный вариант регуляризованного аналога

Данный раздел посвящен получению классического ПМЛ в недифференциальной форме на основе предельного перехода в соотношениях регуляризованного ПМЛ. Будем переходить к пределу в соотношениях теоремы 1, считая при этом для упрощения изложения функционал f^0 субдифференцируемым (в смысле выпуклого анализа) в точках множества $\mathcal{D}$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\beta(p, r) < +\infty$ и субдифференциал $\partial\beta(p, r)$ не пуст, т. е. когда двойственная к $(P^0_{p,r})$ задача разрешима. Используем в этой ситуации теорему 1 с учетом замечания 6 и фиксируем в качестве последовательности $(\lambda^k, \mu^k) \in H \times \mathbb{R}^m_+$, $k = 1, 2, \dots$, ту последовательность, о которой говорится в этом замечании. Она сходится при $k \to \infty$ к элементу $(\lambda^0_{p,r}, \mu^0_{p,r}) \in -\partial\beta(p, r)$. Тогда в силу одновременной сходимости $z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k] \to z^0_{p,r}$, $k \to \infty$, предельный переход в третьем условии (предельном соотношении) в (3.1) дает

$$\langle(\lambda^0_{p,r}, \mu^0_{p,r}), (A^0 z^0_{p,r} - h^0 - p, g^0(z^0_{p,r}) - r)\rangle = \langle\mu^0_{p,r}, g^0(z^0_{p,r}) - r\rangle = 0,$$

откуда с очевидностью выводим обычные соотношения дополняющей нежесткости

$$\mu^0_{p,r,i}(g^0_i(z^0_{p,r}) - r_i) = 0, \quad \mu^0_{p,r,i} \geq 0, \quad i = 1 \dots, m.$$

При этом $(\lambda^0_{p,r}, \mu^0_{p,r})$ — элемент, минимизирующий функционал $\|(\lambda, \mu) - (\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})\|^2$, $(\lambda, \mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+$ на множестве всех решений двойственной к $(P^0_{p,r})$ задачи при некотором $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{\mu}) \in H \times \mathbb{R}^m_+$.

Одновременно, так как элемент $z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]$ минимизирует функционал $L^{\delta^k}_{p,r}(z, \lambda^k, \mu^k)$, $z \in \mathcal{D}$, то, очевидно, таким же свойством обладает и предельный элемент, т. е.

$$L^0_{p,r}(z^0_{p,r}, \lambda^0_{p,r}, \mu^0_{p,r}) \leq L^0_{p,r}(z, \lambda^0_{p,r}, \mu^0_{p,r}) \;\; \forall\, z \in \mathcal{D}. \tag{4.1}$$

Таким образом, мы в рассматриваемой ситуации получили все соотношения классического принципа Лагранжа в недифференциальной форме [14, теорема 2.1], [26, теорема 1.1]. Естественно, если исходные данные задачи $(P^0_{p,r})$, т. е. функционалы f^0, g^0_i, $i = 1, \dots, m$, являются дифференцируемыми по Фреше в точках множества $\mathcal{D}$, то из этих соотношений выводятся и все соотношения классического принципа Лагранжа в дифференциальной форме.

Предположим далее, что $\beta(p,r) < +\infty$ и $\partial\beta(p,r) = \varnothing$, а сингулярный (асимптотический) субдифференциал $\partial^\infty\beta(p,r)$ содержит ненулевой элемент. Здесь используется обозначение $\partial^\infty f(z)$ для сингулярного субдифференциала выпуклой полунепрерывной снизу функции $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ в точке z, где $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство (см., например, [22, гл. 4]), который определяется формулой $\partial^\infty f(z) \equiv \{\lambda \in \mathcal{H} : (\lambda, 0) \in N_{\operatorname{epi} f}(z, f(z))\}$. Здесь $N_{\operatorname{epi} f}(z, f(z))$ — конус нормалей (в смысле выпуклого анализа) к $\operatorname{epi} f$ в точке $(z, f(z))$, причем, как известно, $\partial f(z) \equiv \{\lambda \in \mathcal{H} : (\lambda, -1) \in N_{\operatorname{epi} f}(z, f(z))\}$ — субдифференциал в смысле выпуклого анализа. В этом случае воспользуемся известным представлением для асимптотического субдифференциала выпуклого полунепрерывного снизу функционала (см., например, [22, с. 82]).

$$\partial^\infty\beta(p,r) = w\!-\!\limsup_{(p',r')\xrightarrow{\beta}(p,r),\, t\downarrow 0} t\partial\beta(p',r') \equiv \bigl\{w\!-\!\lim_{k\to\infty} t_k\zeta_k : t_k \downarrow 0, \zeta_k \in \partial\beta(p^k,r^k), (p^k,r^k) \xrightarrow{\beta} (p,r)\bigr\},$$

где символ $(p',r') \xrightarrow{\beta} (p,r)$ означает, что $((p',r'),\beta(p',r')) \to ((p,r),\beta(p,r))$, символ $t \downarrow 0$ означает сходимость к нулю справа, а символ $w - \lim\limits_{k\to\infty} t_k\zeta_k$ — слабую сходимость элементов $t_k\zeta_k$ при $k \to \infty$.

Перепишем неравенство (4.1) в виде

$$L^0_{p,r}(z^0_{p,r}, 1, \lambda^0_{p,r}, \mu^0_{p,r}) \le L^0_{p,r}(z, 1, \lambda^0_{p,r}, \mu^0_{p,r}) \quad \forall\, z \in \mathcal{D}, \tag{4.2}$$

где при $\nu \ge 0$ принято обозначение $L^0_{p,r}(z,\nu,\lambda,\mu) \equiv \nu f^0(z) + \langle(\lambda,\mu),(A^0z - h^0 - p, g^0(z) - r)\rangle$.

Умножим неравенство (4.2) на $s > 0$

$$L^0_{p,r}(z^0_{p,r}, s, s\lambda^0_{p,r}, s\mu^0_{p,r}) \le L^0_{p,r}(z, s, s\lambda^0_{p,r}, s\mu^0_{p,r}) \tag{4.3}$$

и поступим следующим образом. Для любой слабой предельной точки вида

$$(\tilde\lambda_{p,r}, \tilde\mu_{p,r}) = w - \lim_{k\to\infty,\, (p^k,r^k)\xrightarrow{\beta}(p,r),\, s_k\downarrow 0} s_k(\lambda^k_{p^k,r^k}, \mu^k_{p^k,r^k})$$

с $(\lambda^k_{p^k,r^k}, \mu^k_{p^k,r^k}) \in -\partial\beta(p^k,r^k)$ можем записать в результате очевидного предельного перехода в (4.3) при $k \to \infty$, после того как в это неравенство вместо (p,r), $(\lambda^0_{p,r}, \mu^0_{p,r})$ и s подставлено соответственно (p^k,r^k), $(\lambda^k_{p^k,r^k}, \mu^k_{p^k,r^k})$ и s_k,

$$L^0_{p,r}(z^0_{p,r}, 0, \tilde\lambda_{p,r}, \tilde\mu_{p,r}) \le L^0_{p,r}(z, 0, \tilde\lambda_{p,r}, \tilde\mu_{p,r}). \tag{4.4}$$

При этом предельном переходе учитывалось, что $z^0_{p^k,r^k} \to z^0_{p,r}$, $k \to \infty$, что является следствием слабой сходимости $z^0_{p^k,r^k}$ к $z^0_{p,r}$, числовой сходимости $f^0(z^0_{p^k,r^k})$ к $f^0(z^0_{p,r})$ при $k \to \infty$, субдифференцируемости в точках $\mathcal{D}$ и сильной выпуклости f^0. Кроме того, при этом предельном переходе учитывалось и то обстоятельство, что в силу замечания 6 в качестве элемента $(\lambda^k_{p^k,r^k}, \mu^k_{p^k,r^k})$ может быть взят любой элемент из $-\partial\beta(p^k,r^k)$. Одновременно в силу условий дополняющей нежесткости $\mu_{p^k,r^k,i}(g^0_i(z^0_{p^k,r^k}) - r^k_i) = 0$, $i = 1,2,\ldots,m$, в результате предельного перехода при $k \to \infty$ и предельного соотношения $z^0_{p^k,r^k} \to z^0_{p,r}$, $k \to \infty$, получаем $\tilde\mu_{p,r,i}(g^0_i(z^0_{p,r}) - r_i) = 0$, $i = 1,2,\ldots,m$, что в совокупности с (4.4) и означает выполнимость нерегулярного невырожденного принципа Лагранжа. При этом мы аппроксимировали решение $z^0_{p,r}$ задачи $(P^0_{p,r})$ точками $z^0_{p^k,r^k}$, доставляющими минимальное значение функциям Лагранжа $L^0_{p^k,r^k}(z, \lambda^k_{p^k,r^k}, \mu^k_{p^k,r^k})$, $z \in \mathcal{D}$.

И, наконец, если реализуется последняя из трех возможных здесь ситуаций, когда $\beta(p,r) < +\infty$, $\partial\beta(p,r) = \varnothing$ и одновременно $\partial^\infty\beta(p,r) = \{0\}$, то это означает, что классический принцип Лагранжа [14; 26] в задаче $(P^0_{p,r})$ с таким образом выбранными (p,r) не выполняется.

Заключение

Работа посвящена регуляризации ПМЛ в недифференциальной форме в выпуклой задаче на условный экстремум в гильбертовом пространстве с операторным ограничением-равенством и конечным числом функциональных ограничений-неравенств, в основе которой лежит метод двойственной регуляризации. Посредством метода возмущений исследована связь процедуры двойственной регуляризации с субдифференциальными свойствами функции значений задачи, изучены свойства сходимости этой процедуры в случае разрешимости двойственной задачи, показано, как классическое ПМЛ может быть получено в результате предельного перехода в соотношениях своего регуляризованного аналога.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.** Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432 с.
2. **Тихомиров В.М.** Рассказы о максимумах и минимумах. М.: Наука, 1986. 192 с.
3. **Аваков Е.Р., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.** О принципе Лагранжа в задачах на экстремум при наличии ограничений // Успехи мат. наук. 2013. Т. 68. Вып. 3(411). С. 5–38. doi: 10.4213/rm9525
4. **Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E.** On the Lagrange multiplier rule for minimizing sequences // Eurasian Math. J. 2023. Vol. 14, no. 1. P. 8–15. doi: 10.32523/2077-9879-2023-14-1-08-15
5. **Tröltzsch F.** Optimal control of partial differential equations. Providence, Rhode Island: AMS, 2010. 408 p. (Ser. Theory, Methods and Applications. Graduate Studies in Mathematics; vol. 112). doi: 10.1090/gsm/112
6. **Borzi A.** The sequential quadratic Hamiltonian method. Solving optimal control problems. Boca Raton, FL: Chapman and Hall/CRC Press, 2023. 266 p. doi: 10.1201/9781003152620
7. **Сумин М.И.** Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 1. С. 279–296. doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-1-279-296
8. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации: в 2-х кн. Москва: МЦНМО, 2011. 1056 с.
9. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 224 с.
10. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 208 с.
11. **Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.** Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во МГУ, 1989. 200 с.
12. **Кокурин М.Ю.** Элементы общей теории регуляризации некорректных задач. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2023. 356 с.
13. **Сумин М.И.** Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 4. С. 602–625.
14. **Сумин М.И.** Регуляризованная параметрическая теорема Куна — Таккера в гильбертовом пространстве // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 9. С. 1594–1615.
15. **Гольштейн Е.Г.** Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 352 с.
16. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
17. **Сумин М.И.** О регуляризации классических условий оптимальности в выпуклых задачах оптимального управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 2. С. 252–269. doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-252-269 .
18. **Тихонов А.Н.** Об устойчивости задачи оптимизации функционалов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1966. Т. 6, № 4. С. 631–634.
19. **Обен Ж.-П.** Нелинейный анализ и его экономические приложения. Москва: Мир, 1988. 264 с.
20. **Кларк Ф.** Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
21. **Borwein J.M., Strojwas H.M.** Proximal analysis and boundaries of closed sets in Banach space, Part I: Theory // Can. J. Math. 1986. vol. 38, no. 2. pp. 431–452; Part II: Applications // Can. J. Math. 1987. vol. 39, no. 2. pp. 428–472.

22. **Loewen P.D.** Optimal control via nonsmooth analysis. Providence, RI: AMS, 1993. 153 p. (Ser. CRM Proceedings and Lecture Notes; vol. 2.) doi: 10.1090/crmp/002
23. **Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R.** Nonsmooth analysis and control theory. NY: Springer-Verlag, 1998. 278 p. (Ser. Graduate texts in mathematics; vol. 178). doi: 10.1007/b97650
24. **Sumin M.I.** Suboptimal control of systems with distributed parameters: minimizing sequences, value function, regularity, normality // Control and Cybernetics. 1996. Vol. 25, no. 3. P. 529–552.
25. **Обен Ж.-П., Экланд И.** Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988. 512 с.
26. **Сумин М.И.** Недифференциальные теоремы Куна–Таккера в задачах на условный экстремум и субдифференциалы негладкого анализа // Вестн. российских университетов. Математика. 2020. Т. 25, вып. 131. С. 307–330. doi: 10.20310/2686-9667-2020-25-131-307-330
27. **Ekeland I.** On the variational principle // J. Math. Anal. Appl. 1974. Vol. 47, no. 2. P. 324–353.

Поступила 10.02.2024
После доработки 28.02.2024
Принята к публикации 4.03.2024

Сумин Михаил Иосифович
д-р физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина
г. Тамбов
e-mail: m.sumin@mail.ru

REFERENCES

1. Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. *Optimal Control.* NY, Plenum Press, 1987, 309 p. doi: 10.1007/978-1-4615-7551-1 . Original Russian text published in Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. *Optimal'noe upravlenie*, Moscow, Nauka Publ., 1979, 432 p.
2. Tikhomirov V.M. *Stories about maxima and minima.* Providence, RI: AMS, 1990, 187 p. ISBN: 978-0-8218-0165-9 . Original Russian text published in Tikhomirov V.M. *Rasskazy o maksimumakh i minimumakh*, Moscow, Nauka Publ., 1986, 192 p.
3. Avakov E.R., Magaril-Il'yaev G.G., Tikhomirov V.M. Lagrange's principle in extremum problems with constraints. *Russian Math. Surveys*, 2013, vol. 68, no. 3, pp. 401–433. doi: 10.1070/rm2013v068n03abeh004838
4. Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E. On the Lagrange multiplier rule for minimizing sequences. *Eurasian Math. J.*, 2023, vol. 14, no. 1, pp. 8–15. doi: 10.32523/2077-9879-2023-14-1-08-15
5. Tröltzsch F. *Optimal control of partial differential equations. Theory, methods and applications.* In: *Graduate studies in mathematics*, vol. 112. Providence, Rhode Island: AMS, 2010, 408 p. doi: 10.1090/gsm/112
6. Borzi A. *The sequential quadratic Hamiltonian method. Solving optimal control problems.* Boca Raton, FL: Chapman and Hall/CRC Press, 2023, 266 p. doi: 10.1201/9781003152620
7. Sumin M.I. Regularized Lagrange principle and Pontryagin maximum principle in optimal control and in inverse problems. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 279–296 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-1-279-296
8. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow: Moscow Centre of Continuous Math. Education Publ., 2011. Vol. 1: 620 p., ISBN: 978-5-94057-707-2; Vol. 2: 433 p., ISBN: 978-5-94057-708-9 .
9. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Solutions of ill-posed problems.* Washington,Winston, NY: Halsted Press, 1977, 258 p. ISBN: 978-0470991244 . Original Russian text published in Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 224 p.
10. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of linear ill-posed problems and its applications.* In: *Inverse and ill-posed problems series*, vol. 36. Utrecht etc., VSP, 2002, 281 p. doi: 10.1515/9783110944822 . Original Russian text published in Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya*, Moscow, Nauka Publ., 1978, 208 p.
11. Bakushinskii A.B., Goncharskii A.V. *Nekorrektnye zadachi. Chislennye metody i prilozheniya* [Ill-posed problems. Numerical methods and applications]. Moscow, Moscow State Univ. Publ., 1989, 209 p.

12. Kokurin M.Yu. *Elementy obshchei teorii regularizatsii nekorrektnykh zadach* [Elements of general theory of ill-posed problems regularization]. Moscow; Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovanii, 2023, 356 p. ISBN: 978-5-4344-0987-2 .
13. Sumin M.I. Duality-based regularization in a linear convex mathematical programming problem. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2007, vol. 47, no. 4, pp. 579–600. doi: 10.1134/S0965542507040045
14. Sumin M.I. Regularized parametric Kuhn–Tucker theorem in a Hilbert space. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2011, vol. 51, no. 9, pp. 1489–1509. doi: 10.1134/S0965542511090156
15. Golstein E.G. *Teoriya dvoistvennosti v matematicheskom programmirovanii i ee prilozheniya* [Duality theory in mathematic programming and its applications]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 351 p.
16. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations.* NY, Acad. Press, 1972, 531 p. doi: 10.1016/C2013-0-11669-8 . Translated to Russian under the title *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami*, Moscow, Nauka Publ., 1977, 620 p.
17. Sumin M.I. On regularization of the classical optimality conditions in convex optimal control problems. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 252–269 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-252-269
18. Tikhonov A.N. On the stability of the functional optimization problem. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1966, vol. 6, no. 4, pp. 28–33. doi: 10.1016/0041-5553(66)90003-6
19. Aubin J.P. *L'analyse non linéaire et ses motivations économiques.* Paris, Masson, 1984, 214 p. ISBN: 978-2225795411 . Translated to Russian under the title *Nelineinyi analiz i ego ekonomicheskie prilozheniya*, Moscow, Mir Publ., 1988, 264 p.
20. Clarke F.H. *Optimization and nonsmooth analysis.* NY, Wiley Interscience, 1983, 308 p. ISBN: 9780471875048 . Translated to Russian under the title *Optimizatsiya i negladkii analiz*, Moscow, Nauka Publ., 1988, 280 p.
21. Borwein J.M., Strojwas H.M. Proximal analysis and boundaries of closed sets in Banach space. Part I: Theory. *Canad. J. Math.*, 1986, vol. 38, no. 2, pp. 431–452, doi: 10.4153/CJM-1986-022-4 . Part II: Applications. *Canad. J. Math.*, 1987, vol. 39, no. 2, pp. 428–472. doi: 10.4153/CJM-1987-019-4
22. Loewen P.D. *Optimal control via nonsmooth analysis.* In: *CRM proceedings and lecture notes*, vol. 2. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993, 153 p. doi: 10.1090/crmp/002
23. Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R. *Nonsmooth analysis and control theory.* In: *Graduate texts in mathematics*, vol. 178. NY, Springer-Verlag, 1998, 278 p. doi: 10.1007/b97650
24. Sumin M.I. Suboptimal control of systems with distributed parameters: minimizing sequences, value function, regularity, normality. *Control and Cybernetics*, 1996, vol. 25, no. 3, pp. 529–552.
25. Aubin J.P., Ekeland I. *Applied nonlinear analysis.* NY, Wiley-Interscience, 1984, 518 p. ISBN: 9780471059981. Translated to Russian under the title *Prikladnoi nelineinyi analiz*, Moscow, Mir Publ., 1988, 512 p.
26. Sumin M.I. Nondifferential Kuhn–Tucker theorems in constrained extremum problems via subdifferentials of nonsmooth analysis. *Vestnik Ross. Univ. Mat.*, 2020, vol. 25, no. 131, pp. 307–330 (in Russian). doi: 10.20310/2686-9667-2020-25-131-307-330
27. Ekeland I. On the variational principle. *J. Math. Anal. Appl.*, 1974, vol. 47, no. 2, pp. 324–353. doi: 10.1016/0022-247X(74)90025-0

Received February 10, 2024
Revised February 28, 2024
Accepted March 4, 2024

Funding Agency: The work on the results presented in Sections 1–3 was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-11-20020, https://rscf.ru/project/23-11-20020/), and the work on the results presented in Section 4 was supported by the Ministry of Education and Science of the Tambov oblast (grant no. 2-FP-2023).

Mikhail Iosifovich Sumin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Chief Researcher, Derzhavin Tambov State University, Tambov, 392000 Russia, e-mail: m.sumin@mail.ru .

Cite this article as: M. I. Sumin. The perturbation method and a regularization of the Lagrange multiplier rule in convex problems for constrained extremum. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 203–221 .