ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 2 2024

УДК 517.977

ДИНАМИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕИЗВЕСТНОГО ВХОДА СИСТЕМЫ ГИБРИДНОГО ТИПА[1]

В. Л. Розенберг

Задача идентификации входа гибридной системы дифференциальных уравнений рассматривается с позиций подхода теории динамического обращения. Первое уравнение системы представляет собой квазилинейное стохастическое уравнение Ито, второе — линейное обыкновенное уравнение, содержащее неизвестное возмущение. Идентификация выполняется на основе дискретной информации о некотором количестве реализаций случайного процесса, являющегося решением первого уравнения. Задача сводится к обратной задаче для новой системы дифференциальных уравнений, включающей вместо стохастического уравнения обыкновенное уравнение, описывающее динамику математического ожидания исходного процесса. Разработан конечношаговый, программно-ориентированный разрешающий алгоритм, основанный на методе вспомогательных управляемых моделей; доказана его сходимость. Приведен пример, иллюстрирующий работу процедуры калибровки модельных параметров.

Ключевые слова: система гибридного типа, динамическая идентификация входа, управляемая модель.

V. L. Rozenberg. Dynamic identification of an unknown input in a hybrid type system.

An input identification problem in a hybrid system of differential equations is considered from the viewpoint of the approach of the theory of dynamic inversion. The first equation of the system is a quasi-linear stochastic Ito equation, whereas the second one is a linear ordinary equation containing an unknown disturbance. The identification should be performed from the discrete information on a number of realizations of the stochastic process that solves the first equation. The problem is reduced to an inverse problem for a new system of differential equations, which includes, instead of the stochastic equation, an ordinary equation describing the dynamics of the mathematical expectation of the original process. A finite-step software-oriented solution algorithm based on the method of auxiliary feedback controlled models is designed, and its convergence is proved. An example illustrating the operation of a procedure for calibrating the algorithm parameters is presented.

Keywords: hybrid type system, dynamic input identification, controlled model.

MSC: 49K15, 93C41, 93E12

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-2-164-172

1. Введение

Динамическая идентификация неизвестных параметров управляемых систем по неполной и/или неточной информации о фазовом состоянии вкладывается в проблематику обратных задач динамики и требует применения специальных разрешающих процедур. Автор статьи следует подходу, разработанному А. В. Кряжимским, Ю. С. Осиповым и их коллегами (см. [1–4] и библиографию в них) и получившему название метода динамического обращения. Базируясь на комбинации принципов теории позиционного управления [5] и теории некорректных задач [6], метод сводит задачу идентификации к задаче управления по принципу обратной связи вспомогательной динамической системой (моделью). Как правило, именно модельное управление, адаптируясь к результатам текущих наблюдений, аппроксимирует неизвестный вход.

[1]Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2024-1377).

К настоящему времени метод динамического обращения реализован для множества задач, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ), дифференциально-функциональными уравнениями, уравнениями и вариационными неравенствами с распределенными параметрами, уравнениями в дробных производных, а также стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ), см., например, [1–4, 7–9].

Были созданы устойчивые алгоритмы, работающие для разных классов частично наблюдаемых систем, как конечномерных, так и бесконечномерных. Отметим некоторые ключевые моменты. В рамках упомянутого подхода первой задачей, рассмотренной в условиях дефицита информации, стала реконструкция неизвестного возмущения, входящего в измеряемую компоненту частично наблюдаемого ОДУ [10]. Разработанный алгоритм был основан на возможности формального разрешения наблюдаемой компоненты уравнения относительно возмущения с последующей аппроксимацией неизмеряемой компоненты. Подход получил дальнейшее развитие; в [4] приведен обзор рассмотренных обратных задач для частично наблюдаемых систем ОДУ и соответствующих разрешающих алгоритмов. Аналогичные конструкции для линейных/квазилинейных СДУ были предложены в [11].

Предмет исследования в настоящей статье — частично наблюдаемая система дифференциальных уравнений специального вида, в которой доступны измерению некоторые характеристики первой компоненты, представляющей собой СДУ, при этом неизвестное возмущение входит во вторую компоненту, являющуюся ОДУ. Такую систему будем называть системой гибридного типа. Новизна работы состоит в постановке и решении задачи динамической идентификации входа для системы указанной структуры. Представляется возможным и перспективным расширение предложенного подхода на другие классы задач для гибридных систем.

2. Постановка задачи динамической идентификации входа

Простые стохастические модели могут быть полезны, например, при изучении процессов развития биологической популяции в стохастической среде или при исследовании хаотической динамики однотипных частиц. При этом обыкновенные дифференциальные уравнения могут описывать некоторые детерминированные помехи, влияющие на различные характеристики исследуемых явлений. В таком контексте мы рассматриваем линейную гибридную систему, состоящую из СДУ и ОДУ:

$$dx(t,\omega) = (Ax(t,\omega) + By(t) + f_0(t))\,dt + Cx(t,\omega)\,d\xi(t,\omega), \quad x(0,\omega) = x_0, \tag{2.1}$$

$$dy(t) = (Dy(t) + Em(t) + Fu(t) + f_1(t))\,dt, \quad y(0) = y_0. \tag{2.2}$$

Здесь $t \in T = [0,\vartheta]$; $(x(\cdot,\omega),\, y(\cdot))$ — фазовая траектория, $x(t,\omega) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$; $(x_0,\, y_0)$ — известное неслучайное начальное состояние; $\xi(t,\omega) \in \mathbb{R}$ — стандартный скалярный винеровский процесс (т. е. выходящий из нуля с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной t); $\omega \in \Omega$, Ω — множество возможных исходов; $m(t) = Mx(t,\omega)$ — математическое ожидание; $u(\cdot)$ — внешнее возмущение ограниченной вариации на T со значениями в данном компакте $S_u \in \mathbb{R}^m$; A, B, C, D, E и F — постоянные числовые матрицы соответствующих размерностей; $f_0(\cdot)$ и $f_1(\cdot)$ — векторные функции, суммируемые с квадратом на T.

Решение уравнения (2.1) определяется как случайный процесс, удовлетворяющий при любом t с вероятностью 1 соответствующему интегральному тождеству, содержащему в правой части стохастический интеграл Ито. Как известно, при сделанных предположениях существует единственное решение $x(t,\omega)$, $t \in T$, являющееся нормальным марковским процессом с непрерывными реализациями [12]. Решение уравнения (2.2) понимается в смысле Каратеодори, предполагается абсолютная непрерывность компоненты $y(\cdot)$.

Изучаемая задача состоит в следующем. Неизвестное возмущение $u(t)$, действующее на систему, входит только в уравнение (2.2), в то время как в дискретные, достаточно частые, моменты времени $\tau_i \in T$, $\tau_i = i\delta$, $\delta = \vartheta/l$, $i \in [0 : l]$, доступна информация о некотором количестве N реализаций первой фазовой компоненты системы, случайного процесса $x(\tau_i)$.

Требуется построить алгоритм динамической реконструкции неизвестного возмущения $u(t)$, причем вероятность сколь угодно малого отклонения приближения от искомого входа в метрике пространства $L_2(T; \mathbb{R}^m)$ должна быть близка к 1 при достаточно большом N и специальным образом согласованном с N шаге временной дискретизации $\delta = \delta(N) = \vartheta/l(N)$. Такая постановка может быть полезна в ситуации, когда необходимо восстановить неизвестные характеристики внешних шумов, влияющих на коллективное поведение однотипных особей или частиц, на основе измерений траекторий их движения.

Отметим, что новизна работы определяется именно спецификой постановки обратной задачи для динамической системы гибридного типа, в которой возмущение, подлежащее реконструкции, стеснено геометрическими ограничениями и не входит в измеряемую компоненту, являющуюся СДУ.

3. Переход к задаче для системы ОДУ. Алгоритм решения

Разрешающий алгоритм конструируется в рамках теории динамического обращения [1–4]. В условиях дефицита информации в соответствии с методами, предложенными ранее для решения таких обратных задач [4], вначале мы должны разработать блок динамической реконструкции неизвестной координаты $y(t)$ (Блок 1), который играет роль поставщика информации о полном фазовом состоянии системы. Это информация оперативно подается на блок, формирующий по принципу обратной связи модельное управление, аппроксимирующее реальное возмущение (Блок 2). Работа Блоков 1 и 2 должна быть синхронизирована по времени.

Перейдем к подзадаче из Блока 1 (именно, восстановление $y(t)$). Свойства СДУ (2.1) допускают сведение посредством ставшего классическим метода моментов [13] задачи для системы (2.1), (2.2) к задаче для системы, состоящей из дополнительного ОДУ, описывающего динамику математического ожидания $m(t)$ исходного случайного процесса, и первоначального ОДУ (2.2). В силу квазилинейности уравнения (2.1) и равенства нулю математического ожидания интеграла Ито получаем соотношение

$$\dot{m}(t) = Am(t) + By(t) + f_0(t), \quad m(0) = x_0, \tag{3.1}$$

которое заменяет в исходной системе уравнение (2.1), тем самым формируя новую систему ОДУ (3.1), (2.2). Далее организуем вспомогательную процедуру для реконструкции неизвестной функции $y(t)$ в правой части (3.1). Следуя [9, 11], сведем задачу для системы (2.1), (2.2) к аналогичной задаче для новой системы (3.1), (2.2). Таким образом, подзадача для СДУ с измерением его траекторий трансформируется в подзадачу для ОДУ с измерением его фазового состояния.

Для получения измерений, подходящих для уравнения (3.1), потребуется

Лемма 1 [9, Lemma 1]. *Стандартная оценка m_i^N математического ожидания $m(\tau_i)$, построенная по N реализациям случайной величины $x(\tau_i)$ по правилу*

$$m_i^N = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N} x^r(\tau_i),$$

обеспечивает выполнение соотношения

$$P\Big(\forall i \in [0 : l(N)] \quad \big\|m_i^N - m(\tau_i)\big\| \le h(N)\Big) = 1 - g(N), \tag{3.2}$$

где $l(N) \to \infty$, $h(N)$, $g(N) \to 0$ при $N \to \infty$.

В [9] доказано, что величины, входящие в соотношение (3.2), имеют следующий вид: $l(N) = C_1 N^{\epsilon_1}$, $h(N) = C_2/N^{1/2-\epsilon_2}$, $g(N) = C_3/N^{1-\epsilon_1}$, $0 < \epsilon_1 < 1$, $0 < \epsilon_2 < 1/2$. Отметим, что тогда $\delta(N) = C_4/N^{\epsilon_1}$. Здесь и ниже C_i — некоторые положительные константы, которые могут быть выписаны явно.

Используя неточные измерения m_i^N фазового состояния уравнения (3.1), мы должны реконструировать неизвестное возмущение $u(t)$, действующее в (2.2).

Кратко опишем схему работы разрешающего алгоритма. Вместо системы (2.1), (2.2) используется система (3.1), (2.2); с последней связана специально построенная вспомогательная управляемая система (модель M, состоящая из двух систем, M_1 и M_2). Модель имеет входы (трактуемые как управления) $v^N(t)$ и $u^N(t)$ и выходы $w_m^N(t)$ и $w_y^N(t)$. Такая нотация подчеркивает зависимость всех входных/выходных параметров алгоритма от количества N доступных измерению траекторий уравнения (2.1). Поскольку измеряется только часть $x(\tau_i)$ (или $m(\tau_i)$) фазового состояния исходной гибридной системы, алгоритм должен включать два блока: Блок 1 (система M_1 и ее контроллер V), генерирующий информацию о текущем фазовом состоянии $y(t)$ уравнения (2.2), и Блок 2 (система M_2 и ее контроллер U), формирующий на основе данных, полученных от Блока 1, аппроксимацию неизвестного воздействия $u(t)$. После выбора позиционных законов управления (с учетом обратной связи) модельными системами M_1 и M_2 организуется процесс синхронного функционирования исходной и модельных систем на интервале T. Весь процесс разбивается на $l(N)-1$ однотипных шагов. На i-м шаге, который выполняется на интервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$, производятся следующие действия. Сначала, в момент τ_i, в соответствии с выбранными правилами V и U вычисляются управляющие воздействия $v^N(t)$ и $u^N(t)$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$. Затем они подаются на вход систем M_1 и M_2, после чего по текущим измерениям m_i^N и значениям модельных переменных $w_m^N(\tau_i)$ и $w_y^N(\tau_i)$ определяется состояние модели $w_m^N(\tau_{i+1})$, $w_y^N(\tau_{i+1})$ в следующий момент времени. Таким образом, процедура решения задачи сводится к подходящему выбору модели M и законов управления V и U с получением в конечном счете аппроксимации неизвестного воздействия $u(t)$ модельным управлением $u^N(t)$.

Конкретизируем Блок 1, Блок 2 и модельные управления. Отметим, что алгоритм решения существенно опирается на результаты, полученные в [14, 15], где подобная обратная задача была рассмотрена для системы ОДУ.

Обозначим фундаментальные матрицы систем $\dot{m}(t) = Am(t)$ и $\dot{y}(t) = Dy(t)$ соответственно символами $M(t) = \exp(At)$ и $Y(t) = \exp(Dt)$. Отметим, что в силу свойств матричной экспоненты можно указать такие константы ω и $\hat{\omega}$, что

$$\|M(t)\|_{n_1}^2 \le \exp(\omega t), \quad \|Y(t)\|_{n_2}^2 \le \exp(\hat{\omega} t).$$

Потребуем выполнения всюду ниже условия, стесняющего правые части систем.

Условие 1. Пусть $m \le n_2 \le n_1$ и существуют числа $d_1 > 0$ и $d_2 > 0$ такие, что неравенства $\|By\|_{n_1} \ge d_1 \|y\|_{n_2}$ и $\|Fu\|_{n_2} \ge d_2 \|u\|_m$ имеют место соответственно для всех $y \in \mathbb{R}^{n_2}$ и $u \in \mathbb{R}^m$.

Условие справедливо, например, для квадратных невырожденных матриц B и F.

В начальный момент времени $\tau_0 = 0$ фиксируем число N; затем в соответствии с леммой 1 определяем величины $l(N)$, $h(N)$ и $g(N)$ и выполняем равномерное разбиение интервала T с шагом $\delta(N) = \vartheta/l(N)$: $\tau_i = i\delta(N)$, $i \in [0 : l(N)]$. Отметим, что $\delta(N), h(N), g(N) \to 0$ при $N \to \infty$.

Введем дискретную систему-модель, которая состоит из двух блоков и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&w_m^N(\tau_{i+1}) = w_m^N(\tau_i) + (Aw_m^N(\tau_i) + Bv^N(\tau_i) + f_0(\tau_i))\delta(N),\ w_m^N(t_0) = x_0,\\
&w_y^N(\tau_{i+1}) = w_y^N(\tau_i) + (Dw_y^N(\tau_i) + Ew_m^N(\tau_i) + Fu^N(\tau_i) + f_1(\tau_i))\delta(N),\ w_y^N(t_0) = y_0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь $w_m^N(\tau_i) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $w_y^N(\tau_i) \in \mathbb{R}^{n_2}$ — модельные переменные; $v^N(\tau_i) \in \mathbb{R}^{n_2}$, $u^N(\tau_i) \in \mathbb{R}^m$ — модельные управления. Выбираем функции-регуляризаторы $\alpha(N), \hat{\alpha}(N) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ такие, что $\alpha(N) \to 0$, $\hat{\alpha}(N) \to 0$ при $N \to \infty$.

Процесс управления моделью организуем следующим образом. Работу алгоритма разобьем на $l(N)$ однотипных шагов. На i-м шаге, который выполняется на интервале $[\tau_i,\,\tau_{i+1})$, $i \in [0 : (l(N)-1)]$, исходными данными для вычислений служат оценка m_i^N и сформированное к моменту τ_i состояние модели $w_m^N(\tau_i)$, $w_y^N(\tau_i)$. Выполняются следующие операции. Сначала Блок 1 по величинам m_i^N и $w_m^N(\tau_i)$ вычисляет вектор

$$v_i^N = v_i^N(m_i^N, w_m^N(\tau_i)) = \arg\min\{L_v(\tau_i,\alpha,v) : v \in V(d)\}, \tag{3.4}$$

где

$$L_v(\tau_i,\alpha,v) = 2\exp(-\omega\tau_{i+1})\big((w_m^N(\tau_i)-m_i^N), Bv\big)_{n_1} + \alpha(N)\|v\|_{n_2}^2, \tag{3.5}$$

$$d = \sup\big\{\|y(t;t_0,x_0,y_0,u(\cdot))\|_{n_2} \colon t \in T\big\},$$

$$V(d) = \{v \in \mathbb{R}^{n_2} \colon \|v\|_{n_2} \le d\}.$$

Здесь $y(t;t_0,x_0,y_0,u(\cdot))$ — пучок решений уравнения (2.2), стартующих из фиксированной начальной точки при любом допустимом управлении $u(\cdot)$. Существование числа d очевидно. Затем Блок 2, используя аппроксимацию v_i^N и величину $w_y^N(\tau_i)$, находит вектор

$$u_i^N = u_i^N(v_i^N, w_y^N(\tau_i)) = \arg\min\{L_u(\tau_i,\hat\alpha,u) \colon u \in S_u\}, \tag{3.6}$$

где

$$L_u(\tau_i,\hat\alpha,u) = 2\exp(-\hat\omega\tau_{i+1})\big((w_y^N(\tau_i)-v_i^N), Fu\big)_{n_2} + \hat\alpha(N)\|u\|_m^2. \tag{3.7}$$

После этого согласно формулам (3.3) модель переходит в состояние $w_m^N(\tau_{i+1})$ и $w_y^N(\tau_{i+1})$. На следующем, $(i+1)$-м шаге выполняются аналогичные действия. Таким образом, два кусочно-постоянных управления

$$v^N(t) = v_i^N, \quad u^N(t) = u_i^N, \quad t \in [\tau_i,\,\tau_{i+1}), \tag{3.8}$$

формируются в результате работы описанной выше процедуры. Работа алгоритма заканчивается в конечный момент времени $t = \vartheta$.

Полагая $\epsilon = \epsilon_1 = 1/2 - \epsilon_2$ (тогда $0 < \epsilon < 1/2$), запишем условия согласования параметров алгоритма и количества измеряемых траекторий N:

$$\begin{aligned} &l(N) = C_1N^{\epsilon}, \quad h(N) = C_2/N^{\epsilon}, \quad g(N) = C_3/N^{1-\epsilon},\\ &\delta(N) = C_4/N^{\epsilon}, \quad \alpha(N) = C_5/N^{2\epsilon/3}, \quad \hat\alpha(N) = C_6/N^{\epsilon/9}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия согласования* (3.9)*. Тогда для управления* $u^N(\cdot)$*, формируемого согласно* (3.3)–(3.8)*, справедлива оценка*

$$P\big(\|u^N(\cdot)-u(\cdot)\|_{L_2(T;\mathbb{R}^m)}^2 \le H(N)\big) = 1 - G(N), \tag{3.10}$$

где величины $H(N)$, $G(N) \to 0$ *при* $N \to \infty$ *и могут быть выписаны явно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следуя работе [15], рассмотрим функции

$$\rho(N) = C_7(h(N)+\delta(N)+\alpha(N))^{1/2} + (h(N)+\delta(N))\alpha^{-1}(N),$$

$$H(N) = C_8((\rho(N))^{1/2} + \hat\alpha(N))^{1/2} + (\rho(N))^{1/2}\hat\alpha^{-1}(N).$$

Основной результат [15], полученный для обсуждаемого алгоритма в применении к системе ОДУ (3.1), (2.2), приводит к оценке

$$\|u^N(\cdot)-u(\cdot)\|_{L_2(T;\mathbb{R}^m)}^2 \le H(N).$$

Используя оценку (3.2), которая справедлива для всех $l(N)$ измерений, и ее вероятность, заключаем, что процедура (3.3)–(3.8) обеспечивает справедливость оценки (3.10), при этом $G(N) = g(N)$. Остается проверить, что $H(N) \to 0$ при выполнении условий (3.9). Прежде всего, мы должны получить $\rho(N) \to 0$. В самом деле, поскольку $h(N)$ и $\delta(N)$ имеют один и тот же порядок малости относительно величины $1/N$ и можно считать $\alpha(N) = (h(N))^{2/3}$, то $\rho(N)$ имеет тот же порядок малости, что и $(h(N))^{1/3}$, т.е. $\rho(N) \to 0$. Возвращаясь к величине $H(N)$ и учитывая, что фактически $\hat{\alpha}(N) = (h(N))^{1/9}$, получаем, что $H(N)$ имеет тот же порядок малости, что и $(h(N))^{1/18}$, т.е. $H(N) \to 0$. Таким образом, шаг по времени $\delta(N)$ имеет порядок малости $1/N^{\epsilon}$, вероятностная характеристика $G(N) - 1/N^{1-\epsilon}$ (можно выбрать обе величины асимптотически близкими к $1/N^{1/2}$), в то время как точность аппроксимации $H(N)$ эквивалентна $1/N^{\epsilon/18}$. Последнее соотношение является важным для доказательства оценки (3.10), но его оптимальность по порядку не исследуется. Отметим, что полученная оценка позволяет сделать вывод о единственности искомого возмущения.

4. Процедура настройки параметров алгоритма

Для тестирования алгоритма, описанного выше, используется эмпирическая процедура настройки параметров, аналогичная предложенной в [16]; при этом варьируются ключевые величины, а именно,

$$\delta(N) = 1/N^{1/2}, \quad \alpha(N) = K_1/N^{1/3}, \quad \hat{\alpha}(N) = K_2/N^{1/18},$$

где положительные константы K_1 и K_2 подлежат определению. Предполагается, что эти константы, зависящие от параметров исходной системы и от априорных ограничений на неизвестные функции, могут быть найдены как решение следующей экстремальной задачи:

$$(K_1^*, K_2^*) = \arg\min \left\{ \sum_{N \in I^N} \beta^N \|u^N_{K_1,K_2}(\cdot) - u^*(\cdot)\|_{L_2(T;\mathbb{R}^m)} : (K_1, K_2) \in S_K \right\}. \tag{4.1}$$

Здесь обозначение $u^N_{K_1,K_2}(\cdot)$ подчеркивает зависимость выхода алгоритма от констант K_1 и K_2; I^N — множество выбранных значений N, β^N — весовые коэффициенты, $\sum_{N\in I^N} \beta^N = 1$; S_K — некоторое множество допустимых значений пары (K_1, K_2). Задача (4.1) решается полным перебором на “разумной” сетке по K_1, K_2 для некоторого допустимого тестового возмущения $u^*(\cdot)$. Найденные значения K_1^*, K_2^* участвуют в реконструкции других возмущений, удовлетворяющих заданным ограничениям.

При моделировании динамики уравнения (2.1) для получения измерений m_i^N применяется метод Эйлера с заменой винеровского процесса последовательностью случайных импульсов. Среднеквадратический порядок точности этого метода для квазилинейного СДУ равен $O(\delta_s)$, где δ_s — шаг моделирования, который, как правило, существенно меньше шага δ^N, с которым поступает информация о реализациях случайного процесса и с которым соответственно восстанавливается функция $u(t)$. Таким образом, две временные сетки задействованы в работе процедуры настройки параметров алгоритма. Однако расчеты на более мелкой сетке носят разовый характер, так как при решении реальной задачи входная информация поступает из “внешнего мира”. Отметим, что вероятностный характер оценки (3.10) предполагает усреднение выхода алгоритма в серии запусков для фиксированного набора параметров.

5. Модельный пример

Рассмотрим квазилинейное СДУ, описывающее случайный процесс, который можно трактовать как “испорченный” средне-возвратный процесс Орнштейна — Уленбека [12], и линейное ОДУ:

$$dx_1(t) = (-2x_1(t) + 0.1x_2(t) + y_1(t) + y_2(t) + 1)\,dt + x_1(t)\,d\xi(t),$$

$$dx_2(t) = (0.1x_1(t) - x_2(t) + 2y_2(t) + 2)\,dt + x_2(t)\,d\xi(t),$$
$$dy_1(t) = (y_1(t) + t(\cos t - \sin t) + u_1(t))\,dt, \quad dy_2(t) = (y_2(t) + u_2(t))\,dt,$$
$$t \in T = [0,1], \quad x_1(0) = 1, x_2(0) = 1, \quad y_1(0) = 0, y_2(0) = 0. \tag{5.1}$$

Здесь $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — неизвестные ограниченные возмущения, подлежащие реконструкции, $u_1, u_2 \in [-1, 3]$. Выполнение условия 1 на размерности величин и правую часть системы легко проверяется.

Уравнения типа (5.1) используются в некоторых простейших моделях, описывающих динамику биологической популяции в стохастической среде. В этом случае $x(t) = (x_1(t),\, x_2(t))$ представляет текущую численность популяции, состоящей из взаимодействующих организмов двух видов; структура детерминированной части уравнения определяет численность (например, среднюю за некоторую предысторию), стремление вернуться к которой “подсознательно” присутствует у популяции. Такому возврату может препятствовать влияние как соседей, так и внешних факторов через функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$, которые в свою очередь сами подвержены воздействию неизвестных возмущений $u_1(t)$ и $u_2(t)$. Измерению в дискретные моменты времени доступны траектории $x(t)$, соответствующие различным колониям организмов.

К тестовым возмущениям (их роль играли нулевые функции) применялась процедура (4.1) с параметрами: $I^N = \{10^4, 10^6\}$, $S_K = (0,1] \times (0,1]$, $\Delta K_{1,2} = 0.1$, $\beta^{N_1} = 0.4$, $\beta^{N_2} = 0.6$. Были получены оптимальные значения коэффициентов: $K_1 = 0.9$, $K_2 = 0.5$, которые использовались в вычислительном эксперименте, где в качестве неизвестных возмущений были выбраны функции $u_1(t) = \sin t$ и $u_2(t) = 2 - 2t$. В этом случае $y_1(t) = t \sin t$ и $y_2(t) = 2t$. Результаты представлены в табл. 1. Отметим, что они очевидным образом согласуются с оценкой (3.10): чем больше количество измеряемых траекторий N, тем меньше величина погрешности восстановления.

Т а б л и ц а 1

Результаты вычислительного эксперимента

Параметры и погрешности	$N = 10^4$	$N = 10^6$
$\delta(N)$	0.01	0.001
$\alpha(N)$	0.04	0.009
$\hat{\alpha}(N)$	0.3	0.023
$\|y^N(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(T;\mathbb{R}^2)}$	0.422	0.089
$\|u^N(\cdot) - u(\cdot)\|_{L_2(T;\mathbb{R}^2)}$	1.134	0.177

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
2. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. L.: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
3. **Максимов В.И.** Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2000. 305 с.
4. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011. 292 с.
5. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1984. 456 с.
6. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1978. 142 с.
7. **Близорукова М.С., Максимов В.И.** Динамический метод невязки в задаче реконструкции входа системы с запаздыванием в управлении // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2021. Т. 61, № 3. С. 382–390. doi: 10.31857/S0044466921030042

8. **Сурков П.Г.** Задача динамического восстановления правой части системы дифференциальных уравнений нецелого порядка // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 6. С. 865–874. doi: 10.1134/s0374064119060128
9. **Rozenberg V.L.** Dynamical input reconstruction problem for a quasi-linear stochastic system. *IFAC PapersOnline*, 51-32, 2018, pp. 727–732. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.460
10. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** Об устойчивом позиционном восстановлении управления по измерениям части координат // Некоторые задачи управления и устойчивости: сб. тр. / ред. А.В. Ким и В.И. Максимов. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1989. С. 33–47.
11. **Розенберг В.Л.** К задаче реконструкции при дефиците информации в квазилинейном стохастическом дифференциальном уравнении // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2022. Т. 62, № 11. С. 1840–1850. doi: 10.31857/S004446692211011
12. **Оксендаль Б.** Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир, 2003. 408 с.
13. **Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б.** Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Наука, 1978. 272 с.
14. **Maksimov V.I.** On dynamical reconstruction of an input in a linear system under measuring a part of coordinates // J. Inverse Ill-Posed Problems. 2018. Vol. 26, no. 3. P. 395–410. doi: 10.1515/jiip-2017-0118
15. **Розенберг В.Л.** К задаче динамического восстановления возмущения при дефиците информации // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т.25, № 1. С. 207–218. doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-1-207-218
16. **Мельникова Л.А., Розенберг В.Л.** Алгоритм динамической реконструкции входов стохастического дифференциального уравнения: настройка параметров и численные эксперименты // Вестн. ЮУрГУ. Сер.: Вычислительная математика и информатика. 2019. Т. 8, № 4. С. 15–29. doi: 10.14529/cmse190402

Поступила 12.04.2024
После доработки 30.04.2024
Принята к публикации 6.05.2024

Розенберг Валерий Львович
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: rozen@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. Modelling of a control in a dynamic system. *Engrg. Cybernetics*, 1983, vol. 21, no. 2, pp. 38–47.
2. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. *Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions.* L.: Gordon and Breach, 1995, 625 p. ISBN: 2881249442 .
3. Maksimov V.I. Zadachi dinamicheskogo vosstanovleniya vkhodov beskonechnomernykh sistem [Problems of dynamic restoration of the inputs of infinite-dimensional systems]. Ekaterinburg: Ross. Akad. Nauk Publ., 2000, 305 p. ISBN: 5-7691-1082-1 .
4. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I. *Metody dinamicheskogo vosstanovleniya vkhodov upravlyaemykh sistem* [Dynamic recovery methods of inputs of control systems]. Ekaterinburg: UrO RAN Publ., 2011, 291 p. ISBN: 978-5-7691-2219-4 .
5. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* NY, Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1984, 456 p.
6. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Methods for solutions of ill-posed problems.* NY: Wiley, 1981, 258 p. ISBN: 0470991240 . Original Russian text published in Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach*, Moscow: Nauka Publ., 1978, 142 p.
7. Blizorukova M.S., Maksimov V.I. Dynamic discrepancy method in the problem of reconstructing the input of a system with time delay control. *Comp. Math. Math. Physics*, 2021, vol. 61, no. 3, pp. 359–367. doi: 10.1134/S0965542521030040

8. Surkov P.G. Dynamic right-hand side reconstruction problem for a system of fractional differential equations. *Diff. Eq.*, 2019, vol. 55, no. 1, pp. 105–112. doi: 10.1134/S0012266119060120
9. Rozenberg V.L. Dynamical input reconstruction problem for a quasi-linear stochastic system. *IFAC PapersOnline* 51-32, 2018, pp. 727–732. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.460
10. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. Stable positional reconstruction of a control from measurements of some of the coordinates. In: A.V. Kim and V.I. Maksimov (eds.) *Some Control and Stability Problems: Collection of Papers*, Sverdlovsk: Akad. Nauk SSSR Ural. Otdel. Publ., 1989, pp. 33–47 (in Russian).
11. Rozenberg, V.L. Reconstruction problem with incomplete information for a quasilinear stochastic differential equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2022, vol. 62, no. 11, pp. 1838–1848. doi: 10.1134/S0965542522110094
12. Oksendal B. Stochastic differential equations. an introduction with applications. Heidelberg, NY: Springer-Verlag, 2000, 352 p. ISBN: 3540637206 . Translated to Russian under the title Oksendal' B. *Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniya. Vvedenie v teoriyu i prilozheniya*, Moscow, Mir Publ., AST, 2003, 408 p.
13. Chernous'ko F.L., Kolmanovskii V.B. *Optimal'noe upravlenie pri sluchajnyh vozmushhenijah* [Optimal control under random perturbation]. Moscow: Nauka Publ., 1978, 272 p.
14. Maksimov V.I. On dynamical reconstruction of an input in a linear system under measuring a part of coordinates. *J. Inverse Ill-Posed Problems*, 2018, vol. 26, no. 3, pp. 395–410. doi: 10.1515/jiip-2017-0118
15. Rozenberg V. L. On a problem of dynamic reconstruction under incomplete information. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 207–218 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-1-207-218
16. Melnikova L.A., Rozenberg V.L. Algorithm of dynamical input reconstruction for a stochastic differential equation: tuning of parameters and numerical experiments. *Vestn. YuUrGU. Ser. Vych. Matem. Inform.*, 2019, vol. 8, no. 4, pp. 15–29. doi: 10.14529/cmse190402

Received April 12, 2024
Revised April 30, 2024
Accepted May 6, 2024

Funding Agency: The work was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075-02-2024-1377).

Valeriy Lvovich Rozenberg, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: rozen@imm.uran.ru .

Cite this article as: V. L. Rozenberg. Dynamic identification of an unknown input in a hybrid type system. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 164–172 .