

УДК 517.977

УЧЕТ ФАЗОВОГО ОГРАНИЧЕНИЯ ПРИ УПРАВЛЕНИИ РАЗГОНОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА ПО МОДИФИЦИРОВАННОМУ ЗАКОНУ ЛИНЕЙНОГО ТАНГЕНСА¹

С. А. Решмин, М. Т. Бектыбаева

Работа посвящена траекторной оптимизации для инерционного объекта с ограниченной по модулю тягой с учетом внешних сил при движении в плоскости. Целью является максимизация продольной терминальной скорости с выполнением фазовых ограничений в каждый момент времени во избежание бокового столкновения с препятствием. В качестве основы алгоритма управления направлением тяги используется закон линейного тангенса. Исследованы условия существования решения. Получены ограничения на начальную боковую скорость и время движения объекта. Ввиду того что закон линейного тангенса при некоторых временах движения приводит к выходу за ограничение, предложен модифицированный закон управления. Получено трансцендентное уравнение для нахождения критического значения времени, при превышении которого происходит нежелательное столкновение. Сформулирована соответствующая гипотеза, позволяющая устранить возникшую в процессе решения неоднозначность. Приведена методика решения поставленной задачи, подтвержденная численными расчетами.

Ключевые слова: оптимизация траектории, фазовое ограничение, максимизация скорости, закон линейного тангенса

S. A. Reshmin, M. T. Bektybaeva. Control of acceleration of a dynamic object by the modified linear tangent law in the presence of a state constraint.

The paper is devoted to trajectory optimization for an inertial object moving in a plane with thrust bounded in absolute value in the presence of external forces. The aim is to maximize the longitudinal terminal velocity with the state constraint satisfied at each time to avoid a lateral collision with an obstacle. The linear tangent law is used as the basis for an algorithm that controls the direction of the thrust. Conditions for the existence of a solution are studied. Constraints on the initial lateral velocity and the time of the motion of the object are obtained. Since the linear tangent law violates the constraint for some motion times, a modified control law is proposed. A transcendental equation is obtained to find a critical value of time above which an undesired collision occurs. The corresponding conjecture is formulated, which allows us to eliminate the ambiguity that arises during the solution process. A method for solving the problem is presented and confirmed by numerical calculations.

Keywords: trajectory optimization, state constraint, velocity maximization, linear tangent law.

MSC: 70Q05

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-2-152-163

Введение

Рассматривается задача траекторной оптимизации с изменением направления движения из-за появления протяженного препятствия, граница которого задана прямой. Требуется избежать столкновения с препятствием и максимизировать, насколько это возможно, продольную скорость; вместе с тем в терминальный момент объект должен выйти на траекторию, проходящую по границе препятствия. В роли объекта управления принимается материальная точка постоянной массы с ограниченной по модулю тягой. В качестве основы закона управления используется закон линейного тангенса.

Впервые данный закон был изложен в работе [1] в виде закона дробно-линейного тангенса. С учетом гравитационных эффектов было доказано, что закон является оптимальным для

¹Исследование выполнено в Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН за счет гранта Российского научного фонда (проект 23-11-00128, <https://rscf.ru/project/23-11-00128/>).

минимизации расхода топлива. В работах [2–4] была решена задача построения оптимального управления для перевода объекта на прямолинейную траекторию с максимизацией продольной скорости без учета в явном виде фазовых ограничений. Закон линейного тангенса для задач с переменной реактивной тягой рассмотрен в [5].

Рассматривалось также оптимальное управление мобильными механическими системами, движущимися в условиях сухого трения, действующего в соответствии с законом Амонтона — Кулона [6], и были предложены субоптимальные управления с численной проверкой эффективности [7]. В обоих случаях проекции внешних сил на горизонтальную плоскость движения не учитывались, и для решения был использован принцип максимума Понтрягина [8], причем в качестве функционала принималась продольная скорость в конце скоростного маневра. В аналогичной задаче при движении по горизонтальной плоскости учитывались фазовые ограничения [9].

Что касается практического применения, то еще в работе [10] авторы детально описали использование закона дробно-линейного тангенса в так называемом матобеспечении наведения на динамическом участке полета (PEG). В настоящее время данная программа находится на стадии улучшения, и в статье [11] приводится модифицированный алгоритм PEG.

Отличительная особенность данной работы состоит в учете внешних сил при составлении системы дифференциальных уравнений. Также накладывается фазовое ограничение на одну из координат. Новизна работы заключается в получении явных связей между константами интегрирования в законе линейного тангенса, временем движения и начальной боковой скоростью при поиске критического значения длительности процесса, что значительно упрощает построение модифицированного управления, учитывающего фазовое ограничение.

Стоит отметить, что в задачах оптимального управления возможны другие, более сложные, ограничения (см., например, работу [12], где ограничения накладываются на функции состояния в промежуточные моменты времени в задаче оптимального управления колебаниями струны).

В отличие от оптимизации на конечном интервале времени в работах [13; 14] решается задача макроэкономики на бесконечном интервале времени, там же возникает проблема при составлении условий трансверсальности.

1. Постановка задачи

Уравнения движения в плоскости в прямоугольной системе координат xy имеют вид

$$\dot{x} = v_x, \quad \dot{y} = v_y, \quad \dot{v}_x = a \cos u - g_x, \quad \dot{v}_y = a \sin u - g_y, \quad (1.1)$$

$$0 < g_y < a, \quad (1.2)$$

где a — постоянное по величине ускорение объекта (далее просто тяга), u — направление тяги, а именно угол, отсчитываемый от оси абсцисс, g_x, g_y — постоянные проекции внешних сил на оси координат.

Пусть заданы начальные координаты и начальные проекции скорости

$$x(0) = x_0 = 0, \quad y(0) = y_0 = 0, \quad v_x(0) = v_{x0} = 0, \quad v_y(0) = v_{y0} > 0. \quad (1.3)$$

Здесь нулевые значения координат и проекции скорости на ось абсцисс выбраны ради определенности. В фиксированный конечный момент T задано положительное значение координаты y , проекция скорости v_y считается нулевой

$$y(T) = h > 0, \quad v_y(T) = 0, \quad (1.4)$$

величины $x(T), v_x(T)$ не заданы. Считаем, что время процесса T может быть достаточно велико.

Сформулируем задачу оптимального управления о максимизации скорости объекта в конце участка выведения на прямолинейную траекторию.

Задача 1. За счет выбора управления u требуется максимизировать скорость объекта, движущегося в соответствии с (1.1) с начальными условиями (1.3) и терминальными условиями (1.4):

$$v_x(T) \rightarrow \max.$$

Отметим, что при $v_{y0} = 0$ и отсутствии внешних сил задача решена в [2]. При $v_{y0} \neq 0$ задача исследована с помощью принципа максимума Понтрягина в [6; 7]. Внешние силы не учитывались, в ходе решения был получен так называемый закон линейного тангенса. Также установлена связь между двумя константами интегрирования и дополнительно предложены субоптимальные управления, которые сравнивались по эффективности с оптимальным законом линейного тангенса. Однако в ходе решения задачи 1 возникали ситуации, когда объект в некоторый момент времени выходил за прямую $y = h$, при этом все терминальные условия выполнялись. Такое поведение траектории может оказаться нежелательным.

Сформулируем теперь следующую задачу, в которой наложены более строгие ограничения на $y(t)$.

Задача 2. На основе закона линейного-тангенса (являющегося оптимальным в задаче 1 без ограничений, см. [2]) требуется построить управление u для объекта, движущегося в соответствии с (1.1) с начальными условиями (1.3) и терминальными условиями (1.4), и дополнительно учесть фазовое ограничение

$$0 \leq y(t) \leq h. \quad (1.5)$$

Для решения задачи 2 достаточно указать такие конкретные множества значений T и v_{y0} , при которых оптимальное решение в задаче 1 существует и не нарушает фазовое ограничение (1.5). А для тех параметров, при которых происходит его нарушение, указать возможную модификацию закона линейного тангенса, причем желательно наиболее простую.

Отметим, что условие (1.5) возникает, например, при скоростном маневре перед протяженным препятствием, задаваемым уравнением прямой $y = h$. При $g_x = g_y = 0$ задача 2 решена в работе [9].

Приведем примеры механических систем, для которых могут рассматриваться задачи 1, 2.

Пример 1. Точечный объект с постоянной реактивной тягой, движущийся в вертикальной плоскости. Система координат повернута относительно горизонтали на угол β ($|\beta| < \pi/2$), так что прямая, на которую нужно перевести объект, параллельна оси x и находится выше нее. Уравнения движения соответствуют (1.1). В этом случае проекции ускорения свободного падения равны

$$g_x = g \sin \beta, \quad g_y = g \cos \beta.$$

Пример 2. Точечный объект, движущийся в условиях сухого трения по наклонной плоскости, создающий тягу за счет взаимодействия с поверхностью. Плоскость движения наклонена на положительный угол α относительно некоторой горизонтальной плоскости (имеется в виду положительный уклон). Угол между осью x и прямой, образованной пересечением наклонной и горизонтальной плоскостей, равен β ($|\beta| < \pi/2$), так что прямая, на которую нужно перевести объект, параллельна оси x и находится выше нее. По закону Амонтона — Кулона сила тяги F ограничена максимальной величиной силы трения

$$|F| \leq fF_N, \quad F_N = mg \cos \alpha, \quad (1.6)$$

где f — коэффициент сухого трения, F_N — сила нормальной реакции, m — масса объекта, g — ускорение свободного падения. Из (1.6) следует ограничение на модуль возможного ускорения

$$\left| \frac{F}{m} \right| \leq a, \quad a = fg \cos \alpha.$$

Предполагаем, что движение происходит с проскальзыванием или на грани проскальзывания

$$\left| \frac{F}{m} \right| = a,$$

так как другие траектории заведомо не оптимальны. Уравнения движения соответствуют формулам (1.1), где проекции ускорения свободного падения на оси координат определяются как $g_x = g \sin \alpha \sin \beta$, $g_y = g \sin \alpha \cos \beta$. Также предполагаем, что коэффициент трения достаточно большой и удовлетворяет неравенству $f > \operatorname{tg} \alpha \cos \beta$. Это означает, что может быть обеспечено движение с увеличением высоты по наклонной плоскости в направлении, которое перпендикулярно прямой, на которую требуется перевести объект. Иными словами, будет выполнено ограничение (1.2).

Перейдем к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} x &= hx', & y &= hy', & v_x &= \sqrt{ha}v'_x, & v_y &= \sqrt{ha}v'_y, \\ t &= t'\sqrt{h/a}, & T &= T'\sqrt{h/a}, & g_x/a &= g'_x, & g_y/a &= g'_y. \end{aligned}$$

Если опустить штрих в новой системе, то она совпадет с исходной (1.1)–(1.4), при этом будут выполнены дополнительные равенства $h = 1$, $a = 1$, так что $y(T) = 1$, $0 < g_y < 1$. Далее при ссылках на исходную систему имеется в виду приведенная система.

2. Закон линейного тангенса

При построении решения в задаче 1 управление будем выбирать в соответствии с законом линейного тангенса:

$$u(t) = \operatorname{arctg}(-Ct + \operatorname{tg} u_0). \quad (2.1)$$

Здесь C и u_0 — некоторые постоянные, подлежащие определению. Как известно, управление вида (2.1) является оптимальным в задаче без ограничений. Интегрируя уравнения движения (1.1) при управлении (2.1), получим

$$\begin{aligned} v_y &= \frac{1}{C}(\sec u_0 - \sec u) + v_{y0} - g_y t, \\ y &= \frac{1}{2C^2} \left[(\operatorname{tg} u_0 - \operatorname{tg} u) \sec u_0 - (\sec u_0 - \sec u) \operatorname{tg} u - \ln \frac{\operatorname{tg} u_0 + \sec u_0}{\operatorname{tg} u + \sec u} \right] + v_{y0} t + y_0 - \frac{g_y t^2}{2}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Если константы интегрирования C , u_0 и время T связаны соотношением

$$CT = \frac{2(\sin u_0 + \nu)}{\cos u_0(1 - \nu^2)}, \quad \nu = \frac{v_{y0}}{T} - g_y, \quad (2.3)$$

то второе условие (1.4) будет автоматически выполнено. Для нахождения конкретных значений C , u_0 нужно дополнительно использовать трансцендентное уравнение

$$y(T) = 1. \quad (2.4)$$

3. Необходимые условия существования решения при наличии фазового ограничения

Сделаем дополнительные предположения о множестве значений v_{y0} и T .

Теорема 1. *Для существования решения в задаче 2 необходимо, чтобы скорость была не слишком большая*

$$0 < v_{y0} \leq v_{y0}^{\max} = \sqrt{2(1 + g_y)} \quad (3.1)$$

и был запас по времени маневра

$$T \geq T_{\min} = \frac{1}{1 - g_y} \left[\sqrt{\frac{2(2(1 - g_y) + v_{y0}^2)}{1 + g_y}} - v_{y0} \right]. \quad (3.2)$$

Эти условия гарантируют, что найдутся законы управления, позволяющие избежать столкновения с препятствием, т. е. когда в процессе управления будет выполнено фазовое ограничение (1.5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость ограничения (3.1) очевидна. Максимально допустимое значение скорости находится из уравнений движения, соответствующих равноускоренному боковому торможению с ускорением $-1 - g_y$ ($u = -\pi/2$) при всех $0 \leq t \leq T$ с остановкой у границы препятствия в конце процесса.

Величина T_{\min} в (3.2) найдена из анализа предельного случая с минимально возможным временем движения $T = T_{\min}$ при некотором значении v_{y0} , удовлетворяющем ограничению (3.1). Соответствующее управление состоит из двух этапов. Сперва $u = \pi/2$, так что боковое ускорение равно $1 - g_y$. Затем $u = -\pi/2$, боковое торможение постоянное и с максимальным по модулю ускорением, равным $-1 - g_y$ до достижения границы препятствия в конце процесса с нулевой боковой скоростью. Для получения (3.2) рассмотрим проекцию траектории движения на плоскость yv_y (аналогично двухточечной задаче быстрогодействия при управлении инерционным объектом [15]) и построим кривую переключений. В общем случае кривая переключений состоит из двух параболических ветвей и проходит через терминальную точку $(1, 0)$. Однако в рассматриваемой задаче потребуется только одна из них, расположенная слева от терминальной точки и выше оси абсцисс. Как известно, она совпадает с одной из оптимальных траекторий с постоянным управлением. Далее будем называть ее дугой BO . Будем считать, что начальная точка L имеет координаты $(0, v_{y0})$, точка B_τ , где происходит смена знака управления с плюса на минус, принадлежит дуге BO , точка O обозначает терминальную точку.

Систему уравнений первого этапа движений представим в виде

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = v_y, \\ \frac{dv_y}{dt} = 1 - g_y, \end{cases}$$

откуда следует

$$\frac{dy}{dv_y} = \frac{v_y}{1 - g_y}.$$

После интегрирования уравнения выше получим семейство парабол

$$y = \frac{v_y^2}{2(1 - g_y)} + C_1. \quad (3.3)$$

При $C_1 = -\frac{v_{y0}^2}{2(1 - g_y)}$ соответствующая дуга проходит через начальную точку L . Уравнение этой параболы в соответствии с (3.3) будет иметь вид

$$y = \frac{v_y^2 - v_{y0}^2}{2(1 - g_y)}. \quad (3.4)$$

Систему уравнений второго этапа движения запишем как

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = v_y, \\ \frac{dv_y}{dt} = -1 - g_y, \end{cases}$$

откуда следует $\frac{dy}{dv_y} = \frac{v_y}{-1 - g_y}$. После интегрирования уравнения выше получим семейство парабол

$$y = -\frac{v_y^2}{2(1 + g_y)} + C_2. \quad (3.5)$$

При $C_2 = 1$ соответствующая дуга проходит через терминальную точку O .

Пусть τ — момент переключения управления. Точка переключения управления B_τ — точка пересечения парабол (3.4) и (3.5) для $C_2 = 1$. Учитывая, что дуга BO лежит выше оси абсцисс,

находим, что ордината удовлетворяет равенству $v_y(\tau) = \sqrt{(1 + g_y)(1 - g_y + \frac{v_{y0}^2}{2})}$. Тогда при

движении по дуге LB_τ $\int_{v_{y0}}^{v_y(\tau)} dv_y = \int_0^\tau (1 - g_y) dt$. Отсюда следует

$$v_y(\tau) - v_{y0} = (1 - g_y)\tau. \quad (3.6)$$

Оставшееся движение происходит по дуге $B_\tau O$, причем $\int_{v_y(\tau)}^0 dv_y = -\int_\tau^{T_{\min}} (1 + g_y) dt$. После интегрирования находим

$$v_y(\tau) = (1 + g_y)(T_{\min} - \tau). \quad (3.7)$$

Исключая τ из (3.6) и (3.7), получим выражение (3.2) для T_{\min} .

Также определяем момент смены режимов движения $\tau = \frac{T_{\min}(1 + g_y) - v_{y0}}{2}$.

Теорема доказана.

Далее перейдем к решению задачи 2, в которой учитывается ограничение (1.5) на функцию $y(t)$.

4. Нахождение критического значения длительности процесса $T = T_*$, при превышении которого происходит столкновение с препятствием

В случае выхода объекта за ограничение на фазовой траектории образуются две точки, в которых v_y обращается в нуль. В одной из них y принимает максимальное значение, в другой (терминальной) $y = h$. Так как между ними v_y принимает отрицательное значение, то промежуточная точка соответствует условию $\dot{v}_y = 0$, следовательно, в соответствии с последним уравнением (1.1) $u = \arcsin g_y$.

Критическое значение времени процесса, при превышении которого происходит столкновение с препятствием, обозначим через T_* и будем определять из условия

$$u(T) = \arcsin g_y. \quad (4.1)$$

Приведем утверждение, определяющее множество значений константы интегрирования C .

Утверждение 1. В рассматриваемой задаче 2 постоянная C отрицательна.

Доказательство. Предположим обратное. Пусть $C \geq 0$. Тогда из соотношений (2.1) и (4.1) следует неравенство

$$u(t) \geq u(T) = \arcsin g_y \quad (\text{неверное допущение}).$$

В этом случае из последнего уравнения (1.1) следует, что $\dot{v}_y(t) \geq 0$ и движение с отрицательным ускорением вдоль оси y невозможно. Значит, не удастся занулить скорость v_{y0} в конце процесса. Пришли к противоречию.

Утверждение доказано.

Из него также получаем следствие, определяющее множество значений константы интегрирования u_0 .

Следствие 1. В законе линейного тангенса (2.1) константа u_0 удовлетворяет ограничениям

$$-\frac{\pi}{2} \leq u_0 < \arcsin g_y. \quad (4.2)$$

Получим соотношения, в которые при условии (4.1) трансформируется система уравнений (2.3), (2.4) для определения констант интегрирования в законе линейного тангенса. Сначала преобразуем условие (2.4) с учетом (4.1):

$$\frac{1}{2C^2} \left[(\operatorname{tg} u_0 - \operatorname{tg} \arcsin g_y) \sec u_0 - (\sec u_0 - \sec \arcsin g_y) \operatorname{tg} \arcsin g_y - \ln \frac{\operatorname{tg} u_0 + \sec u_0}{\operatorname{tg} \arcsin g_y + \sec \arcsin g_y} \right] + v_{y0} T - \frac{g_y T^2}{2} = 1.$$

Здесь использовано выражение (2.2) для y и начальное условие $y_0 = 0$. Воспользуемся тригонометрическими формулами

$$\operatorname{tg} \arcsin x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \sec \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (4.3)$$

которые подставим в предыдущее условие и упростим. Получим

$$\frac{1}{2C^2} \left[\left(\operatorname{tg} u_0 - \frac{2g_y}{\sqrt{1-g_y^2}} \right) \sec u_0 + \frac{g_y}{1-g_y^2} - \ln \left((\operatorname{tg} u_0 + \sec u_0) \sqrt{\frac{1-g_y}{1+g_y}} \right) \right] + v_{y0} T - \frac{g_y T^2}{2} = 1. \quad (4.4)$$

Воспользуемся формулами (2.1) и (4.1) в момент времени T , а также первым тождеством (4.3), чтобы установить другую связь между константами интегрирования C , u_0 и временем T :

$$CT = \operatorname{tg} u_0 - \frac{g_y}{\sqrt{1-g_y^2}}. \quad (4.5)$$

Воспользуемся формулами (2.3) и (4.5) и исключим их них C . После преобразований получим квадратное относительно ν уравнение (далее будет видно, что коэффициент при старшей степени ν не равен 0):

$$\nu^2 \left(\sin u_0 - \frac{g_y \cos u_0}{\sqrt{1-g_y^2}} \right) + 2\nu + \sin u_0 + \frac{g_y \cos u_0}{\sqrt{1-g_y^2}} = 0. \quad (4.6)$$

Его дискриминант всегда неотрицателен, а пара корней имеет вид

$$\nu_{\pm} = \frac{\pm \cos u_0 - \sqrt{1-g_y^2}}{\sqrt{1-g_y^2} \sin u_0 - g_y \cos u_0}. \quad (4.7)$$

С учетом (4.1) решение (4.7) может быть представлено в виде

$$\nu_{\pm} = \frac{\pm \cos u_0 - \cos u(T)}{\sin(u_0 - u(T))}. \quad (4.8)$$

Так как в силу утверждения 1 $C < 0$, то $u_0 - u(T) < 0$. Кроме того, из следствия 1, равенства (4.1) и ограничений $0 < g_y < 1$ следует, что $u_0 - u(T) > -\pi$. Поэтому знаменатель в (4.8), а следовательно, и в (4.7) не равен нулю.

Проблема заключается в правильном выборе нужного корня. В этом состоит главное отличие от аналогичной задачи, рассмотренной в [9] при отсутствии внешних сил.

Теперь получим основное уравнение для определения критического времени T , о котором говорилось выше. Для этого сначала разделим обе части (4.4) на T^2 :

$$\frac{1}{2C^2T^2} \left[\left(\operatorname{tg} u_0 - \frac{2g_y}{\sqrt{1-g_y^2}} \right) \sec u_0 + \frac{g_y}{1-g_y^2} - \ln \left((\operatorname{tg} u_0 + \sec u_0) \sqrt{\frac{1-g_y}{1+g_y}} \right) \right] + \left(\frac{v_{y0}}{T} - g_y \right) + \frac{1}{2}g_y = \frac{1}{T^2}.$$

Потом подставим вместо CT выражение (4.5), далее вместо $v_{y0}/T - g_y$ подставим ν в соответствии со вторым равенством (2.3). В результате получим “почти” явную связь между T и u_0

$$\frac{1}{T^2} = \frac{\left(\operatorname{tg} u_0 - \frac{2g_y}{\sqrt{1-g_y^2}} \right) \sec u_0 + \frac{g_y}{1-g_y^2} - \ln \left((\operatorname{tg} u_0 + \sec u_0) \sqrt{\frac{1-g_y}{1+g_y}} \right)}{2 \left(\operatorname{tg} u_0 - \frac{g_y}{\sqrt{1-g_y^2}} \right)^2} + \nu(u_0) + \frac{1}{2}g_y, \quad (4.9)$$

но нужно учитывать, что ν является неоднозначной функцией от u_0 в соответствии с равенством (4.7).

Делая перебор значений u_0 в допустимом диапазоне (4.2) и подставляя их в (4.9), находим две зависимости: $T_+(u_0)$ и $T_-(u_0)$, соответствующие разным знакам в выражении для ν (см. (4.7)). Соответствующие значения скорости находятся по формулам (см. на рис. 1а, б зависимости, построенные для $g_y = 0.5$)

$$v_{y0}^+ = (\nu_+ + g_y)T_+, \quad v_{y0}^- = (\nu_- + g_y)T_-. \quad (4.10)$$

Численная проверка показала, что только пара значений v_{y0}^+ , T_+ удовлетворяет ограничениям (3.1), (3.2) при любых допустимых u_0 и g_y . Отметим при этом, что в ограничении (3.2) величина T_{\min} является сложной функцией от u_0 согласно равенствам (3.2), (4.9), (4.10):

$$T_{\min} = T_{\min}(v_{y0}(\nu(u_0), T(u_0, \nu(u_0)))).$$

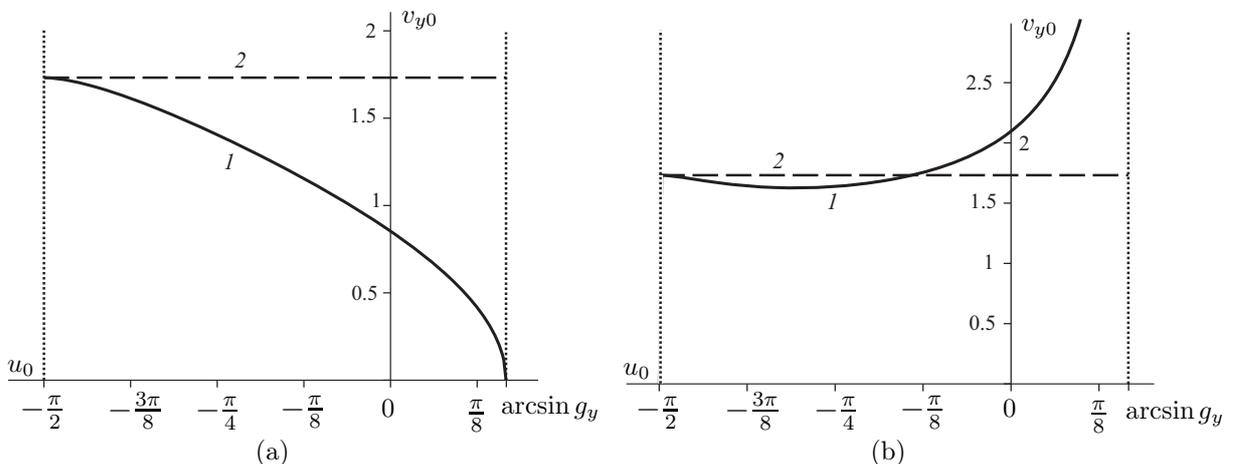


Рис. 1. Зависимость (а) $v_{y0}^+(u_0)$ и (б) $v_{y0}^-(u_0)$ — линия 1; v_{y0}^{\max} — линия 2.

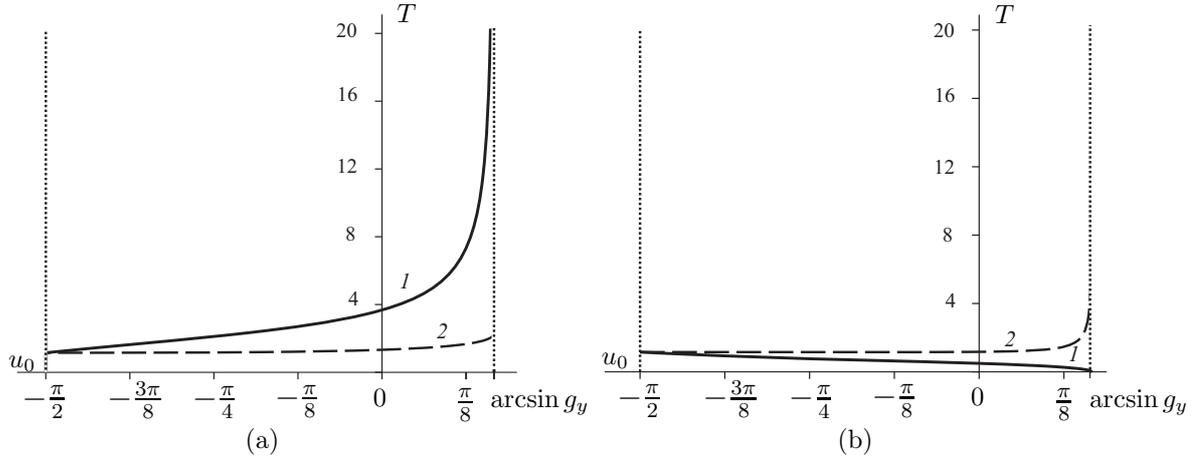


Рис. 2. Зависимости (а) $T_+(u_0)$ — линия 1, $T_{\min}^+(u_0)$ — линия 2 и (б) $T_-(u_0)$ — линия 1, $T_{\min}^-(u_0)$ — линия 2.

Здесь, как и раньше, разным знакам в выражении для ν (см. (4.7)) соответствуют две зависимости: $T_{\min}^+(u_0)$ и $T_{\min}^-(u_0)$.

На рис. 2а, б отражены графики зависимостей порогового значения времени и минимального времени от параметра u_0 при $g_y = 0.5$. Видно, что для любых u_0 $T_+(u_0) \geq T_{\min}^+(u_0)$, $T_-(u_0) \leq T_{\min}^-(u_0)$. Аналогичная ситуация при других значениях g_y . Это означает, что можно выбрать только один корень в (4.7), для которого выполняется условие (3.2).

Из рис. 1а видно, что функция $v_{y0}^+(u_0)$ монотонно убывающая, причем

$$v_{y0}^+(u_0) \rightarrow v_{y0}^{\max} \quad \text{при} \quad u_0 \rightarrow -\frac{\pi}{2}; \quad v_{y0}^+(u_0) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad u_0 \rightarrow \arcsin g_y.$$

Также расчеты показали (см. рис. 2а), что функция $T_+(u_0)$ монотонно возрастающая, причем

$$T_+(u_0) \rightarrow T_{\min}^+(u_0) \quad \text{при} \quad u_0 \rightarrow -\frac{\pi}{2}; \quad T_+(u_0) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad u_0 \rightarrow \arcsin g_y.$$

Предельное значение $T_+(-\pi/2)$ может быть найдено аналитически. Согласно (4.7) имеем

$$\lim_{u_0 \rightarrow -\pi/2} \nu_+(u_0) = 1, \quad \text{поэтому из (4.9) следует} \quad \lim_{u_0 \rightarrow -\pi/2} T_+(u_0) = \sqrt{\frac{2}{1+g_y}}.$$

Сформулируем полученные результаты в виде гипотезы, которая позволяет выбрать подходящий корень в (4.7) и найти критическое время T_* .

Гипотеза. В случае ограниченных скоростей, удовлетворяющих условию (3.1), существует пороговое значение длительности процесса T_* , при превышении которого происходит нарушение фазового ограничения (1.5) (наезд на препятствие). При этом в (4.9) в рассмотрение надо брать только такие значения ν , которые определяются выражением (4.7) с положительным знаком перед косинусом в числителе. Задача поиска критического значения $T_* = T_+(u_0^*)$, где функция $T_+(u_0)$ определяется в соответствии с формулой (4.9), сводится к подбору такого значения $u_0 = u_0^*$, при котором выполнено равенство $v_{y0} = v_{y0}^+(u_0^*)$, где функция $v_{y0}^+(u_0)$ задана в (4.10).

Численная проверка путем глобального перебора параметров u_0, g_y в ограниченном множестве допустимых значений (4.2), (1.2) дает основания полагать, что гипотеза верна.

5. Модификация закона линейного тангенса в случае больших T

Предложим модификацию оптимального управления из задачи 1, которая может быть использована для учета фазового ограничения (1.5) при больших длительностях процесса T . Нужна указанная модификация или нет, зависит от отношения T к T_* .

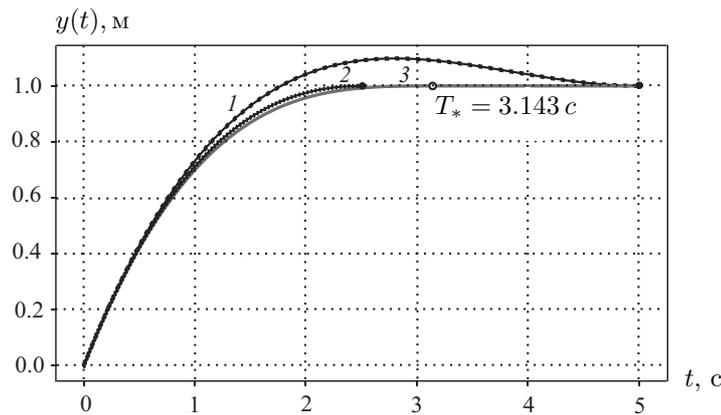


Рис. 3. Зависимость $y(t)$ для $T > T_*$ — линия 1, $T = 5$ с; $T < T_*$ — кривая 2, $T = 2.5$ с; модифицированного управления — линия 3, $T = 5$ с.

Если $T \leq T_*$, управление выбирается согласно (2.1), при этом фазовое ограничение (1.5) выполняется на всем отрезке движения. Терминальные условия (1.4) также выполняются.

Однако для $T > T_*$ условия выполняются только на отрезке $0 \leq t \leq t_*$ (скорее всего, всегда $t_* < T_*$), и происходит выход за ограничение (1.5) на интервале $t_* < t \leq T$. Чтобы этого избежать, воспользуемся следующим модифицированным управлением. На отрезке $0 \leq t \leq T_*$ закон управления соответствует линейному тангенсу (2.1), причем для расчета его параметров в формулах (1.4) (или (2.3), (2.4)) время окончания процесса выбираем равным T_* , а не T . Далее на интервале $T_* < t \leq T$ считаем $u \equiv \arcsin g_y$. Оптимальность такого непрерывного управления в задаче с фазовым ограничением требует дополнительного обоснования. Пример применения модифицированного управления по сравнению с обычным линейным тангенсом изображен на рис. 3 ($v_{y0} = 1.0$, $g_y = 0.5$). Для сравнения было взято два разных значения времени окончания: $T > T_*$, для которого наблюдается нарушение фазового ограничения (1.5), и $T < T_*$ с отсутствием выхода за границу. Также построено модифицированное управление согласно определению выше.

Заключение

Решена задача эффективного управления инерционным объектом с ограниченной по модулю тягой с целью уклонения от препятствия и одновременной максимизации терминальной скорости. Для такой постановки задачи получены условия разрешимости в виде ограничений на начальную боковую скорость и минимально возможное время маневра. Для выполнения фазовых ограничений предложена модификация оптимального управления по закону линейного тангенса, приводящая к дополнительному участку движения вдоль границы препятствия. Найдено пороговое значение времени движения, при превышении которого требуется использовать модифицированный закон управления. Предложена методика решения задачи и поиска констант интегрирования. Сформулирована гипотеза о правильном выборе подходящего корня на этапе решения, где появляется неоднозначность. Приведены численные примеры. Случай, когда $-1 < g_y < 0$, более сложный и будет рассмотрен в будущем. Предварительные расчеты показывают, что в этом случае выбор правильного выражения для ν , т. е. нужного корня квадратного уравнения (4.6), зависит от конкретных значений параметров u_0 , g_y .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Perkins F.M. Derivation of linear-tangent steering laws. Air Force Report No. SSD-TR66-211. Nov. 1966. doi: 10.21236/ad0643209
2. Брайсон А., Хо Ю-ши Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.

3. **Охочимский Д.Е., Энеев Т.М.** Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли // Успехи физ. наук. 1957. Vol. 63, № 1. P. 5–32.
doi: 10.3367/UFNr.0063.195709b.0005
4. **Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.** Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003. 614 с.
5. **Исаев В.К.** Принцип максимума Л.С. Понтрягина и оптимальное программирование тяги ракет // Автоматика и телемеханика. 1961. Т. 22, вып. 8. С. 986–1001.
6. **Решмин С.А.** Оптимальное управление силой тяги при скоростном маневрировании в условиях сухого трения // Прикл. математика и механика. 2023. Т. 87, вып. 8. С. 604–617.
doi: 10.31857/S0032823523040112
7. **Решмин С.А., Бектыбаева М.Т.** Эффективное управление направлением тяги при скоростном маневре в плоскости // Вестн. Российского ун-та дружбы народов. Сер.: Инженерные исследования. 2023. Т. 24, № 3. С. 233–240. doi: 10.22363/2312-8143-2023-24-3-233-240
8. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
9. **Reshmin S.A., Bektybaeva M.T.** Accounting for phase limitations during intense acceleration of a mobile robot and its motion in drift mode // Dokl. Math. 2024. Vol. 109, no. 1. P. 38–46.
doi: 10.1134/S1064562424701709
10. **Gordan A.L.** Centaur D-1A guidance/software system // Proc. Annual Rocky Mountain Guidance and Control Conference. Keystone, Colorado, February 4–8, 1984. 17 p.
11. **Kim K.S., Park J.W., Tahk M.J., Choi H.L.** A PEG-based ascending guidance algorithm for ramjet-powered vehicles // International Congress of the Aeronautical Sciences. International Council of Aeronautical Sciences. 2012. 7 p.
12. **Барсегян В.Р.** Задачи граничного управления и оптимального управления колебаниями струны с многоточечными промежуточными условиями на функции состояния // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, № 3. С. 38–52. doi: 10.21538/0134-4889-2022-28-3-38-52
13. **Асеев С.М., Кряжимский А.В.** Об одном классе задач оптимального управления, возникающих в математической экономике // Тр. МИАН. 2008. Т. 262. С. 16–31.
14. **Асеев С.М., Кряжимский А.В., Тарасьев А.М.** Принцип максимума Понтрягина и условия трансверсальности для одной задачи оптимального управления на бесконечном интервале // Тр. МИАН. 2001. Т. 233. С. 71–88. doi: 10.1134/S0081543808030036
15. **Ройтенберг Я.Н.** Автоматическое управление. М.: Наука, 1971. 396 с.

Поступила 03.03.2024

После доработки 21.03.2024

Принята к публикации 25.03.2024

Решмин Сергей Александрович

д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН

гл. науч. сотрудник

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

г. Москва

e-mail: reshmin@ipmnet.ru

Бектыбаева Мадина Тимуровна

инженер

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

аспирант

Российский университет дружбы народов

г. Москва

e-mail: madi8991@mail.ru

REFERENCES

1. Perkins F.M. Derivation of linear-tangent steering laws. *Air Force Report No. SSD-TR66-211*. Nov. 1966. doi: 10.21236/ad0643209

2. Bryson A.E., Ho Y.-C. *Applied optimal control: optimization, estimation, and control*. Waltham, Mass.: Blaisdell Pub. Co., 1969, 481 p. Translated to Russian under the title *Prikladnaya teoriya optimal'nogo upravleniya*, Moscow, Mir Publ., 1972, 544 p.
3. Okhotsimsky D.E., Eneev T.M. Some variational problems related to the launch of the artificial satellite. *Uspekhi Fiz. Nauk*, 1957, vol. 63, no. 1, pp. 5–32 (in Russian). doi: 10.3367/UFNr.0063.195709b.0005
4. Afanas'ev V.N., Kolmanovskii V.B., Nosov V.R. *Mathematical theory of control systems design*. Transl. from 1st Russian ed. Dordrecht, Springer, 1996, 672 p. doi: 10.1007/978-94-017-2203-2. Original Russian text (3rd ed.) Published in Afanas'ev V.N., Kolmanovskii V.B., Nosov V.R., *Matematicheskaya teoriya konstruirovaniya sistem upravleniya*, Moscow, Vysshaya shkola, 2003, 614 p. ISBN: 5-06-004162-X.
5. Isaev V.K. L.S. Pontryagin's maximum principle and optimal programming of rocket thrust. *Avtomat. i Telemekh.*, 1961, vol. 22, no. 8, pp. 986–1001 (in Russian).
6. Reshmin S.A. Optimal traction control in high-speed maneuvering under dry friction conditions. *Mechanics of Solids*, 2023, vol. 58, no. 7, pp. 2574–2585. doi: 10.3103/S0025654423070191
7. Reshmin S.A., Bektybaeva M.T. Efficient control of the direction of thrust during high-speed maneuver in the plane. *Vestnik Ross. Univ. Druzhby Narodov, Ser. Ingener. Issled.*, 2023, vol. 23. no. 3, pp. 233–240 (in Russian). doi: 10.22363/2312-8143-2023-24-3-233-240
8. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*. NY, Gordon & Breach, 1986, 360 p. Original Russian text Published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F., *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow, Nauka Publ., 1983, 392 p.
9. Reshmin S.A., Bektybaeva M.T. Accounting for phase limitations during intense acceleration of a mobile robot and its motion in drift mode. *Dokl. Math.*, 2024, vol. 109, no. 1, pp. 38–46. doi: 10.1134/S1064562424701709
10. Gordan A.L. Centaur D-1A guidance/software system. In: *Proc. Conf. "Annual Rocky Mountain Guidance and Control Conference"*, Keystone, Colorado, 1984. 17 p.
11. Kim K.S., Park J.W., Tahk M.J., Choi H.L. A PEG-based ascending guidance algorithm for ramjet-powered vehicles. In: *Proc. 28th International Congress of the Aeronautical Sciences, 2012 (ISAC 2012)*. 7 p.
12. Barseghyan V.R. Problems of boundary control and optimal control of string vibrations with multipoint intermediate conditions on the state functions. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2022, vol. 319, no. 1, pp. S66–S79. doi: 10.1134/S0081543822060074
13. Aseev S.M., Kryazhimskii A.V. On a class of optimal control problems arising in mathematical economics. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2008, vol. 262, pp. 10–25. doi: 10.1134/S0081543808030036
14. Aseev S.M., Kryazhimskii A.V., Tarasyev A.M. The Pontryagin maximum principle and transversality conditions for an optimal control problem with infinite time interval. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2001, vol. 233, pp. 64–80.
15. Roitenberg Ya.N. *Avtomaticheskoe upravlenie [Automatic Control]*. Moscow, Nauka, 1971, 396 p.

Received March 3, 2024

Revised March 21, 2024

Accepted March 25, 2024

Funding Agency: This work was performed at the Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences and was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-11-00128, <https://rscf.ru/project/23-11-00128/>).

Sergey Aleksandrovich Reshmin, Dr. Phys.-Math. Sci., Corresponding Member of RAS, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia, e-mail: reshmin@ipmnet.ru.

Madina Timurovna Bektybaeva, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia; doctoral student, the Department of Mechanics and Control Processes, RUDN University, Moscow, 117198 Russia, e-mail: madi8991@mail.ru.

Cite this article as: S. A. Reshmin, M. T. Bektybaeva. Control of acceleration of a dynamic object by the modified linear tangent law in the presence of a state constraint. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 152–163.