ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 2 2024

УДК 517.977

О НЕПРЕРЫВНОСТИ ВРЕМЕНИ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ КАК ФУНКЦИИ НАЧАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЯ

М. С. Никольский

В математической теории оптимального управления традиционно рассматриваются управляемые объекты с геометрическими ограничениями на управляющий вектор u. Вместе с тем выяснилось, что иногда удобнее рассматривать интегральные ограничения на управляющий вектор u. Например, в теории АКОР — теории автоматического конструирования оптимальных регуляторов — считается, что на управляющий вектор u нет геометрических ограничений, но есть требование суммируемости по Лебегу управления $u(t)$ и квадрата длины $|u(t)|^2$ на соответствующем отрезке определения. Это обстоятельство, а также то, что критерий качества имеет вид квадратичного функционала, позволяют при широких предположениях конструктивно получить синтез оптимального управления. Квадратичные интегральные ограничения на управления можно трактовать как некоторые энергетические ограничения на управления. Управляемым объектам при интегральных ограничениях на управления в научной литературе по теории управления уделяется довольно большое внимание. Отметим работы Н. Н. Красовского, Э. Б. Ли, Л. Маркуса, А. Б. Куржанского, М. И. Гусева, И. В. Зыкова и их учеников. В статье изучается линейная задача оптимального быстродействия с терминальным множеством в виде нулевой точки при интегральном ограничении на управление. Получены достаточные условия, при которых функция времени оптимального быстродействия как функция начального состояния x_0 непрерывна.

Ключевые слова: управление, управляемый объект, интегральное ограничение, быстродействие.

M. S. Nikol'skii. On the continuity of the optimal time as a function of the initial state for linear controlled objects with integral constraints on controls.

A traditional object of study in the mathematical theory of optimal control is a controlled object with geometric constraints on the control vector u. At the same time, it turns out that sometimes it is more convenient to impose integral constraints on the control vector u. For example, in the theory of automatic design of optimal controllers, it is sometimes assumed that the control vector u is not subject to any geometric constraints, but there is a requirement that the control $u(t)$ and its squared length $|u(t)|^2$ are Lebesgue summable on the corresponding interval. This circumstance, as well as the fact that the quality criterion has the form of a quadratic functional, makes it possible to construct an optimal control under rather broad assumptions. Quadratic integral constraints on controls can be interpreted as some energy constraints. Controlled objects under integral constraints on the controls are given quite a lot of attention in the mathematical literature on control theory. We mention the works of N.N. Krasovskii, E.B. Lee, L. Markus, A.B. Kurzhanski, M.I. Gusev, I.V. Zykov, and their students. The paper studies a linear time-optimal problem, in which the terminal set is the origin, under an integral constraint on the control. Sufficient conditions are obtained under which the optimal time as a function of the initial state x_0 is continuous.

Keywords: control, controlled object, integral constraint, time optimality.

MSC: 49J15, 93C95

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-2-130-137

1. Введение

Рассматривается линейный управляемый объект вида (см. [1; 2])

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$, $u \in \mathbb{R}^p$ $(p \geqslant 1)$, A — $n \times n$-матрица, B — $n \times p$-матрица, x_0 — начальный вектор из $\mathbb{R}^n$.

Символом $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 1$) условимся обозначать стандартное арифметическое евклидово пространство с элементами, записываемыми в виде k-мерных столбцов, со стандартными скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и длиной вектора $|\cdot|$. Для $k \times l$-матрицы M, где $k \geqslant 1$, $l \geqslant 1$, символом $\|M\|$ условимся обозначать величину $\max_{|y|\leqslant 1} |My|$, где $y \in \mathbb{R}^l$. Для непустых множеств $X, Y \subset \mathbb{R}^k$ их алгебраическую сумму будем обозначать через $X + Y$.

Движение управляемого объекта (1.1) происходит под воздействием измеримых по Лебегу управлений, суммируемых по Лебегу вместе с $|u(t)|^2$ на $[0, +\infty)$. На допустимые управления накладывается интегральное ограничение вида

$$\|u(\cdot)\| \leqslant \rho, \quad \text{где} \quad \|u(\cdot)\| = \left(\int\limits_0^{+\infty} |u(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}, \tag{1.2}$$

здесь величина $\rho > 0$ определяет ресурс управления. Управляемым объектам с интегральными ограничениями посвящены, например, монографии и статьи [1–6].

Соответствующее начальному условию $x(0) = x_0$ и допустимому управлению $u(t)$, $t \geqslant 0$, решение $x(t) = x(t, u(\cdot), x_0)$ при $t \geqslant 0$ определяется в классе локально абсолютно непрерывных функций формулой Коши (см., например, [1; 2])

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int\limits_0^t e^{(t-s)A} Bu(s) \, ds, \tag{1.3}$$

где e^{tA} — экспоненциал матрицы tA, а интеграл понимается в смысле Лебега. О свойствах e^{tA} см., например, [2].

Фиксируем в качестве терминального множества точку $0 \in \mathbb{R}^n$ и рассмотрим задачу оптимального быстродействия из начальной точки x_0 в терминальную точку $M = \{0\}$ для управляемого объекта (1.1) при всевозможных допустимых управлениях (см. (1.2)).

Допустим, что при некотором допустимом управлении $\tilde{u}(t)$, $t \geqslant 0$, и данном $\tau \geqslant 0$ выполняется равенство (см. (1.3))

$$e^{\tau A}x_0 + \int\limits_0^\tau e^{(\tau-s)A} B\tilde{u}(s) \, ds = 0. \tag{1.4}$$

Если $\tau = 0$, то $x_0 = 0$ и искомое время быстродействия $T(x_0) = 0$. Пусть $\tau \neq 0$. Тогда, используя свойства $e^{\tau A}$ и интеграла Лебега, из (1.4) получаем эквивалентное равенство

$$x_0 = (-1) \int\limits_0^\tau e^{-sA} B\tilde{u}(s) \, ds.$$

Обозначим через τ_* инфимум среди времен τ, для каждого из которых $x_0 = (-1) \int_0^\tau e^{-sA} Bu(s) \, ds$ при некотором допустимом управлении $u(t)$, $t \geqslant 0$. Считая, что $x_0 \neq 0$, рассмотрим минимизирующую последовательность моментов $\tau_i \to \tau_*$, $i = 1, 2, \ldots$. Для них

$$x_0 = (-1) \int\limits_0^{\tau_i} e^{-sA} Bu_i(s) \, ds,$$

где $u_i(s)$ — некоторое допустимое управление (см. (1.2)). Отметим, что $\tau_* > 0$. С помощью известного неравенства Коши — Буняковского (см., например, [7]) можно обосновать, что последовательность

$$\int\limits_{\tau_*}^{\tau_i} \|e^{-sA}B\| \cdot |u_i(s)| \, ds$$

стремится к нулю при $i \to \infty$. Переходя, если надо, к подпоследовательности и производя соответствующую перенумерацию, можно утверждать на основании слабой компактности шара в гильбертовом пространстве $L_2[0,\tau_*]$ (см., например, [7]), что последовательность измеримых функций $u_i(\cdot)$ на $[0,\tau_*]$ слабо сходится в $L_2[0,\tau_*]$ к некоторой измеримой функции $u_*(t)$, суммируемой по Лебегу вместе с $|u_*(t)|^2$ на $[0,\tau_*]$, причем

$$\left(\int\limits_0^{\tau_*} |u_*(s)|^2\,ds\right)^{1/2} \leqslant \rho.$$

Отметим, что в $L_2[0,\tau_*]$ скалярное произведение p-мерных векторных функций $v_1(\cdot)$, $v_2(\cdot)$ вычисляется как $\langle v_1(\cdot), v_2(\cdot)\rangle = \int_0^{\tau_*} \langle v_1(s), v_2(s)\rangle\,ds$, где интеграл понимается в смысле Лебега. На основании вышесказанного, используя свойства слабой сходимости функций $u_i(\cdot)$ к $u_*(\cdot)$ на $[0,\tau_*]$, известным образом доказываем, что

$$x_0 = (-1)\int\limits_0^{\tau_*} e^{-sA}Bu_*(s)\,ds.$$

Из сказанного получаем, что для x_0 определено время оптимального быстродействия $T(x_0)$ в изучаемой задаче оптимального быстродействия.

Для дальнейшего нам будет полезно множество $F(\theta) \subset \mathbb{R}^n$, где $\theta \geqslant 0$, определяемое формулой

$$F(\theta) = \bigcup_{u(\cdot)} (-1)\int\limits_0^{\theta} e^{-sA}Bu(s)\,ds; \tag{1.5}$$

здесь $u(\cdot) \in L_2[0,\theta]$, причем выполняется неравенство

$$\|u(\cdot)\| = \left(\int\limits_0^{\theta} |u(s)|^2\,ds\right)^{1/2} \leqslant \rho. \tag{1.6}$$

С помощью соотношений (1.3), (1.5), (1.6) нетрудно обосновать леммы.

Лемма 1. *Для управляемого объекта* (1.1) *из начальной точки* x_0 *можно попасть в терминальную точку* 0 *с помощью допустимого управления за конечное время тогда и только тогда, когда*

$$x_0 \in \mathcal{E} = \bigcup_{\theta \geqslant 0} F(\theta).$$

Лемма 2. *Пусть из начальной точки* x_0 *терминальная точка* 0 *достижима с помощью допустимого управления для управляемого объекта* (1.1) *за конечное время, тогда время оптимального быстродействия* $T(x_0)$ *является наименьшим из моментов* $\theta \geqslant 0$*, при которых* $x_0 \in F(\theta)$*.*

2. Основная часть

В связи со сказанным полезно изучить свойства множества $F(\theta)$ при $\theta \geqslant 0$.

Лемма 3. *При каждом* $\theta \geqslant 0$ *множество* $F(\theta)$ *выпукло, ограничено и замкнуто.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что множество $F(\theta)$ при $\theta = 0$ одноточечно и состоит из нулевой точки. Рассмотрим общий случай $\theta > 0$. Выпуклость множества $F(\theta)$ следует из определения этого множества (см. (1.5), (1.6)). Рассмотрим произвольный элемент $\xi \in F(\theta)$. Согласно определению множества $F(\theta)$

$$\xi = (-1) \int\limits_0^\theta e^{-sA} B u(s)\, ds,$$

где $u(\cdot)$ — некоторое допустимое управление. Используя свойства интеграла Лебега, отсюда получаем соотношение $|\xi| \leqslant \int_0^\theta \|e^{-sA}B\| \cdot |u(s)|\, ds$. С помощью неравенства Коши — Буняковского приходим к неравенству

$$|\xi| \leqslant \left(\int\limits_0^\theta \|e^{-sA}B\|^2\, ds \right)^{1/2} \cdot \rho.$$

Учитывая произвольность вектора $\xi \in F(\theta)$, отсюда получаем ограниченность множества $F(\theta)$. Теперь рассмотрим произвольную сходящуюся последовательность векторов ξ_i, $i = 1, 2, \ldots$, где $\xi_i \in F(\theta)$, и ее предел $\hat{\xi}$. Для векторов ξ_i имеем представление

$$\xi_i = (-1) \int\limits_0^\theta e^{-sA} B u_i(s)\, ds, \tag{2.1}$$

где измеримые управления $u_i(s)$ суммируемы по Лебегу вместе с $|u_i(s)|^2$ на $[0, \theta]$ с выполнением неравенства (1.6). Учитывая слабую компактность шара в $L_2[0, \theta]$ и переходя к подпоследовательности, после соответствующей перенумерации можно считать, что последовательность $u_i(\cdot)$ слабо сходится к некоторой функции $\tilde{u}(\cdot) \in L_2[0, \theta]$ с выполнением неравенства $\|\tilde{u}(\cdot)\| \leqslant \rho$. Используя свойства слабой сходимости, переходом к пределу в (2.1) получаем, что $\hat{\xi} \in F(\theta)$. □

На основании леммы 3 множество $F(\theta)$ является выпуклым компактом при $\theta \geqslant 0$. С помощью замены переменного $s = (\theta - r)$ в интегралах (1.5) нетрудно получить формулу

$$F(\theta) = \bigcup_{v(\cdot)} (-1) \int\limits_0^\theta e^{-(\theta - r)A} B v(r)\, dr,$$

где $v(\cdot) \in L_2[0, \theta]$, причем для нормы $\|v(\cdot)\|$ выполняется неравенство

$$\|v(\cdot)\| = \left(\int\limits_0^\theta |v(s)|^2\, ds \right)^{1/2} \leqslant \rho.$$

Эти формулы позволяют нам трактовать множество $F(\theta)$ как множество достижимости в момент $\theta \geqslant 0$ управляемого объекта $\dot{y} = -Ay - Bv$ с интегральным ограничением ρ на управления из начального состояния $y(0) = 0$.

Полезно вычислить опорную функцию $c(F(\theta), \psi)$, где $\psi \in \mathbb{R}^n$. Определение опорной функции и ее свойства даны в [8].

Рассмотрим при данном $\theta > 0$ произвольный вектор $\xi \in F(\theta)$. Для него мы имеем представление

$$\xi = (-1) \int\limits_0^\theta e^{-sA} B \tilde{u}(s)\, ds,$$

где $\tilde{u}(\cdot) \in L_2[0,\theta]$, причем $\|\tilde{u}(\cdot)\| \leqslant \rho$. Фиксируем произвольный вектор $\psi \in \mathbb{R}^n$. Для скалярного произведения $\langle \xi, \psi \rangle$ имеет место равенство

$$\langle \xi, \psi \rangle = (-1) \int\limits_0^\theta \langle e^{-sA} B \tilde{u}(s), \psi \rangle \, ds. \tag{2.2}$$

Обозначим при $s \geqslant 0$

$$H(s) = (-1) e^{-sA} B. \tag{2.3}$$

С помощью неравенства Коши — Буняковского из (2.2) получаем неравенство $\forall \xi \in F(\theta)$:

$$|\langle \xi, \psi \rangle| \leqslant \rho \left(\int\limits_0^\theta |H^*(s)\psi|^2 \, ds \right)^{1/2}, \tag{2.4}$$

где “ * ” означает операцию транспонирования матрицы.

Лемма 4. *Опорная функция выпуклого компакта $F(\theta)$ при $\theta > 0$, $\psi \in \mathbb{R}^n$ имеет вид*

$$c(F(\theta), \psi) = \rho \left(\int\limits_0^\theta |H^*(s)\psi|^2 \, ds \right)^{1/2}. \tag{2.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если при данном $\psi \in \mathbb{R}^n$ функция $H^*(s)\psi \equiv 0$ на $[0,\theta]$, то равенство (2.5) вытекает из формулы (2.4). Пусть функция $H^*(s)\psi$ не тождественно равна нулю на $[0,\theta]$. Тогда величина

$$\alpha = \left(\int\limits_0^\theta |H^*(s)\psi|^2 \, ds \right)^{1/2}$$

является положительной и корректно определена функция $\hat{u}(s) = \dfrac{\rho}{\alpha} H^*(s)\psi$, где $s \in [0,\theta]$, при этом норма функции $\hat{u}(\cdot)$ в $L_2[0,\theta]$ равна ρ. Обозначим соответствующий $\hat{u}(\cdot)$ вектор ξ из $F(\theta)$ через $\hat{\xi}$. Теперь, используя формулы (2.2), (2.3) при $\xi = \hat{\xi}$ и неравенство (2.4), из сказанного получаем искомую формулу (2.5) при $\psi \in \mathbb{R}^n$. □

Отметим, что $F(0) = \{0\}$ и формула (2.5) остается справедливой при $\theta = 0$.

Теперь займемся преобразованием формулы (2.5) при $\theta > 0$. Имеем при $s \in [0,\theta]$, $\psi \in \mathbb{R}^n$

$$|H^*(s)\psi|^2 = \langle H(s)H^*(s)\psi, \psi \rangle.$$

Поэтому (см. (2.5)) $c(F(\theta),\psi) = \rho \cdot (\langle W(\theta)\psi, \psi \rangle)^{1/2}$, где (см. (2.3))

$$W(\theta) = \int\limits_0^\theta e^{-sA} B B^* e^{-sA^*} \, ds. \tag{2.6}$$

Введем матрицу управляемости $D = (B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$. В дальнейшем считается выполненным

У с л о в и е А. Ранг матрицы D равен n.

С помощью результатов из [2] по управляемости линейных стационарных управляемых объектов можно доказать лемму.

Лемма 5. *Рассмотрим на произвольном отрезке $[\theta_1, \theta_2]$, где $0 \leqslant \theta_1 < \theta_2$, и при произвольном ненулевом векторе $\psi \in \mathbb{R}^n$ функцию (см. (2.3)) $|H^*(s)\psi|^2$. Тогда эта функция не тождественно равна нулю на $[\theta_1, \theta_2]$.*

Так же с помощью результатов [2] обосновывается

Лемма 6. *При $\theta > 0$ ранг симметричной матрицы $W(\theta)$ (см. (2.6)) равен n.*

Если при $\theta > 0$ в интеграле из формулы (2.6) сделать замену $s = \theta - r$, то приходим к формуле

$$W(\theta) = \int\limits_0^\theta e^{-(\theta-r)A} BB^* e^{-(\theta-r)A^*}\, dr.$$

В таком виде матрицу $W(\theta)$ можно трактовать как матрицу управляемости из работы [5] для управляемого процесса $\dot{y} = -Ay - Bv$. Учитывая это обстоятельство, мы на основании известного результата об описании множества достижимости линейного управляемого объекта с интегральным ограничением на управление с помощью квадратичного неравенства (см., например, [5]) получаем, что исследуемое множество $F(\theta)$ при $\theta > 0$ может быть записано в следующем виде (см. (2.6)):

$$F(\theta) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle W^{-1}(\theta)x, x\rangle \leqslant \rho^2\},$$

где $W^{-1}(\theta)$ — симметричная положительно определенная матрица. Из этой формулы следует, что при $\theta > 0$ $F(\theta)$ — n-мерный эллипсоид с центром в 0. Поэтому граница $F(\theta)$ при $\theta > 0$ является гладкой, что полезно для приложений.

Важную роль для дальнейшего играет

Лемма 7. *Множество $F(\theta)$ растет по включению в строгом смысле вместе с ростом θ, т. е., если $0 \leqslant \theta_1 < \theta_2$, то*

$$F(\theta_1) \subset \operatorname{int} F(\theta_2), \tag{2.7}$$

где int *означает внутренность множества.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При фиксированном $\psi \in \sigma$, где $\sigma = \{y \in \mathbb{R}^n \colon |y| = 1\}$, и $0 \leqslant \theta_1 < \theta_2$ рассмотрим интеграл (см. (2.5)) $\int_0^{\theta_2} |H^*(s)\psi|^2\, ds$. Для него имеем равенство

$$\int\limits_0^{\theta_2} |H^*(s)\psi|^2\, ds = \int\limits_0^{\theta_1} |H^*(s)\psi|^2\, ds + \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} |H^*(s)\psi|^2\, ds. \tag{2.8}$$

С помощью леммы 5 доказывается, что второй интеграл в (2.8) положителен. Отсюда и из (2.5), (2.8) следует, что при произвольном $\psi \in \sigma$ имеет место строгое неравенство

$$c(F(\theta_1), \psi) < c(F(\theta_2), \psi). \tag{2.9}$$

Напомним, что $F(\theta_1)$, $F(\theta_2)$ — выпуклые компакты. Из неравенства (2.9) с помощью аппарата опорных функций (см. [8]) получаем искомое включение (2.7). $\square$

С помощью вышесказанного (в частности, леммы 7) для множества $\mathcal{E} = \bigcup_{\theta \geqslant 0} F(\theta)$ доказывается

Лемма 8. *Множество $\mathcal{E}$ является открытым выпуклым множеством в $\mathbb{R}^n$.*

Отметим, что множество $\mathcal{E}$ является областью определения функции времени оптимального быстродействия $T(x_0)$ для исследуемой задачи оптимального быстродействия. Справедлива

Теорема 1. *Функция $T(x_0)$ непрерывна на множестве $\mathcal{E}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем произвольную точку $\xi \in \mathcal{E}$ и докажем непрерывность функции $T(x_0)$ в этой точке. Обозначим $\tau = T(\xi)$. Отметим, что $\xi \in F(\tau)$, а если $\tau > 0$, то при $\theta \in [0, \tau)$ еще выполняется соотношение

$$\xi \notin F(\theta). \tag{2.10}$$

В силу открытости множества $\mathcal{E}$ можно утверждать, что при достаточно малом $h > 0$ имеет место включение $\Omega = \xi + S_h \subset \mathcal{E}$, где $S_h = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| \leqslant h\}$. Дальнейшие рассуждения будут вестись в рамках множества Ω. Фиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. В силу леммы 7

$$\xi \in \operatorname{int} F(\tau + \varepsilon).$$

Отсюда следует, что при достаточно малом положительном $\beta \leqslant h$

$$\xi + S_\beta \subset F(\tau + \varepsilon).$$

Далее с помощью лемм 2, 7 получаем, что для точек y, принадлежащих множеству $\xi + S_\beta$, справедливо неравенство

$$T(y) \leqslant \tau + \varepsilon. \tag{2.11}$$

Если $T(\xi) = 0$, то $\xi = 0$, и из неравенства (2.11) вытекает непрерывность функции $T(x_0)$ в точке ξ. Рассмотрим теперь случай, когда $\tau > 0$. Как говорилось выше, при $\theta \in [0, \tau)$ выполняется соотношение (2.10). Можно считать, что $\varepsilon \in (0, \tau)$. Тогда $\xi \notin F(\tau - \varepsilon)$. Учитывая, что $F(\tau - \varepsilon)$ — выпуклый компакт, а также теорему о строгой отделимости точки от выпуклого компакта (см., например, [8;9]), получаем, что для точек y, принадлежащих множеству $\xi + S_\gamma$, где $\gamma \in (0, \beta]$ и достаточно мало, выполняется соотношение $\xi + S_\gamma \not\subset F(\tau - \varepsilon)$. Из этого соотношения и леммы 7 вытекает, что при $t \in [0, \tau - \varepsilon]$

$$\xi + S_\gamma \not\subset F(t).$$

Отсюда и из сказанного выше вытекает при $y \in \xi + S_\gamma$ неравенство

$$T(y) \geqslant \tau - \varepsilon. \tag{2.12}$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ и соотношений (2.11), (2.12) мы получаем, что функция $T(x_0)$ непрерывна в точке $\xi \in \mathcal{E}$. Так как точка ξ была произвольной точкой $\mathcal{E}$, то теорема доказана. $\square$

Отметим, что в настоящей работе мы использовали аналоги конструкций статьи [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 p.
2. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
3. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
4. **Мезенцев А.В.** Дифференциальные игры с интегральными ограничениями на управление. Изд-во Москов. ун-та, 1988. 134 p.
5. **Гусев М.И., Зыков И.В.** Об экстремальных свойствах граничных точек множеств достижимости управляемых систем при интегральных ограничениях // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 1. С. 103–115.
6. **Зыков И.В.** О внешних оценках множеств достижимости управляемых систем с интегральными ограничениями // Изв. ИМИ УдГУ. 2019. Т. 53. С. 61–72. DOI: 10.20537/2226-3594-2019-53-06
7. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. М.: Факториал пресс, 2002. 824 с.
8. **Благодатских В.И.** Введение в оптимальное управление. Линейная теория. М.: Высшая школа, 2001. 240 p.
9. **Петров Н.Н.** Введение в выпуклый анализ. Ижевск, 2009. 166 с.

10. **Никольский М.С.** О непрерывности времени оптимального быстродействия как функции начального состояния для линейных управляемых объектов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 2023. № 2. С. 31–38. doi: 10.55959/MSU/0137-0782-15-2023-47-2-31-38

Поступила 25.10.2023
После доработки 15.02.2024
Принята к публикации 19.02.2024

Никольский Михаил Сергеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
г. Москва
e-mail: mni@mi-ras.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Motion control theory]. Moscow, Nauka Publ, 1968, 476 p.
2. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory.* NY, London, Sydney: John Wiley & Sons, 1967, 576 p. Translated to Russian under the title *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya*, Moscow, Nauka Publ., 1972, 576 p. ISBN: 0471522635 .
3. Kurzhanskii A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and observation under the conditions of uncertainty]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 392 p.
4. Mezentsev A.V. *Differentsial'nye igry s integral'nymi ogranicheniyami na upravlenie* [Differential games with integral constraints on control]. Moscow, Moscow State Univ. Publ., 1988, 134 p.
5. Gusev M.I., Zykov I.V. On extremal properties of the boundary points of reachable sets for control systems with integral constraints. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2018, vol. 300, suppl. 1, pp. 114–125. doi: 10.1134/S0081543818020116
6. Zykov I.V. On external estimates of reachable sets of control systems with integral constraints. *Izvestiya Inst. Mat. Inform. Udmurt. State Univ.*, 2019, vol. 53, pp. 61–72 (in Russian). doi: 10.20537/2226-3594-2019-53-06
7. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow, Faktorial Press, 2002, 824 p. ISBN: 5-88688-056-9 .
8. Blagodatskikh V.I. *Vvedenie v optimal'noe upravlenie* (*lineinaya teoriya*) [Introduction to optimal control (linear theory)]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 2001, 240 p. ISBN: 5-06-003983-8.
9. Petrov N.N. *Vvedenie v vypuklyi analiz* [Introduction to convex analysis]. Izhevsk, Udmurt. State Univ., 2009, 166 p.
10. Nikol'skii M.S. On continuity of optimal time as a function of initial state for linear controlled objects. *Vestnik Mosk. Univ. Ser. 15. Vychisl. Matem. i Kibern.*, 2023, no. 2, pp. 31–38 (in Russian). doi: 10.55959/MSU/0137-0782-15-2023-47-2-31-38

Received October 25, 2023
Revised February 15, 2024
Accepted February 19, 2024

Mikhail Sergeevich Nikolskii, Dr. Phys.-Math. Sci, Prof., Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Science, Moscow, 119991 Russia, e-mail: mni@mi-ras.ru .

Cite this article as: M. S. Nikol'skii. On the continuity of the optimal time as a function of the initial state for linear controlled objects with integral constraints on controls. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 130–137 .