ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 2 2024

УДК 517.977

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ СБОЕВ УПРАВЛЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ[1]

В. И. Максимов, Ю. С. Осипов

Рассматривается задача вычисления точек, а также величин разрывов управлений, действующих на систему, описываемую нелинейным векторным обыкновенным дифференциальным уравнением. Подобная задача хорошо известна в теории систем и относится к классу задач идентификации сбоев. В настоящей работе указывается регуляризирующий алгоритм, позволяющий синхронно с развитием процесса функционирования управляемой системы решать указанную задачу. Алгоритм основан на одном из методов управления по принципу обратной связи, который в литературе получил название “метод динамической регуляризации” и ранее активно применялся для решения задач онлайн восстановления негладких неизвестных возмущений. Описанный в данной работе алгоритм является устойчивым к информационным помехам и погрешностям вычислений.

Ключевые слова: управление, идентификация сбоев.

V. I. Maksimov, Yu. S. Osipov. On the identification of control failures by the dynamic regularization method.

The problem of calculating points and magnitudes of discontinuities in the controls acting on a system described by a nonlinear vector ordinary differential equation is considered. A similar problem is well known in systems theory and belongs to the class of failure identification problems. This paper specifies a regularizing algorithm that solves the problem synchronously with the process of functioning of the control system. The algorithm is based on a feedback control method called the dynamic regularization method in the literature; this method was previously actively used in problems of online reconstruction of nonsmooth unknown disturbances. The algorithm described in this work is stable to information interference and calculation errors.

Keywords: control, failure identification.

MSC: 34A34, 93C20

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-2-116-129

1. Введение

Рассматривается нелинейная динамическая система, описываемая векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + Bu(t), \quad t \in T = [0, \vartheta], \quad x(0) = x_0, \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — нелинейная функция, B — $(n \times n)$-мерная матрица, $\vartheta = \mathrm{const} \in (0, +\infty)$. Начальное состояние системы x_0 задано. Управление — n-мерная входная вектор-функция $u(t)$ — неизвестно. Предполагается, что эта функция имеет конечное число точек разрыва, вне которых она непрерывно дифференцируема. Такова априорная информация о действующем на систему (1.1) управляющем воздействии. Цель работы — построение алгоритма вычисления точек разрывов, а также величин разрывов функции $u(\cdot)$. Входными данными алгоритма являются результаты неточного измерения фазового состояния системы $x(t)$ в дискретные моменты времени.

[1]Работа первого автора выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2024-1377).

Предлагаемый в работе алгоритм характеризуется следующими особенностями: а) вычисление точек разрывов (а также соответствующих величин разрывов) функции $u(\cdot)$, меньших текущего значения t, осуществляется на основе результатов измерения состояния $x(\tau)$ в моменты времени τ, предшествующие моменту t; б) только после вычисления точек и величин разрывов функции $u(\cdot)$ на промежутке $0 \le \tau \le t$ возможно использование новой информации о фазовом состоянии для их вычисления в следующие моменты времени (при $\tau > t$).

Обсуждаемая задача в последние годы активно исследовалась как математиками, так и специалистами по теории систем. С точки зрения последних, задача вписывается в проблематику теории обнаружения неисправностей (fault detection or fault diagnosis) или, как еще говорят, идентификации сбоев систем, которая отражена, например, в работах [1–4] (см. также приведенную там литературу). В свою очередь, с точки зрения математиков, задача относится к теории нелинейных некорректных задач [5–7]. Довольно часто ее называют задачей локализации разрывов и для ее решения строят регуляризирующие алгоритмы (см., например, [8; 9]).

В настоящей работе для решения описанной выше задачи привлекается метод, который основан на сочетании методов теории гарантированного управления [10] и известного в теории некорректных задач метода сглаживающего функционала [5], а именно, на методе локальной регуляризации экстремального сдвига. Ранее этот подход использовался для решения задач динамического восстановления входных воздействий и неизмеряемых координат управляемых систем, функционирующих в условиях меняющейся информации [11–13], задач моделирования движений [11; 14], экстремальных задач с помощью методов управления абстрактными системами [15; 16], дифференциально-игровых задач с неполной информацией [11; 17; 18], а также целого ряда других. В отличие от цитированных выше работ в настоящей статье указанный подход будет использован для построения устойчивого к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритма определения точек, а также величин разрывов управляющих воздействий.

2. Постановка задачи. Метод решения

В дальнейшем полагаем, что функция $f(t,x)$ непрерывна по аргументу t и липшицева по x, т. е.

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \le L\|x_1 - x_2\|, \quad L = \mathrm{const} > 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

Символ $\|x\|$ означает евклидову норму вектора x.

Рассматриваемая задача состоит в следующем. На промежутке времени T реализуется некоторая траектория системы (1.1), т. е. решение $x(\cdot) = x(\cdot; x_0, u(\cdot))$ векторного дифференциального уравнения (1.1), зависящее от изменяющегося во времени кусочно-непрерывного управления $u(\cdot)$. Отрезок T разбит на конечное число полуинтервалов $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \in [0 : m-1]$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$, $\tau_0 = 0$, $\tau_m = \vartheta$. В моменты времени $\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$ измеряются (приближенно) состояния системы $x(\tau_i)$, т. е. находятся векторы $\xi_i^h \in \mathbb{R}^n$ со свойствами

$$\|x(\tau_i) - \xi_i^h\| \le h. \tag{2.2}$$

Здесь $h \in (0,1)$ — уровень информационной погрешности. Как само решение $x(\cdot)$ уравнения (1.1), так и управление $u(\cdot)$ неизвестно. Задача состоит в построении алгоритма вычисления (синхронно с функционированием управляемой системы) моментов, а также величин разрывов управления $u(\cdot)$ на основе неточного измерения $x(\tau_i)$.

Для решения указанной задачи мы воспользуемся методом позиционного управления с моделью, развитым в работах [11–13]. В соответствии с этим методом обсуждаемая задача заменяется другой задачей, а именно, задачей позиционного управления некоторой вспомогательной системой. Таким образом, вводится дополнительная управляемая система, назовем ее моделью, которая описывается некоторым дифференциальным уравнением (его вид уточним ниже). Решение этой системы зависит от управления $u^h(\cdot)$ (подлежащего формированию). Это решение в дальнейшем мы обозначим символом $w^h(\cdot) = w^h(\cdot; w^h(0), u^h(\cdot))$. Начальное состояние модели $w^h(0)$ выбирается равным результату измерения ξ_0^h. Формирование управления $u^h(\cdot)$ (при фиксированном $h \in (0,1)$) в модели на полуинтервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$, осуществляется по принципу обратной связи согласно заранее выбранному подходящим образом правилу $\mathcal{U}_h$, ставящему в соответствие каждой тройке $\{\tau_i, \xi_i^h, w^h(\tau_i)\}$, $i \in [0 : m-1]$, функцию

$$u^h(t) = u_i^h = \mathcal{U}_h(\tau_i, \xi_i^h, w^h(\tau_i)) \in \mathbb{R}^n \quad \text{при почти всех} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}). \tag{2.3}$$

После того как дополнительная система (модель) и ее начальное состояние, а также правило формирования управления в модели $\mathcal{U}_h$ выбраны, работа алгоритма осуществляется по следующей схеме.

1. До начального момента фиксируется погрешность h, а также разбиение Δ.
2. На i-м шаге алгоритма, осуществляемом на промежутке времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$, выполняются следующие операции.
   - Сначала измеряется (с ошибкой) фазовое состояние $x(\tau_i)$ системы (1.1), т. е. находится вектор $\xi_i^h \in \mathbb{R}^n$ со свойством (2.2).
   - Затем по выбранному правилу (2.3) определяется управление в модели.
   - После этого вместо траектории $w^h(t)$, $t \in [0, \tau_i]$, формируется фазовая траектория $w^h(t)$, $t \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$ (т. е. осуществляется корректировка памяти).
3. В моменты времени τ_i вычисляются некоторые величины λ_i, зависящие от предыстории управления $u^h(\cdot)$.
4. Если оказывается, что при каком-то i величина λ_i превосходит некоторое пороговое значение, то указываются, во-первых, полуинтервал (величины δ), на котором находится соответствующий момент разрыва, и, во-вторых, величина разрыва (приближенно). □

Будем рассматривать случай, когда размерности управления u и фазового вектора x совпадают, а матрица B невырожденная. Также предположим, что вход $u(\cdot)$ — кусочно-непрерывная функция. Именно, пусть $\{t_k\}_{k=1}^r$ — моменты (неизвестные) разрывов функции $u(\cdot)$, упорядоченные в порядке возрастания: $t_{k+1} > t_k$. Считаем, что в этих точках функция $u(\cdot)$ непрерывна справа: $u(t_k) = u(t_k+)$, где $u(t_k+) = \lim_{t\to t_k, t>t_k} u(t), u(t_k-) = \lim_{t\to t_k, t<t_k} u(t)$. Символом b_k обозначим соответствующие величины разрывов, т. е. $b_k = \|u(t_k+) - u(t_k-)\|$. Пусть известны три числа $b > 0, d_0 > 0$ и $d > 0$ такие, что

$$b \le b_k \quad \text{при всех} \quad k \in [1:r], \quad t_1 > d_0, \quad t_r < \vartheta,$$

$$d_0 \le t_{k+1} - t_k \quad \text{при всех} \quad k \in [1:r-1], \quad \|u(t)\| \le d \quad \text{при п.в.} \quad t \in T.$$

(Значение r может быть неизвестно.) Предположим также, что функция $u(\cdot)$ непрерывно дифференцируема всюду, за исключением моментов разрыва $\{t_k\}_{k=1}^r$, причем известно число $f_* > 0$ такое, что

$$\|\dot u(t)\| \le f_* \tag{2.4}$$

во всех точках дифференцируемости функции $u(\cdot)$.

3. Вспомогательные утверждения

Пусть взято семейство разбиений отрезка T

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,m_h} = \vartheta, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h),$$

а также функция $\alpha = \alpha(h) : (0,1) \to (0,1)$, $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$. Здесь $\delta(h) = \dfrac{\vartheta}{m_h} \in (0,1)$, $m_h = M_h^3$, $M_h \in \mathcal{N}$, $\mathcal{N}$ означает множество натуральных чисел.

Пусть известны числа $M > 0$, $M_1 > 0$ и функция $\omega(\cdot)$ такие, что

$$\|\dot{x}(t)\| \le M, \quad \|f(t, x(t))\| \le M_1 \ \text{ при п.в. } \ t \in T, \tag{3.1}$$

$$\|f(t, x(t)) - f(\tau_i, \xi_i^h)\| \le Lh + LM\delta + \omega(\delta) \le M_*(\delta + h + \omega(\delta)) \ \text{ при } \ t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \tag{3.2}$$

где $M_* = \max\{L, LM, 1\}$, если $f = f(t, x)$, $M_* = \max\{L, LM\}$, если $f = f(x)$, $M_* = 1$, если $f = f(t)$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности функции $t \to f(t, x(t))$, $t \in T$, т. е.

$$\omega(\delta) = \sup\big\{\|f(t, x(t)) - f(t - \delta, x(t - \delta))\| : t \in [\delta, \vartheta]\big\} \le \omega(\delta).$$

Неравенство (3.2) справедливо в силу липшицевости функции f (см. условие (2.1)).

Введем вспомогательную управляемую систему, описываемую линейным векторным дифференциальным уравнением

$$\begin{gathered} \dot{w}^h(t) = f(\tau_i, \xi_i^h) + Bu^h(t) \ \text{ при п.в. } \ t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \\ i \in [0 : m-1], \quad m = m_h, \quad \tau_i = \tau_{h,i}, \end{gathered} \tag{3.3}$$

с начальным условием

$$w^h(0) = \xi_0^h. \tag{3.4}$$

Управление в этой системе будем задавать по правилу (2.3), где положим

$$\mathcal{U}_h(\tau_i, \xi_i^h, w^h(\tau_i)) = -\alpha^{-1}(h)B'[w^h(\tau_i) - \xi_i^h] \ \text{ при } \ t \in \delta_i. \tag{3.5}$$

Здесь штрих означает транспонирование. В таком случае система (3.3) примет вид

$$\dot{w}^h(t) = f(\tau_i, \xi_i^h) - \alpha^{-1}(h)\tilde{B}[w^h(\tau_i) - \xi_i^h] \ \text{ при п.в. } \ t \in \delta_i, \tag{3.6}$$

где $\tilde{B} = BB'$.

Обозначим $K_0 = \|\tilde{B}\|$, $K_1 = K_0 M_2$, $K_2 = K_0^2$, $M_2 = M_1 + 3M_*$. В силу невырожденности матрицы B матрица $\tilde{B}$ положительно определенная. Поэтому все характеристические числа этой матрицы действительны и наименьшее из них (обозначим это число λ) положительно. Следовательно, справедливо неравенство

$$\begin{gathered} \int_a^t \|\pi_\alpha(t - s)\|\, ds \le c \int_a^t e^{-\lambda\alpha^{-1}(t-s)}\, ds \\ = c\alpha\lambda^{-1} e^{-\lambda\alpha^{-1}(t-s)}\Big|_a^t = c\alpha\lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda\alpha^{-1}(t-a)}) \le c\lambda^{-1}\alpha. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Здесь

$$\pi_\alpha(t) = \exp(-\alpha^{-1}\tilde{B}t), \quad \alpha = \alpha(h), \quad a \in [0, \vartheta), \quad a \le t \le \vartheta, \quad c = \mathrm{const}.$$

В дальнейшем $\Xi(x(\cdot), h)$ означает множество допустимых измерений, т. е. множество всех кусочно-постоянных функций $\xi^h(\cdot)\colon T \to \mathbb{R}^n$ следующей структуры: $\xi^h(t) = \xi_i^h$ при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, $i \in [0 : m_h - 1]$, где векторы ξ_i^h удовлетворяют неравенствам (2.2).

Пусть выполнены стандартные для метода динамической регуляризации условия согласования параметров

$$\alpha(h) \to 0, \quad \delta(h) \to 0, \ (\delta(h) + h)\alpha^{-1}(h) \to 0 \ \text{ при } \ h \to 0.$$

Ввиду этого условия, не нарушая общности, можно считать: найдется число $h_* \in (0,1)$ такое, что при всех $h \in (0, h_*)$ имеют место соотношения

$$(\delta(h) + h)\alpha^{-1}(h) \le 1, \quad \omega(\delta(h)) \le 1, \quad \delta(h)\alpha^{-1}(h) \le \frac{\lambda}{2cK_2}.$$

Обозначим

$$\mu(t) = \max_{0\le\tau\le t} \|w^h(\tau) - x(\tau)\|, \quad \tilde\tau_i = \begin{cases} \tau_i, & \tau_i \ge a, \\ a, & \tau_i < a, \end{cases}$$

$$K_3 = \frac{c}{\lambda} \max\left\{K_0(1+M) + 3M_* + d\|B\|, K_0^2, K_1\right\},$$

$$C = \sqrt{2}\left[M_2^2 + 2K_0^2 + 5(4K_0K_3)^2\right]^{1/2}.$$

Имеет место

Лемма 1. *Пусть $a \in T$ и $\mu(a) \le p$, $p \ge 0$. Тогда равномерно по всем $h \in (0, h_*)$, $\xi^h(\cdot) \in \Xi(x(\cdot), h)$, $i \in [0 : m_h - 1]$, $\tau_{i+1} > a$ верны неравенства*

$$\Bigl(\int\limits_{\tilde\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|\dot w^h(s)\|^2\,ds\Bigr)^{1/2} \le C\delta^{1/2} + \ 4\sqrt{2}K_0\delta^{1/2}\alpha^{-1}p, \tag{3.8}$$

$$\mu(t) \le 2p + 5K_3(\alpha+\delta) \quad \text{при} \quad t \in [a, \vartheta],$$

где $\delta = \delta(h)$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, $\alpha = \alpha(h)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая (3.6), заключаем, что справедливы равенства

$$\frac{d}{dt}[w^h(t) - x(t)] = f(\tau_i, \xi_i^h) - \alpha^{-1}\tilde B[w^h(\tau_i) - \xi_i^h] - f(t, x(t)) - Bu(t)$$

$$= -\alpha^{-1}\tilde B[w^h(t) - x(t)] + \Phi_h^{(1)}(t) \ \ \text{при п.в.} \ \ t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}).$$

Здесь

$$\Phi_h^{(1)}(t) = \Phi_h(t) + \alpha^{-1}\tilde B[w^h(t) - w^h(\tau_i)],$$

$$\Phi_h(t) = -\alpha^{-1}\tilde B[x(t) - \xi_i^h] + [f(\tau_i, \xi_i^h) - f(t, x(t))] - Bu(t), \quad t \in \delta_i.$$

Ввиду соотношений (3.1), (3.2) семейство функций $\Phi_h(\cdot)$, как нетрудно видеть, ограничено

$$\begin{aligned} \|\Phi_h(t)\| &\le \frac{K_0}{\alpha}(h + \delta M) + M_*(\delta + h + \omega(\delta)) + \|B\|d \\ &\le M^{(1)} = K_0(1+M) + 3M_* + d\|B\| \ \ \text{при п.в.} \ \ t \in T \end{aligned} \tag{3.9}$$

равномерно по всем $h \in (0, h_*)$. Далее, воспользовавшись формулой Коши представления решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, заключаем, что при $t \in [a, \vartheta]$ справедливо равенство

$$w^h(t) - x(t) = w^h(a) - x(a) + \int\limits_a^t e^{-\frac{1}{\alpha}\tilde B(t-s)}\Phi_h^{(1)}(s)\,ds. \tag{3.10}$$

Обозначим $f_h(t) = f(\tau_i, \xi_i^h)$ при $t \in \delta_i$. Легко видеть, что при $t \in \delta_i$, $i \in [0 : m_h - 1]$, верна оценка

$$\|f_h(t)\| \le \|f(\tau_i, \xi_i^h) - f(\tau_i, x(\tau_i))\| + M_1 \le M_2. \tag{3.11}$$

Кроме того, имеют место оценки

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}\|\tilde B[w^h(t) - w^h(\tau_i)]\| &\le K_0\alpha^{-1} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|f_h(s) - \alpha^{-1}\tilde B[w^h(\tau_i) - \xi_i^h]\|\,ds \\ &\le K_1\delta\alpha^{-1} + K_2\delta\alpha^{-2}(\mu(\tau_i) + h) \ \ \text{при} \ \ t \in \delta_i, \\ &\mu(\tau_i) \le \mu(\tau_{i+1}), \quad i \in [0 : m_h - 1]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Заметим, что

$$\|\Phi_h^{(1)}(t)\| \le \|\Phi_h(t)\| + \alpha^{-1}\|\tilde{B}[w^h(t) - w^h(\tau_i)]\| \ \text{ при } \ t \in \delta_i, \ i \in [0 : m_h - 1]. \tag{3.13}$$

В таком случае, учитывая соотношения (3.10)–(3.13), получаем

$$\begin{gathered}\mu(t) \le p + \big[K_1\delta\alpha^{-1} + K_2(\delta\alpha^{-2}\mu(\tau_i) + \delta h\alpha^{-2})\big] \int\limits_a^t \|\pi_\alpha(t-s)\|\, ds \\ + \int\limits_a^t \|\pi_\alpha(t-s)\|\|\Phi_h(s)\|\, ds, \quad t \in [\tilde{\tau}_i, \tau_{i+1}], \quad \tau_{i+1} > a.\end{gathered} \tag{3.14}$$

Воспользовавшись (3.9), выводим

$$\int\limits_a^t \|\pi_\alpha(t-s)\|\|\Phi_h(s)\|\, ds \le M^{(1)} \int\limits_a^t \|\pi_\alpha(t-s)\|\, ds. \tag{3.15}$$

Таким образом, из (3.7), (3.15) следует неравенство

$$\int\limits_a^t \|\pi_\alpha(t-s)\|\|\Phi_h(s)\|\, ds \le \frac{M^{(1)}c}{\lambda}\alpha, \quad t \in [a, \vartheta].$$

В свою очередь из (3.14), учитывая последнее неравенство, а также неравенство $\mu(\tau) \le \mu(\tilde{\tau}_i)$ при $\tau \in [a, \tilde{\tau}_i]$, выводим справедливую при всех при $t \in [\tilde{\tau}_i, \tau_{i+1}]$ оценку

$$\mu(t) \le p + \Big[K_1\frac{\delta}{\alpha} + K_2\Big(\frac{\delta}{\alpha^2}\mu(\tilde{\tau}_i) + \frac{\delta h}{\alpha^2}\Big)\Big]\frac{c}{\lambda}\alpha + \alpha\frac{M^{(1)}c}{\lambda}. \tag{3.16}$$

Отсюда, считая $t = \tilde{\tau}_i$, устанавливаем оценку

$$\Big(1 - \frac{K_2 c\delta}{\alpha\lambda}\Big)\mu(\tilde{\tau}_i) \le p + K_3\big(\alpha + \delta + \delta h\alpha^{-1}\big).$$

Поэтому при $h \in (0, h_*)$ верно неравенство

$$\mu(\tilde{\tau}_i) \le 2p + 2K_3\big(\alpha + \delta + \delta h\alpha^{-1}\big) \le 2p + 2K_3(\alpha + 2\delta), \tag{3.17}$$

если $h\alpha^{-1} \le 1$. Кроме того, в силу (3.16) при $t \in [\tilde{\tau}_i, \tau_{i+1}]$

$$\mu(t) \le p + 3K_3\alpha + \frac{cK_2}{\lambda}\frac{\delta}{\alpha}\mu(\tilde{\tau}_i).$$

Заметим, что при $h \in (0, h_*)$ справедливо неравенство $\dfrac{cK_2}{\lambda}\dfrac{\delta(h)}{\alpha(h)} \le 0.5$. В таком случае при $h \in (0, h_*)$, $t \in [\tilde{\tau}_i, \tau_{i+1}]$ в силу (3.17) верно соотношение

$$\mu(t) \le p + 3K_3\alpha + 0.5\mu(\tilde{\tau}_i) \le 2p + 5K_3(\alpha + \delta).$$

Учитывая (3.6), (3.11), (3.17), а также неравенства $\delta h^2\alpha^{-2} \le \delta$, $\delta\alpha^{-1} \le 1$, $(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$, получаем

$$\int\limits_{\tilde{\tau}_i}^{\tau_{i+1}} \|\dot{w}^h(s)\|^2\, ds = \int\limits_{\tilde{\tau}_i}^{\tau_{i+1}} \|f_h(s) - \frac{1}{\alpha}\tilde{B}[w^h(\tau_i) - \xi_i^h]\|^2\, ds$$

$$\leq 2\int\limits_{\tilde\tau_i}^{\tau_{i+1}}\|f_h(s)\|^2\,ds+4\frac{\delta}{\alpha^2}K_0^2\big(\mu^2(\tau_i)+h^2\big)\leq 2M_2^2\delta+4K_0^2\frac{\delta}{\alpha^2}\big(8p^2+8K_3^2(\alpha^2+4\delta^2)+h^2\big)$$

$$=2M_2^2\delta+32K_0^2\frac{\delta}{\alpha^2}p^2+2(4K_0K_3)^2\Big(\delta+4\frac{\delta^3}{\alpha^2}\Big)+4K_0^2\frac{\delta}{\alpha^2}h^2$$

$$=\big(2M_2^2+2(4K_0K_3)^2\big)\delta+32K_0^2\frac{\delta}{\alpha^2}p^2+4K_0^2\frac{\delta}{\alpha^2}h^2+2(8K_0K_3)^2\frac{\delta^3}{\alpha^2}.$$

Справедливость леммы вытекает из последних двух неравенств.

Лемма 1 доказана.

Символом $W([a,b];\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство абсолютно непрерывных n-мерных функций, производные которых принадлежат $L_\infty([a,b];\mathbb{R}^n)$.

Лемма 2. *Если управление $u(\cdot)$ является элементом пространства $W([a,\vartheta];\mathbb{R}^n)$, $a\in[0,\vartheta)$, то при всех $t\in[a,\vartheta_*]$ имеет место неравенство*

$$\|u^h(t)-u(t)\|\leq L(h,\delta,\alpha,t-a,p),$$

где

$$L(h,\delta,\alpha,t-a,p)\equiv\frac{c\alpha}{\lambda(t-a)}\|B\|d+\tilde c_1\alpha(h)+\tilde c_2\omega(\delta(h))+\tilde c_3(h+\delta(h))\alpha^{-1}(h)+\tilde c_4\delta(h)p\alpha^{-2}(h),$$

$$\tilde c_1=f_*c\lambda^{-1}\|B\|,\quad \tilde c_2=M_*+K_0(C+\max\{1,M\}),$$
$$\tilde c_3=\tilde c_2+2(K_0\max\{1,M\}+C),\quad \tilde c_4=8\sqrt2K_0^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая (3.10), заключаем, что при $t\in[a,\vartheta]$ справедливо равенство

$$\alpha^{-1}\tilde B[w^h(t)-x(t)]-\alpha^{-1}\tilde B[w^h(a)-x(a)]=\int\limits_a^t\frac{d}{ds}\pi_\alpha(t-s)\Phi_h^{(1)}(s)\,ds \tag{3.18}$$

$$=-\int\limits_a^t\frac{d}{ds}\pi_\alpha(t-s)Bu(s)\,ds+\sum_{j=1}^3\int\limits_a^t\frac{d}{ds}\pi_\alpha(t-s)\nu_\delta^{(j)}(s)\,ds,$$

где

$$\nu_\delta^{(1)}(s)=\alpha^{-1}\tilde B[w^h(s)-w^h(\tau_i)],\quad \nu_\delta^{(2)}(s)=-\alpha^{-1}\tilde B[x(s)-\xi_i^h],$$

$$\nu_\delta^{(3)}(s)=f(\tau_i,\xi_i^h)-f(s,x(s))\quad\text{при п.в.}\ \ s\in\delta_i=[\tau_i,\tau_{i+1}),\quad a\leq s.$$

В силу леммы 1 (см. (3.8)) имеем

$$\begin{aligned}\|\nu_\delta^{(1)}(t)\|&\leq\frac1\alpha K_0\int\limits_{\tilde\tau_i}^t\|\dot w^h(s)\|ds\leq\frac{\delta^{1/2}}{\alpha}K_0\Big(\int\limits_{\tilde\tau_i}^{\tau_{i+1}}\|\dot w^h(s)\|^2ds\Big)^{1/2}\\&\leq\frac{\delta^{1/2}}{\alpha}K_0\Big(C\delta^{1/2}+4\sqrt2K_0\frac{\delta^{1/2}}{\alpha}p\Big)\leq K_0\Big(C\frac{\delta}{\alpha}+4\sqrt2K_0\frac{\delta}{\alpha^2}p\Big)\\&\leq K_0C\frac{\delta}{\alpha}+4\sqrt2K_0^2\frac{\delta}{\alpha^2}p,\quad t\in[\tilde\tau_i,\tau_{i+1}].\end{aligned} \tag{3.19}$$

В свою очередь в силу (2.2) и (3.1) будем иметь

$$\|\nu_\delta^{(2)}(t)\|\leq C_0(\delta+h)\alpha^{-1},\quad t\in[a,\vartheta], \tag{3.20}$$

где $C_0 = K_0 \max\{1, M\}$. Кроме того (см. (3.2)),

$$\|\gamma_\delta^{(3)}(t)\| \le M_*(\delta + h + \omega(\delta)), \quad t \in [a, \vartheta]. \tag{3.21}$$

В таком случае из (3.19)–(3.21), учитывая (3.7), выводим

$$\Big\|\sum_{j=1}^{3} \int_a^t \frac{d}{ds}\pi_\alpha(t-s)\nu_\delta^{(j)}(s)\,ds\Big\| \le \varrho(h, \alpha, \delta) + C_2\frac{\delta}{\alpha^2}p, \tag{3.22}$$

где

$$\varrho(h, \alpha, \delta) = C_1\Big(\omega(\delta) + \frac{\delta + h}{\alpha}\Big), \quad t \in [a, \vartheta].$$

$C_1 = M_* + K_0(C + \max\{1, M\})$, $C_2 = 4\sqrt{2}K_0^2$. Интегрируя по частям первое слагаемое в правой части равенства (3.18), получим

$$-\int_a^t \Big(\frac{d}{ds}\pi_\alpha(t-s)\Big)Bu(s)\,ds = \pi_\alpha(t-a)Bu(a) - Bu(t) + \int_a^t \pi_\alpha(t-s)B\dot{u}(s)\,ds. \tag{3.23}$$

Далее, учитывая (3.7), (3.22), (3.23), из (3.18) выводим

$$\begin{gathered}\Big\| -\frac{1}{\alpha}\tilde{B}[w^h(t) - x(t)] + \frac{1}{\alpha}\tilde{B}[w^h(a) - x(a)] - Bu(t)\Big\| \le C_2\frac{\delta}{\alpha^2}p \\ + \varrho(h, \alpha, \delta) + \|\pi_\alpha(t-a)Bu(a)\| + c\int_a^t e^{-\frac{\lambda}{\alpha}(t-s)}\|B\|\|\dot{u}(s)\|\,ds.\end{gathered} \tag{3.24}$$

Заметим (см. (3.7)), что верна цепочка неравенств

$$\|\pi_\alpha(t-a)Bu(a)\| \le ce^{-\frac{\lambda}{\alpha}(t-a)}\|Bu(a)\| \le \frac{c\alpha}{\lambda(t-a)}\|Bu(a)\|, \tag{3.25}$$

$$c\int_a^t e^{-\frac{\lambda}{\alpha}(t-s)}\|B\|\|\dot{u}(s)\|\,ds \le \alpha\tilde{c}_1.$$

Кроме того, из (3.1), (3.8) выводим при $t \in [\tilde{\tau}_i, \tau_{i+1}]$

$$\begin{gathered}\big\|\alpha^{-1}\tilde{B}\{[w^h(t) - x(t)] - [w^h(\tau_i) - \xi_i^h]\}\big\| \\ \le \frac{K_0}{\alpha}\Big(\int_{\tau_i}^t \|\dot{w}^h(s)\|\,ds + h + \int_{\tau_i}^t \|\dot{x}(s)\|\,ds\Big) \le C_0(h+\delta)\alpha^{-1} + K_0\delta\alpha^{-1}\Big(C + 4\sqrt{2}K_0\frac{p}{\alpha}\Big).\end{gathered} \tag{3.26}$$

В силу ограниченности $\dot{u}(\cdot)$ ($\|\dot{u}(t)\| \le f_*$ при п.в. $t \in [a, \vartheta]$ (см. (2.4)) из (3.24), (3.26), учитывая (3.22), (3.23), (3.25), получаем при $t \in \delta_i$ неравенство

$$\begin{gathered}\Big\| -\frac{1}{\alpha}\tilde{B}[w^h(\tau_i) - \xi_i^h] + \frac{1}{\alpha}\tilde{B}[w^h(a) - x(a)] - Bu(t)\Big\| \le \tilde{c}_4\frac{\delta}{\alpha^2}p \\ + C_0\frac{h}{\alpha} + \varrho(h, \delta, \alpha) + (C_0 + K_0C)\frac{\delta}{\alpha} + \tilde{c}_1\alpha + \frac{c\alpha}{\lambda(t-a)}\|Bu(a)\|.\end{gathered}$$

Справедливость леммы следует из последнего неравенства.

Лемма 2 доказана.

4. Алгоритм решения

Перейдем к описанию алгоритма решения рассматриваемой задачи, воспользовавшись конструкциями предыдущего раздела. Функцию $\alpha(\cdot)$ зададим следующим образом:

$$\alpha(h) = \delta^{2/3}(h),$$

где $\delta(h)$ — шаг разбиения Δ_h, у которого $\delta(h) = \vartheta m_h^{-1}$, $m_h = M_h^3$, $M_h = \left[\left(\dfrac{\vartheta}{h}\right)^{1/3}\right]$, символ $[a]$ означает целую часть числа a. Заметим, что при таком выборе величин α, δ верно неравенство $h \le \delta(h)$. Положим также, что при $h \in (0, h_*), h_* < 1$, верны неравенства $\delta(h)(1+M_h^2) < \vartheta - t_r$, $\beta = \vartheta M_h^{-1} < 0.5d_0$.

Введем три функции $N(h) = M_h^2$, $g_1(\cdot)$ и $g(\cdot)$. Последние две зададим следующим образом:

$$g_1(\alpha, \delta, h) = f_*(\delta + \beta) + L_1 + L_2,$$

где $L_1 = L(h, \alpha, \delta, d_0, h),\ L_2 = L(h, \alpha, \delta, \beta, 2h + 5K_3(\alpha + \delta))$,

$$g(\alpha, \delta, h) = f_*(\delta + \beta) + L_3 + L_4,$$

где $L_3 = L(h, \alpha, \delta, d_0/3, 2h + 5K_3(\alpha + \delta)),\ L_4 = L(h, \alpha, \delta, \beta, 4h + 15K_3(\alpha + \delta))$.

Очевидно, можно указать число $h_1 \in (0, h_*)$ такое, что при всех $h \in (0, h_1)$ верны неравенства

$$\delta(h) \le d_0/4, \quad g_1(\alpha(h), \delta(h), h) \le b/2, \quad g(\alpha(h), \delta(h), h) \le b/2.$$

Здесь число h_* определено в предыдущем разделе.

Опишем алгоритм решения задачи. В качестве модели возьмем систему вида (3.3) с начальным состоянием (3.4). Управление $u^h(\cdot)$ в этой системе будем вычислять по правилу (3.5), т. е. положим

$$\mathcal{U}_h(\tau_i, \xi_i^h, w^h(\tau_i)) = -\alpha^{-1}B'[w^h(\tau_i) - \xi_i^h], \quad \alpha = \alpha(h), \quad \tau_i = \tau_{h,i}.$$

До начала работы алгоритма фиксируем величину $h \in (0, h_1)$, разбиение Δ_h, а также число $\alpha = \alpha(h)$ и номер $N = N(h)$. На первом этапе найдем полуинтервал, на котором находится первая точка разрыва. Для этого в каждый момент $\tau_i \ge d_0$ вычисляем величину

$$\lambda_i = \|u^h(\tau_{i-N-1}) - u^h(\tau_i)\|.$$

Пусть при некотором $i \in [1 : m_h - 1]$, $\tau_i > d_0$ впервые выполняется неравенство

$$\lambda_i > b/2,$$

т. е. при всех $j \le i - 1$, $d_0 \le \tau_j$ имеют место неравенства $\lambda_j \le b/2$.

Теорема 1. *Первая точка разрыва t_1 управления находится на полуинтервале $\gamma_i = (\tau_{i-N-1}, \tau_{i-N}]$. Причем величина разрыва b_1 отличается от λ_i на g_1, т.е.*

$$|b_1 - \lambda_i| \le g_1(\alpha, \delta, h). \tag{4.1}$$

Пусть вычислены k $(1 \le k)$ полуинтервалов, которым принадлежат первые k точек разрыва, т. е. $t_j \in (\tau_{i_j-1}, \tau_{i_j}]$, $j \in [1 : k]$, $\tau_{i_j+1} < \tau_{i_{j+1}-1}$. Последнее неравенство следует из соотношения $\delta(h) \le d_0/4$. В каждый момент $\tau_i \ge \tau_{i_k} + d_0$ вычисляем величину λ_i. Пусть впервые выполняется неравенство

$$\lambda_i > b/2,$$

т. е. при всех $j \le i - 1, \tau_{i_k-1} + d_0 \le \tau_j$ имеют место неравенства $\lambda_j \le b/2$.

Теорема 2. $(k+1)$ *точка разрыва* t_{k+1} *управления находится на полуинтервале* γ_i. *Причем величина разрыва* b_{k+1} *отличается от* λ_i *на* g, *т. е.*

$$|b_{k+1} - \lambda_i| \le g(\alpha, \delta, h).$$

Если известно количество r точек разрыва, то после вычисления величины t_r, т. е. нахождения полуинтервала γ_i такого, что $t_r \in \gamma_i$, работа алгоритма заканчивается. Если число r неизвестно, то работа алгоритма осуществляется до момента ϑ.

Доказательство теоремы 1. Пусть первая точка разрыва управления t_1 находится на полуинтервале $(\tau_{i_1-1}, \tau_{i_1}]$. В таком случае $u(\cdot) \in W([0, \tau_{i_1-1}]; \mathbb{R}^n)$. Воспользовавшись леммой 2 и учитывая тот факт, что $t_1 > d_0$, заключаем, что справедливо неравенство

$$\|u^h(\tau_{i_1-1}) - u(\tau_{i_1-1})\| \le L_1. \tag{4.2}$$

Ввиду ограниченности функции $\dot{u}(\cdot)$ ($\|\dot{u}(t)\| \le f_*$ при п.в. $t \in T$) имеют место неравенства

$$\|u(t_1-) - u(\tau_{i_1-1})\| \le f_*(t_1 - \tau_{i_1-1}), \tag{4.3}$$

$$\|u(t_1+) - u(\tau_{i_1})\| \le f_*(\tau_{i_1} - t_1). \tag{4.4}$$

Объединив (4.3) и (4.4), получаем

$$\big|\|u(\tau_{i_1}) - u(\tau_{i_1-1})\| - b_1\big| \le f_*\delta, \tag{4.5}$$

где b_1 — величина разрыва управления в момент t_1, т. е. $b_1 = \|u(t_1+) - u(t_1-)\|$. Применив лемму 1 и учитывая неравенство $\|x(0) - w^h(0)\| \le h$, устанавливаем справедливость неравенства

$$\mu(\tau_{i_1}) \le 2h + 5K_3(\alpha + \delta). \tag{4.6}$$

Так как $\beta \le 0.5 d_0$, то $u(\cdot) \in W([\tau_{i_1}, \tau_{i_1+N}]; \mathbb{R}^n)$. Поэтому, снова воспользовавшись леммой 2, а также неравенством (4.6), устанавливаем соотношение

$$\|u^h(\tau_{i_1+N}) - u(\tau_{i_1+N})\| \le L_2. \tag{4.7}$$

Кроме того, в силу равенства $N(h)\delta(h) = \beta(h)$ справедлива оценка

$$\|u(\tau_{i_1+N}) - u(\tau_{i_1})\| \le f_*\beta. \tag{4.8}$$

При выводе (4.8) мы воспользовались непрерывностью управления на отрезке $[\tau_{i_1}, \tau_{i_1+N}]$. Последнее является следствием неравенства $2\beta \le d_0$. Учитывая (4.7), (4.8), получаем

$$\|u^h(\tau_{i_1+N}) - u(\tau_{i_1})\| \le L_2. \tag{4.9}$$

Далее, из (4.2), (4.5) следует неравенство

$$\big|\|u^h(\tau_{i_1-1}) - u(\tau_{i_1})\| - b_1\big| \le f_*\delta + L_1. \tag{4.10}$$

Теперь, воспользовавшись (4.9) и (4.10), получаем

$$\big|\|u^h(\tau_{i_1+N}) - u^h(\tau_{i_1-1})\| - b_1\big| \le g_1(\alpha, \delta, h).$$

В таком случае при $i = i_1 + N$ имеем $\big|b_1 - \|u^h(\tau_i) - u^h(\tau_{i-N-1})\|\big| \le g_1(\alpha, \delta, h)$. Значит,

$$0.5b \le b_1 - g_1(\alpha, \delta, h) \le \lambda_i \le b_1 + g_1(\alpha, \delta, h).$$

Неравенство (4.1) установлено. Обратим внимание на тот факт, что если бы управление было непрерывным на полуинтервале $(\tau_{i_1-1}, \tau_{i_1}]$, то учитывая (4.2), (4.7), а также непрерывность управления справа в точках разрыва, можно сделать вывод, что верна цепочка неравенств

$$\begin{aligned}\lambda_{i_1+N} \equiv \|u^h(\tau_{i_1+N}) - u^h(\tau_{i_1-1})\| &\le \|u^h(\tau_{i_1+N}) - u(\tau_{i_1+N})\| \\ &+ \|u(\tau_{i_1+N}) - u(\tau_{i_1})\| + \|u(\tau_{i_1}) - u^h(\tau_{i_1-1})\| \\ &+ \|u^h(\tau_{i_1-1}) - u(\tau_{i_1-1})\| \le g_1(\alpha,\delta,h) \le 0.5b,\end{aligned} \tag{4.11}$$

так как $\tau_{i_1+N} - \tau_{i_1-1} < d_0$. Неравенства (4.11) также верны при замене i_1+N на любой номер $i \in [i_1^* : i_1+N-1]$, где $i_1^* = [d_0/\delta(h)] + 1$. Поэтому при всех таких i $\lambda_i \le 0.5b$.

Теорема 1 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1. Предположим, что найдены k полуинтевалов, в которых расположены первые k точек разрыва управления: $t_j \in (\tau_{i_j-1}, \tau_{i_j}]$, $j \in [1:k]$, $\tau_{i_j+1} < \tau_{i_{j+1}}$. В таком случае $t_{k+1} \in (\tau_{i_{k+1}-1}, \tau_{i_{k+1}}]$. На отрезке $[\tau_{i_k+1}, \tau_{i_{k+1}-1}]$ управление является непрерывной функцией. Далее, имеет место неравенство

$$\tau_{i_{k+1}-1} - \tau_{i_k+1} \ge 0.5d_0$$

ввиду того, что $2\delta(h) \le 0.5d_0$, $t_{k+1} - t_k \ge d_0$. Значит, воспользовавшись леммами 1 и 2, устанавливаем неравенство

$$\|u^h(\tau_{i_{k+1}-1}) - u(\tau_{i_{k+1}-1})\| \le L_3, \tag{4.12}$$

ибо $\tau_{i_{k+1}-1} > t_k + d_0/3$, а на отрезке $[t_k, t_{k+1} - \delta]$ управление является непрерывной функцией. Далее, справедливы неравенства

$$\|u(t_{k+1}-) - u(\tau_{i_{k+1}-1})\| \le f_*(t_{k+1} - \tau_{i_{k+1}-1}), \tag{4.13}$$

$$\|u(t_{k+1}+) - u(\tau_{i_{k+1}})\| \le f_*(\tau_{i_{k+1}} - t_{k+1}). \tag{4.14}$$

Учитывая неравенства (4.13) и (4.14), выводим

$$\big|\|u(\tau_{i_{k+1}}) - u(\tau_{i_{k+1}-1})\| - b_{k+1}\big| \le f_*\delta. \tag{4.15}$$

В силу леммы 1

$$\mu(\tau_{i_k}) \le 2h + 5K_3(\alpha+\delta).$$

Следовательно,

$$\mu(\tau_{i_{k+1}}) \le 2\mu(\tau_{i_k}) + 5K_3(\alpha+\delta) \le 4h + 15K_3(\alpha+\delta). \tag{4.16}$$

Положив в лемме 2 $a = \tau_{i_k+1}$, $p = 4h + 15K_3(\alpha+\delta)$ и учитывая (4.16), получим

$$\|u^h(\tau_{i_{k+1}+N}) - u(\tau_{i_{k+1}+N})\| \le L_4. \tag{4.17}$$

Заметим, что

$$\|u(\tau_{i_{k+1}+N}) - u(\tau_{i_{k+1}})\| \le f_*\beta, \tag{4.18}$$

ибо $\tau_{i_{k+1}+N} \le t_{k+2}$. Объединив (4.17) и (4.18), будем иметь

$$\|u^h(\tau_{i_{k+1}+N}) - u(\tau_{i_{k+1}})\| \le f_*\beta + L_4. \tag{4.19}$$

Далее, из (4.12), (4.15) следует неравенство

$$\big|\|u^h(\tau_{i_{k+1}-1}) - u(\tau_{i_{k+1}})\| - b_{k+1}\big| \le f_*\delta + L_4. \tag{4.20}$$

В свою очередь, из (4.19) и (4.20) выводим

$$\big|\|u^h(\tau_{i_{k+1}+N}) - u^h(\tau_{i_{k+1}-1})\| - b_{k+1}\big| \le g(\alpha,\delta,h).$$

Считая $i = i_{k+1} + N$, будем иметь

$$\left| b_{k+1} - \|u^h(\tau_i) - u^h(\tau_{i-N-1})\| \right| \le g(\alpha, \delta, h),$$

т. е.

$$0.5b \le b_{k+1} - g(\alpha, \delta, h) \le \lambda_i \le b_{k+1} + g(\alpha, \delta, h).$$

В заключение отметим, что если бы управление было непрерывным на полуинтервале $(\tau_{i_{k+1}-1}, \tau_{i_{k+1}}]$, то, учитывая (4.12), (4.17), (4.18), можно сделать вывод, что верна цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \lambda_{i_{k+1}+N} \equiv \|u^h(\tau_{i_{k+1}+N}) - u^h(\tau_{i_{k+1}-1})\| &\le \|u^h(\tau_{i_{k+1}+N}) - u(\tau_{i_{k+1}+N})\| \\ + \|u(\tau_{i_{k+1}+N}) - u(\tau_{i_{k+1}})\| &+ \|u^h(\tau_{i_{k+1}-1}) - u(\tau_{i_{k+1}})\| \\ + \|u^h(\tau_{i_{k+1}-1}) - u(\tau_{i_{k+1}-1})\| &\le g(\alpha, \delta, h) \le 0.5b. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Неравенства (4.21) также верны при замене $i_{k+1} + N$ на любое $i \in [i_k^* : i_{k+1} + N - 1]$, где $i_k^* = i_k + [d_0/\delta(h)]$. Значит, при всех таких i $\lambda_i \le 0.5b$.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Isermann R.** Fault diagnosis of machines via parameter estimation and knowledge processing — a tutorial paper // Automatica. 1993. Vol. 29, no. 4. P. 815–835. doi: 10.1016/0005-1098(93)90088-B
2. **Patton R.J., Frank P.M., Clark R.N.** Issues in fault diagnosis for dynamic systems. London: Springer, 2000. 597 p. doi: 10.1007/978-1-4471-3644-6
3. **Gertler J.** Fault detection and diagnosis in engineering systems. Boca Raton: Taylor&Francis, 1998. 504 p. doi: 10.1201/9780203756126
4. **Korbicz J., Kośćielny J.M, Kowalczuk Z., Cholewa W.** Fault diagnosis. Models, Artificial intelligence, Applications. Berlin: Springer, 2012. 922 p. doi: 10.1007/978-3-642-18615-8
5. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
6. **Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.** Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
7. **Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.** Methods for solving inverse problems in mathematical physics. NY: Marcel Dekker, 2000. 709 p. doi: 10.1201/9781482292985
8. **Коростелев А.П.** О минимаксном оценивании разрывного сигнала // Теория вероятностей и ее применения. 1987. Т. 32, № 4. С. 796–799.
9. **Антонова Т.В.** Новые методы локализации разрывов зашумленной функции // Сиб. журн. вычислительной математики. 2010. Т. 13, № 4. С. 375–386.
10. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
11. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Gordon and Breach, 1995. 625 p. ISBN: 978-2881249440.
12. **Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.** Основы метода динамичекой регуляризации. М.: Изд-во МГУ, 1999. 237 с.
13. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011. 292 с.
14. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В.** О моделировании параметров динамической системы // Задачи управления и моделирования в динамических системах. Свердловск: Изд-во УНЦ, 1984. С. 47–68.
15. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** К регуляризации выпуклой экстремальной задачи с неточно заданными ограничениями. Приложение к задаче оптимального управления с фазовыми ограничерями // Некоторые методы позиционного и программного управления. Свердловск: Изд-во УНЦ, 1987. С. 34–54.
16. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Реконструкция экстремальных возмущений в параболических уравнениях // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1997. Т. 37, № 3. С. 291–301.

17. **Кряжимский А.В., Максимов В.И.** О сочетании процессов реконструкции и гарантированного управления // Автоматика и телемеханика. 2013. № 8. С. 26–34.
18. **Максимов В.И.** Дифференциальная игра наведения при неполной информации о фазовых координатах и неизвестном начальном состоянии // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 11. С. 1676–1685. doi: 10.1134/S0374064115120134

Поступила 5.03.2024
После доработки 14.03.2024
Принята к публикации 14.03.2024

Максимов Вячеслав Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Осипов Юрий Сергеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор,
академик РАН,
главный науч. сотрудник
Математический институт имени В. А. Стеклова;
зав. кафедрой
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
г. Москва
e-mail: osipov@pran.ru

REFERENCES

1. Isermann R. Fault diagnosis of machines via parameter estimation and knowledge processing — a tutorial paper. *Automatica*, 1993, vol. 29, no. 4, pp. 815–835. doi: 10.1016/0005-1098(93)90088-B
2. Patton R.J., Frank P.M., Clark R.N. *Issues in fault diagnosis for dynamic systems.* London, Springer, 2000, 597 p. doi: 10.1007/978-1-4471-3644-6
3. Gertler J. *Fault detection and diagnosis in engineering systems.* Boca Raton, Taylor & Francis, 1998, 504 p. doi: 10.1201/9780203756126
4. Korbicz J., Kościelny J.M, Kowalczuk Z., Cholewa W. *Fault diagnosis. Models, artificial intelligence, applications.* Berlin, Springer, 2012, 922 p. doi: 10.1007/978-3-642-18615-8
5. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Solutions of ill-posed problems.* Transl. from the 1st Russian ed. Washington: Winston; NY: Halsted Press, 1977, 258 p. ISBN: 978-0470991244 . Original Russian text (2nd ed.) published in Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach*, Moscow, Nauka Publ., 1979, 285 p.
6. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. *Ill-posed problems of mathematical physics and analysis.* Provodence, Amer. Math. Soc., 1986, 290 p. ISBN: 978-1-4704-4478-5 . Original Russian text published in Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. *Nekorrektnye zadachi matematicheskoi fiziki i analiza.* Moscow, Nauka Publ., 1980, 285 p.
7. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. *Methods for solving inverse problems in mathematical physics.* NY, Marcel Dekker, 2000, 709 p. doi: 10.1201/9781482292985
8. Korostelev A.P. On a minimax estimating of a discontinuous signal. *Theory Probab. Appl.*, 1987, vol. 32, no. 4, pp. 727–730. doi: 10.1137/1132110
9. Antonova T.V. New methods for localizing discontinuities of a noisy function. *Num. Anal. Appl.*, 2010, vol. 3, no. 4, pp. 306–316. doi: 10.1134/S1995423910040026
10. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* NY, Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . This book is substantially revised version of the monograph: Krasovskii N.N., Subbotin A.I., *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
11. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. *Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions.* London, Gordon and Breach, 1995, 625 p. ISBN: 978-2881249440 .

12. Osipov Yu.S., Vasil'ev F.P., Potapov M.M. *Osnovy metoda dinamicheskoi regulyarizatsii* [Foundations of method of dynamic regularization]. Moscow, Moscow State Univ., 1999, 237 p. ISBN: 5-211-04085-6 .
13. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I. *Metody dinamicheskogo vosstanovleniya vkhodov upravlyaemykh sistem* [Methods for dynamic reconstruction of inputs of control systems]. Yekaterinburg, UrO RAN Publ., 2011, 291 p.
14. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. *O modelirovanii parametrov dinamicheskoi sistemy* [On modelling of parameters of dynamic system]. In: *Zadachi upravleniya i modelirovaniya v dinamicheskikh sistemakh* [Problems of control and modelling in dynamic systems], Sverdlovsk, Ural. Nauch. Tsentr Publ., 1984, pp. 47–68.
15. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. *K regulyarizatsii vypukloi ekstremal'noi zadachi s netochno zadannymi ogranicheniyami. Prilozhenie k zadache optimal'nogo upravleniya s fazovymi ogranicheniyami* [On regularization of convex extremal problem with approximately given constraints. Application to the optimal control problem with phase constraints]. In: *Nekotorye metody positsionnogo i programmnogo upravleniya* [Some methods of positional and program control]. Sverdlovsk, Ural. Nauch. Tsentr Publ., 1987, pp. 34–54.
16. Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I., Osipov Yu.S. Reconstruction of extremal perturbations in parabolic equations. *Comput. Math. Math. Phys.*, 1997, vol. 37, no. 3, pp. 288–298.
17. Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I. On combination of the processes of reconstruction and guaranteeing control. *Autom. Remote Control*, 2013, vol. 74, no. 8, pp. 1235–1248. doi: 10.1134/S0005117913080018
18. Maksimov V.I. Differential guidance game with incomplete information on the state coordinates and unknown initial state. *Differ. Equ.*, 2015, vol. 51, no. 12, pp. 1656–1665. doi: 10.1134/S0012266115120137

Received March 5, 2024
Revised March 14, 2024
Accepted March 14, 2024

Funding Agency: The work of the first author was performed as a part of the research conducted in the Ural Mathematical Center and supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement no. 075-02-2024-1377).

Vyacheslav Ivanovich Maksimov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: maksimov@imm.uran.ru .

Yury Sergeyevich Osipov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., RAS Academician, Steklov Mathematical Institute of RAS, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia, e-mail: yriyosipov@hotmail.com .

Cite this article as: V. I. Maksimov, Yu. S. Osipov. On the identification of control failures by the dynamic regularization method. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 116–129 .