

УДК 517.977

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ СЛЕЖЕНИЯ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

А. Керимбеков, Э. Ф. Абдылдаева

В статье исследована задача слежения при нелинейной векторной оптимизации колебательных процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных в случае, когда скалярная функция внешнего и граничного воздействия нелинейно зависит от нескольких управлений. Установлено, что эта задача имеет свои специфические особенности, в частности, компоненты оптимальных распределенного и граничного векторных управлений удовлетворяют системе равных соотношений и определяются как решение системы двух нелинейных интегральных уравнений. Разработана методика решения этой системы. Найдены достаточные условия однозначной разрешимости задачи слежения, и разработан алгоритм построения полного решения задачи нелинейной оптимизации.

Ключевые слова: задача слежения, нелинейная оптимизация, принцип максимума, свойства равных соотношений, распределенное векторное оптимальное управление, граничное векторное оптимальное управление, оптимальный процесс, минимальное значение функционала.

A. Kerimbekov, E. F. Abdylaeva. On solvability of the tracking problem in nonlinear vector optimization of oscillation processes.

The tracking problem is investigated in the nonlinear vector optimization of oscillation processes described by integro-differential partial differential equations when the scalar function of external and boundary influence depends nonlinearly on several controls. It is established that this problem has some specific features; in particular, the components of the distributed and boundary vector controls satisfy a system of equal relations and are defined as a solution to a system of two nonlinear integral equations. A method for solving this system is developed. Sufficient conditions are found for the unique solvability of the tracking problem, and an algorithm is developed for constructing a complete solution to the nonlinear optimization problem.

Keywords: tracking problem, nonlinear optimization, maximum principle, properties of equal ratios, distributed vector optimal control, boundary vector optimal control, optimal process, minimum value of the functional.

MSC: 49K20

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-2-103-115

Введение

Среди задач оптимального управления встречаются задачи, где процессом следует управлять так, чтобы изменение управляемого процесса в течение всего времени управления происходило по заданной траектории или мало отличалось от нее. На практике наиболее вероятным является второй случай. В этом случае от функции управления требуется, чтобы это отклонение в том или ином смысле было минимальным. В теории управления такие задачи называются задачами слежения. В данной статье исследованы вопросы разрешимости задачи слежения при нелинейной векторной оптимизации колебательных процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных в случае, когда скалярные функции внешнего и граничного воздействия нелинейно зависят от нескольких управлений. Исследование проводилось с использованием принципа максимума для систем с распределенными параметрами [1–4]. Условие оптимальности приводит к системе равных соотношений относительно компонентов распределенного векторного управления и граничного векторного управления. В этом случае компоненты распределенного векторного оптимального управления и граничного векторного оптимального управления определяются как решения системы двух нелинейных интегральных уравнений, одно из которых рассматривается для

внутренних точек области и содержит интеграл искомой функции, вычисленной вдоль границы области, а второе — для граничных точек области и содержит интеграл искомой функции, вычисленной по области. Была разработана методика исследования однозначной разрешимости этой нестандартной системы. В частности, с введением новых функций, определенных в замкнутой области, получено скалярное нелинейное интегральное уравнение, эквивалентное нестандартной системе двух нелинейных интегральных уравнений. Однозначная разрешимость скалярного нелинейного интегрального уравнения исследована методом сжимающих отображений. Далее, согласно системе равных отношений построены векторные распределенное оптимальное и граничное оптимальное управления. Затем определяется оптимальный процесс и вычисляется минимальное значение функционала. Таким образом, в случае векторных распределенного и граничного управлений, разработана методика построения полного решения задачи слежения при нелинейной оптимизации колебательных процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных с интегральным оператором Фредгольма.

1. Постановка задачи слежения при нелинейной оптимизации

Интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных описываются многие технологические процессы [2; 4–7]. В данной статье рассматривается задача оптимального управления отклонением процесса $V(t, x)$, описываемого интегро-дифференциальным уравнением в частных производных гиперболического типа с интегральным оператором Фредгольма, от заданного желаемого состояния $\xi(t, x)$, т. е. требуется минимизировать интегральный функционал

$$J[\bar{u}(t, x), \bar{v}(t, x)] = \int_0^T \int_Q [V(t, x) - \xi(t, x)]^2 dx dt + \int_0^T \left(\alpha \int_Q h[t, x, \bar{u}(t, x)] dx + \beta \int_\gamma b[t, x, \bar{v}(t, x)] dx \right) dt, \quad \alpha, \beta > 0, \quad (1.1)$$

на множестве решений краевой задачи

$$V_{tt} - AV = \lambda \int_0^T K(t, \tau) V(\tau, x) d\tau + f[t, x, \bar{u}(t, x)], \quad x \in Q \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 < t < T, \quad (1.2)$$

$$V(0, x) = \psi_1(x), \quad V_t(0, x) = \psi_2(x), \quad x \in Q, \quad (1.3)$$

$$\Gamma V(t, x) \equiv \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) V_{x_k}(t, x) \cos(\delta, x_i) + a(x) V(t, x) = p[t, x, \bar{v}(t, x)], \quad x \in \gamma, \quad 0 < t < T, \quad (1.4)$$

где $h[t, x, \bar{u}(t, x)]$ и $b[t, x, \bar{v}(t, x)]$ — заданные функции, строго выпуклые по векторным аргументам $\bar{u}(t, x)$ и $\bar{v}(t, x)$ соответственно.

Опишем входящие в (1.1)–(1.4) переменные.

Q — область n -мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, ограниченная кусочно-гладкой границей γ , A — эллиптический оператор,

$$AV(t, x) = \sum_{i,j}^n (a_{ij}(x) V_{x_j}(t, x))_{x_i} - c(x) V(t, x),$$

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad \sum_{i,j}^n a_{ij}(x) \alpha_i \alpha_j \geq c_0 \sum_{i=1}^n \alpha_i^2, \quad c_0 > 0,$$

а $a(x) \geq 0$, $c(x) \geq 0$ — известные измеримые функции. Функция $K(t, \tau)$, которая является ядром интегрального оператора Фредгольма, определена в области $D = \{0 \leq t, \tau \leq T\}$ и удовлетворяет условию

$$\int_0^T \int_0^T K^2(t, \tau) d\tau dt = K_0 < \infty.$$

λ — параметр, функция $\psi_1(x) \in H_1(Q)$ и характеризует состояние управляемого процесса в начальный момент времени, $\psi_2(x) \in H(Q)$ и характеризует начальную скорость точек управляемого объекта, где $H_1(Q)$ — пространство Соболева первого порядка, $H(Q)$ — гильбертово пространство квадратично-суммируемых в области Q функций, δ — вектор нормали, выходящий из точки $x \in \gamma$, T — фиксированный момент времени.

Скалярная функция $f[t, x, \bar{u}(t, x)]$, описывающая действие внешнего источника, монотонна и нелинейна по каждому компоненту векторного распределенного управления $\bar{u}(t, x) = (u_1(t, x), \dots, u_k(t, x))$, которое является элементом пространства $H^k(Q_T) = H(Q_T) \times \dots \times H(Q_T)$, и

$$\|\bar{u}(t, x)\|_{H^k(Q_T)}^2 = \int_{Q_T} \sum_{i=1}^k u_i^2(t, x) dx dt = \sum_{i=1}^k \|u_i(t, x)\|_{H(Q_T)}^2.$$

Скалярная функция $p[t, x, \bar{\vartheta}(t, x)]$, описывающая действие граничного источника, монотонна и нелинейна по каждому компоненту векторного граничного управления $\bar{\vartheta}(t, x) = (\vartheta_1(t, x), \dots, \vartheta_m(t, x))$, которое является элементом пространства $H^m(\gamma_T) = H(\gamma_T) \times \dots \times H(\gamma_T)$, $\gamma_T = \gamma \times (0, T)$, и

$$\|\bar{\gamma}(t, x)\|_{H^m(\gamma_T)}^2 = \int_{\gamma_T} \sum_{i=1}^m \vartheta_i^2(t, x) dx dt = \sum_{i=1}^m \|\vartheta_i(t, x)\|_{H(\gamma_T)}^2.$$

2. Обобщенное решение краевой задачи

Краевая задача (1.2)–(1.4) при заданных условиях, налагаемых на исходные функции, не может иметь классического решения. Поэтому, следуя методике работы [8], будем пользоваться следующим определением обобщенного решения краевой задачи (1.2)–(1.4).

О п р е д е л е н и е. Обобщенным решением краевой задачи (1.2)–(1.4) называется функция $V(t, x) \in H(Q_T)$, которая при любых t_1, t_2 ($0 < t_1 \leq t \leq t_2 \leq T$) и $\Phi(t, x) \in H_1(Q_T)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_Q (V_t(t, x) \Phi(t, x))_{t_1}^{t_2} dx &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_Q \left[V_t(t, x) \Phi_t(t, x) - \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) V_{x_k}(t, x) \Phi_{x_i}(t, x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - c(x) V(t, x) \Phi(t, x) + \left(\lambda \int_0^T K(t, \tau) V(\tau, x) d\tau + f[t, x, \bar{u}(t, x)] \right) \Phi(t, x) \right] dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\gamma} (p[t, x, \bar{\vartheta}(t, x)] - a(x) V(t, x)) \Phi(t, x) dx \right\} dt, \quad 0 \leq t_1 < t < t_2 \leq T, \end{aligned}$$

а также начальным условиям в слабом смысле, т. е. равенства

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_Q V(t, x) \phi_0(x) dx = \int_Q \psi_1(x) \phi_0(x) dx, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \int_Q V_t(t, x) \phi_1(x) dx = \int_Q \psi_2(x) \phi_1(x) dx,$$

выполняются для любых функций $\phi_0(x) \in H(Q)$ и $\phi_1(x) \in H(Q)$. Следуя методике работы [8], решение краевой задачи (1.2)–(1.4) найдем в виде

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z_n(x), \quad V_n(t) = \int_Q V(t, x) z_n(x) dx, \quad (2.1)$$

где $z_n(x)$ являются обобщенными собственными функции краевой задачи

$$\begin{aligned} D_n(V(t, x), z_m(x)) &\equiv \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) V_{x_i}(t, x) z_{m_{x_j}}(x) + c(x) z_m(x) \right) dx \\ &+ \int_{\gamma} a(x) z_m(x) V(t, x) dx = \lambda_m^2 \int_Q V(t, x) z_m(x) dx, \\ \Gamma z_m(x) &= 0, \quad x \in \gamma, \quad 0 < t < T, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (2.2)$$

и образуют полную ортонормированную систему $z_n(x)$ в гильбертовом пространстве $H(\bar{Q})$, $\bar{Q} = Q \cup \gamma$, а соответствующие собственные значения λ_n удовлетворяют условиям $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$.

Учитывая результаты работы [9] и формулу (2.1), нетрудно показать, что обобщенное решение краевой задачи (1.2)–(1.4) определяется по формуле

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\psi_n(t, \lambda) + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^T E_n(t, \eta, \lambda) (f_n[\eta, \bar{u}] + p_n[\eta, \bar{v}]) d\eta \right) z_n(x), \quad (2.3)$$

где

$$f_n[\eta, \bar{u}] = \int_Q f[t, x, \bar{u}(t, x)] z_n(x) dx, \quad p_n[\eta, \bar{v}] = \int_{\gamma} p[t, x, \bar{v}(t, x)] z_n(x) dx,$$

$$\psi_n(t, \lambda) = \psi_{1n} \left(\cos \lambda_n t + \lambda \int_0^T R_n(t, s, \lambda) \cos \lambda_n s ds \right) + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \left(\sin \lambda_n t + \lambda \int_0^T R_n(t, s, \lambda) \sin \lambda_n s ds \right),$$

$$E_n(t, \eta, \lambda) = \begin{cases} \sin \lambda_n(t - \eta) + \lambda \int_{\eta}^T R_n(t, s, \lambda) \sin \lambda_n(s - \eta) ds, & 0 \leq \eta \leq t, \\ \lambda \int_{\eta}^T R_n(t, s, \lambda) \sin \lambda_n(s - \eta) ds, & t \leq \eta \leq T. \end{cases}$$

Здесь $R_n(t, s, \lambda)$ — известная резольвентная функция краевой задачи (1.2)–(1.4), удовлетворяющая оценкам

$$\int_0^T |R_n(t, s, \lambda)|^2 ds \leq \frac{K_0 T}{(\lambda_n - |\lambda| T \sqrt{K_0})^2}, \quad \int_0^T |R'_n(t, s, \lambda)|^2 ds \leq \frac{K_0 T \lambda_n^2}{(\lambda_n - \lambda T \sqrt{K_0})^2}. \quad (2.4)$$

Решение $V(t, x)$ и его обобщенная производная $V_t(t, x)$ являются элементами гильбертова пространства $H(Q_T)$ для любых значений параметра λ , удовлетворяющих оценке

$$|\lambda| < \frac{\lambda_1}{\sqrt{K_0 T^2}}. \quad (2.5)$$

3. Условия оптимальности

Согласно принципу максимума [1–4] приращение функционала (1.1) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\Delta J[\bar{u}(t, x), \bar{\vartheta}(t, x)] &= J[\bar{u}(t, x) + \Delta \bar{u}(t, x), \bar{\vartheta}(t, x) + \Delta \bar{\vartheta}(t, x)] - J[\bar{u}(t, x), \bar{\vartheta}(t, x)] \\ &= - \int_0^T \Delta \Pi[t, x, V(t, x), \omega(t, x), \bar{u}(t, x), \bar{\vartheta}(t, x)] dt + \int_0^T \int_Q \Delta V^2(t, x) dx dt,\end{aligned}$$

где функция типа Понтрягина имеет вид

$$\begin{aligned}\Pi[t, x, V(t, x), \omega(t, x), \bar{u}(t, x), \bar{\vartheta}(t, x)] &= \int_Q (\omega(t, x) f[t, x, \bar{u}(t, x)] - \alpha h[t, x, \bar{u}(t, x)]) dx \\ &\quad + \int_\gamma (\omega(t, x) p[t, x, \bar{\vartheta}(t, x)] - \beta b[t, x, \bar{\vartheta}(t, x)]) dx,\end{aligned}$$

а функция $\omega(t, x)$ является решением сопряженной краевой задачи

$$\omega_{tt} - A\omega = \lambda \int_0^T K(\tau, t) \omega(\tau, x) d\tau + 2[V(t, x) - \xi(t, x)], \quad x \in Q, \quad 0 < t < T, \quad (3.1)$$

$$\omega(T, x) = 0, \quad \omega_t(T, x) = 0, \quad x \in Q, \quad (3.2)$$

$$\Gamma \omega(t, x) = 0, \quad x \in \gamma, \quad 0 < t < T. \quad (3.3)$$

С учетом (2.3) она определяется по формуле

$$\begin{aligned}\omega(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t) z_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{\lambda_n} \right) \left(\int_0^T G_n(t, \tau, \lambda) (f_n[\tau, \bar{u}] + p_n[\tau, \bar{\vartheta}]) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T W_n(\eta, t, \lambda) [-\xi_n(\eta) + \psi_n(\eta, \lambda)] d\eta \right) z_n(x),\end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned}G_n(t, \tau, \lambda) &= \int_0^T W_n(\eta, t, \lambda) \epsilon_n(\eta, \tau, \lambda) d\eta, \\ \epsilon_n(t, \tau, \lambda) &= \begin{cases} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n(t - \tau) + \lambda \int_\tau^T R_n(t, s, \lambda) \left(\frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n(s - \tau) \right) ds \right), & 0 \leq \tau \leq t, \\ 0 + \lambda \int_\tau^T R_n(t, s, \lambda) \left(\frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n(s - \tau) \right) ds, & t \leq \tau \leq T. \end{cases} \\ W_n(\eta, t, \lambda) &= \begin{cases} 0 + \lambda \int_0^\eta R_n^*(s, t, \lambda) \sin \lambda_n(\eta - s) ds, & 0 \leq \eta \leq t, \\ \sin \lambda_n(\eta - t) + \lambda \int_0^\eta R_n^*(s, t, \lambda) \sin \lambda_n(\eta - s) ds, & t \leq \tau \leq T. \end{cases}\end{aligned}$$

Здесь $R_n^*(s, t, \lambda)$ — резольвентная функция сопряженной краевой задачи (3.1)–(3.3).

Исследование функции $\Pi[t, x, V(t, x), \omega(t, x), \bar{u}(t, x), \bar{\vartheta}(t, x)]$ на максимум проводится для случая, когда области допустимых значений компонентов распределенного и граничного управлений являются открытыми множествами. Тогда компоненты оптимальных векторных управлений $\bar{u}^0(t, x)$ и $\bar{\vartheta}^0(t, x)$ удовлетворяют системе равенств

$$\begin{aligned} & \Pi_{u_i}[t, x, V(t, x), \omega(t, x), u_1(t, x), \dots, u_k(t, x), \vartheta_1(t, x), \dots, \vartheta_m(t, x)] \\ &= \omega(t, x) f_{u_i}[t, x, u_1(t, x), \dots, u_k(t, x)] - \alpha h_{u_i}[t, x, u_1(t, x), \dots, u_k(t, x)] = 0, \\ & \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad x \in Q, \\ & \Pi_{\vartheta_i}[t, x, V(t, x), \omega(t, x), u_1(t, x), \dots, u_k(t, x), \vartheta_1(t, x), \dots, \vartheta_m(t, x)] \\ &= \omega(t, x) p_{\vartheta_i}[t, x, \vartheta_1(t, x), \dots, \vartheta_m(t, x)] - \beta b_{\vartheta_i}[t, x, \vartheta_1(t, x), \dots, \vartheta_m(t, x)] = 0, \\ & \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad x \in \gamma, \end{aligned} \quad (3.5)$$

и неравенств

$$\begin{aligned} \Delta_j(\alpha) &= (-\alpha)^j \Pi_{i=1}^j f_{u_j}(\cdot) \begin{vmatrix} \left(\frac{h_{u_1}(\cdot)}{f_{u_1}(\cdot)}\right)_{u_1} & \dots & \left(\frac{h_{u_1}(\cdot)}{f_{u_1}(\cdot)}\right)_{u_j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{h_{u_j}(\cdot)}{f_{u_j}(\cdot)}\right)_{u_1} & \dots & \left(\frac{h_{u_j}(\cdot)}{f_{u_j}(\cdot)}\right)_{u_j} \end{vmatrix} > 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, k, \quad x \in Q, \\ \Delta_j(\beta) &= (-\beta)^j \Pi_{i=1}^j p_{\vartheta_j}(\cdot) \begin{vmatrix} \left(\frac{b_{\vartheta_1}(\cdot)}{p_{\vartheta_1}(\cdot)}\right)_{\vartheta_1} & \dots & \left(\frac{b_{\vartheta_1}(\cdot)}{p_{\vartheta_1}(\cdot)}\right)_{\vartheta_j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{b_{\vartheta_j}(\cdot)}{p_{\vartheta_j}(\cdot)}\right)_{\vartheta_1} & \dots & \left(\frac{b_{\vartheta_j}(\cdot)}{p_{\vartheta_j}(\cdot)}\right)_{\vartheta_j} \end{vmatrix} > 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, m, \quad x \in \gamma, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $h(\cdot) = h[t, x, \bar{u}(t, x)]$, $b(\cdot) = h[t, x, \bar{\vartheta}(t, x)]$, которые называются условиями оптимальности для компонентов управлений $\bar{u}(t, x)$, $x \in Q$, и $\bar{\vartheta}(t, x)$, $x \in \gamma$. Заметим, что условия (3.5) и (3.6) ограничивают класс функций $f[t, x, \bar{u}(t, x)]$ и $p[t, x, \bar{\vartheta}(t, x)]$, т. е. задача нелинейной оптимизации может иметь решение только для таких пар функций $f[t, x, \bar{u}(t, x)]$ и $p[t, x, \bar{\vartheta}(t, x)]$, для которых выполняется система равенств (3.5) и неравенств (3.6).

4. Система нелинейных интегральных уравнений оптимальных управлений

Рассматриваемая задача нелинейной оптимизации обладает специфическим свойством, т. е. условия оптимальности, задаваемые равенствами (3.5), можно переписать в виде равных соотношений

$$\omega(t, x) = \frac{\alpha h_{u_1}[t, x, \bar{u}(t, x)]}{f_{u_1}[t, x, \bar{u}(t, x)]} = \dots = \frac{\alpha h_{u_k}[t, x, \bar{u}(t, x)]}{f_{u_k}[t, x, \bar{u}(t, x)]}, \quad x \in Q, \quad (4.1)$$

$$\omega(t, x) = \frac{\beta b_{\vartheta_1}[t, x, \bar{\vartheta}(t, x)]}{p_{\vartheta_1}[t, x, \bar{\vartheta}(t, x)]} = \dots = \frac{\beta b_{\vartheta_m}[t, x, \bar{\vartheta}(t, x)]}{p_{\vartheta_m}[t, x, \bar{\vartheta}(t, x)]}, \quad x \in \gamma. \quad (4.2)$$

Это обстоятельство существенно упрощает процедуру построения оптимальных управлений $\bar{u}^0(t, x)$ и $\bar{\vartheta}^0(t, x)$.

Следуя методике работы [9], в (4.1) введем обозначения

$$\frac{\alpha h_{u_i}[t, x, \bar{u}(t, x)]}{f_{u_i}[t, x, \bar{u}(t, x)]} = \theta_i(t, x), \quad i = 1, 2, 3, \dots, k, \quad x \in Q. \quad (4.3)$$

Каждое из этих равенств в силу условий (3.6) и теоремы о неявных функциях [10] однозначно разрешается относительно управления $u_i(t, x)$, т. е. имеют место соотношения

$$u_i[t, x] = \varphi_i[t, x, \theta_i(t, x), \alpha], \quad i = 1, 2, 3, \dots, k, \quad x \in Q, \quad (4.4)$$

где $\varphi_i[t, x, \theta_1(t, x), \alpha]$ — известные функции.

Аналогично для системы (4.2) введем обозначения

$$\frac{\beta b_{\vartheta_i}[t, x, \bar{\vartheta}(t, x)]}{p_{\vartheta_m}[t, x, \bar{\vartheta}(t, x)]} = \theta_2(t, x), \quad i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad x \in \gamma, \quad (4.5)$$

и получим систему соотношений

$$\vartheta_i[t, x] = \sigma_i[t, x, \theta_2(t, x), \beta], \quad i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad x \in \gamma, \quad (4.6)$$

где $\sigma_i[t, x, \theta_2(t, x), \beta]$ — известные функции.

Как следует из системы равенств (4.4) и (4.6), для построения искомых оптимальных управлений достаточно знать функции $\theta_1(t, x), x \in Q$, и $\theta_2(t, x), x \in \gamma$. Далее, согласно соотношениям (3.4), (4.1), (4.3), (4.4) в области Q имеем уравнение

$$\begin{aligned} \theta_1(t, x) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{\lambda_n} \right) \left\{ \int_0^T G_n(t, \tau, \lambda) \right. \\ & \times \left[\int_Q f(\tau, \xi, \varphi_1[\tau, \xi, \theta_1(\tau, \xi), \alpha], \dots, \varphi_k[\tau, \xi, \theta_1(\tau, \xi), \alpha]) z_n(\xi) d\xi \right. \\ & + \left. \int_{\gamma} p(\tau, \xi, \sigma_1[\tau, \xi, \theta_2(\tau, \xi), \beta], \dots, \sigma_m[\tau, \xi, \theta_2(\tau, \xi), \beta]) z_n(\xi) d\xi \right] d\tau \\ & \left. + \int_Q W_n(\eta, t, \lambda) [-\xi_n(\eta) + \psi_n(\eta, \lambda)] d\eta \right\} z_n(x), \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Аналогично согласно соотношениям (3.4), (4.2), (4.5) и (4.6) имеем уравнение

$$\begin{aligned} \theta_2(t, x) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{\lambda_n} \right) \left\{ \int_0^T G_n(t, \tau, \lambda) \right. \\ & \times \left[\int_Q f(\tau, \xi, \varphi_1[\tau, \xi, \theta_1(\tau, \xi), \alpha], \dots, \varphi_k[\tau, \xi, \theta_1(\tau, \xi), \alpha]) z_n(\xi) d\xi \right. \\ & + \left. \int_{\gamma} p(\tau, \xi, \sigma_1[\tau, \xi, \theta_2(\tau, \xi), \beta], \dots, \sigma_m[\tau, \xi, \theta_2(\tau, \xi), \beta]) z_n(\xi) d\xi \right] d\tau \\ & \left. + \int_Q W_n(\eta, t, \lambda) [-\xi_n(\eta) + \psi_n(\eta, \lambda)] d\eta \right\} z_n(x), \quad x \in \gamma. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Таким образом, функции $\theta_1(t, x), x \in Q$, и $\theta_2(t, x), x \in \gamma$, определяются как решение системы нелинейных интегральных уравнений специфического вида, состоящей из уравнений (4.7), (4.8).

Далее рассмотрим вопросы разрешимости этой системы. Введем функции

$$\theta(t, x) = \begin{cases} \theta_1(t, x), & x \in Q, \\ \theta_2(t, x), & x \in \gamma, \end{cases}$$

$$F[t, x, \theta(t, x)] = \begin{cases} f(t, x, \bar{\varphi}[t, x, \theta_1(t, x), \alpha]), & x \in Q, \\ p(t, x, \bar{\sigma}[t, x, \theta_2(t, x), \beta]), & x \in \gamma, \end{cases}$$

и систему уравнений (4.7) и (4.8) представим в виде одного уравнения

$$\begin{aligned} \theta(t, x) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{\lambda_n} \right) \left(\int_0^T G_n(t, \tau, \lambda) \int_{\bar{Q}} F[\tau, \xi, \theta(\tau, \xi)] z_n(\xi) d\xi d\tau \right. \\ & \left. + \int_0^T W_n(\eta, t, \lambda) [-\xi_n(\eta) + \psi_n(\eta, \lambda)] d\eta \right) z_n(x), \quad x \in \bar{Q} = Q \cup \gamma, \end{aligned}$$

которое перепишем в операторной форме

$$\theta(t, x) = F_0[\theta(t, x)] + W(t, x, \lambda), \quad x \in \bar{Q}, \quad (4.9)$$

где

$$F_0[\theta(t, x)] = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{\lambda_n} \right) \int_0^T G_n(t, \tau, \lambda) \int_{\bar{Q}} F[\tau, \xi, \theta(\tau, \xi)] z_n(\xi) d\xi d\tau z_n(x), \quad x \in \bar{Q}, \quad (4.10)$$

$$W(t, x, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{\lambda_n} \right) \int_0^T W_n(\eta, t, \lambda) [-\xi_n(\eta) + \psi_n(\eta, \lambda)] d\eta z_n(x), \quad x \in \bar{Q}.$$

Теперь докажем несколько лемм.

Лемма 1. Функция $W(t, x, \lambda)$ является элементом гильбертова пространства $H(\bar{Q}_T)$.

Доказательство. Утверждение леммы 1 доказывается непосредственной проверкой соотношений

$$\int_0^T \int_Q W^2(t, x, \lambda) dx dt, \quad x \in Q, \quad \text{и} \quad \int_0^T \int_{\gamma} W^2(t, x, \lambda) dx dt, \quad x \in \gamma, \quad \text{т.е.} \quad W(t, x, \lambda) \in H(\bar{Q}_T).$$

Лемма 2. Оператор $F_0[\theta(t, x)]$ отображает пространство $H(Q_T) \times H(\gamma_T)$ в себя.

Доказательство. Учитывая формулу (4.10) и оценки (2.4), непосредственными вычислениями получаем неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\bar{Q}} F_0^2[\theta(t, x)] dx dt &= \int_0^T \int_{\bar{Q}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{\lambda_n} \right) \int_0^T G_n(t, \tau, \lambda) \int_{\bar{Q}} F[\tau, \xi, \theta(\tau, \xi)] z_n(\xi) d\xi d\tau z_n(x) \right]^2 dx dt \\ &\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\lambda_n^2} \right) \int_0^T G_n^2(t, \tau, \lambda) d\tau \int_0^T \left(\int_{\bar{Q}} F[\tau, \xi, \theta(\tau, \xi)] z_n(\xi) d\xi \right)^2 d\tau dt \\ &\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\lambda_n^2} \frac{4T^3}{\lambda_n^2} \left(1 + \lambda^2 \frac{K_0 T^2}{(\lambda_n - |\lambda| \sqrt{K_0 T^2})^2} \right)^2 \int_0^T \int_{\bar{Q}} F^2[\tau, \xi, \theta(\tau, \xi)] d\xi \int_{\bar{Q}} z_n^2(\xi) d\xi d\tau dt \\ &= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\lambda_n^2} \frac{4T^3}{\lambda_n^2} \left(1 + \lambda^2 \frac{K_0 T^2}{(\lambda_n - |\lambda| \sqrt{K_0 T^2})^2} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^T \left(\int_Q f^2(\tau, \xi, \bar{\varphi}[\tau, \xi, \theta_1(\tau, \xi), \alpha]) d\xi + \int_\gamma p^2(\tau, \xi, \bar{\sigma}[\tau, \xi, \theta_2(\tau, \xi), \beta]) d\xi \right) d\tau dt \\
& \leq 16T^4 \left(1 + \lambda^2 \frac{K_0 T^2}{(\lambda_1 - |\lambda| \sqrt{K_0 T^2})^2} \right)^2 \left(\|f(\tau, \xi, \bar{\varphi}[\tau, \xi, \theta_1(\tau, \xi), \alpha])\|_{H(Q_T)}^2 \right. \\
& \quad \left. + \|p(\tau, \xi, \bar{\sigma}[\tau, \xi, \theta_2(\tau, \xi), \beta])\|_{H(\gamma_T)}^2 \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^4} < \infty,
\end{aligned}$$

из которого следует утверждение леммы 2, т. е. $F_0[\theta(t, x)] \in H(Q_T)$. $\square$

Теперь находим условия, при выполнении которых оператор $F_0[\theta(t, x)]$ является сжимающим. В пространстве $H(Q_T) \times H(\gamma_T)$ введем метрику по формуле

$$\begin{aligned}
\rho^2(\hat{\theta}(t, x), \tilde{\theta}(t, x)) &= \int_0^T \int_Q |\hat{\theta}(t, x) - \tilde{\theta}(t, x)|^2 dx dt \\
&= \int_0^T \left(\int_Q |\hat{\theta}_1(t, x) - \tilde{\theta}_1(t, x)|^2 dx + \int_\gamma |\hat{\theta}_2(t, x) - \tilde{\theta}_2(t, x)|^2 dx \right) dt,
\end{aligned}$$

и норму элемента $\theta(t, x)$

$$\begin{aligned}
\|\theta(t, x)\|_{H(Q_T) \times H(\gamma_T)}^2 &= \int_0^T \int_Q |\theta(t, x)|^2 dx dt = \int_0^T \left(\int_Q |\theta_1(t, x)|^2 dx + \int_\gamma |\theta_2(t, x)|^2 dx \right) dt \\
&= \|\theta_1(\tau, \xi)\|_{H(Q_T)}^2 + \|\theta_2(\tau, \xi)\|_{H(\gamma_T)}^2.
\end{aligned}$$

Лемма 3. Пусть скалярные функции $f[t, x, \bar{u}(t, x)]$ и $p[t, x, \bar{v}(t, x)]$ по векторным аргументам, а векторные функции $\bar{\varphi}[t, x, \hat{\theta}(t, x), \alpha]$ и $\bar{\sigma}[t, x, \hat{\theta}(t, x), \beta]$ по функциональным аргументам удовлетворяют условиям Липшица

$$\|f(t, x, \bar{\varphi}[t, x, \hat{\theta}(t, x), \alpha]) - f(t, x, \bar{\varphi}[t, x, \tilde{\theta}(t, x), \alpha])\|_{H(Q_T)} \leq f_0 \varphi_0(\alpha) k \|\hat{\theta}_1(t, \tau) - \tilde{\theta}_1(t, x)\|_{H(Q_T)},$$

$$\|p(t, x, \bar{\sigma}[t, x, \hat{\theta}(t, x), \beta]) - p(t, x, \bar{\sigma}[t, x, \tilde{\theta}(t, x), \beta])\|_{H(Q_T)} \leq p_0 \sigma_0(\beta) m \|\hat{\theta}_2(t, \tau) - \tilde{\theta}_2(t, x)\|_{H(\gamma_T)},$$

и для параметров задачи выполняется условие

$$c(\alpha, \beta) = 4T^2 \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T^2}{(\lambda_1 - |\lambda| \sqrt{K_0 T^2})^2} \right) \sqrt{f_0^2 \varphi_0^2(\alpha) k^2 + p_0^2 \sigma_0^2(\beta) m^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^4}} < 1, \quad (4.11)$$

где $f_0 > 0, \varphi_0(\alpha) > 0, p_0 > 0, \sigma_0(\beta) > 0$ — коэффициенты Липшица соответствующих функций, тогда оператор $F_0[t, x, \theta(t, x)]$, определяемый по формуле (4.10), является сжимающим в пространстве $H(Q_T) \times H(\gamma_T)$.

Доказательство. Непосредственным вычислением находим, что

$$\rho^2(F_0[\hat{\theta}(t, x)], F_0[\tilde{\theta}(t, x)]) = \int_0^T \int_Q |F_0[\hat{\theta}(t, x)] - F_0[\tilde{\theta}(t, x)]|^2 dx dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^T \int_{\bar{Q}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{\lambda_n} \right) \int_0^T G_n(t, \tau, \lambda) \int_{\bar{Q}} F[\tau, \xi, \hat{\theta}(\tau, \xi)] z_n(\xi) d\xi d\tau z_n(x) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{\lambda_n} \right) \int_0^T G_n(t, \tau, \lambda) \int_{\bar{Q}} F[\tau, \xi, \tilde{\theta}(\tau, \xi)] z_n(\xi) d\xi d\tau z_n(x) \right|^2 dx dt \\
&= \int_0^T \int_{\bar{Q}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{\lambda_n} \right) \int_0^T G_n(t, \tau, \lambda) \int_{\bar{Q}} (F[\tau, \xi, \hat{\theta}(\tau, \xi)] - F[\tau, \xi, \tilde{\theta}(\tau, \xi)]) z_n(\xi) d\xi d\tau z_n(x) \right|^2 dx dt \\
&\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(-\frac{2}{\lambda_n} \right) \int_0^T G_n(t, \tau, \lambda) \int_{\bar{Q}} (F[\tau, \xi, \hat{\theta}(\tau, \xi)] - F[\tau, \xi, \tilde{\theta}(\tau, \xi)]) z_n(\xi) d\xi d\tau \right]^2 dt \\
&\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\lambda_n^2} \int_0^T G_n^2(t, \tau, \lambda) d\tau \int_0^T \left[\int_{\bar{Q}} (F[\tau, \xi, \hat{\theta}(\tau, \xi)] - F[\tau, \xi, \tilde{\theta}(\tau, \xi)]) z_n(\xi) d\xi \right]^2 d\tau dt \\
&\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\lambda_n^2} \right) \int_0^T G_n^2(t, \tau, \lambda) d\tau \int_0^T \int_{\bar{Q}} \left((F[\tau, \xi, \hat{\theta}(\tau, \xi)] - F[\tau, \xi, \tilde{\theta}(\tau, \xi)]) d\xi \right)^2 \int_{\bar{Q}} z_n^2(\xi) d\xi d\tau dt \\
&\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\lambda_n^2} \right) \int_0^T G_n^2(t, \tau, \lambda) d\tau \int_0^T \left[\int_{\bar{Q}} \left(f(\tau, \xi, \bar{\varphi}[\tau, \xi, \hat{\theta}_1(\tau, \xi), \alpha]) - f(\tau, \xi, \bar{\varphi}[\tau, \xi, \tilde{\theta}_1(\tau, \xi), \alpha]) \right)^2 d\xi \right. \\
&\quad \left. + \int_{\gamma} \left(p(\tau, \xi, \bar{\sigma}[\tau, \xi, \hat{\theta}_2(\tau, \xi), \beta]) - p(\tau, \xi, \bar{\sigma}[\tau, \xi, \tilde{\theta}_2(\tau, \xi), \beta]) \right)^2 d\xi \right] d\tau dt \\
&\leq 16T^4 \left(1 + \lambda^2 \frac{K_0 T^2}{(\lambda_1 - \|\lambda\| \sqrt{K_0 T^2})^2} \right)^2 \left(\|f(\tau, \xi, \bar{\varphi}[\tau, \xi, \hat{\theta}_1(\tau, \xi), \alpha]) - f(\tau, \xi, \bar{\varphi}[\tau, \xi, \tilde{\theta}_1(\tau, \xi), \alpha])\|_{H(Q_T)}^2 \right. \\
&\quad \left. + \|p(\tau, \xi, \bar{\sigma}[\tau, \xi, \hat{\theta}_2(\tau, \xi), \beta]) - p(\tau, \xi, \bar{\sigma}[\tau, \xi, \tilde{\theta}_2(\tau, \xi), \beta])\|_{H(\gamma_T)}^2 \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^4} \leq c^2(\alpha, \beta) \rho^2(\hat{\theta}(t, x), \tilde{\theta}(t, x)).
\end{aligned}$$

Отсюда получим неравенство $\rho(F_0[\hat{\theta}(t, x)], F_0[\tilde{\theta}(t, x)]) < c(\alpha, \beta) \rho(\hat{\theta}(t, x), \tilde{\theta}(t, x))$, из которого следует, что при выполнении условия (4.11) оператор $F_0[\theta(t, x)]$ является сжимающим. $\square$

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия.

1. Скалярные функции многих переменных $f[t, x, \bar{u}(t, x)]$, $x \in Q$, и $p[t, x, \bar{v}(t, x)]$, $x \in \gamma$, нелинейны, монотонны и удовлетворяют условию Липшица по функциональным переменным.
2. Параметр λ изменяется в пределах

$$|\lambda| < \frac{\lambda_1}{\sqrt{K_0 T^2}},$$

где λ_1 — собственное значение краевой задачи (2.2).

3. Параметры задачи удовлетворяют условию (4.11).

Тогда операторное уравнение (4.9) при каждой паре управлений $(\bar{u}(t, x), \bar{v}(t, x))$ в пространстве $H(Q_T) \times H(\gamma_T)$ имеет единственное решение

$$\theta^0(t, x) = (\theta_1^0(t, x), \theta_2^0(t, x)), \quad \theta_1^0(t, x) \in H(Q_T), \quad \theta_2^0(t, x) \in H(\gamma_T).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Метрическое пространство $H(Q_T) \times H(\gamma_T)$ по построению является полным. Согласно леммам 1, 2 операторное уравнение (4.9) можно рассматривать в пространстве $H(Q_T) \times H(\gamma_T)$. Ввиду леммы 3 при выполнении условия (4.11) оператор $F_0[\theta(t, x)]$ является сжимающим. Следовательно, согласно принципу сжимающих операторов [10] операторное уравнение (4.9) имеет единственное решение, которое может быть найдено как предел

$$\theta^0(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\theta_{(n)}(t, x)],$$

где последовательность $\theta_{(n)}(t, x)$ определяется по формуле $\theta_{(n)}(t, x) = F_0[\theta_{(n-1)}(t, x)] + W(t, x, \lambda)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, а $\theta_{(0)}$ — произвольный элемент пространства $H(Q_T) \times H(\gamma_T)$.

При этом имеет место оценка [10]

$$\begin{aligned} & \|\theta^0(t, x) - \theta_{(n)}(t, x)\|_{H(Q_T) \times H(\gamma_T)} \\ & \leq \frac{c^n(\alpha, \beta)}{1 - c(\alpha, \beta)} \|F_0[\theta_{(0)}(t, x)] + W(t, x, \lambda) - \theta_{(0)}(t, x)\|_{H(Q_T) \times H(\gamma_T)}. \end{aligned} \quad \square$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и скалярные функции многих переменных $h[t, x, \bar{u}(t, x)]$ и $b[t, x, \bar{v}(t, x)]$ — строго выпуклые функции по функциональным переменным. Тогда задача слежения (1.1)–(1.4) имеет единственное решение в виде тройки $((\bar{u}^0(t, x), \bar{v}^0(t, x)), V^0(t, x), J[\bar{u}^0(t, x), \bar{v}^0(t, x)])$, где $\bar{u}^0(t, x)$ — распределенное векторное оптимальное управление, $\bar{v}^0(t, x)$ — граничное векторное оптимальное управление, $V^0(t, x)$ — оптимальный процесс, $J[\bar{u}^0(t, x), \bar{v}^0(t, x)]$ — минимальное значение функционала.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 1 функции $\theta_1^0(t, x)$, $x \in Q$, и $\theta_2^0(t, x)$, $x \in \gamma$, определяются однозначно. Для построения распределенных оптимальных управлений найденное $\theta_1^0(t, x)$ подставим в (4.4), и компоненты распределенного векторного оптимального управления $\bar{u}^0(t, x)$ находим по формулам $u_i^0(t, x) = \varphi_i[t, x, \theta_1^0(t, x), \alpha]$, $i = 1, 2, 3, \dots, k$.

Аналогично, подставляя $\theta_2^0(t, x)$ в (4.6) компоненты граничного векторного оптимального управления $\bar{v}^0(t, x)$, находим по формулам $v_i^0(t, x) = \sigma_i[t, x, \theta_2^0(t, x), \beta]$, $i = 1, 2, 3, \dots, m$.

Поскольку функции $h[t, x, \bar{u}(t, x)]$ и $b[t, x, \bar{v}(t, x)]$ — строго выпуклые функции, то можно показать, что функционал (1.1) также является строго выпуклым и достигает своего минимального значения на единственной паре управлений $(\bar{u}^0(t, x), \bar{v}^0(t, x))$. Далее согласно (2.3) оптимальный процесс $V^0(t, x)$ определяется как

$$V^0(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda \int_0^T R_n(t, s, \lambda) a_n^0(s) ds + a_n^0(t) \right) z_n(x),$$

где

$$\begin{aligned} a_n^0(t) &= \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t \\ &+ \left(\frac{1}{\lambda_n} \right) \int_0^T \sin \lambda_n(t - \tau) \left(\int_Q f[t, x, \bar{u}^0(t, x)] z_n(x) dx + \int_{\gamma} p[t, x, \bar{v}^0(t, x)] z_n(x) dx \right) d\tau. \end{aligned}$$

Согласно (1.1) минимальное значение функционала вычисляется как

$$\begin{aligned} J[\bar{u}^0(t, x), \bar{v}^0(t, x)] &= \int_0^T \int_Q [V^0(t, x) - \xi(t, x)]^2 dx dt \\ &+ \int_0^T \left(\alpha \int_Q h[t, x, \bar{u}^0(t, x)] dx + \beta \int_{\gamma} b[t, x, \bar{v}^0(t, x)] dx \right) dt. \end{aligned}$$

Найденная тройка $((\bar{u}^0(t, x), \bar{v}^0(t, x)), V^0(t, x), J[\bar{u}^0(t, x), \bar{v}^0(t, x)])$ является полным решением задачи слежения при векторной нелинейной оптимизации колебательного процесса. $\square$

Заключение

Отметим, что задача слежения при нелинейной оптимизации, когда скалярные функции внешних источников нелинейны относительно компонентов векторных управлений имеет специфические особенности, в частности:

— в сопряженной краевой задаче интегро-дифференциальное уравнение является неоднородным, что является следствием наличия разности $V(t, x) - \xi(t, x)$ в критерии качества управления;

— компоненты векторных оптимальных управлений удовлетворяют системе равных соотношений, что существенно упрощает процедуру построения искомых оптимальных управлений.

Методика решения задачи слежения в случае нелинейной оптимизации колебательных процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями с интегральными операторами, может быть полезной при разработках новых методов качественного исследования и конструктивных методов решения задач нелинейной теории оптимального управления системами с распределенными параметрами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Егоров А.И.** Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности // Изв. АН СССР. Сер. Математика. Т. 29, № 16. 1965. С. 1205–1260.
2. **Егоров А.И.** Оптимальное уравнение тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978. 464 р.
3. **Комков В.** Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. М.: Наука, 1978. 464 с.
4. **Бутковский А.Г.** Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 476 с.
5. **Вольтерра В.И.** Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.
6. **Владимиров В.С.** Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // 1961. Т. 61. С. 3–158.
7. **Рихтмайер Р.** Принцип современной математической физики. М.: Мир, 1982. 488 с.
8. **Плотников В.И.** Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1968. Т. 32, № 4. С. 743–755.
9. **Керимбеков А., Абдылдаева Э.Ф.** О равных отношениях в задаче граничного векторного управления упругими колебаниями, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 2. С. 163–176. doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-163-176
10. **Люстерник Л.А., Соболев В.И.** Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.

Поступила 9.02.2024

После доработки 25.03.2024

Принята к публикации 15.04.2024

Керимбеков Акылбек

д-р физ.-мат. наук, профессор,

зав. кафедрой прикладной математики и информатики естественно-технического факультета Кыргызско-Российский Славянский университет

г. Бишкек, Кыргызстан

e-mail: akl7@rambler.ru

Абдылдаева Эльмира Файзулдаевна

канд. физ.-мат. наук

Отделение математики факультета естественных наук

Кыргызско-Турецкий университет “Манас”

г. Бишкек, Кыргызстан

e-mail: elmiraabdyldaeva@manas.edu.kg, efa_69@mail.ru

REFERENCES

1. Egorov A.I. Optimal processes in systems with distributed parameters and certain problems of the theory of invariance. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1965, vol. 29, no. 6, pp. 1205–1260.
2. Egorov A.I. Optimal'noe upravlenie teplovymi i diffuzionnymi protsessami [Optimal control of thermal and diffusion processes]. Moscow: Nauka Publ., 1978, 464 p.
3. Komkov V. *Teoriya optimal'nogo upravleniya dempfirovaniem kolebaniy prostykh uprugikh sistem* [Optimal control theory of vibration damping of simple elastic systems]. Moscow: Nauka Publ., 1978. 464 p.
4. Butkovskiy A.G. *Distributed control systems*. NY: Elsevier, 1969, 446 p. ISBN: 0444000615. Original Russian text published in Butkovskii A.G. *Teoriya optimal'nogo upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami*. Moscow: Nauka Publ., 1965, 476 p.
5. Volterra V. *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations*. NY: Dover, 1959, 226 p. ISBN: 0486442845. Translated to Russian under the title *Funktsional'naya teoriya, integral'nye i integrodifferentsial'nye uravneniya*, Moscow: Nauka Publ., 1982, 304 p.
6. Vladimirov V.S. Mathematical problems of the uniform-speed theory of transport. *Tr. Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova*, 1961, vol. 61, pp. 3–158.
7. Richtmyer R.D. *Principles of advanced mathematical physics*, vol. 1. NY: Springer-Verlag, 1978, 424 p. doi: 10.1007/978-3-642-46378-5. Translated to Russian under the title *Printsipy sovremennoi matematicheskoi fiziki*, Moscow: Mir Publ., 1982, 488 p.
8. Plotnikov V.I. An energy inequality and the overdeterminacy property of a system of eigenfunctions. *Math. USSR-Izv.*, 1968, vol. 2, no. 4, pp. 695–707. doi: 10.1070/IM1968v002n04ABEH000656
9. Kerimbekov A.K., Abdylbaeva E.F. On the property of equal ratios in the problem of boundary vector control of elastic vibrations described by Fredholm integro-differential equations. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2016, vol. 22, no. 2, pp. 163–176 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-163-176
10. Lusternik L.A. Sobolev V.J. *Elements of functional analysis*. Ser. International monographs on advanced mathematics and physics, Delhi: Hindustan Publishing Corp., 1974, 360 p. ISBN: 0470556501. Original Russian text published in Lyusternik L.A., Sobolev V.I. *Elementy funktsional'nogo analiza*, Moscow: Nauka Publ., 1965, 520 p.

Received February 9, 2024

Revised March 25, 2024

Accepted April 15, 2024

Akylbek Kerimbekov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Department of Applied Mathematics and Informatics, Kyrgyz-Russian Slavic University, Bishkek, Kyrgyzstan, e-mail: akl7@rambler.ru.

Elmira Faizuldaevna Abdylbaeva, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Department of Mathematics, Kyrgyz-Turkish Manas University, Bishkek, Kyrgyzstan, e-mail: elmiraabdylbaeva@manas.edu.kg, efa_69@mail.ru.

Cite this article as: A. Kerimbekov, E. F. Abdylbaeva. On solvability of the tracking problem in nonlinear vector optimization of oscillation processes. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 103–115.