ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 1 2024

УДК 517.929

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ВЫРОЖДЕННОЙ ЗАДАЧИ ИМПУЛЬСНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ СИСТЕМЫ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Ю. Ф. Долгий, А. Н. Сесекин

Рассматривается вырожденная задача стабилизации линейной автономной системы дифференциальных уравнений с последействием и импульсными управлениями. Для ее регуляризации используется невырожденный критерий качества переходных процессов, близкий к вырожденному. Применяется преобразование регуляризованной задачи стабилизации для импульсных управлений к вспомогательной невырожденной задаче оптимальной стабилизации для неимпульсных управлений, содержащих последействие. При решении вспомогательной задачи используется принцип динамического программирования Беллмана. При нахождении определяющей системы уравнений для коэффициентов квадратичного функционала Беллмана применяется постановка задачи оптимальной стабилизации в функциональных пространствах состояний и управлений. Получено представление для импульса оптимального стабилизирующего управления. Сложная задача нахождения решения определяющей системы уравнений для функционала Беллмана заменяется задачей нахождения решения определяющей системы уравнений для коэффициентов представления оптимального стабилизирующего управления. Последняя задача имеет меньшую размерность. Найдена асимптотическая зависимость оптимального стабилизирующего управления от параметра регуляризации, когда размерность вектора управления совпадает с размерностью вектора состояний.

Ключевые слова: линейная автономная система, запаздывание, оптимальная стабилизация, импульсное управление.

Yu. F. Dolgii, A. N. Sesekin. A study of regularization for a degenerate problem of impulsive stabilization in a system with aftereffect.

A degenerate problem of stabilization of a linear autonomous system of differential equations with aftereffect and impulse controls is considered. For its regularization, a non-degenerate criterion for the quality of transient processes is used, which is close to a degenerate one. The regularized stabilization problem for impulse controls is replaced by an auxiliary non-degenerate optimal stabilization problem for non-impulse controls containing aftereffect. Bellman's dynamic programming principle is used to solve the auxiliary problem. When finding the governing system of equations for the coefficients of the quadratic Bellman functional, the formulation of the optimal stabilization problem in the functional spaces of states and controls is used. A representation is obtained for the pulse of the optimal stabilizing control. The difficult problem of finding a solution to the governing system of equations for the Bellman functional is replaced by the problem of finding a solution to the governing system of equations for the coefficients of the representation of the optimal stabilizing control. The latter problem has lower dimension. The asymptotic dependence of the optimal stabilizing control on the regularization parameter is found when the dimension of the control vector coincides with the dimension of the state vector.

Keywords: linear autonomous system, aftereffect, optimal stabilization, impulse control.

MSC: 34K06, 34K20, 34K30, 93C27

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-1-80-99

Введение

Объект управления описывается автономной линейной системой дифференциальных уравнений с последействием

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int\limits_{-\tau}^{0} [d\eta(\vartheta)]\, x(t+\vartheta) + Bu, \tag{0.1}$$

где $t \in \mathbb{R}^+ = (0,+\infty)$, $x\colon [-\tau,+\infty) \to \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$, элементы матричной функции η являются функциями с ограниченными вариациями на отрезке $[-\tau,0]$, $\eta(0) = 0_{n\times n}$, B — постоянная матрица размерности $(n \times r)$, u — импульсное управление.

Для оптимальной неимпульсной стабилизации процедура формирования допустимых управлений описана в работах Н. Н. Красовского (см. [1; 2]). В настоящей работе представлена специальная процедура формирования управлений для оптимальной импульсной стабилизации, при которой обобщенные решения управляемой системы дифференциальных уравнений с последействием являются регулярными функциями. При ее описании приняты обозначения Н. Н. Красовского (см. [1;2]). На пространстве $\mathbb{V}([-\tau,0],\mathbb{R}^n)$ функций с ограниченными вариациями рассматривается однопараметрическое семейство линейных непрерывных отображений $\mathbf{v}(t,\cdot)\colon \mathbb{V}([-\tau,0],\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^n,\ t\in\mathbb{R}^+,\ \mathbf{v}(0,\mathbf{x}(\cdot))=0_r,\ \mathbf{x}(\cdot)\in\mathbb{V}([-\tau,0],\mathbb{R}^n)$. Требуется, чтобы для любой функции $x\colon[-\tau,+\infty)\to\mathbb{R}^n$ с ограниченными вариациями на любом конечном отрезке функция, заданная как $v[t]=\mathbf{v}(t,\mathbf{x}_t(\cdot))$, $\mathbf{x}_t(\vartheta)=x(t+\vartheta)$, $\vartheta\in[-\tau,0],\ t\geq 0$, имела ограниченные вариации на любом конечном отрезке положительной полуоси. Тогда импульсные управления находятся по формулам $u[t]=\dfrac{dv[t]}{dt},\ t\geq 0$. Здесь производная понимается в обобщенном смысле. Введенные импульсные управления будем называть *допустимыми.* Для допустимых управлений в системе дифференциальных уравнений с последействием (0.1), используя формулу Коши (см. [3; 4, с. 23]), определяем обобщенные решения

$$x[t,\varphi]=V(t)\varphi(0)+\int\limits_{-\tau}^{0}\left(V(t)\eta(\vartheta)-\eta(\vartheta-t)\right)\varphi(\vartheta)\,d\vartheta$$

$$-\int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{\vartheta-t}^{\vartheta}\frac{dV(t-\vartheta+\beta)}{dt}\,\eta(\beta)\,d\beta\,\varphi(\vartheta)\,d\vartheta+Bv[t]+\int\limits_{0}^{t}\frac{dV(t-s)}{dt}\,Bv[s]\,ds,\quad 0<t<\tau;$$

$$x[t,\varphi]=V(t)\varphi(0)+\int\limits_{-\tau}^{0}\left(V(t)\eta(\vartheta)-V(t-\tau)\eta(\vartheta-\tau)\right)\varphi(\vartheta)\,d\vartheta$$

$$-\int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{\vartheta-\tau}^{\vartheta}\frac{dV(t-\vartheta+\beta)}{dt}\,\eta(\beta)\,d\beta\,\varphi(\vartheta)\,d\vartheta+Bv[t]+\int\limits_{0}^{t}\frac{dV(t-s)}{dt}\,Bv[s]\,ds,\quad \tau\leq t<+\infty.$$

Здесь $V(\cdot)$ — матричная функция Коши, $\varphi(\cdot)$ — начальная функция, $\eta(\beta)=\eta(-\tau)$, $-2\tau\leq\beta\leq-\tau$.

Изучается задача оптимальной импульсной стабилизации управляемой системы дифференциальных уравнений (0.1) с последействием и критерием качества переходных процессов

$$J[v,\varphi,\alpha]=\int\limits_{0}^{+\infty}\left(x^{\top}[t,\varphi]\,Cx[t,\varphi]+\alpha^2v^{\top}[t]\,v[t]\right)dt,\tag{0.2}$$

где C — постоянная положительно определенная матрица, α — постоянный неотрицательный параметр.

Задача оптимальной неимпульсной стабилизации в случае невырожденного критерия качества достаточно хорошо изучена для автономных линейных систем дифференциальных уравнений с последействием запаздывающего (см. [1; 5–10]) и нейтрального типов [11–13]. При ее решении используется принцип динамического программирования Беллмана (см. [14, с. 32]), а также конечномерные аппроксимации дифференциальных уравнений с последействием [15–18]. Задачам оптимальной импульсной стабилизации для автономных линейных систем с последействием посвящены работы [19–21]. При $\alpha=0$ критерий качества (0.2) вырождается, и уравнение Риккати в теории оптимальной стабилизации не имеет положительно определенного решения. Возникает некорректная задача. Ее регуляризация достигается специальным изменением критерия качества, в который вводится регуляризирующий параметр.

Некорректные задачи оптимальной стабилизации с вырожденным критерием качества переходных процессов для систем обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривались в [22].

В данной статье исследуется регуляризованная задача оптимальной импульсной стабилизации для автономной линейной системы дифференциальных уравнений с последействием общего вида (0.1), (0.2). Для автономной линейной системы дифференциальных уравнений с сосредоточенным запаздыванием аналогичная задача изучалась в работе [23].

1. Вспомогательная задача оптимальной стабилизации для системы с последействием

При исследовании задачи импульсной стабилизации в работе [20] использовалось ее сведение к вспомогательной задаче неимпульсной стабилизации для автономной линейной системы с запаздыванием, которое входит также в управления. В настоящей работе указанное сведение применяется для регуляризованной задачи оптимальной импульсной стабилизации (0.1), (0.2). Непосредственная замена

$$y[t,\psi]=x[t,\varphi]-Bv[t],\quad t\geq -\tau,\quad v[t]=0,\quad t\in[-\tau,0] \tag{1.1}$$

в (0.1) приводит к следующей системе дифференциальных уравнений с последействием:

$$\frac{dy[t,\psi]}{dt}=\int\limits_{-\tau}^{0}[d\eta\,(\vartheta)]\,\left(y[t+\vartheta,\psi]+Bv[t+\vartheta]\right),\quad t\in\mathbb{R}^{+}. \tag{1.2}$$

Для корректности замены необходимо изменить процедуру формирования новых не импульсных управлений v для системы дифференциальных уравнений (1.2). На пространстве непрерывных функций $\mathbb{C}([-\tau,0],\mathbb{R}^n)$ рассматривается однопараметрическое семейство линейных непрерывных отображений $\mathbf{v}(t,\cdot)\colon \mathbb{C}([-\tau,0],\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}^+$, $\mathbf{v}(0,\mathbf{y}(\cdot))=0_r$, $\mathbf{y}(\cdot)\in\mathbb{C}([-\tau,0],$ $\mathbb{R}^n)$. Требуется, чтобы для любой непрерывной функции $y\colon[-\tau,+\infty)\to\mathbb{R}^n$ функция, заданная формулами $v[t]=\mathbf{v}(t,\mathbf{y}_t(\cdot))$, $\mathbf{y}_t(\vartheta)=y(t+\vartheta)$, $\vartheta\in[-\tau,0]$, $t\geq 0$, была непрерывной на положительной полуоси. Введенные управления будем называть *допустимыми*. Для допустимых управлений в системе дифференциальных уравнений с последействием (1.2), используя формулу Коши (см. [4, с. 23]), определяем обобщенные решения

$$y[t,\psi]=V(t)\psi(0)+\int\limits_{-\tau}^{0}\left(V(t)\eta(\vartheta)-\eta(\vartheta-t)\right)\psi(\vartheta)\,d\vartheta$$

$$-\int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{\vartheta-t}^{\vartheta}\frac{dV(t-\vartheta+\beta)}{dt}\,\eta(\beta)\,d\beta\,\psi(\vartheta)\,d\vartheta-\int\limits_{-t}^{0}\eta(\vartheta)Bv[t+\vartheta]\,d\vartheta$$

$$-\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-s}^{0}\frac{dV(t-s)}{dt}\,\eta(\vartheta)Bv[\vartheta+s]\,d\vartheta\,ds,\quad 0<t<\tau;$$

$$y[t,\psi]=V(t)\psi(0)+\int\limits_{-\tau}^{0}\left(V(t)\eta(\vartheta)-V(t-\tau)\eta(\vartheta-\tau)\right)\psi(\vartheta)\,d\vartheta$$

$$-\int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{\vartheta-\tau}^{\vartheta}\frac{dV(t-\vartheta+\beta)}{dt}\,\eta(\beta)\,d\beta\,\psi(\vartheta)\,d\vartheta-\int\limits_{\tau}^{t}V(t-s)\eta(-\tau)Bv[s-\tau]\,ds$$

$$-\int_{-\tau}^{0} \eta(\vartheta)Bv[t+\vartheta]\,d\vartheta - \int_{-\tau}^{0}\int_{-\vartheta}^{t} \frac{dV(t-s)}{dt}\,\eta(\vartheta)Bv[s+\vartheta]\,ds\,d\vartheta, \quad \tau \le t < +\infty.$$

Из полученнх формул следует, что допустимые управления $v[\cdot]$ и обобщенные решения $y[\cdot,\psi]$ допускают расширения на полуоси $[-\tau,+\infty)$ до функций с ограниченными вариациями на любом конечном отрезке.

Для системы дифференциальных уравнений (1.2) критерий качества переходных процессов имеет вид

$$\hat{J}(v,\psi,\alpha) = \int_{0}^{+\infty} \big(y^\top[t,\psi]\,C_1 y[t,\psi] + 2y^\top[t,\psi]\,C_2 v[t] + v^\top[t]\,C_3(\alpha)v[t]\big)\,dt, \tag{1.3}$$

где $C_1 = C$, $C_2 = CB$, $C_3(\alpha) = B^\top CB + \alpha^2 I_r$. Управления вспомогательной задачи $v[\cdot]$ совпадают с импульсами обобщенных управлений регуляризованной задачи оптимальной стабилизации (0.1), (0.2).

Опираясь на трактовку Н. Н. Красовского дифференциального уравнения с последействием, используем описание постановки задачи оптимальной стабилизации (1.2), (1.3) в функциональных пространствах состояний $\mathbb{H}$ и управлений. Элементы функциональных пространств состояний и управлений определяются как $\mathbf{y}_t(\vartheta,\psi) = y[t+\vartheta,\psi]$, $\vartheta \in [-\tau,0]$, $t \ge 0$, $\mathbf{v}_t(\vartheta) = v[t+\vartheta]$, $\vartheta \in [-\tau,0]$, $t \ge 0$. Рассмотрим гильбертово пространство состояний $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2([-\tau,0),\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением, заданным формулой $\langle\varphi,\psi\rangle_H = \psi^\top(0)\varphi(0) + \int_{-\tau}^{0}\psi^\top(\vartheta)\varphi(\vartheta)\,d\vartheta$, $\varphi,\psi \in \mathbb{H}$, и гильбертово пространство управлений $\mathbb{E} = \mathbb{L}_2\big([-\tau,0),\,\mathbb{R}^r\big)\times\mathbb{R}^r$ со скалярным произведением, определяемым как

$$\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle_E = \mathbf{u}^\top(0)\mathbf{v}(0) + \int_{-\tau}^{0}\mathbf{u}^\top(\vartheta)\mathbf{v}(\vartheta)\,d\vartheta, \quad v,u \in \mathbb{E}.$$

Введенные допустимые управления $v[\cdot]$ и обобщенные решения $y[\cdot,\psi]$ допускают расширения на полуоси $[-\tau,+\infty)$ до функций, для которых соответствующие им элементы функциональных пространств состояний и управлений принадлежат введенным выше пространствам $\mathbb{H}$ и $\mathbb{E}$.

Системе (1.2) ставится в соответствие дифференциальное уравнение

$$\frac{d\mathbf{y}_t}{dt} = \mathfrak{A}\mathbf{y}_t + \mathfrak{B}\mathbf{v}_t, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{1.4}$$

Здесь неограниченный оператор $\mathfrak{A}\colon \mathbb{H}\to\mathbb{H}$ с областью определения $D(\mathfrak{A}) = \big\{\mathbf{y}\in\mathbb{H}\colon \mathbf{y}\in \mathbb{W}_2^1([-\tau,0],\mathbb{R}^n)\big\}$ задается формулами

$$(\mathfrak{A}\mathbf{y})(\vartheta) = \frac{d\mathbf{y}(\vartheta)}{d\vartheta}, \quad \vartheta\in[-\tau,0), \quad (\mathfrak{A}\mathbf{y})(0) = \int_{-\tau}^{0}[d\eta(\vartheta)]\,y(\vartheta).$$

Неограниченный оператор $\mathfrak{B}\colon \mathbb{E}\to\mathbb{H}$ с областью определения $D(\mathfrak{B}) = \big\{\mathbf{v}\in\mathbb{E}\colon \mathbf{v}\in\mathbb{W}_2^1([-\tau,0],\mathbb{R}^r)\big\}$ определяется как

$$(\mathfrak{B}\mathbf{v})(\vartheta) = 0, \quad \vartheta\in[-\tau,0), \quad (\mathfrak{B}\mathbf{v})(0) = B\int_{-\tau}^{0}[d\eta(\vartheta)]\,v(\vartheta).$$

В пространствах $\mathbb{H}$, $\mathbb{E}$ введем функционал $\omega(\mathbf{y},\mathbf{v},\alpha) = \langle\mathbf{C_1}\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle_H + 2\langle\mathbf{C_2}\mathbf{v},\mathbf{y}\rangle_H + \langle\mathbf{C_3}(\alpha)\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle_E$. В указанной формуле ограниченный самосопряженный неотрицательный оператор $\mathbf{C_1}\colon \mathbb{H}\to\mathbb{H}$ задаются формулами

$$(\mathbf{C_1}\mathbf{y})(\vartheta) = 0, \quad \vartheta\in[-\tau,0), \quad (\mathbf{C_1}\mathbf{y})(0) = C\mathbf{y}(0),$$

ограниченный оператор $\mathbf{C_2}\colon \mathbb{E} \to \mathbb{H}$ — формулами

$$(\mathbf{C_2 v})(\vartheta) = 0, \quad \vartheta \in [-\tau, 0), \quad (\mathbf{C_2 v})(0) = CB\mathbf{v}(0),$$

а ограниченный самосопряженный неотрицательный оператор $\mathbf{C_3}(\alpha)\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ — формулами

$$(\mathbf{C_3}(\alpha)\mathbf{v})(\vartheta) = 0, \quad \vartheta \in [-\tau, 0), \quad (\mathbf{C_3}(\alpha)\mathbf{v})(0) = \big(B^\top CB + \alpha^2 I_r\big)\mathbf{v}(0).$$

Критерий качества переходных процессов вспомогательной задачи оптимальной стабилизации в функциональных пространствах имеет вид

$$\mathbf{J}[\mathbf{v}, \psi, \alpha] = \int\limits_0^{+\infty} \omega(\mathbf{y}_t(\cdot, \psi), \mathbf{v}_t(\cdot), \alpha)\, dt. \tag{1.5}$$

Переходим к постановке задачи оптимальной стабилизации в гильбертовых пространствах состояний и управлений. Требуется найти управление, формируемое по принципу обратной связи, которое обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого решения дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве (1.2) и минимизирует критерий качества переходных процессов (1.5).

2. Уравнение Беллмана вспомогательной задачи оптимальной стабилизации

При решении задачи оптимальной не импульсной стабилизации (1.2), (1.3) для системы с последействием в управлениях и невырожденным критерием качества используется уравнение Беллмана (см. [14, с. 38])

$$\min_{\mathbf{v}_t(0)\in\mathbb{R}^r} \Big\{ \frac{d\mathbf{V}}{dt}\Big|_{(1.4)} (\mathbf{y}_t, \mathbf{v}_t, \alpha) + \omega(\mathbf{y}_t, \mathbf{v}_t, \alpha) \Big\} = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Применение этого уравнения требует описания представления квадратичного функционала Беллмана $\mathbf{V}$. В монографии [14, с. 39] такое представление непосредственно определяется коэффициентами квадратичного функционала. Аналогичное представление используется в [20] при решении вспомогательной задачи не импульсной стабилизации для автономной линейной системы с запаздыванием и вырожденным критерием качества.

В настоящей работе квадратичный функционал Беллмана определяется представлениями, порождающих его ограниченных операторов, и имеет вид

$$\mathbf{V}(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \alpha) = \langle \mathbf{U}_{11}(\alpha)\mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle_H + 2\langle \mathbf{U}_{12}(\alpha)\mathbf{v}, \mathbf{y}\rangle_H + \langle \mathbf{U}_{22}(\alpha)\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_2, \tag{2.1}$$

где для скалярного произведения в пространстве $\mathbb{L}_2([-\tau, 0], \mathbb{R}^r)$ имеет место формула $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle_2 = \int_{-\tau}^0 \mathbf{u}^\top(\vartheta)\mathbf{v}(\vartheta)\, d\vartheta$. Ограниченный самосопряженный положительный оператор $\mathbf{U}_{11}\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ задается следующим образом:

$$(\mathbf{U}_{11}(\alpha)\mathbf{y})(\vartheta) = K_{11}(\vartheta, 0, \alpha)\mathbf{y}(0) + \int\limits_{-\tau}^0 K_{11}(\vartheta, s, \alpha)\mathbf{y}(s)\, ds, \quad \vartheta \in [-\tau, 0],$$

$$K_{11}^\top(\vartheta, s, \alpha) = K_{11}(s, \vartheta, \alpha), \quad \vartheta, s \in [-\tau, 0].$$

Ограниченный оператор $\mathbf{U}_{12}(\alpha)\colon \mathbb{L}_2([-\tau, 0], \mathbb{R}^r) \to \mathbb{H}$ определяется как

$$(\mathbf{U}_{12}(\alpha)\mathbf{v})(\vartheta) = \int\limits_{-\tau}^0 K_{12}(\vartheta, s, \alpha)\mathbf{v}(s)\, ds, \quad \vartheta \in [-\tau, 0].$$

Ограниченный самосопряженный положительный оператор

$$\mathbf{U}_{22}(\alpha)\colon \mathbb{L}_2([-\tau,0],\mathbb{R}^r)\to \mathbb{L}_2([-\tau,0],\mathbb{R}^r)$$

описывается следующим образом:

$$(\mathbf{U}_{22}(\alpha)\mathbf{v})(\vartheta)=\int\limits_{-\tau}^{0}K_{22}(\vartheta,s,\alpha)\mathbf{v}(s)\,ds,\ \ \vartheta\in[-\tau,0],\quad K_{22}^{\top}(\vartheta,s,\alpha)=K_{22}(s,\vartheta,\alpha),\ \ \vartheta,s\in[-\tau,0].$$

Находим производную функционала Беллмана в силу уравнения (1.4)

$$\frac{1}{2}\,\frac{d\mathbf{V}}{dt}\Big|_{(1.4)}(\mathbf{y},\mathbf{v},\alpha)=\langle\mathbf{U}_{11}(\alpha)\left(\mathfrak{A}\mathbf{y}+\mathfrak{B}\mathbf{v}\right),\mathbf{y}\rangle_H$$
$$+\langle\mathbf{U}_{12}(\alpha)\mathbf{v},\mathfrak{A}\mathbf{y}+\mathfrak{B}\mathbf{v}\rangle_H+\langle\mathbf{y},\mathbf{U}_{12}(\alpha)\mathbf{D}\mathbf{v}\rangle_H+\langle\mathbf{v},\mathbf{U}_{22}(\alpha)\mathbf{D}\mathbf{v}\rangle_2. \tag{2.2}$$

Здесь $\mathbf{D}\colon \mathbb{L}_2([-\tau,0],\mathbb{R}^r)\to\mathbb{L}_2([-\tau,0],\mathbb{R}^r)$ — неограниченный оператор дифференцирования, $(\mathbf{D}\mathbf{v})(\vartheta)=\dfrac{d\mathbf{v}(\vartheta)}{d\vartheta}$, $-\tau\le\vartheta\le 0$.

Производная функционала Беллмана, задаваемая формулой (2.2), определяет квадратичный неограниченный функционал на пространствах функций $\mathbb{H}$ и $\mathbb{E}$. Введем гильбертовые пространства функций $\mathbb{H}_1=\mathbb{R}^n\times\mathbb{L}_2((-\tau,0),\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n$, $\mathbb{E}_1=\mathbb{R}^r\times\mathbb{L}_2((-\tau,0),\mathbb{R}^r)\times\mathbb{R}^r$ со скалярными произведениями

$$\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_{H1}=\mathbf{y}^{\top}(-\tau)\mathbf{x}(-\tau)+\mathbf{y}^{\top}(0)\mathbf{x}(0)+\int\limits_{-\tau}^{0}\mathbf{y}^{\top}(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta)\,d\vartheta,$$

$$\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{E1}=\mathbf{v}^{\top}(-\tau)\mathbf{u}(-\tau)+\mathbf{v}^{\top}(0)\mathbf{v}(0)+\int\limits_{-\tau}^{0}\mathbf{v}^{\top}(\vartheta)\mathbf{v}(\vartheta)\,d\vartheta.$$

Применение уравнения Беллмана связано с использованием ограниченных сужений неограниченных функционалов. Процедуру построения таких сужений удобно обосновывать, используя операторы для описания представлений квадратичных функционалов. Введем новые матрицы

$$\hat{K}_{11}(\vartheta,s,\alpha)=K_{11}(\vartheta,s,\alpha)-K_{11}(\vartheta,0,\alpha)\,\eta(s),\quad s\in[-\tau,0),\quad \vartheta\in[-\tau,0];$$
$$\hat{K}_{12}(\vartheta,s,\alpha)=K_{12}(\vartheta,s,\alpha)-K_{11}(\vartheta,0,\alpha)\,\eta(s)B,\quad s\in[-\tau,0),\quad \vartheta\in[-\tau,0];$$
$$\hat{K}_{21}(\vartheta,s,\alpha)=K_{12}(\vartheta,s,\alpha)-\eta^{\top}(\vartheta)K_{12}(0,s,\alpha),\quad \vartheta,s\in[-\tau,0);$$
$$\hat{K}_{22}(\vartheta,s,\alpha)=K_{22}(\vartheta,s,\alpha)-K_{12}^{\top}(0,\vartheta,\alpha)\,\eta(s)B,\quad \vartheta,s\in[-\tau,0).$$

Лемма 1. *Пусть* $\det\eta(-\tau)\neq 0$. *Сужение производной функционала Беллама, определяемого формулой* (2.2), *на пространства* $\mathbb{H}_1$ *и* $\mathbb{E}_1$ *является квадратичным ограниченным функционалом, если коэффициенты представлений операторов* $\mathbf{U}_{11}(\alpha)$, $\mathbf{U}_{12}(\alpha)$, $\mathbf{U}_{22}(\alpha)$ *удовлетворяют следующим условиям*:

1) *матричнозначная функция* $\hat{K}_{11}(\cdot,\cdot,\alpha)$ *дифференцируема по второму аргументу,*

$$\frac{\partial\hat{K}_{11}(\cdot,\cdot,\alpha)}{\partial s}\in\mathbb{L}_2((-\tau,0)\times(-\tau,0),\,\mathbb{R}^{n\times n}),\quad \frac{\partial K_{11}(0,\cdot,\alpha)}{\partial s}\in\mathbb{L}_2((-\tau,0),\mathbb{R}^{n\times n}),$$
$$\hat{K}_{11}(\cdot,-0,\alpha),\ K_{11}(\cdot,0,\alpha),\ K_{11}(\cdot,-\tau,\alpha)\in\mathbb{L}_2((-\tau,0),\mathbb{R}^{n\times n})\times\mathbb{R}^{n\times n},$$
$$K_{11}(0,0,\alpha),\ K_{11}(0,-0,\alpha),\ K_{11}(0,-\tau,\alpha)\in\mathbb{R}^{n\times n};$$

2) *матричнозначная функция* $\hat{K}_{12}(\cdot,\cdot,\alpha)$ *дифференцируема по второму аргументу,*

$$\frac{\partial K_{12}(\cdot,\cdot,\alpha)}{\partial s}\in\mathbb{L}_2((-\tau,0)\times(-\tau,0),\,\mathbb{R}^{n\times r}),\quad \frac{\partial K_{12}(0,\cdot,\alpha)}{\partial s}\in\mathbb{L}_2((-\tau,0),\mathbb{R}^{n\times r}),$$

$$\hat{K}_{12}(\cdot,-0,\alpha),\ \hat{K}_{12}(\cdot,-\tau,\alpha),\ K_{12}(0,\cdot,\alpha),\ K_{12}(-\tau,\cdot,\alpha)\in\mathbb{L}_2((-\tau,0),\mathbb{R}^{n\times r})\times\mathbb{R}^{n\times r},$$

$$K_{12}(0,-0,\alpha),\ K_{12}(0,-\tau,\alpha)\in\mathbb{R}^{n\times r};$$

3) *матричнозначная функция* $\hat{K}_{21}(\cdot,\cdot,\alpha)$ *дифференцируема по первому аргументу,*

$$\frac{\partial K_{21}(\cdot,\cdot,\alpha)}{\partial\vartheta}\in\mathbb{L}_2((-\tau,0)\times(-\tau,0),\,\mathbb{R}^{n\times r}),\quad \hat{K}_{21}(-0,\cdot,\alpha)\in\mathbb{L}_2((-\tau,0),\mathbb{R}^{n\times n})\times\mathbb{R}^{n\times r};$$

4) *матричнозначная функция* $K_{22}(\cdot,\cdot,\alpha)$ *дифференцируема по второму аргументу,*

$$\frac{\partial K_{22}(\cdot,\cdot,\alpha)}{\partial s}\in\mathbb{L}_2((-\tau,0)\times(-\tau,0),\mathbb{R}^{r\times r}),\quad \hat{K}_{22}(\cdot,-0,\alpha),\hat{K}_{22}(\cdot,-\tau,\alpha)\in\mathbb{L}_2((-\tau,0),\mathbb{R}^{r\times r})\times\mathbb{R}^{r\times r}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя определения неограниченных операторов $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathbf{D}$, найдем сужение квадратичного функционала, описываемого формулой (2.2), на пространства $\mathbb{H}_1$, $\mathbb{E}_1$. Имеют место формулы

$$(\mathbf{U}_{11}(\alpha)\,(\mathfrak{A}\mathbf{y}+\mathfrak{B}\mathbf{v}))\,(\vartheta)=\hat{K}_{11}(\vartheta,-0,\alpha)\mathbf{y}(0)-K_{11}(\vartheta,-\tau,\alpha)\mathbf{y}(-\tau)-K_{11}(\vartheta,0,\alpha)\,\eta(-\tau)B\mathbf{v}(-\tau)$$

$$-\int\limits_{-\tau}^{0}\Big(\frac{\partial\hat{K}_{11}(\vartheta,s,\alpha)}{\partial s}\,\mathbf{y}(s)-K_{11}(\vartheta,0,\alpha)\,\eta(s)B\,\frac{d\mathbf{v}(s)}{ds}\Big)\,ds,\quad -\tau\le\vartheta<0;$$

$$\langle\mathbf{U}_{11}(\alpha)\,(\mathfrak{A}\mathbf{y}+\mathfrak{B}\mathbf{v})\,\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle_H=-\int\limits_{-\tau}^{0}\Big(\int\limits_{-\tau}^{0}\mathbf{y}^\top(\vartheta)K_{11}(\vartheta,0,\alpha)\,d\vartheta+\mathbf{y}^\top(0)K_{11}(0,0,\alpha)\Big)\eta(s)B\,\frac{d\mathbf{v}(s)}{ds}\,ds$$

$$-\int\limits_{-\tau}^{0}\Big(\int\limits_{-\tau}^{0}\mathbf{y}^\top(\vartheta)\,\frac{\partial\hat{K}_{11}(\vartheta,s,\alpha)}{\partial s}\,d\vartheta+\mathbf{y}^\top(0)\,\frac{\partial\hat{K}_{11}(0,s,\alpha)}{\partial s}\Big)\,\mathbf{y}(s)\,ds$$

$$+\int\limits_{-\tau}^{0}\mathbf{y}^\top(\vartheta)\big(\hat{K}_{11}(\vartheta,-0,\alpha)\mathbf{y}(0)-K_{11}(\vartheta,-\tau,\alpha)\mathbf{y}(-\tau)-K_{11}(\vartheta,0,\alpha)\,\eta(-\tau)B\mathbf{v}(-\tau)\big)\,d\vartheta$$

$$+\,\mathbf{y}^\top(0)\big(\hat{K}_{11}(0,-0,\alpha)\mathbf{y}(0)-K_{11}(0,-\tau,\alpha)\mathbf{y}(-\tau)-K_{11}(0,0,\alpha)\,\eta(-\tau)B\mathbf{v}(-\tau)\big);$$

$$\langle\mathbf{U}_{12}(\alpha)\mathbf{v},\mathfrak{A}\mathbf{y}+\mathfrak{B}\mathbf{v}\rangle_H=-\int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{-\tau}^{0}\Big(\mathbf{y}^\top(\vartheta)\,\frac{\partial\hat{K}_{21}(\vartheta,s,\alpha)}{\partial\vartheta}+\frac{d\mathbf{v}^\top(\vartheta)}{d\vartheta}\,B^\top\eta^\top(\vartheta)K_{12}(0,s,\alpha)\Big)\,d\vartheta\,\mathbf{v}(s)\,ds$$

$$+\int\limits_{-\tau}^{0}\big(\mathbf{y}^\top(0)\hat{K}_{21}(-0,s,\alpha)-\mathbf{y}^\top(-\tau)K_{12}(-\tau,s,\alpha)-\mathbf{v}^\top(-\tau)B^\top\eta^\top(-\tau)K_{12}(0,s,\alpha)\big)\mathbf{v}(s)\,ds;$$

$$\langle\mathbf{y},\mathbf{U}_{12}(\alpha)\mathbf{D}\mathbf{v}\rangle_H=\int\limits_{-\tau}^{0}\frac{d\mathbf{v}^\top(s)}{ds}\,\Big(\int\limits_{-\tau}^{0}K_{12}^\top(\vartheta,s,\alpha)\mathbf{y}(\vartheta)\,d\vartheta\;+K_{12}^\top(0,s,\alpha)\mathbf{y}(0)\Big)\,ds;$$

$$\langle\mathbf{v},\mathbf{U}_{22}(\alpha)\mathbf{D}\mathbf{v}\rangle_2=\int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{-\tau}^{0}\frac{d\mathbf{v}^\top(s)}{ds}\,K_{22}^\top(\vartheta,s,\alpha)\mathbf{v}(\vartheta)\,d\vartheta\,ds.$$

Используя (2.2), находим

$$\frac{1}{2}\,\frac{dV}{dt}\Big|_{(1.4)}(\mathbf{y},\mathbf{v},\alpha)=\int\limits_{-\tau}^{0}\frac{d\mathbf{v}^{\top}(s)}{ds}\Big(\int\limits_{-\tau}^{0}\big(\hat{K}_{22}^{\top}(\vartheta,s,\alpha)\mathbf{v}(\vartheta)+\hat{K}_{12}^{\top}(\vartheta,s,\alpha)\mathbf{y}(\vartheta)\big)\,d\vartheta\,+\hat{K}_{12}^{\top}(0,s,\alpha)\mathbf{y}(0)\Big)\,ds$$

$$-\int\limits_{-\tau}^{0}\Big(\int\limits_{-\tau}^{0}\mathbf{y}^{\top}(\vartheta)\,\frac{\partial\hat{K}_{11}(\vartheta,s,\alpha)}{\partial s}\,d\vartheta\,+\mathbf{y}^{\top}(0)\,\frac{\partial\hat{K}_{11}(0,s,\alpha)}{\partial s}\Big)\mathbf{y}(s)\,ds$$

$$-\int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{-\tau}^{0}\mathbf{y}^{\top}(\vartheta)\,\frac{\partial\hat{K}_{21}(\vartheta,s,\alpha)}{\partial\vartheta}\,d\vartheta\,\mathbf{v}(s)\,ds$$

$$+\int\limits_{-\tau}^{0}\mathbf{y}^{\top}(\vartheta)\big(\hat{K}_{11}(\vartheta,-0,\alpha)\mathbf{y}(0)-K_{11}(\vartheta,-\tau,\alpha)\mathbf{y}(-\tau)-K_{11}(\vartheta,0,\alpha)\,\eta(-\tau)B\mathbf{v}(-\tau)\big)\,d\vartheta$$

$$+\,\mathbf{y}^{\top}(0)\big(\hat{K}_{11}(0,-0,\alpha)\mathbf{y}(0)-K_{11}(0,-\tau,\alpha)\mathbf{y}(-\tau)-K_{11}(0,0,\alpha)\,\eta(-\tau)B\mathbf{v}(-\tau)\big)$$

$$+\int\limits_{-\tau}^{0}\big(\mathbf{y}^{\top}(0)\hat{K}_{21}(-0,s,\alpha)-\mathbf{y}^{\top}(-\tau)K_{12}(-\tau,s,\alpha)-\mathbf{v}^{\top}(-\tau)B^{\top}\eta^{\top}(-\tau)K_{12}(0,s,\alpha)\big)\mathbf{v}(s)\,ds.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\frac{1}{2}\,\frac{dV}{dt}\Big|_{(1.4)}(\mathbf{y},\mathbf{v},\alpha)=\mathbf{v}^{\top}(0)\,f(\mathbf{y},\mathbf{v},\alpha)+F_0(\mathbf{y},\mathbf{v},\alpha).$$

Здесь

$$f(\mathbf{y},\mathbf{v},\alpha)=\int\limits_{-\tau}^{0}\big(\hat{K}_{22}^{\top}(\vartheta,-0,\alpha)\mathbf{v}(\vartheta)+\hat{K}_{12}^{\top}(\vartheta,-0,\alpha)\mathbf{y}(\vartheta)\big)\,d\vartheta\,+\hat{K}_{12}^{\top}(0,-0,\alpha)\mathbf{y}(0),$$

$$F_0(\mathbf{y},\mathbf{v},\alpha)=-\int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{-\tau}^{0}\mathbf{y}^{\top}(\vartheta)\Big(\frac{\partial\hat{K}_{11}(\vartheta,s,\alpha)}{\partial s}\,\mathbf{y}(s)+\frac{\partial\hat{K}_{21}(\vartheta,s,\alpha)}{\partial\vartheta}\,\mathbf{v}(s)\Big)\,d\vartheta\,ds$$

$$-\int\limits_{-\tau}^{0}\mathbf{v}^{\top}(s)\,\Big(\int\limits_{-\tau}^{0}\Big(\frac{\partial\hat{K}_{22}^{\top}(\vartheta,s,\alpha)}{\partial s}\,\mathbf{v}(\vartheta)+\frac{\partial\hat{K}_{12}^{\top}(\vartheta,s,\alpha)}{\partial s}\,\mathbf{y}(\vartheta)\Big)\,d\vartheta+\frac{\partial\hat{K}_{12}^{\top}(0,s,\alpha)}{\partial s}\,\mathbf{y}(0)\Big)\,ds$$

$$-\,\mathbf{v}^{\top}(-\tau)\Big(\int\limits_{-\tau}^{0}\big(\hat{K}_{22}^{\top}(\vartheta,-\tau,\alpha)\mathbf{v}(\vartheta)+\hat{K}_{12}^{\top}(\vartheta,-\tau,\alpha)\mathbf{y}(\vartheta)\big)\,d\vartheta\,+\hat{K}_{12}^{\top}(0,-\tau,\alpha)\mathbf{y}(0)\Big)$$

$$+\int\limits_{-\tau}^{0}\mathbf{y}^{\top}(\vartheta)\big(\hat{K}_{11}(\vartheta,-0,\alpha)\mathbf{y}(0)-K_{11}(\vartheta,-\tau,\alpha)\mathbf{y}(-\tau)-K_{11}(\vartheta,0,\alpha)\,\eta(-\tau)B\mathbf{v}(-\tau)\big)\,d\vartheta$$

$$+\,\mathbf{y}^{\top}(0)\Big(\int\limits_{-\tau}^{0}\frac{\partial\hat{K}_{11}(0,s,\alpha)}{\partial s}\,\mathbf{y}(s)\,ds$$

$$+\,\hat{K}_{11}(0,-0,\alpha)\mathbf{y}(0)-K_{11}(0,-\tau,\alpha)\mathbf{y}(-\tau)-K_{11}(0,0,\alpha)\,\eta(-\tau)B\mathbf{v}(-\tau)\Big)$$

$$+\int\limits_{-\tau}^{0}\big(\mathbf{y}^{\top}(0)\hat{K}_{21}(-0,s,\alpha)-\mathbf{y}^{\top}(-\tau)K_{12}(-\tau,s,\alpha)-\mathbf{v}^{\top}(-\tau)B^{\top}\eta^{\top}(-\tau)K_{12}(0,s,\alpha)\big)\,\mathbf{v}(s)\,ds.$$

Лемма доказана.

3. Определяющая система уравнений функционала Беллмана

Для систем дифференциальных уравнений с последействием в управлениях и невырожденным критерием качества оптимальное стабилизирующее управление является решением интегрального уравнения, коэффициенты которого находятся из определяющей системы уравнений функционала Беллмана (см. [14, с. 39]). Для системы (1.2) с вырожденным критерием качества стабилизирующее управление можно также связать с решением интегрального уравнения, коэффициенты которого выводятся из определяющей системы уравнений функционала Беллмана (см. [21]). В настоящей работе определяющая система уравнений функционала Беллмана (2.1) вспомогательной задачи оптимальной стабилизации (1.2), (1.3) описывается в терминах коэффициентов представлений операторов $\mathbf{U}_{11}(\alpha)$, $\mathbf{U}_{12}(\alpha)$, $\mathbf{U}_{22}(\alpha)$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1, $\det(B^\top CB)\neq 0$ *и существует решение вспомогательной задачи оптимальной стабилизации* (1.2), (1.3). *Тогда оптимальное стабилизирующее управление является решением интегрального уравнения*

$$C_3(\alpha)v(t)+\big(C_2^\top+\hat K_{12}^\top(0,-0,\alpha)\big)y(t)$$

$$+\int\limits_{-\tau}^{0}\big(\hat K_{12}^\top(\vartheta,-0,\alpha)y(t+\vartheta)+\hat K_{22}^\top(\vartheta,-0,\alpha)v(t+\vartheta)\big)\,d\vartheta=0,\quad t>0, \tag{3.1}$$

$v(t)=0,\ \ t\in[-\tau,0]$.

Коэффициенты представлений операторов $\mathbf{U}_{11}(\alpha)$, $\mathbf{U}_{12}(\alpha)$, $\mathbf{U}_{22}(\alpha)$ *удовлетворяют определяющей системе уравнений функционала Беллмана*:

$$\frac{\partial\hat K_{11}^\top(s,\vartheta,\alpha)}{\partial\vartheta}+\frac{\partial\hat K_{11}(\vartheta,s,\alpha)}{\partial s}+\hat K_{12}(\vartheta,-0,\alpha)\,C_3^{-1}(\alpha)\hat K_{12}^\top(s,-0,\alpha)=0, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial\hat K_{21}(\vartheta,s,\alpha)}{\partial\vartheta}+\frac{\partial\hat K_{12}(\vartheta,s,\alpha)}{\partial s}+\hat K_{12}(\vartheta,-0,\alpha)\,C_3^{-1}(\alpha)\hat K_{22}^\top(s,-0,\alpha)=0, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial\hat K_{22}^\top(s,\vartheta,\alpha)}{\partial\vartheta}+\frac{\partial\hat K_{3}(\vartheta,s,\alpha)}{\partial s}+\hat K_{22}(\vartheta,-0,\alpha)\,C_3^{-1}(\alpha)\hat K_{22}^\top(s,-0,\alpha)=0, \tag{3.4}$$

$-\tau\le\vartheta,\ \ s<0$;

$$\frac{\partial\hat K_{11}^\top(0,\vartheta,\alpha)}{\partial\vartheta}-\hat K_{11}(\vartheta,-0,\alpha)+\hat K_{12}(\vartheta,-0,\alpha)\,C_3^{-1}(\alpha)\big(K_{12}^\top(0,-0,\alpha)+C_2^\top\big)=0, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial\hat K_{12}^\top(0,\vartheta,\alpha)}{\partial\vartheta}-\hat K_{21}^\top(-0,\vartheta,\alpha)+\hat K_{22}^\top(\vartheta,-0,\alpha)\,C_3^{-1}(\alpha)\big(\hat K_{12}^\top(0,-0,\alpha)+C_2^\top\big)=0, \tag{3.6}$$

$$\hat K_{12}^\top(\vartheta,-\tau,\alpha)+K_{11}(0,\vartheta,\alpha)\,\eta(-\tau)B=0,\quad \hat K_{22}(\vartheta,-\tau,\alpha)+K_{12}^\top(0,\vartheta,\alpha)\,\eta(-\tau)B=0, \tag{3.7}$$

$$K_{12}(-\tau,\vartheta,\alpha)=0,\quad K_{11}(\vartheta,-\tau,\alpha)=0, \tag{3.8}$$

$-\tau\le\vartheta<0$;

$$\hat K_{12}(0,-\tau,\alpha)+K_{11}(0,0,\alpha)\,\eta(-\tau)B=0, \tag{3.9}$$

$$\hat K_{11}(0,-0,\alpha)+\hat K_{11}^\top(0,-0,\alpha)+C-\big(\hat K_{12}(0,-0,\alpha)+C_2\big)\,C_3^{-1}(\alpha)\,\big(\hat K_{12}^\top(0,-0,\alpha)+C_2^\top\big)=0. \tag{3.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При выполнении условий леммы 1 сужение квадратичного функционала, определяемого формулами

$$\Phi(\mathbf{v}(0),\mathbf{y},\mathbf{v},\alpha)=\frac{d\mathbf{V}}{dt}\Big|_{(1.4)}(\mathbf{y},\mathbf{v},\alpha)+\omega(\mathbf{y},\mathbf{v},\alpha)$$

$$=2\,F_0(\mathbf{y},\mathbf{v},\alpha)+2\,\mathbf{v}^\top(0)\big(f(\mathbf{y},\mathbf{v},\alpha)+C_1^\top\mathbf{y}(0)\big)+\mathbf{y}^\top(0)\,C\mathbf{y}(0)+\mathbf{v}^\top(0)\,C_3(\alpha)\mathbf{v}(0),$$

на пространства $\mathbb{H}_1$ и $\mathbb{E}_1$ является квадратичным ограниченным функционалом. Для этого функционала находим минимизирующий элемент

$$\mathbf{v}^\circ(0) = \operatorname{Arg} \min_{\mathbf{v}(0)\in\mathbb{R}^r} \Phi(\mathbf{v}(0), \mathbf{y}, \mathbf{v}, \alpha) = -C_3^{-1}(\alpha)\big(C_2^\top \mathbf{y}(0) + f(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \alpha)\big).$$

Данный элемент определяет интегральное уравнение (3.1) для нахождения управления вспомогательной задачи оптимальной стабилизации (1.2), (1.3). Из принципа динамического программирования Беллмана следует тождество

$$\Phi(\mathbf{v}^\circ(0), \mathbf{y}, \mathbf{v}, \alpha) = \big(\mathbf{y}^\top(0)\, C_2 + f^\top(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \alpha)\big)\, C_3^{-1}(\alpha)\big(C_2^\top \mathbf{y}(0) + f(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \alpha)\big)$$

$$- \mathbf{y}^\top(0)\, C\mathbf{y}(0) - 2\, F_0(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \alpha) \equiv 0, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{H}_1, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{E}_1.$$

Из полученного тождества выводим уравнения (3.2)–(3.10) для нахождения коэффициентов представлений операторов $\mathbf{U}_{11}(\alpha)$, $\mathbf{U}_{12}(\alpha)$, $\mathbf{U}_{22}(\alpha)$.

Лемма доказана.

4. Метод интегрирования определяющей системы уравнений функционала Беллмана для вспомогательной задачи оптимальной стабилизации

Задача интегрирования определяющей системы уравнений функционала Беллмана (3.2)–(3.10) является достаточно сложной. Для системы дифференциальных уравнений с запаздыванием в управлениях и невырожденным критерием качества в работе [14, с. 36] предложен метод последовательных приближений для нахождения решения определяющей системы уравнений функционала Беллмана. Для системы дифференциальных уравнений с последействием в управлениях и с вырожденным критерием качества при нахождении стабилизирующего управления в работе [21] использовался метод интегрирования определяющей системы уравнений функционала Беллмана, связанный с вариацией критерия качества переходных процессов. Для линейной автономной системы дифференциальных уравнений с одним сосредоточенным запаздыванием, входящим также в управления, и с невырожденным критерием качества в работе [23] для интегрирования определяющей системы уравнений функционала Беллмана предложена процедура понижения размерности определяющей системы. В настоящей работе для общей линейной автономной системы дифференциальных уравнений с последействием и новой определяющей системы уравнений функционала Беллмана (3.2)–(3.10) разработана процедура понижения размерности определяющей системы. Предложенная процедура понижения размерности определяющей системы позволяет при нахождении оптимального стабилизирующего управления вспомогательной системы искать непосредственно коэффициенты интегрального уравнения, которое задает это управление.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы* 2. *Тогда при выполнении требования*

$$\det \Delta(\hat{X}_1, \alpha) \neq 0, \ \ \textit{где} \ \ \Delta(\hat{X}_1, \alpha) = I_n + \widetilde{C}_3(\alpha) \int_{-\tau}^{-0} \hat{X}_1^\top(s, \alpha)\, ds, \quad \widetilde{C}_3(\alpha) = BC_3^{-1}(\alpha)B^\top,$$

оптимальное управление вспомогательной задачи стабилизации (1.2), (1.3) *является решением интегрального уравнения*

$$C_3(\alpha)v(t) + B^\top\big(\Delta_1(\hat{X}_1) - K(\alpha)\,\eta(-\tau)\big)\Delta^{-1}(\hat{X}_1, \alpha)y(t)$$

$$+B^\top \int_{-\tau}^{-0} \hat{X}_1^\top(\vartheta, \alpha)\big(y(t+\vartheta) + Bv(t+\vartheta)\big)\, d\vartheta = 0, \quad t > 0, \quad v(t) = 0, \quad t \in [-\tau, 0]. \qquad (4.1)$$

Здесь $\Delta_1(\hat{X}_1) = C + \int_{-\tau}^{-0} \hat{X}_1^\top(s,\alpha)\,ds$, *положительно определенная матрица* $K(\alpha)$ *удовлетворяет матричному алгебраическому уравнению Риккати*

$$A^\top K + KA + Q - KDK = 0_{r\times r}, \qquad (4.2)$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$A = A(\hat{X}_1,\alpha) = \eta(-\tau)\Delta^{-1}(\hat{X}_1,\alpha)\big(\widetilde{C}_3(\alpha)\Delta^{-1\top}(\hat{X}_1,\alpha)\Delta_1^\top(\hat{X}_1) - I_n\big),$$

$$Q = Q(\hat{X}_1,\alpha) = \Delta_1(\hat{X}_1)\Delta^{-1}(\hat{X}_1,\alpha) + \Delta^{-1\top}(\hat{X}_1,\alpha)\Delta_1^\top(\hat{X}_1) - C$$
$$-\Delta_1(\hat{X}_1)\Delta^{-1}(\hat{X}_1,\alpha)\,\widetilde{C}_3(\alpha)\Delta^{-1\top}(\hat{X}_1,\alpha)\Delta_1^\top(\hat{X}_1),$$
$$D = D(\hat{X}_1,\alpha) = \eta(-\tau)\Delta^{-1}(\hat{X}_1,\alpha)\,\widetilde{C}_3(\alpha)\Delta^{-1\top}(\hat{X}_1,\alpha)\,\eta^\top(-\tau)$$

и зависят от решения $\hat{X}_1(\vartheta,\alpha)$, $\vartheta \in [-\tau,0)$, *интегрального уравнения*

$$\hat{X}_1(\vartheta) + \big(\eta^\top(-\tau) - \eta^\top(\vartheta)\big)\big((\Delta_1(\hat{X}_1) - K\eta(-\tau))\Delta^{-1}(\hat{X}_1,\alpha) - C\big)$$

$$+\int_{-\tau}^{\vartheta}\big(\hat{X}_1(s)\Delta_2(\hat{X}_1,\alpha)\,\eta(s-\vartheta) + \eta^\top(s)\Delta_2^\top(\hat{X}_1,\alpha)\hat{X}_1^\top(s-\vartheta) + \hat{X}_1(s)\,\widetilde{C}_3(\alpha)\hat{X}_1^\top(s-\vartheta)\big)\,ds,$$

$$-\eta^\top(-\tau)\Delta_2^\top(\hat{X}_1,\alpha)\int_{-\tau-\vartheta}^{-0}\hat{X}_1^\top(s)\,ds, \quad \vartheta \in [-\tau,0), \qquad (4.3)$$

где $\Delta_2(\hat{X}_1,\alpha) = I_n - \widetilde{C}_3(\alpha)\Delta^{-1\top}(\hat{X}_1,\alpha)\big(\Delta_1^\top(\hat{X}_1) - \eta^\top(-\tau)K(\alpha)\big)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем новые обозначения для матрицы $K(\alpha) = K_{11}(0,0,\alpha)$ и матричных функций:

$$\Phi_{11}(\vartheta,s,\alpha) = \hat{K}_{11}^\top(s,\vartheta,\alpha) - \hat{K}_{11}^\top(0,\vartheta,\alpha)\eta(s), \quad -\tau \le \vartheta, \quad s<0,$$

$$\Phi_{12}(\vartheta,s,\alpha) = \hat{K}_{12}(s,\vartheta,\alpha) - \eta^\top(\vartheta)\hat{K}_{12}(0,s,\alpha), \quad -\tau \le \vartheta, \quad s<0,$$
$$\Phi_{22}(\vartheta,s,\alpha) = \hat{K}_{22}^\top(s,\vartheta,\alpha) - \hat{K}_{12}^\top(0,\vartheta,\alpha)\,\eta(s)B, \quad -\tau \le \vartheta, \quad s<0,$$
$$X_1(\vartheta,\alpha) = \hat{K}_{12}(\vartheta,-0,\alpha), \quad X_2(\vartheta,\alpha) = \hat{K}_{22}(\vartheta,-0,\alpha), \quad -\tau \le \vartheta < 0,$$
$$X_3(\vartheta,\alpha) = \hat{K}_{12}(0,\vartheta,\alpha), \quad X_4(\vartheta,\alpha) = \hat{K}_{11}(0,\vartheta,\alpha), \quad -\tau \le \vartheta < 0.$$

Находим

$$\Phi_{11}^\top(\vartheta,s,\alpha) = \Phi_{11}(s,\vartheta,\alpha), \quad -\tau \le \vartheta, \quad s<0,$$
$$\Phi_{22}^\top(\vartheta,s,\alpha) = \Phi_{22}(s,\vartheta,\alpha), \quad -\tau \le \vartheta, \quad s<0,$$
$$\hat{K}_{11}^\top(s,\vartheta,\alpha) = \Phi_{11}(\vartheta,s,\alpha) + X_4^\top(\vartheta,\alpha)\eta(s), \quad -\tau \le \vartheta, \quad s<0,$$
$$\hat{K}_{12}(s,\vartheta,\alpha) = \Phi_{12}(\vartheta,s,\alpha) + \eta^\top(\vartheta)X_3(s,\alpha), \quad -\tau \le \vartheta, \quad s<0,$$
$$\hat{K}_{22}^\top(s,\vartheta,\alpha) = \Phi_{22}(\vartheta,s,\alpha) + X_3(\vartheta,\alpha)\,\eta(s)B, \quad -\tau \le \vartheta, \quad s<0.$$

Из (3.2)–(3.4) получим для определения матричных функций Φ_{11} ,Φ_{12}, Φ_{22} следующие матричные уравнения в частных производных первого порядка для $-\tau \le s$, $\vartheta < 0$:

$$\frac{\partial\Phi_{11}(\vartheta,s)}{\partial\vartheta} + \frac{\partial\Phi_{11}(\vartheta,s)}{\partial s} + \frac{dX_4^\top(\vartheta)}{d\vartheta}\,\eta(s) + \eta^\top(\vartheta)\,\frac{dX_4(s)}{ds} + X_1(\vartheta)\,C_3^{-1}(\alpha)X_1^\top(s) = 0, \qquad (4.4)$$

$$\frac{\partial\Phi_{12}(\vartheta,s)}{\partial\vartheta} + \frac{\partial\Phi_{12}(\vartheta,s)}{\partial s} + \frac{dX_3^\top(\vartheta)}{d\vartheta}\,\eta(s)B + B^\top\eta^\top(\vartheta)\,\frac{dX_3(s)}{ds} + X_2(\vartheta)\,C_3^{-1}(\alpha)X_2^\top(s) = 0, \qquad (4.5)$$

$$\frac{\partial \Phi_{22}(\vartheta,s)}{\partial \vartheta}+\frac{\partial \Phi_{22}(\vartheta,s)}{\partial s}+\frac{dX_4^\top(\vartheta)}{d\vartheta}\,\eta(s)B+\eta^\top(\vartheta)\,\frac{dX_3(s)}{ds}+X_1(\vartheta)\,C_3^{-1}(\alpha)X_2^\top(s)=0, \qquad (4.6)$$

Учитывая определения матричных функций Φ_{11}, Φ_{12}, Φ_{22} и уравнения определяющей системы (3.7)–(3.9), имеем

$$\Phi_{11}(-\tau,s-\vartheta-\tau)=-\eta^\top(-\tau)X_4(s-\vartheta-\tau),$$

$$\Phi_{12}(-\tau,s-\vartheta-\tau)=-\eta^\top(-\tau)X_3(s-\vartheta-\tau),$$

$$\Phi_{12}(\vartheta-s-\tau,-\tau)=-X_4^\top(\vartheta-s-\tau)\,\eta(-\tau)B,$$

$$\Phi_{22}(-\tau,s-\vartheta-\tau)=-B^\top\eta^\top(-\tau)X_3(s-\vartheta-\tau).$$

Применяя методы интегрирования уравнений в частных производных первого порядка, находим решения уравнений (4.4)–(4.6):

$$\Phi_{11}(\vartheta,s,\alpha)=-\eta^\top(-\tau)X_4(s-\vartheta-\tau)$$

$$-\int\limits_{-\tau}^{\vartheta}\Big(\frac{dX_4^\top(\xi)}{d\xi}\,\eta(\xi-\vartheta+s)+\eta^\top(\xi)\,\frac{dX_4(\xi-\vartheta+s)}{d\xi}+X_1(\xi)\,C_3^{-1}(\alpha)X_1^\top(\xi-\vartheta+s)\Big)\,d\xi,$$

$-\tau\le\vartheta\le s<0$;

$$\Phi_{12}(\vartheta,s,\alpha)=-X_4(\vartheta-s-\tau)\,\eta(-\tau)B$$

$$-\int\limits_{-\tau}^{s}\Big(\frac{dX_4^\top(\xi+\vartheta-s)}{d\xi}\,\eta(\xi)B+\eta^\top(\xi+\vartheta-s)\,\frac{dX_3(\xi)}{d\xi}+X_1(\xi+\vartheta-s)\,C_3^{-1}(\alpha)X_2^\top(\xi)\Big)\,d\xi,$$

$-\tau\le s\le\vartheta<0$;

$$\Phi_{12}(\vartheta,s,\alpha)=-\eta^\top(-\tau)X_3(s-\vartheta-\tau)$$

$$-\int\limits_{-\tau}^{\vartheta}\Big(\frac{dX_4^\top(\xi)}{d\xi}\,\eta(\xi-\vartheta+s)B+\eta^\top(\xi)\,\frac{dX_3(\xi-\vartheta+s)}{d\xi}+X_1(\xi)\,C_3^{-1}(\alpha)X_2^\top(\xi-\vartheta+s)\Big)\,d\xi,$$

$-\tau\le\vartheta\le s<0$;

$$\Phi_{22}(\vartheta,s,\alpha)=-B^\top\eta^\top(-\tau)X_3(s-\vartheta-\tau)$$

$$-\int\limits_{-\tau}^{\vartheta}\Big(\frac{dX_3^\top(\xi)}{d\xi}\,\eta(\xi-\vartheta+s)B+B^\top\eta^\top(\xi)\,\frac{dX_3(\xi-\vartheta+s)}{d\xi}+X_2(\xi)\,C_3^{-1}(\alpha)X_2^\top(\xi-\vartheta+s)\Big)\,d\xi,$$

$-\tau\le\vartheta\le s<0$.

Используя данные формулы, получим значения матричных функций $\hat K_{11}(\vartheta,-0,\alpha)$, $\hat K_{12}(\vartheta,-0,\alpha)$, $\hat K_{21}(-0,\vartheta,\alpha)$, $\hat K_{22}(\vartheta,-0,\alpha)$, $-\tau\le\vartheta<0$. Учитывая равенства $\hat K_{12}(\vartheta,-0,\alpha)=X_1(\vartheta)$, $\hat K_{22}(\vartheta,-0,\alpha)=X_2(\vartheta)$, $-\tau\le\vartheta<0$, выводим матричные интегро-дифференциальные уравнения

$$X_1(\vartheta)=\eta^\top(\vartheta)X_3(-0)-\eta^\top(-\tau)X_3(-\vartheta-\tau)$$

$$-\int\limits_{-\tau}^{\vartheta}\Big(\frac{dX_4^\top(\xi)}{d\xi}\,\eta(\xi-\vartheta)B+\eta^\top(\xi)\,\frac{dX_3(\xi-\vartheta)}{d\xi}+X_1(\xi)\,C_3^{-1}(\alpha)X_2^\top(\xi-\vartheta)\Big)\,d\xi, \qquad (4.7)$$

$$X_2(\vartheta)=B^\top\eta^\top(\vartheta)X_3(-0)-B^\top\eta^\top(-\tau)X_3(-\vartheta-\tau)$$

$$-\int\limits_{-\tau}^{\vartheta}\Big(\frac{dX_3^\top(\xi)}{d\xi}\,\eta(\xi-\vartheta)B+B^\top\eta^\top(\xi)\,\frac{dX_3(\xi-\vartheta)}{d\xi}+X_2(\xi)\,C_3^{-1}(\alpha)X_2^\top(\xi-\vartheta)\Big)\,d\xi. \qquad (4.8)$$

Находим значения матричных функций $\hat{K}_{11}(\vartheta,-0,\alpha)$, $\hat{K}_{21}(-0,\vartheta,\alpha)$, $-\tau\le\vartheta<0$. Имеем

$$\hat{K}_{11}(\vartheta,-0,\alpha)=\eta^{\top}(\vartheta)X_4(-0)-\eta^{\top}(-\tau)X_4(-\vartheta-\tau)$$

$$-\int\limits_{-\tau}^{\vartheta}\Big(\frac{dX_4^{\top}(\xi)}{d\xi}\,\eta(\xi-\vartheta)+\eta^{\top}(\xi)\,\frac{dX_4(\xi-\vartheta)}{d\xi}+X_1(\xi)\,C_3^{-1}(\alpha)X_1^{\top}(\xi-\vartheta)\Big)\,d\xi,$$

$$\hat{K}_{21}(-0,\vartheta,\alpha)=X_4(-0)^{\top}\eta(\vartheta)B-X_4^{\top}(-\vartheta-\tau)\,\eta(-\tau)B$$

$$-\int\limits_{-\tau}^{\vartheta}\Big(\frac{dX_4^{\top}(\xi-\vartheta)}{d\xi}\,\eta(\xi)B+\eta^{\top}(\xi-\vartheta)\,\frac{dX_3(\xi)}{d\xi}+X_1(\xi-\vartheta)\,C_3^{-1}(\alpha)X_2^{\top}(\xi)\Big)\,d\xi.$$

Из (3.5), (3.6) вытекают следующие матричные интегро-дифференциальные уравнения для $-\tau\le\vartheta<0$:

$$\frac{dX_3^{\top}(\vartheta)}{d\vartheta}-B^{\top}\eta^{\top}(\vartheta)X_4(-0)+B^{\top}\eta^{\top}(-\tau)X_4(-\vartheta-\tau)+X_2(\vartheta)\,C_3^{-1}(\alpha)\big(C_2^{\top}+X_3^{\top}(-0)\big)$$

$$+\int\limits_{-\tau}^{\vartheta}\Big(B^{\top}\eta^{\top}(\xi)\frac{dX_4(\xi-\vartheta)}{d\xi}+\frac{dX_3^{\top}(\xi)}{d\xi}\,\eta(\xi-\vartheta)+X_2(\xi)\,C_3^{-1}(\alpha)X_1^{\top}(\xi-\vartheta)\Big)\,d\xi=0, \tag{4.9}$$

$$\frac{dX_4^{\top}(\vartheta)}{d\vartheta}-\eta^{\top}(\vartheta)X_4(-0)+\eta^{\top}(-\tau)X_4(-\vartheta-\tau)+X_1(\vartheta)\,C_3^{-1}(\alpha)\big(C_2^{\top}+X_3^{\top}(-0)\big)$$

$$+\int\limits_{-\tau}^{\vartheta}\Big(\frac{dX_4^{\top}(\xi)}{d\xi}\,\eta(\xi-\vartheta)+\eta^{\top}(\xi)\,\frac{dX_4(\xi-\vartheta)}{d\xi}+X_1(\xi)\,C_3^{-1}(\alpha)X_1^{\top}(\xi-\vartheta)\Big)\,d\xi=0. \tag{4.10}$$

Из (3.7)–(3.10) следует, что решения системы интегро-дифференциальных уравнений (4.7)–(4.10) должны удовлетворять краевым условиям

$$X_3(-\tau)+K\,\eta(-\tau)B=0,\quad X_4(-\tau)+K\,\eta(-\tau)=0, \tag{4.11}$$

$$X_4(-0)+X_4^{\top}(-0)+C-\big(C_2+X_3(-0)\big)\,C_3^{-1}(\alpha)\big(C_2^{\top}+X_3^{\top}(-0)\big)=0.$$

Введем новые матричные функции $\hat{X}_2(\vartheta)=X_2(\vartheta)-B^{\top}X_1(\vartheta)$, $\hat{X}_3(\vartheta)=X_3(\vartheta)-X_4(\vartheta)B$, $-\tau\le\vartheta<0$.

Вычитая из уравнений (4.8), (4.9) соответственно уравнения (4.7), (4.10), умноженные слева на матрицу $B^{\top}$, получим

$$\hat{X}_2(\vartheta)+\int\limits_{-\tau}^{\vartheta}\Big(\frac{d\hat{X}_3^{\top}(\xi)}{d\xi}\,\eta(\xi-\vartheta)B+\hat{X}_2(\xi)\,C_3^{-1}(\alpha)X_2^{\top}(\xi-\vartheta)\Big)\,d\xi=0,\quad -\tau\le\vartheta<0, \tag{4.12}$$

$$\frac{d\hat{X}_3^{\top}(\vartheta)}{d\vartheta}+\hat{X}_2(\vartheta)\,C_3^{-1}(\alpha)\big(C_2^{\top}+X_3^{\top}(-0)\big)$$

$$+\int\limits_{-\tau}^{\vartheta}\Big(\frac{d\hat{X}_3^{\top}(\xi)}{d\xi}\,\eta(\xi-\vartheta)+\hat{X}_2(\xi)\,C_3^{-1}(\alpha)X_1^{\top}(\xi-\vartheta)\Big)\,d\xi=0,\quad -\tau\le\vartheta<0. \tag{4.13}$$

Из (4.11) следует, что $\hat{X}_2(-\tau)=0$. Тогда, учитывая вольтерровость системы интегральных уравнений (4.12), (4.13), имеем $\hat{X}_2(\vartheta)\equiv 0$, $\hat{X}_3(\vartheta)\equiv 0$, $-\tau\le\vartheta<0$, т. е. $X_2(\vartheta)\equiv$

$B^\top X_1(\vartheta),\ X_3(\vartheta)\equiv X_4(\vartheta)B,\ -\tau\le\vartheta<0$. В результате система уравнений (4.7)–(4.10) заменяется системой меньшей размерности

$$X_1(\vartheta)=\eta^\top(\vartheta)X_4(-0)B-\eta^\top(-\tau)X_4(-\vartheta-\tau)B$$

$$-\int_{-\tau}^{\vartheta}\Big(\frac{dX_4^\top(\xi)}{d\xi}\,\eta(\xi-\vartheta)B+\eta^\top(\xi)\,\frac{dX_4(\xi-\vartheta)}{d\xi}\,B+X_1(\xi)\,C_3^{-1}(\alpha)X_1^\top(\xi-\vartheta)B\Big)\,d\xi,$$

$$\frac{dX_4^\top(\vartheta)}{d\vartheta}-\eta^\top(\vartheta)X_4(-0)+\eta^\top(-\tau)X_4(-\vartheta-\tau)+X_1(\vartheta)\,C_3^{-1}(\alpha)B^\top\big(C+X_4^\top(-0)\big)$$

$$+\int_{-\tau}^{\vartheta}\Big(\frac{dX_4^\top(\xi)}{d\xi}\,\eta(\xi-\vartheta)+\eta^\top(\xi)\,\frac{dX_4(\xi-\vartheta)}{d\xi}+X_1(\xi)\,C_3^{-1}(\alpha)X_1^\top(\xi-\vartheta)\Big)\,d\xi=0.$$

Полагая $X_1(\vartheta)=\hat X_1(\vartheta)B,\ -\tau\le\vartheta<0$, преобразуем полученную систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\hat X_1(\vartheta)=\eta^\top(\vartheta)X_4(-0)-\eta^\top(-\tau)X_4(-\vartheta-\tau)$$

$$-\int_{-\tau}^{\vartheta}\Big(\frac{dX_4^\top(\xi)}{d\xi}\,\eta(\xi-\vartheta)+\eta^\top(\xi)\,\frac{dX_4(\xi-\vartheta)}{d\xi}+\hat X_1(\xi)\,\widetilde C_3(\alpha)\hat X_1^\top(\xi-\vartheta)\Big)\,d\xi,$$

$$\frac{dX_4^\top(\vartheta)}{d\vartheta}-\eta^\top(\vartheta)X_4(-0)+\eta^\top(-\tau)X_4(-\vartheta-\tau)+\hat X_1(\vartheta)\,\widetilde C_3(\alpha)\big(C+X_4^\top(-0)\big)$$

$$+\int_{-\tau}^{\vartheta}\Big(\frac{dX_4^\top(\xi)}{d\xi}\,\eta(\xi-\vartheta)+\eta^\top(\xi)\,\frac{dX_4(\xi-\vartheta)}{d\xi}+\hat X_1(\xi)\,\widetilde C_3(\alpha)\hat X_1^\top(\xi-\vartheta)\Big)\,d\xi=0.$$

Из последней системы уравнений следует равенство

$$\frac{dX_4^\top(\vartheta)}{d\vartheta}=\hat X_1(\vartheta)\big(I_n-\widetilde C_3(\alpha)\,(C+X_4^\top(-0))\big),\quad -\tau\le\vartheta<0. \tag{4.14}$$

В результате для матричной функции $\hat X_1(\vartheta),\ -\tau\le\vartheta<0$, получили интегральное уравнение

$$\hat X_1(\vartheta)+\big(\eta^\top(-\tau)-\eta^\top(\vartheta)\big)X_4(-0)-\eta^\top(-\tau)\big(I_n-\big(C+X_4(-0)\big)\,\widetilde C_3(\alpha)\big)\int_{-\vartheta-\tau}^{-0}\hat X_1^\top(\xi)\,d\xi$$

$$+\int_{-\tau}^{\vartheta}\big[\,\hat X_1(\xi)\big(I_n-\widetilde C_3(\alpha)\,(C+X_4^\top(-0))\big)\,\eta(\xi-\vartheta)$$

$$+\eta^\top(\xi)\big(I_n-(C+X_4(-0))\,\widetilde C_3(\alpha)\big)\,\hat X_1^\top(\xi-\vartheta)+\hat X_1(\xi)\,\widetilde C_3(\alpha)\hat X_1^\top(\xi-\vartheta)\,\big]\,d\xi=0. \tag{4.15}$$

Для данного интегро-дифференциального уравнения краевые условия имеют вид

$$X_4(-\tau)+K\,\eta(-\tau)=0, \tag{4.16}$$

$$X_4(-0)+X_4^\top(-0)+C-\big(C+X_4(-0)\big)\,\widetilde C_3(\alpha)\big(C+X_4^\top(-0)\big)=0. \tag{4.17}$$

Используя (4.14), (4.16), находим

$$X_4(-0)=\Big(\big(I_n-C\,\widetilde C_3(\alpha)\big)\int_{-\tau}^{-0}\hat X_1^\top(\xi)\,d\xi-K\eta(-\tau)\Big)\Big(I_n+\widetilde C_3(\alpha)\int_{-\tau}^{-0}\hat X_1^\top(\xi)\,d\xi\Big)^{-1}. \tag{4.18}$$

Подставляя (4.18) в (4.15), получим интегральное уравнение (4.3). Подставляя (4.18) в (4.17), имеем матричное алгебраическое уравнение Риккати (4.2).

Из (3.1) следует, что оптимальное стабилизирующее управление вспомогательной задачи удовлетворяет интегральному уравнению

$$C_3(\alpha)v(t)+B^\top\Big(\big(C+X_4^\top(-0)\big)\,y(t)+\int\limits_{-\tau}^{-0}\hat X_1^\top(\vartheta)\big(y(t+\vartheta)+Bv(t+\vartheta)\big)\,d\vartheta\Big)=0,\quad t>0,$$

$v(t)=0,\ t\in[-\tau,0]$. Подставляя (4.18) в последнее уравнение, приходим к (4.1).

Теорема доказана.

5. Оптимальное импульсное стабилизирующее управление

Покажем, что оптимальное управление регуляризованной вырожденной задачи импульсной стабилизации для автономной линейной системы дифференциальных уравнений с последействием (0.1), (0.2) является обобщенной функцией. Для нерегуляризованной вырожденной задачи импульсной стабилизации системы с запаздыванием обобщенные управления рассматривались в работе [21].

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и* $\det\Delta_3(\hat X_1,\alpha)\neq 0$, *где*

$$\Delta_3(\hat X_1,\alpha)=C_3(\alpha)-B^\top\Big(C-K(\alpha)\,\eta(-\tau)+\int\limits_{-\tau}^{-0}\hat X_1^\top(s,\alpha)\,ds\Big)\Big(I_n+\widetilde C_3(\alpha)\int\limits_{-\tau}^{-0}\hat X_1^\top(s,\alpha)\,ds\Big)^{-1}B.$$

Тогда оптимальное импульсное стабилизирующее управление задачи (0.1), (0.2) *при* $t>0$ *определяется формулами*

$$u^0(t,\alpha,x)=-C_3^{-1}(\alpha)B^\top\Big(\Delta^{-1\top}(\hat X_1,\alpha)\big(\Delta_1^\top(\hat X_1)-\eta^\top(-\tau)K(\alpha)\big)\,\varphi(0)+\int\limits_{-\tau}^{-0}\hat X_1^\top(s,\alpha)\varphi(s)\,ds\Big)\,\delta(t)$$

$$-\,C_3^{-1}(\alpha)B^\top\Big(\hat X_1^\top(-0,\alpha)-\Delta^{-1\top}(\hat X_1,\alpha)\,(\Delta_1^\top(\hat X_1)-\eta^\top(-\tau)K(\alpha))\,\eta(-0)\Big)\,x(t)$$

$$-\,C_3^{-1}(\alpha)B^\top\int\limits_{-\tau}^{-0}\Big[\,d_\vartheta\big(\Delta^{-1\top}(\hat X_1,\alpha)\,(\Delta_1^\top(\hat X_1)-\eta^\top(-\tau)K(\alpha))\,\eta(\vartheta)-\hat X_1^\top(\vartheta,\alpha)\big)\Big]\,x(t+\vartheta),\qquad(5.1)$$

где $\delta(\cdot)$ *— функция Дирака,* $\varphi\in\mathbb{H}$ *— начальная функция решения системы* (0.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В интегральном уравнении (4.1) проведем замену (1.1). Имеем

$$C_3(\alpha)v(t)+B^\top\Big(C-K(\alpha)\,\eta(-\tau)+\int\limits_{-\tau}^{-0}\hat X_1^\top(s,\alpha)\,ds\Big)\Big(I_n+\widetilde C_3(\alpha)\int\limits_{-\tau}^{-0}\hat X_1^\top(s,\alpha)\,ds\Big)^{-1}(x(t)-Bv(t))$$

$$+\,B^\top\int\limits_{-\tau}^{0-}\hat X_1^\top(\vartheta,\alpha)x(t+\vartheta)\,d\vartheta=0,\quad t>0.$$

Определяем импульсы задачи оптимальной импульсной стабилизации (0.1), (0.2)

$$v^0(t,\alpha,x)=-\Delta_3^{-1}(\hat X_1,\alpha)B^\top\Big[\Big(C-K(\alpha)\,\eta(-\tau)+\int\limits_{-\tau}^{-0}\hat X_1^\top(s,\alpha)\,ds\Big)\Big(I_n+\widetilde C_3(\alpha)\int\limits_{-\tau}^{-0}\hat X_1^\top(s,\alpha)\,ds\Big)^{-1}x(t)$$

$$+\int\limits_{-\tau}^{0} \hat{X}_1^\top(s,\alpha)x(t+s)\,ds\Big], \quad t>0.$$

Функция $v^0(t,\alpha,x)$, $t \geq 0$, дифференцируема на положительной полуоси, и $v^0(0,\alpha,x) = 0$. Тогда функция импульсов имеет одну точку разрыва первого рода при $t=0$. Для этой точки значение $v(+0,\alpha,x)$ описывает начальный импульс

$$v^0(+0,\alpha,x) = -\Delta_3^{-1}(\hat{X}_1,\alpha)B^\top\Big[\Big(C - K(\alpha)\,\eta(-\tau) + \int\limits_{-\tau}^{-0}\hat{X}_1^\top(s,\alpha)\,ds\Big)$$

$$\times\Big(I_n + \widetilde{C}_3(\alpha)\int\limits_{-\tau}^{-0}\hat{X}_1^\top(s,\alpha)\,ds\Big)^{-1}\varphi(0) + \int\limits_{-\tau}^{0}\hat{X}_1^\top(s,\alpha)\varphi(s)\,ds\Big].$$

Оптимальное стабилизирующее управление задачи (0.1), (0.2) задается обобщенной функцией и определяется формулой

$$u^0(t,\alpha,x) = v^0(+0,\alpha,x)\,\delta(t)$$

$$-\Delta_3^{-1}(\hat{X}_1,\alpha)B^\top\Big[\Big(C - K(\alpha)\,\eta(-\tau) + \int\limits_{-\tau}^{-0}\hat{X}_1^\top(s,\alpha)\,ds\Big)\Big(I_n + \widetilde{C}_3(\alpha)\int\limits_{-\tau}^{-0}\hat{X}_1^\top(s,\alpha)\,ds\Big)^{-1}\frac{dx(t)}{dt}$$

$$+\int\limits_{-\tau}^{-0}\hat{X}_1^\top(s,\alpha)\,\frac{dx(t+s)}{ds}\,ds\Big], \quad t>0.$$

Справедливы формулы для $t>0$:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\eta(-0)x(t) + \int\limits_{-\tau}^{-0}[d\eta(\vartheta)]\,x(t+\vartheta) + Bu^0(t,\alpha,x),$$

$$\int\limits_{-\tau}^{-0}\hat{X}_1^\top(s,\alpha)\,\frac{dx(t+s)}{ds}\,ds = \hat{X}_1^\top(-0,\alpha)x(t) - \int\limits_{-\tau}^{-0}\big[d\hat{X}_1^\top(s,\alpha)\big]\,x(t+s).$$

В результате находим формулу (5.1), определяющую оптимальное стабилизирующее управление задачи (0.1), (0.2).

Теорема доказана.

6. Асимптотика оптимального импульсного стабилизирующего управления

Рассмотрим условия выполнения требований теоремы 2 для случая, когда $r = n$ и $\det B \neq 0$. Будем искать асимптотические решения

$$K(\alpha) = K^1\alpha + K^2\alpha^2 + o(\alpha^2), \quad \hat{X}_1(\vartheta,\alpha) = \hat{X}_1^1(\vartheta)\,\alpha + \hat{X}_1^2(\vartheta)\,\alpha^2 + o(\alpha^2), \quad -\tau \leq \vartheta < 0,$$

уравнений (4.2), (4.3).

Учитывая асимптотику матричной функции $\widetilde{C}_3(\alpha) = C^{-1} + BC^{-2}B^\top + o(\alpha^2)$, вычисляем асимптотику коэффициентов матричного алгебраического уравнения Риккати

$$A(\hat{X}_1,\alpha) = A^1\alpha + A^2\alpha^2 + o(\alpha^2), \quad Q(\hat{X}_1,\alpha) = Q^1\alpha + Q^2\alpha^2 + o(\alpha^2),$$

$$D(\hat{X}_1,\alpha)=D^0+D^1\alpha+D^2\alpha^2+o(\alpha^2).$$

Находим

$$A^1=0,\quad A^2=-\eta(-\tau)\Big(BC^{-2}B^\top C+C^{-1}\int\limits_{-\tau}^{0}\hat{X}_1^2(s)\,ds+2\,C^{-1}\int\limits_{-\tau}^{0}\hat{X}_1^1(s)\,ds\,C^{-1}\int\limits_{-\tau}^{0}\hat{X}_1^1(s)\,ds\Big),$$

$$Q^1=0,\quad Q^2=CBC^{-2}B^\top C,\quad D^0=\eta(-\tau)\,C^{-1}\eta^\top(-\tau).$$

Обратимся к определению коэффициентов асимптотических решений уравнений (4.2), (4.3). Матрица K^1 совпадает с единственным положительно определенным решением уравнения $K^1D^0K^1=Q^2$. Матричная функция $\hat{X}_1^1(\vartheta)$, $-\tau\le\vartheta<0$, задается формулой $\hat{X}_1^1(\vartheta)=\big(\eta^\top(-\tau)-\eta^\top(\vartheta)\big)K^1\eta(-\tau)$, $-\tau\le\vartheta<0$. Асимптотическая формула для оптимального импульсного стабилизирующего управления имеет вид

$$u^0(t,\alpha,x)=-B^{-1}\Big(\big(I_n-C^{-1}\eta^\top(-\tau)K^1\alpha\big)\,\varphi(0)+C^{-1}\eta(-\tau)^\top K^1\int\limits_{-\tau}^{0}\big(\eta(-\tau)-\eta(\vartheta)\big)\,\varphi(\vartheta)\,d\vartheta\,\alpha\Big)\,\delta(t)$$

$$+B^{-1}\big(\eta(-0)-C^{-1}\eta^\top(-\tau)K^1\eta(-\tau)\alpha\big)\,x(t)-B^{-1}\int\limits_{-\tau}^{-0}[d\eta(\vartheta)]\,x(t+\vartheta)+O(\alpha^2),\quad t>0.$$

Заключение

С помощью полученного в работе оптимального закона управления аналогично [20] можно построить позиционный алгоритм управления. Этот алгоритм управления будет выглядеть следующим образом

$$u(t,\alpha,x_t(\cdot))=\Delta v(t,\alpha,x_t(\cdot))I(t,x_t(\cdot))+u_r(t,\alpha,x_t(\cdot)).$$

Здесь оператор $I(t,x_t(\cdot))$ (формализация действия оператора описана в работе [24]) обеспечивает сброс фазовой точки в каждый момент на многообразие

$$I(t,x_t(\cdot))=0.$$

Если на систему не действуют никакие возмущения, то этот оператор обеспечит сброс фазовой точки в начальный момент на многообразие и затем движение под действием позиционного управления будет происходить по этому многообразию (т. е. $I(t,x_t(\cdot))$=0, если позиция $t,x_t(\cdot)$ принадлежит этому многообразию при $t>0$). Таким образом при отсутствии возмущений позиционное управление будет совпадать с управлением (5.1). Если же в какой-то момент t эта позиция не принадлежит многообразию, то $I(t,x_t(\cdot))=\delta(\xi-t)$ и под действием импульса фазовая точка переместится на многообразие $I(t,x_t(\cdot))=0$. Если же система находится под действием постоянного возмущения, которое пытается сдвинуть фазовую точку с многообразия, то на этом многообразии возникает импульсно-скользящий режим. Строгую формализацию импульсно-скользящего режима можно посмотреть в работах [20; 24].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени // Прикл. математика и механика. 1962. Т. 26, вып. 1. С. 39–51.
2. **Красовский Н.Н.** Проблемы стабилизации управляемых движений // Теория устойчивости движений / ред. И. Г. Малкин. М.: Наука, 1966. 532 с.
3. **Хейл Дж.** Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.

4. **Долгий Ю.Ф., Сурков П.Г.** Математические модели систем с запаздыванием. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2012. 122 с.
5. **Delfour M.C., McCalla C., Mitter S.K.** Stability and the infinite-time quadratic cost problem for linear hereditary differential systems // SIAM J. Control. 1975. Vol. 13, no. 1. P. 48–88. doi: 10.1137/0313004
6. **Gibson J.S.** Linear-quadratic optimal control of hereditary differential systems: infinite dimensional Riccati equations and numerical approximations // SIAM J. Control Optimiz. 1983. Vol. 21, no. 5. P. 95–135. doi: 10.1137/0321006
7. **Fiagbedzi Y.A., Pearson A.E.** Feedback stabilization of linear autonomous time lag system // IEEE Trans. Automat. Control. 1986. Vol. 31. P. 847–855. doi: 10.1109/TAC.1986.1104417
8. **Хартовский В.Е.** Обобщение задачи полной управляемости дифференциальных систем с соизмеримыми запаздываниями // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 6. С. 3–11.
9. **Bensoussan A., Da Prato G., Delfour M.C., Mitter S.K.** Representation and control of infinite dimensional systems. Boston; Basel; Berlin: Bikhauser, 2007. 575 p.
10. **Wang G., Xu Y.** Periodic feedback stabilization for linear periodic evolution equations. NY; Heidelberg; Dordrecht; London: Springer, 2016. 127 p.
11. **Pandolfi L.** Stabilization of neutral functional differential equations // J. Optimization Theory Appl. 1976. Vol. 20, no. 2. P. 191–204. doi: 10.1007/BF01767451
12. **Yanushevsky R.T.** Optimal control of linear differential-difference systems of neutral type // Int. J. Control. 1989. Vol. 49, no. 6. P. 1835–1850.
13. **Rabah R., Sklyar G.M., Rezounenko A.V.** On strong regular stabilizability of linear neutral type systems // J. Diff. Eq. 2008. Vol. 245, no. 3. P. 569–593. doi: 10.1016/j.jde.2008.02.041
14. **Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е.** Управление системами с последействием. М.: Наука, 1992. 336 с.
15. **Красовский Н.Н.** Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 4. С. 716–724.
16. **Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.** О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15.
17. **Осипов Ю.С.** О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 5. С. 605–618.
18. **Маркушин Е.М., Шиманов С.Н.** Приближенное решение задачи аналитического конструирования для систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1968. № 3. С. 13–20.
19. **Dolgii Yu., Sesekin A.** Optimal pulse stabilization of autonomous linear systems of differential equations with aftereffect // Proc. Int. Conf. 15th International Conference of stability and oscillations of nonlinear control systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB 2020). IEEE, 2020. 4 p. doi: 10.1109/STAB49150.2020.9140479
20. **Андреева И.Ю., Сесекин А.Н.** Импульсная линейно-квадратичная задача оптимизации в системах с последействием // Изв. вузов. Математика. 1995. № 10. С. 10–14.
21. **Желонкина Н.И., Ложников А.Б., Сесекин А.Н.** Об оптимальной стабилизации импульсным управлением линейных систем с последействием // Автоматика и телемеханика. 2013. № 11. С. 39–48. doi: 10.1134/S0005117913110039
22. **Дмитриев М.Г., Курина Г.А.** Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–53. doi: 10.1134/S0005117906010012
23. **Долгий Ю.Ф., Сесекин А.Н.** Исследование регуляризации вырожденной задачи импульсной стабилизации системы с запаздыванием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, № 1. С. 74–95. doi: 10.21538/0134-4889-2022-28-1-74-95
24. **Завалищин С.Т., Сесекин А.Н.** Импульсно-скользящие режимы в нелинейных динамических системах // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 5. С. 790–799.

Поступила 24.08.2023
После доработки 17.10.2023
Принята к публикации 30.10.2023

Долгий Юрий Филиппович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
профессор

Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: yurii.dolgii@imm.uran.ru

Сесекин Александр Николаевич
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
профессор, зав. кафедрой
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: a.n.sesekin@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. On the analytic construction of an optimal control in a system with time lags. *J. Appl. Math. Mech.*, 1962, vol. 26, no. 1, pp. 50–67. doi: 10.1016/0021-8928(62)90101-6
2. Krasovskii N.N. Problems of stabilization of controlled motions. In: Malkin I.G., *Teoriya ustoichivosti dvizhenii* [Theory of stability of motions], Moscow, Nauka Publ., 1966, 532 p.
3. Hale J.K. *Theory of functional differential equations.* NY: Springer, 1977, 366 p. doi: 10.1007/978-1-4612-9892-2 . Translated to Russian under the title Teoriya funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii. Moscow: Mir Publ., 1984, 421 p.
4. Dolgii Yu.F., Surkov P.G. *Matematicheskie modeli dinamicheskikh sistem s zapazdyvaniem* [Matematical models of dynamic systems with delay]. Yekaterinburg, Ural State Univ. Publ., 2012, 122 p. ISBN: 978-5-7996-0772-2 .
5. Delfour M.C., McCalla C., Mitter S.K. Stability and the infinite-time quadratic cost problem for linear hereditary differential systems. *SIAM J. Control*, 1975, vol. 13, no. 1, pp. 48–88. doi: 10.1137/0313004
6. Gibson J.S. Linear-quadratic optimal control of hereditary differential systems: infinite dimensional Riccati equations and numerical approximations. *SIAM J. Control Optim.*, 1983, vol. 21, no. 5, pp. 95–135. doi: 10.1137/0321006
7. Fiagbedzi Y.A., Pearson A.E. Feedback stabilization of linear autonomous time lag system. *IEEE Trans. Automat. Control.*, 1986, vol. 31, pp. 847–855. doi: 10.1109/TAC.1986.1104417
8. Khartovskii V.E. A generalization of the problem of complete controllability for differential systems with commensurable delays. *J. Computer and Systems Sciences International*, 2009, vol. 48, no. 6, pp. 847–855. doi: 10.1134/S106423070906001X
9. Bensoussan A., Da Prato G., Delfour M.C., Mitter S.K. *Representation and control of infinite dimensional systems.* Boston; Basel; Berlin: Bikhauser, 2007, 575 p.
10. Wang G., Xu Y. Periodic feedback stabilization for linear periodic evolution equations. NY; Heidelberg; Dordrecht; London: Springer, 2016. 127 p.
11. Pandolfi L. Stabilization of neutral functional differential equations. *J. Optimization Theory Appl.*, 1976, vol. 20, no. 2, pp. 191–204. doi: 10.1007/BF01767451
12. Yanushevsky R.T. Optimal control of linear differential-difference systems of neutral type. *Int. J. Control.*, 1989, vol. 49, no. 6, pp. 1835–1850.
13. Rabah R., Sklyar G.M., Rezounenko A.V. On strong regular stabilizability of linear neutral type systems. *J. Diff. Eq.*, 2008, vol. 245, no. 3, pp. 569–593. doi: 10.1016/j.jde.2008.02.041
14. Andreeva E.A., Kolmanovskii V.B., Shaikhet L.E. *Upravlenie sistemami s posledeistviem* [Control of systems with aftereffect], Moscow, Nauka Publ., 1992, 336 p. ISBN: 5-02-014875-X .
15. Krasovskii N.N. The approximation of a problem of analytic design of controls in a system with time-lag. *J. Appl. Math. Mech.*, 1964, vol. 28, no. 4, pp. 876–885. doi: 10.1016/0021-8928(64)90073-5
16. Krasovskii N.N., Osipov Yu.S. On the stabilization of motions of a plant with delay in a control system. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Tekh. Kibern.*, 1963, no. 6, pp. 3–15 (in Russian).
17. Osipov Yu.S. Stabilization of control systems with delays. *Differ. Uravn.*, 1965, vol. 1, no. 5, pp. 605–618 (in Russian).
18. Markushin Ye.M., Shimanov S.N. Approximate solution of problem of designing regulator for time-lag systems. *Avtomatika i Telemekhanika*, 1968, no. 3, pp. 13–20 (in Russian).

19. Dolgii Yu., Sesekin A. Optimal pulse stabilization of autonomous linear systems of differential equations with aftereffect. In: *Proc. Int. Conf. 15th International Conference of stability and oscillations of nonlinear control systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB 2020)*. IEEE, 2020. 4 p. doi: 10.1109/STAB49150.2020.9140479
20. Andreeva I.Yu., Sesekin A.N. An impulse linear-quadratic optimization problem in systems with aftereffect. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1995, vol. 39, no. 10, pp. 8–12.
21. Zhelonkina N.I., Lozhnikov A.B., Sesekin A.N. On pulse optimal control of linear systems with aftereffect. *Autom. Remote Control*, 2013, vol. 74, no. 11, pp. 1802–1809. doi: 10.1134/S0005117913110039
22. Dmitriev M.G., Kurina G.A. Singular perturbations in control problems. *Autom. Remote Control*, 2006, vol. 67, no. 1, pp. 1–43. doi: 10.1134/S0005117906010012
23. Dolgii Yu.F., Sesekin A.N. Regularization analysis of a degenerate problem of impulsive stabilization for a system with time delay. *Trudy Inst. Math. Mekh. UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 1, pp. 74–95 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2022-28-1-74-95
24. Zavalishchin S.T., Sesekin A.N. Pulse-gliding regimes in nonlinear dynamical systems. *Differ. Uravn.*, 1983, vol. 19, no. 5, pp. 790–799 (in Russian).

Received August 24, 2023
Revised October 17, 2023
Accepted October 30, 2023

Yuriy Filippovich Dolgii, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekateriburg, 620000, Russia, e-mail: yurii.dolgii@imm.uran.ru .

Alexander Nikolaevich Sesekin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: a.n.sesekin@urfu.ru .

Cite this article as: Yu. F. Dolgii, A. N. Sesekin. A study of regularization for a degenerate problem of impulsive stabilization in a system with aftereffect. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 1, pp. 80–99 .