ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 1 2024

УДК 512.542

НЕПРОНОРМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ НЕЧЕТНЫХ ИНДЕКСОВ В КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ЛИНЕЙНЫХ И УНИТАРНЫХ ГРУППАХ[1]

В. Го, Н. В. Маслова, Д. О. Ревин

Подгруппа H группы G называется пронормальной, если для любого элемента $g \in G$ подгруппы H и H^g сопряжены в подгруппе $\langle H, H^g\rangle$. Известно, что значительная часть конечных простых групп обладает свойством $(*)$: любая подгруппа нечетного индекса пронормальна в группе. Гипотеза о том, что свойством $(*)$ обладает любая конечная простая группа, была выдвинута в 2012 г. в работе Е.П. Вдовина и третьего автора на основании анализа доказательства пронормальности всех холловых подгрупп в конечных простых группах. Однако эта гипотеза была опровергнута в 2016 г. в работе А. С. Кондратьева, второго и третьего авторов. В серии работ А. С. Кондратьева и авторов 2015–2020 гг. конечные простые группы со свойством $(*)$, за исключением простых линейных и унитарных групп с некоторыми ограничениями на естественные арифметические параметры, классифицированы. В настоящей работе строятся серии примеров непронормальных подгрупп нечетных индексов в конечных простых линейных и унитарных группах над полем нечетной характеристики и тем самым делается шаг на пути завершения классификации конечных простых групп со свойством $(*)$.

Ключевые слова: конечная группа, простая группа, линейная простая группа, унитарная простая группа, пронормальная подгруппа, нечетный индекс.

W. Guo, N. V. Maslova, D. O. Revin. Nonpronormal subgroups of odd index in finite simple linear and unitary groups.

A subgroup H of a group G is *pronormal* if, for each $g \in G$, the subgroups H and H^g are conjugate in $\langle H, H^g\rangle$. Most of finite simple groups possess the following property $(*)$: each subgroup of odd index is pronormal in the group. The conjecture that all finite simple groups possess the property $(*)$ was established in 2012 in a paper by E. P. Vdovin and the third author based on the analysis of the proof that Hall subgroups are pronormal in finite simple groups. However, the conjecture was disproved in 2016 by A. S. Kondrat'ev together with the second and third authors. In a series of papers by Kondrat'ev and the authors published from 2015 to 2020, the finite simple groups with the property $(*)$ except finite simple linear and unitary groups with some constraints on natural arithmetic parameters were classified. In this paper we construct series of examples of nonpronormal subgroups of odd indices in finite simple linear and unitary groups over a field of odd characteristic, thereby making a step towards completing the classification of finite simple groups with the property $(*)$.

Keywords: finite group, simple group, linear simple group, unitary simple group, pronormal subgroup, odd index.

MSC: 20D05 20D06 20D60

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-1-70-79

Введение

Подгруппа H группы G называется *пронормальной* в G (обозначение H prn G), если для любого элемента $g \in G$ подгруппы H и H^g сопряжены в подгруппе $\langle H, H^g\rangle$.

Понятие пронормальной подгруппы было введено Ф. Холлом [1] и оказалось весьма полезным. В терминах пронормальности допускают описание, а иногда могут быть полностью решены решены некоторые важные вопросы теории групп, алгебраической комбинаторики и других областей. Так, классификация CI-групп получена посредством исследования пронормальности регулярных подгрупп в симметрических группах [2; 3]. Ш. Прэгер [4] показала, что

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект 19-71-10067 (теорема 1) и Национального фонда естественных наук Китая, проекты 12171126 и 12371021; часть исследований выполнена в рамках государственного задания Института математики СО РАН, тема FWNF-2022-0002.

пронормальная подгруппа в конечной транзитивной группе подстановок степени n не может фиксировать более $(n-1)/2$ точек. Таким образом, надгруппы пронормальных подгрупп любой конечной группы удовлетворяют естественному необходимому условию пронормальности. Пронормальность тесно связана с широко используемым в теории групп и алгебраической комбинаторике рассуждением, известным как аргумент Фраттини (см. [5], лемма 4). О том, что изучение пронормальных подгрупп в теории групп вообще и теории конечных групп в частности является актуальной задачей, привлекающей внимание исследователей и имеющей многочисленные приложения, свидетельствует, например, обзор [6] и недавние работы [7–11].

Хорошо известными примерами пронормальных подгрупп являются такие классические объекты теории групп, как

- нормальные подгруппы;
- максимальные подгруппы;
- силовские подгруппы конечных групп;
- холловы подгруппы конечных разрешимых групп.

В [12] было доказано, что все холловы подгруппы пронормальны в конечных простых группах, и выдвинута гипотеза, согласно которой в конечных простых группах все подгруппы нечетных индексов (т. е. надгруппы силовских 2-подгрупп) пронормальны. Эта гипотеза инициировала серию работ [5; 13–19] А. С. Кондратьева и авторов. Вначале в [13] гипотезу удалось подтвердить для большого массива конечных простых групп. Однако довольно скоро в следующей работе [14] гипотеза была опровергнута, и вместо нее возникла программа классификации конечных простых групп, в которых все подгруппы нечетных индексов пронормальны. В статьях [5; 15–17] 2017–2020 гг. для всех конечных простых групп за исключением групп $PSL_n(q)$ и $PSU_n(q)$, где q нечетно, а n не является степенью двойки, такая классификация была получена. Алгоритм частичной редукции вопроса о пронормальности подгруппы нечетного индекса в произвольной конечной группе к исследованию пронормальности подгрупп нечетных индексов в ее композиционных факторах можно найти в ([18], § 10). Более того, важные в техническом отношении вопросы пронормальности подгрупп нечетных индексов в расширениях групп специального вида исследовались в [5; 19].

В настоящей работе мы строим примеры непронормальных подгрупп нечетных индексов в конечных простых линейных и унитарных группах, тем самым делая шаг на пути к завершению классификации конечных простых групп, в которых все подгруппы нечетных индексов пронормальны.

Рассмотрим на множестве натуральных чисел частичный порядок $\preceq$. Для двух натуральных чисел a и b с двоичным разложением

$$a = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \cdot 2^i \quad \text{и} \quad b = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \cdot 2^i,$$

где $\alpha_i, \beta_i \in \{0, 1\}$ и почти все a_i и b_i равны нулю, положим

$$a \preceq b \ \text{ тогда и только тогда, когда } \ \alpha_i \leq \beta_i \ \text{ для всех } \ i.$$

Ясно, что отношение $\preceq$ является подпорядком естественного линейного порядка. Отметим также, что для чисел a и b таких, что $a < b$, утверждения $a \preceq b$ и $b - a \preceq b$ равносильны.

Пусть p — простое число и n — натуральное число. Через n_p будем обозначать p-часть числа n, т. е. наибольшую степень числа p, которая делит число n.

Следуя [20;21], будем обозначать группы $GL_n(q)$, $SL_n(q)$, $PGL_n(q)$ и $PSL_n(q)$ через $GL_n^+(q)$, $SL_n^+(q)$, $PGL_n^+(q)$ и $PSL_n^+(q)$ соответственно, а группы $GU_n(q)$, $SU_n(q)$, $PGU_n(q)$ и $PSU_n(q)$ — через $GL_n^-(q)$, $SL_n^-(q)$, $PGL_n^-(q)$ и $PSL_n^-(q)$ соответственно.

Цель работы — доказать следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\overline{G} = PSL_n^{\varepsilon}(q)$, *где* $n \geq 3$, $\varepsilon \in \{+,-\}$ *и* q *является степенью простого нечетного числа. Допустим,* $q \equiv \varepsilon 1 \pmod 4$ *и существует натуральное число* m *такое, что* $m \prec n$ *и число* $(q-\varepsilon 1, m)$ *не является степенью двойки. Тогда* $\overline{G}$ *содержит непронормальную подгруппу нечетного индекса.*

Теорема 2. *Пусть* $\overline{G} = PSL_n(q)$, *где* $n \geq 3$, q *нечетно,* $q = q_0^r$ *для нечетного простого числа* r, *при этом* r *не делит* $q_0 - 1$, *и существует число* $m \prec n$ *такое, что* $\left(\dfrac{q-1}{q_0-1}, m\right) \neq 1$. *Тогда группа* $\overline{G}$ *содержит непронормальную подгруппу нечетного индекса.*

Из доказательства теоремы 1 видно, что для получения классификации конечных простых линейных и унитарных групп, в которых все подгруппы нечетного индекса пронормальны, было бы полезно иметь решение следующей проблемы.

Проблема 1. Пусть m и n — натуральные числа, и пусть

$$G = \mathbb{Z}_m \wr S_n.$$

Для каких пар подгрупп (H, K) таких, что $H \leq K \leq G$, индекс $|G : H|$ нечетен и H prn K?

1. Определения, обозначения и вспомогательные результаты

Пусть G — конечная группа и p — простое число. Через $O_p(G)$ мы будем обозначать p-радикал группы G, т. е. наибольшую нормальную подгруппу группы G, порядок которой является степенью числа p.

Лемма 1 ([22], теоремы 2, 3, 7, 8; [23], теорема; [24], предложение 1). *Пусть* $G = PSL_n^{\varepsilon}(q)$, *где* $n \geq 3$, $q = p^l$, p — *нечетное простое число,* $\varepsilon \in \{+,-\}$ *и* V — n-*мерное векторное пространство над полем* $\mathbb{F}_q$ *или* $\mathbb{F}_{q^2}$, *естественным образом ассоциированное с группой* G.

(*a*) *Подгруппа* M *является максимальной подгруппой нечетного индекса в* G *тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $M = C_G(\sigma)$, *где* σ — *полевой автоморфизм группы* G *нечетного простого порядка* r, *делящего* l;

(2) $\varepsilon = +$ *и* M — *стабилизатор в* G *подпространства размерности* m *пространства* V, *где* $1 \leq m \leq n-1$ *и* $m \prec n$;

(3) $\varepsilon = -$ *и* M — *стабилизатор в* G *невырожденного подпространства размерности* m *пространства* V, *где* $1 \leq m < n/2$ *и* $m \prec n$;

(4) $\varepsilon = +$, M — *стабилизатор в* G *разложения* $V = \bigoplus V_i$ *пространства* V *в прямую сумму подпространств* V_i *размерности* m *и справедливо одно из следующих условий*:

(*i*) $m = 2^w \geq 2$ *и* $(n, m, q) \neq (4, 2, 3)$;

(*ii*) $m = 1$, $q \equiv 1 \pmod 4$ *и* $(n, q) \neq (4, 5)$ (*при* $(n, q) = (4, 5)$ *подгруппа* M *не максимальна в* G, *однако индекс* $|G : M|$ *нечетен*);

(5) $\varepsilon = -$, M — *стабилизатор в* G *ортогонального разложения* $V = \bigoplus V_i$ *пространства* V *в прямую сумму попарно изометричных невырожденных подпространств* V_i *размерности* m, *и выполняется одно из следующих условий*:

(*i*) $m = 2^w \geq 2$;

(*ii*) $m = 1$, $q \equiv 3 \pmod 4$ *и* $(n, q) \neq (4, 3)$ (*при* $(n, q) = (4, 3)$ *подгруппа* M *не максимальна в* G, *однако индекс* $|G : M|$ *нечетен*);

(6) $G = PSL_3^-(5)$ *и* $M \cong M_{10}$;

(7) $n = 4$, $q \equiv \varepsilon 5 \pmod 8$ *простое и* $M \cong 2^4.A_6$;

(8) $n = 4$, $q \equiv \varepsilon 3 \pmod 4$ *и* $H \cong PSp_4(q).2$.

(*b*) *Пусть* $\varepsilon = +$ *и* H — *стабилизатор в* G *разложения* $V = U \oplus W$ *в прямую сумму подпространств* U *и* W *таких, что* $dim(U) = m$ *и* $dim(W) = n - m$. *Тогда индекс* $|G : H|$ *нечетен тогда и только тогда, когда* $m \prec n$.

Лемма 2 ([13], лемма 5). *Пусть H и M — подгруппы конечной группы G, причем $H \leq M$. Справедливы следующие утверждения*:

(1) *если H prn G, то H prn M*;

(2) *если $S \leq H$ для некоторой силовской подгруппы S группы G, причем $N_G(S) \leq M$ и H prn M, то H prn G.*

Лемма 3 ([13], лемма 3). *Пусть H — подгруппа, N — нормальная подгруппа конечной группы G и $^{-} : G \to G/N$ — естественный эпиморфизм. Справедливы следующие утверждения*:

(1) *если H prn G, то $\overline{H}$ prn $\overline{G}$*;

(2) *если $N \leq H$ и $\overline{H}$ prn $\overline{G}$, то H prn G.*

В частности, подгруппа H нечетного индекса пронормальна в G тогда и только тогда, когда подгруппа $H/O_2(G)$ пронормальна в $G/O_2(G)$.

Лемма 4 ([14], теорема 1). *Пусть H и V — подгруппы конечной группы G такие, что V — абелева нормальная подгруппа в G и $G = HV$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *Подгруппа H пронормальна в G.*

(2) *$U = N_U(H)[H, U]$ для любой H-инвариантной подгруппы $U \leq V$.*

Зафиксируем в оставшейся части работы следующие обозначения и соглашения. Пусть G — одна из групп $GL_n^\varepsilon(q)$, $SL_n^\varepsilon(q)$, $PGL_n^\varepsilon(q)$, $PSL_n^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$, и пусть V — векторное пространство, естественным образом ассоциированное с группой G. Зафиксируем базис (ортонормированный в случае $\varepsilon = -$) $\mathfrak{B} = \{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ пространства V, и пусть U — подпространство (автоматически невырожденное в случае $\varepsilon = -$) пространства V, порожденное первыми m векторами этого базиса. Пусть черта

$$^{-} : GL_n^\varepsilon(q) \to PGL_n^\varepsilon(q)$$

обозначает канонический эпиморфизм по модулю группы скалярных матриц.

2. Доказательство теоремы 1

Сначала докажем следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть $\overline{G} = PGL_n^\varepsilon(q)$, где $n \geq 3$, $\varepsilon \in \{+, -\}$ и $q \equiv \varepsilon 1 \pmod 4$ является степенью простого нечетного числа. Допустим, $(q - \varepsilon 1, n)$ не является степенью двойки. Тогда группа $\overline{G}$ содержит непронормальную подгруппу нечетного индекса.*

Доказательство. Пусть $G = GL_n^\varepsilon(q)$ и H — подгруппа в G, порожденная всеми мономиальными матрицами $g(i, j)$, где $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, такими, что

$$e_k g(i, j) = \begin{cases} e_j, & \text{если } k = i; \\ e_i, & \text{если } k = j; \\ e_k, & \text{если } k \notin \{i, j\}. \end{cases}$$

Тогда группа H действует точно на одномерных подпространствах, порожденных векторами базиса $\mathfrak{B}$, как полная симметрическая группа степени n, поскольку образ $g(i, j)$ при этом действии — транспозиция подпространств, порожденных векторами e_i и e_j.

Пусть D — подгруппа группы G, состоящая из всех диагональных матриц. Тогда $D \cong \mathbb{Z}_{q-\varepsilon 1}^n$, $H \cap D = 1$ и если H_1 — стабилизатор в G разложения пространства V в сумму одномерных подпространств, порожденных векторами базиса $\mathfrak{B}$, то

$$H_1 = DH \cong \mathbb{Z}_{q-\varepsilon 1} \wr S_n.$$

Отметим, что ввиду пп. $(a)(4)$ и $(a)(5)$ леммы 1 подгруппа H_1 будет иметь нечетный индекс в группе G.

Пусть $T = O_2(D)$ и $X = HT$. Тогда индекс $|G : X|$ также нечетен. Покажем, что образ подгруппы $\overline{X}$ в факторгруппе $\overline{G}$ является непронормальной подгруппой. Из условия следует, что существует нечетное простое число r такое, что $(q - \varepsilon 1)_r = r^k > 1$, причем r делит n. Положим $W = O_r(D)$. Тогда W — гомоциклическая группа, изоморфная прямому произведению n копий циклической группы порядка r^k. Покажем, что подгруппа $\overline{X}$ не пронормальна в подгруппе $\overline{XW}$. Отсюда и из п. (1) леммы 2 будет следовать непронормальность подгруппы $\overline{X}$ в $\overline{G}$.

Рассмотрим в W подгруппы

$$W^+ = \{(w, w, \dots, w) \mid w \in \mathbb{Z}_{r^k}\} \ \text{ и } \ W^- = \{(w_1, w_2, \dots, w_n) \mid w_i \in \mathbb{Z}_{r^k}, \sum_{i=1}^{n} w_i = 0\}.$$

Ясно, что ядро ограничения гомоморфизма $\overline{}$ на XW содержится в WT и совпадает с подгруппой $W^+(T \cap \ker(\overline{}))$. Тем самым по лемме 3 непронормальность подгруппы $\overline{X}$ в $\overline{XW}$ равносильна непронормальности подгруппы XW^+ в XW. Подгруппа $T = O_2(X)$ является нормальной в XW и содержится в XW^+, поэтому ввиду п. (1) леммы 3 достаточно показать, что подгруппа HW^+, канонически изоморфная подгруппе XW^+/T, не пронормальна в подгруппе $HW \cong XW/T$. Чтобы показать это, установим, что $[HW^+, W]N_W(HW^+) < W$, после чего воспользуемся леммой 4.

Легко видеть, что $[HW^+, W] \le W^-$. Покажем, что $N_W(HW^+) = W^+$.

$$N_W(HW^+) = \{w \in W \mid (w^+h)^w \in W^+H \text{ для каждого } h \in H \text{ и } w^+ \in W^+\}.$$

Теперь $(w^+h)^w = w^+[w, h^{-1}]h$, поэтому включение $(w^+h)^w \in W^+H$ означает, что для любых $h \in H$ и $w \in N_W(HW^+)$ выполнено $[w, h^{-1}] \in W^+H \cap W = W^+$. В частности, если

$$w = (w_1, \dots, w_n) \in N_W(HW^+),$$

то $[w, g(i,j)] = [w, g(i,j)^{-1}] \in W^+$ для любых различных $i, j = 1, \dots, n$. Все компоненты вектора $[w, g(i,j)]$ нулевые, за исключением компонент с номерами i и j, где стоят $\pm(w_i - w_j)$, причем, поскольку $n \ge 3$, по крайней мере одна нулевая компонента в $[w, g(i,j)]$ присутствует. Из включения $[w, g(i,j)] \in W^+$ вытекает, что все компоненты $[w, g(i,j)]$ нулевые. В частности, $w_i = w_j$, и это равенство верно для любых различных индексов i и j. Тем самым доказано, что $N_W(HW^+) = W^+$.

Теперь пусть Z^0 — (единственная) подгруппа индекса r в $\mathbb{Z}_{r^k}$ и в группе W рассмотрим подгруппу

$$W^0 = \{(w_1, \dots, w_n) \mid w_1 + \dots + w_n \in Z^0\}.$$

Ясно, что $W^- \le W^0$, а из того, что r делит n, следует также, что $W^+ \le W^0$. Поэтому

$$[HW^+, W] \cdot N_W(HW^+) \le W^- \cdot W^+ \le W^0 < W.$$

Отсюда и из леммы 4 следует, что подгруппа W^+H не пронормальна в группе WH.

Предложение доказано.

Доказательство теоремы 1. Пусть $G = SL_n^{\varepsilon}(q)$, $m \prec n$ и M — стабилизатор в G разложения подпространства V в прямую сумму подпространств U и W, порожденных соответственно первыми m и последними $n - m$ векторами базиса $\mathfrak{B}$. Из пп. $(a)(3)$ и (b) леммы 1 следует, что индекс $|G : M|$ нечетен, поэтому нечетен индекс $|\overline{G} : \overline{M}|$. По предложению 4.1.1 из [21] существует сюръективный гомоморфизм из M на $GL_m(q)$, из чего вытекает существование сюръективного гомоморфизма

$$\phi : \overline{M} \to PGL_m(q).$$

По предложению 1 группа $\phi(\overline{M}) = PGL_m(q)$ содержит непронормальную подгруппу X нечетного индекса. Тогда полный прообраз Y в $\overline{M}$ группы X будет непронормальной подгруппой в группе $\overline{M}$ ввиду п. (1) леммы 3. Теперь из п. (1) леммы 2 следует, что подгруппа Y не пронормальна в $\overline{G}$. При этом $|\overline{G}|_2 = |\overline{M}|_2 = |Y|_2$, откуда индекс $|\overline{G} : Y|$ нечетен.

Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть $\overline{G} = PSL_n(q)$, где $n \geq 3$, $q = q_0^r$ для нечетного простого числа r, при этом r не делит $q_0 - 1$, и существует $m \prec n$ такое, что $\left(\dfrac{q-1}{q_0-1}, m\right) \neq 1$. По п. $(a)(2)$ леммы 1 стабилизатор P в G подпространства $U = \langle e_1, \dots e_m\rangle$, порожденного первыми m векторами базиса $\mathfrak{B}$, является параболической максимальной подгруппой нечетного индекса в G.

Поскольку $q = q_0^r$, группа $\overline{G}$ допускает полевой авторморфизм σ порядка r. По п. $(a)(1)$ леммы 1 подгруппа $M = C_{\overline{G}}(\sigma)$ будет максимальной подгруппой нечетного индекса в $\overline{G}$, причем ввиду предложения 4.9.1 в [20] M является подгруппой группы $PGL_n(q_0) \leq PGL_n(q)$, содержащей ее цоколь $L = PSL_n(q_0)$, который лежит в $\overline{G} = PSL_n(q)$. Индекс $|M : L|$ также нечетен, так как $(q^i - 1)_2 = (q_0^i - 1)_2$ для любого числа i (доказательство этого простого факта можно найти, например, ([22], лемма 9), следовательно, $|\overline{G}|_2 = |L|_2$.

Рассмотрим поле $\mathbb{F}_q$ как линейное пространство размерности r над полем $\mathbb{F}_{q_0}$, и пусть $\alpha_1 = 1, \alpha_2 \dots \alpha_r$ — базис $\mathbb{F}_q$ над $\mathbb{F}_{q_0}$. Тогда на множестве V задается структура линейного пространства V' размерности nr над полем $\mathbb{F}_{q_0}$ с базисом

$$\{\alpha_i e_j \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n\}.$$

Подгруппа M в $\overline{G}$ стабилизирует в V' подпространства

$$V_i' = \langle \alpha_i e_1, \dots, \alpha_i e_n\rangle_{\mathbb{F}_{q_0}}$$

и действует на этих пространствах естественным образом и согласованно.

Рассмотрим подпространство $U' = \langle e_1, \dots, e_m\rangle_{\mathbb{F}_{q_0}} = V_1'$ пространства V'. По п. $(a)(2)$ леммы 1 стабилизатор P_0 в L подпространства U' является параболической максимальной подгруппой в L. При этом P_0 содержится в P и индекс $|P : P_0|$ нечетен, поскольку P_0 содержит силовскую 2-подгруппу группы $\overline{G}$. Более того, унипотентный радикал $O_p(P_0)$ группы P_0 содержится в унипотентном радикале $O_p(P)$ группы P. Покажем, что в группе P_0 можно выбрать силовскую 2-подгруппу S так, что подгруппа $H = O_p(P_0)S$, имеющая в $\overline{G}$ нечетный индекс, будет не пронормальна в $\overline{G}$.

Пусть $k = \left(\dfrac{q-1}{q_0-1}, m\right)$, λ — порождающий элемент мультипликативной группы поля $\mathbb{F}_q$ и $\lambda_0 = \lambda^{(q-1)/k}$. Из определения следует, что мультипликативный порядок элемента λ_0 равен k. Рассмотрим линейное отображение $g : V \to V$ такое, что

$$e_i g = \begin{cases} \lambda_0 e_i, & \text{если } i \leq m, \\ e_i, & \text{если } i > m. \end{cases}$$

Элемент g лежит в $SL_n(q)$, так как k делит m и, значит, $\lambda_0^m = 1$. Кроме того, $\overline{g} \in P$. Теперь заметим, что поскольку r не делит $q_0 - 1$, выполняются равенства $\left(\dfrac{q-1}{q_0-1}, q_0 - 1\right) = 1$ и, следовательно, $(k, q_0 - 1) = 1$, поэтому λ_0 не лежит в $\mathbb{F}_{q_0}$.

Рассмотрим элемент (трансвекцию) $x \in SL_n(q)$ такой, что $e_i x = e_i$ для $i < n$ и $e_n x = e_1 + e_n$. Ясно, что $\overline{x} \in P_0$ и, более того, $\overline{x} \in O_p(P_0)$. При этом $e_n x^g = \lambda_0 e_1 + e_n$, откуда заключаем, что элемент $\overline{x^g}$ не содержится в M, а значит, и в P_0. В частности, $P_0^{\overline{g}} \neq P_0$ и $O_p(P_0)^{\overline{g}} \neq O_p(P_0)$.

С другой стороны, силовскую 2-подгруппу S группы P_0 можно взять так, чтобы элемент $\overline{g}$ централизовал S, поскольку $\overline{g}$ содержится в центре дополнения Леви C группы P, $|P : C| = |O_p(P)|$ — нечетное число и C содержит дополнение Леви группы P_0. При таком выборе для подгруппы $H = O_p(P_0)S$ получим равенства $H^{\overline{g}} = O_p(P_0)^{\overline{g}}S$ и

$$\langle H, H^{\overline{g}} \rangle = \langle O_p(P_0), O_p(P_0)^{\overline{g}}, S \rangle.$$

Если предположить, что H пронормальна в $K = \langle H, H^{\overline{g}} \rangle$, то подгруппы H и $H^{\overline{g}}$ будут сопряжены в K. Тогда и подгруппы $O_p(P_0) = O_p(H)$ и $O_p(P_0)^{\overline{g}} = O_p(H^{\overline{g}})$ тоже будут сопряжены в K. Однако каждая из подгрупп $O_p(P_0)$ и $O_p(P_0)^{\overline{g}}$ нормальна в K: они нормализуют друг друга, так как содержатся в абелевой подгруппе $O_p(P)$ и нормализуются подгруппой S; противоречие. Значит, подгруппа H не пронормальна в группе $\overline{G}$.

Теорема доказана.

Заключение

В данной работе в теоремах 1 и 2 построены примеры непронормальных подгрупп нечетных индексов в конечных простых линейных и унитарных группах. В дальнейшем планируется продолжить исследование вопроса: в каких конечных простых линейных и унитарных группа все подгруппы нечетных индексов пронормальны?

Предполагается использовать следующую схему исследования. Пусть $\overline{G}$ — конечная простая линейная или унитарная группа над полем нечетной характеристики, $\overline{H}$ — подгруппа нечетного индекса в $\overline{G}$, вопрос пронормальнойти которой в $\overline{G}$ нужно исследовать, $\overline{g} \in \overline{G}$ и $\overline{K} = \langle \overline{H}, \overline{H}^{\overline{g}} \rangle$. Если $\overline{K} = \overline{G}$, то подгруппа $\overline{H}$ пронормальна в группе $\overline{G}$ по определению. Если же $\overline{K} < \overline{G}$, то найдется максимальная в $\overline{G}$ подгруппа $\overline{M}$ такая, что $\overline{K} \leq \overline{M}$. Легко понять, что индекс $|\overline{G} : \overline{M}|$ также нечетен.

По п. (1) леммы 2 если подгруппа $\overline{H}$ не пронормальна в подгруппе $\overline{M}$, то $\overline{H}$ не пронормальна и в $\overline{G}$. Более того, по п. (2) леммы 2 если S — силовская 2-подгруппа группы $\overline{G}$, содержащаяся в $\overline{H}$, и если при этом $N_{\overline{G}}(S) \leq \overline{M}$, то подгруппа $\overline{H}$ пронормальна в подгруппе $\overline{M}$ тогда и только тогда, когда она пронормальна в $\overline{G}$. Нормализаторы силовских 2-подгрупп в конечных простых группах описаны А. С. Кондратьевым [25]. Из этого результата и из описания максимальных подгрупп нечетных индексов в конечных простых линейных и унитарных группах, приведенного в лемме 1, следует, что часто максимальные подгруппы нечетных индексов в конечных простых линейных и унитарных группах содержат нормализатор своей силовской 2-подгруппы.

Таким образом, для завершения классификации конечных простых групп, в которых все подгруппы нечетных индексов пронормальны, необходимо решить следующую проблему.

Проблема 2. $\overline{G}$ — конечная простая линейная или унитарная группа и $\overline{M}$ — максимальная подгруппа нечетного индекса в $\overline{G}$. Определить, являются ли пронормальными в $\overline{M}$ все ее подгруппы нечетных индексов?

Для решения проблемы 2 планируется использовать описание строения группы $\overline{M}$ из леммы 1, а также разработанные ранее методы исследования пронормальности подгрупп нечетных индексов в расширениях конечных групп специального вида, полученные в ([5], теорема 1) и ([19], предложение 4). Более того, из доказательства теоремы 1 видно, что для решения проблемы 2 в случае, когда $\overline{M}$ — группа из пп. $(a)(4)$ и $(a)(5)$ леммы 1, полезно было бы иметь решение проблемы 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Hall P.** Phillip Hall's lecture notes on group theory — Part 6 / Cambridge: University of Cambridge, 1951–1967. URL: http://omeka.wustl.edu/omeka/items/show/10788 .

2. **Babai L.** Isomorphism Problem for a Class of Point-Symmetric Structures // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1977. Vol. 29. P. 329–336. doi: 10.1007/BF01895854
3. **Palfy P.P.** Isomorphism Problem for Relational Structures with a Cyclic Automorphism // Europ. J. Combinatorics. 1987. Vol. 8, no. 1. P. 35–43. doi: 10.1016/S0195-6698(87)80018-5
4. **Praeger Ch.E.** On transitive permutation groups with a subgroup satisfying a certain conjugacy condition // J. Austral. Math. Soc. 1984. Vol. 36, № 1. P. 69–86. doi: 10.1017/S1446788700027348
5. **Го В., Маслова Н.В., Ревин Д.О.** О пронормальности подгрупп нечетных индексов в некоторых расширениях конечных групп // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 59, № 4. С. 773–790. doi: 10.17377/smzh.2018.59.404
6. **de Giovanni F., Trombetti M.** Pronormality in group theory // Adv. Group Theory Appl. 2020. Vol. 9. P. 123–149. doi: 10.32037/agta-2020-005
7. **Brescia M., Ferrara M., Trombetti M.** Groups whose subgroups are either abelian or pronormal // Kyoto J. Math. 2023. Vol. 63, no. 3. P. 471–500. doi: 10.1215/21562261-10607307
8. **Brescia M., Trombetti M.** Locally finite simple groups whose non-Abelian subgroups are pronormal // Comm. Algebra. 2023. Vol. 51, no. 8. P. 3346–3353. doi: 10.1080/00927872.2023.2182604
9. **Ferrara M., Trombetti M.** Groups with many pronormal subgroups // Bull. Austral. Math. Soc. 2022. Vol. 105, no. 1. P. 75–86. doi: 10.1017/S0004972721000277
10. **Ferrara M., Trombetti M.** Locally finite simple groups whose nonnonilpotent subgroups are pronormal // Bull. Austral. Math. Soc.: publ. online. 2023. P. 1–10. doi: 10.1017/S0004972723000576
11. **Ferrara M., Trombetti M.** Periodic linear groups in which permutability is a transitive relation // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 2024. Vol. 203, no. 1. P. 361–383. doi: 10.1007/s10231-023-01367-2
12. **Вдовин Е. П., Ревин Д.О.** Пронормальность холловых подгрупп в конечных простых группах // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 3. С. 527–542.
13. **Кондратьев А.С., Маслова Н.В., Ревин Д.О.** О пронормальности подгрупп нечетного индекса в конечных простых группах // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1375–1383. doi: 10.17377/smzh.2015.56.614
14. **Кондратьев А.С., Маслова Н.В., Ревин Д.О.** Критерий пронормальности добавлений к абелевым нормальным подгруппам // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 1. С. 153–158.
15. **Кондратьев А.С., Маслова Н.В., Ревин Д.О.** О пронормальности подгрупп нечетных индексов в конечных простых симплектических группах // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 3. С. 599–610. doi: 10.17377/smzh.2017.58.310
16. **Кондратьев А.С., Маслова Н.В., Ревин Д.О.** О пронормальных подгруппах в конечных простых группах // Докл. РАН. 2018. Т. 482, № 1. С. 7–11. doi: 10.31857/S086956520003121-6
17. **Kondrat'ev A.S., Maslova N.V., Revin D.O.** Finite simple exceptional groups of Lie type in which all the subgroups of odd index are pronormal // J. Group Theory. 2020. Vol. 23. P. 999–1016. doi: 10.1515/jgth-2020-0072
18. **Kondrat'ev A.S., Maslova N.V., Revin D.O.** On the pronormality of subgroups of odd index in finite simple groups // Groups St Andrews 2017 in Birmingham / eds. C.M. Campbell, M.R. Quick, C.W. Parker, E.F. Robertson, C.M. Roney-Dougal. Cambridge: Cambridge Univ. Press., 2019. P. 406–418 (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; vol. 455). doi: 10.1017/9781108692397.016
19. **Maslova N.V., Revin D.O.** On the pronormality of subgroups of odd index in some direct products of finite groups // J. Algebra Appl. 2023. Vol. 22, no. 04. Art. number 2350083. doi: 10.1142/S0219498823500834
20. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups. Number 3. Math. Surv. Monogr. 1994. Vol. 40, no. 3. 419 p. ISBN: 978-0-8218-0391-2 .
21. **Kleidman P., Liebeck M.** The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 303 p. doi: 10.1017/CBO9780511629235
22. **Маслова Н.В.** Классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных простых классических группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 100–118.
23. **Maslova N.V.** Classification of maximal subgroups of odd index in finite simple classical groups: Addendum // Sib. Electron. Math. Reports. 2018. Vol. 15. P. 707–718. doi: 10.17377/semi.2018.15.056
24. **Маслова Н.В.** Максимальные подгруппы нечётного индекса в конечных группах с простым линейным, унитарным или симплектическим цоколем // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 2. С. 189–208.
25. **Кондратьев А.С.** Нормализаторы силовских 2-подгрупп в конечных простых группах // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 3. С. 368–376. doi: 10.4213/mzm2593

Поступила 05.12.2023
После доработки 08.01.2024
Принята к публикации 15.01.2024

Го Вэньбинь
д-р физ.-мат. наук
профессор
Школа математики и статистики, Хайнаньский университет;
профессор
Университет науки и технологии Китая
e-mail: wbguo@ustc.edu.cn

Маслова Наталья Владимировна
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
профессор
Уральский федеральный университет
e-mail: butterson@mail.ru

Ревин Данила Олегович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН;
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: revin@math.nsc.ru

REFERENCES

1. Hall P. *Phillip Hall's lecture notes on group theory — Part 6.* Cambridge: University of Cambridge, 1951–1967. Available at: http://omeka.wustl.edu/omeka/items/show/10788 .
2. Babai L. Isomorphism Problem for a Class of Point-Symmetric Structures. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, 1977, vol. 29, p. 329–336. doi: 10.1007/BF01895854
3. Palfy P.P. Isomorphism Problem for Relational Structures with a Cyclic Automorphism. *Europ. J. Combinatorics*, 1987, vol. 8, no. 1, pp. 35–43. doi: 10.1016/S0195-6698(87)80018-5
4. Praeger Ch.E. On transitive permutation groups with a subgroup satisfying a certain conjugacy condition. *J. Austral. Math. Soc.*, 1984, vol. 36, no. 1, p. 69–86. doi: 10.1017/S1446788700027348
5. Guo, W., Maslova, N.V., Revin, D.O. On the pronormality of subgroups of odd index in some extensions of finite groups. *Sib. Math. J.*, 2018, vol. 59, no., 4, p. 610–622. doi: 10.1134/S0037446618040043
6. de Giovanni F., Trombetti M. Pronormality in group theory. *Adv. Group Theory Appl.*, 2020, vol. 9, pp. 123–149. doi: 10.32037/agta-2020-005
7. Brescia M., Ferrara M., Trombetti M. Groups whose subgroups are either abelian or pronormal. *Kyoto J. Math.*, 2023, vol. 63, no. 3, pp. 471–500. doi: 10.1215/21562261-10607307
8. Brescia M., Trombetti M. Locally finite simple groups whose non-Abelian subgroups are pronormal. *Comm. Algebra*, 2023, vol. 51, no. 8, pp. 3346–3353. doi: 10.1080/00927872.2023.2182604
9. Ferrara M., Trombetti M. Groups with many pronormal subgroups. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 2022, vol. 105, no. 1, pp. 75–86. doi:10.1017/S0004972721000277
10. Ferrara M., Trombetti M. Locally finite simple groups whose nonnonilpotent subgroups are pronormal. *Bull. Austral. Math. Soc.*: publ. online, 2023, pp. 1–10. doi: 10.1017/S0004972723000576
11. Ferrara M., Trombetti M. Periodic linear groups in which permutability is a transitive relation. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 2024, vol. 203, no. 1, p. 361–383. doi: 10.1007/s10231-023-01367-2
12. Vdovin, E.P., Revin, D.O. Pronormality of Hall subgroups in finite simple groups. *Sib. Math. J.*, 2012, vol. 53, no. 3, p. 419–430. doi: 10.1134/S0037446612020231
13. Kondrat'ev, A.S., Maslova, N.V., Revin, D.O. On the pronormality of subgroups of odd index in finite simple groups. *Sib. Math. J.*, 2015, vol. 56, no. 6, pp. 1101–1107. doi: 10.1134/S0037446615060142

14. Kondrat'ev, A.S., Maslova, N.V., Revin, D.O. A pronormality criterion for supplements to abelian normal subgroups. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2017, vol. 296, Suppl. 1, p. 145–150. doi: 10.1134/S0081543817020134
15. Kondrat'ev, A.S., Maslova, N.V., Revin, D.O. On the pronormality of subgroups of odd index in finite simple symplectic groups. *Sib. Math. J.*, 2017, vol. 58, no. 3, p. 467–475. doi: 10.1134/S0037446617030107
16. Kondrat'ev, A.S., Maslova, N.V., Revin, D.O. On pronormal subgroups in finite simple groups. *Dokl. Math.*, 2018, vol. 98, pp. 405–408. doi: 10.1134/S1064562418060029
17. Kondrat'ev, A.S., Maslova, N.V., Revin, D.O. Finite simple exceptional groups of Lie type in which all the subgroups of odd index are pronormal. *J. Group Theory*, 2020. vol. 23, pp. 999–1016. doi: 10.1515/jgth-2020-0072
18. Kondrat'ev A.S., Maslova N.V., Revin D.O. On the pronormality of subgroups of odd index in finite simple groups. In: Groups St Andrews 2017 in Birmingham, eds. C.M. Campbell, M.R. Quick, C.W. Parker, E. F. Robertson, C.M. Roney-Dougal, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 455, Cambridge: Cambridge Univ. Press., 2019, pp. 406–418. doi: 10.1017/9781108692397.016
19. Maslova, N.V., Revin, D.O. On the pronormality of subgroups of odd index in some direct products of finite groups. *J. Algebra Appl.*, 2023, vol. 22, no. 04, art. number 2350083. doi: 10.1142/S0219498823500834
20. Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. The classification of the finite simple groups. Number 3. Math. Surv. Monogr, 1994, vol. 40, no. 3. 419 p. ISBN: 978-0-8218-0391-2
21. Kleidman P., Liebeck M. The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1990, 303 p. doi: 10.1017/CBO9780511629235
22. Maslova, N.V. Classification of maximal subgroups of odd index in finite simple classical groups. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2009, vol. 267, Suppl. 1, pp. 164–183. doi: 10.1134/S0081543809070153
23. Maslova, N.V. Classification of maximal subgroups of odd index in finite simple classical groups: Addendum. *Sib. Electron. Math. Reports*, 2018, vol. 15, pp. 707–718. doi: 10.17377/semi.2018.15.056
24. Maslova, N.V. Maximal subgroups of odd index in finite groups with simple linear, unitary, or symplectic socle. *Algebra Logic*, 2011, vol. 50, no. 2, pp. 133–145. doi: 10.1007/s10469-011-9128-7
25. Kondrat'ev, A.S. Normalizers of the Sylow 2-subgroups in finite simple groups. *Math Notes*, 2005, vol. 78, no. 3, pp. 338–346. doi: 10.1007/s11006-005-0133-9

Received December 5, 2023
Revised January 8, 2024
Accepted January 15, 2024

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 19-71-10067, Theorem 1), the National Natural Science Foundation of China (project nos. 12171126 and 12371021), and within a state contract of the Sobolev Institute of Mathematics (FWNF-2022-0002).

Wenbin Guo, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., School of Mathematics and Statistics, Hainan University, Haikou, Hainan 570225, P. R. China, Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, P. R. China, e-mail: wbguo@ustc.edu.cn .

Natalia Vladimirovna Maslova, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002, Russia e-mail: butterson@mail.ru .

Danila Olegovich Revin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Sobolev Institute of Mathematics of the Siberia Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: revin@math.nsc.ru .

Cite this article as: W. Guo, N. V. Maslova, D. O. Revin. Nonpronormal subgroups of odd index in finite simple linear and unitary groups. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 1, pp. 70–79 .