ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 1 2024

УДК 512.542

НОРМАЛИЗАТОРЫ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП В СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ И ОРТОГОНАЛЬНЫХ ГРУППАХ НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ НЕЧЕТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ[1]

А. С. Васильев

В работе найдены нормализаторы силовских r-подгрупп для нечетного простого r в симплектических и ортогональных группах (как простых, так и полных) над полями нечетной характеристики, отличной от r. Мотивация данного исследования происходит от фундаментальной роли r-подгрупп и их нормализаторов (r-локальных подгрупп) в теории конечных групп и неполного описания нормализаторов силовских подгрупп в простых группах на сегодняшний день. Результаты работы приближают нас к полному описанию нормализаторов силовских r-подгрупп в классических группах. Остается открытым лишь случай нечетного r для симплектических и ортогональных групп над полем характеристики 2.

Ключевые слова: симплектические группы, ортогональные группы, нормализаторы силовских подгрупп, конечные простые группы.

A. S. Vasilev. Normalizers of Sylow subgroups in symplectic and orthogonal groups over finite fields of odd characteristic.

The paper identifies the normalizers of Sylow r-subgroups for an odd prime r in symplectic and orthogonal groups (both simple and complete) over fields of odd characteristic different from r. The motivation for this study comes from the fundamental role of r-subgroups and their normalizers (r-local subgroups) in the theory of finite groups and the incomplete description of Sylow subgroup normalizers in simple groups as of today. The findings of the work bring us closer to a full description of the normalizers of Sylow r-subgroups in classical groups. The only case that remains open is for odd r in symplectic and orthogonal groups over a field of characteristic 2.

Keywords: symplectic groups, orthogonal groups, normalizers of Sylow subgroups, finite simple groups.

MSC: 20D20

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-1-61-69

1. Введение

В дальнейшем всюду предполагается, что r — простое число[2]. В теории конечных групп r-подгруппы и их нормализаторы (так называемые r-локальные подгруппы) играют фундаментальную роль. Изучение таких подгрупп лежит в основе локального теоретико-группового анализа. Особый интерес представляют r-локальные подгруппы в конечных простых группах. Однако даже нормализаторы силовских подгрупп в простых группах к настоящему времени полностью не описаны.

Нормализаторы силовских 2-подгрупп описаны в работах Картера и Фонга [1], А. С. Кондратьева и В. Д. Мазурова [2] и А. С. Кондратьева [3] во всех конечных простых группах. Для простых групп лиева типа хорошо известно также строение подгрупп Бореля — нормализаторов силовских p-подгрупп, где p — характеристика основного поля. В [4] были исследованы нормализаторы силовских r-подгрупп в линейных и унитарных простых группах для простого числа r, отличного от характеристики основного поля: указано строение нормализатора и описано действие нормализатора на секциях некоторого нормального ряда силовской подгруппы.

[1]Работа выполнена за счет РНФ, проект № 24-21-00163, https://rscf.ru/project/24-21-00163/ .

[2]Символ p зарезервирован для обозначения характеристики некоторого фиксированного конечного поля.

Для ортогональных и симплектических групп такого описания предъявлено не было. Основываясь на результатах о так называемых радикальных подгруппах и их нормализаторах, полученных Цз. Анем [5], мы докажем теоремы 1–4, которые дают описание нормализаторов силовских r-подгрупп в полных ортогональных и симплектических группах нечетной характеристики для нечетного простого числа r, отличного от характеристики. Предложение 1 (см. ниже) указывает на соответствие между строением нормализаторов силовских подгрупп в простых и полных симплектических и ортогональных группах.

Следуя [6], зафиксируем некоторые обозначения. Через q обозначается натуральная степень нечетного простого числа p. Через $\mathrm{Sp}_n(q)$ обозначаются симплектические группы — группы изометрий n-мерного векторного пространства над полем $\mathbb{F}_q$ с соответствующей невырожденной симплектической формой, а через $\mathrm{O}_n^{\varepsilon}(q)$, где $\varepsilon \in \{+,-,\mathrm{o}\}$ (здесь "o" — пустой символ, возникающий тогда и только тогда, когда n нечетно), обозначаются ортогональные группы — группы изометрий n-мерного векторного пространства над тем же полем из q элементов размерности n с соответствующей невырожденной квадратичной формой. Через $\mathrm{SO}_n^{\varepsilon}(q)$ обозначаются специальные ортогональные группы, состоящие из элементов группы $\mathrm{O}_n^{\varepsilon}(q)$ с определителем 1, через $\Omega_n^{\varepsilon}(q)$ — подгруппа индекса 2 в группе $\mathrm{SO}_n^{\varepsilon}(q)$.

Предложение 1. *Пусть $G \in \{\mathrm{Sp}_n(q), \mathrm{O}_n^{\varepsilon}(q)\}$, $S = G$ в случае $G = \mathrm{Sp}_n(q)$ и $S = \Omega_n^{\varepsilon}(q)$ — это подгруппа индекса 2 в специальной ортогональной группе $\mathrm{SO}_n^{\varepsilon}(q)$ в случае $G = \mathrm{O}_n^{\varepsilon}(q)$. Пусть r — нечетное простое число, взаимно простое с q, $U \in \mathrm{Syl}_r(G)$. Тогда $U \leqslant S$. Кроме того, если $\bar{\ }: S \to S/Z(S)$ — канонический эпиморфизм, то*

$$\overline{U} \in \mathrm{Syl}_r(\overline{S}) \quad \text{и} \quad N_{\overline{S}}(\overline{U}) = \overline{N_S(U)}.$$

Для натурального числа n через n_r обозначается r-часть числа n, т. е. наибольшая степень числа r, которая делит n. Через $n_{r'}$ обозначим частное n/n_r.

Поясним, что означает символ "$\circledast$" в формулировках теорем 1–4. Пусть R и N — подгруппы группы $\mathrm{GL}_n(q)$, причем $R \trianglelefteq N$, а S — некоторая группа подстановок на m элементах, рассматриваемая как группа подстановочных матриц степени m (подстановке π соответствует матрица, в которой на местах $(i, i\pi)$ стоят единицы, а на остальных — нули). Возьмем произвольную матрицу из S и заменим все ее единичные элементы на матрицы из N, лежащие в одном и том же смежном классе группы N по подгруппе R, а все ее нулевые элементы — на нулевые матрицы степени n. Обозначим через $(N/R) \circledast S$ множество всех матриц степени nm, полученных таким способом[3]. Ясно, что это множество образует подгруппу в группе $\mathrm{GL}_{nm}(q)$. Легко видеть, что $(N/R) \circledast S$ — подгруппа в подстановочном сплетении $N \wr S$, естественным образом вложенном в $\mathrm{GL}_{nm}(q)$. Эта подгруппа содержит нормальную подгруппу $\underbrace{R \times \ldots \times R}_{m}$ из базы сплетения, фактор по которой изоморфен группе $(N/R) \times S$. Через Sym_k обозначим симметрическую группу степени k. Через C_k обозначается циклическая группа порядка k, отождествленная с соответствующей регулярной подгруппой в Sym_k.

Теорема 1. *Пусть $G = \mathrm{Sp}_n(q)$, где q — степень нечетного простого числа, а n четно, и r — простое число такое, что $(2q, r) = 1$. Положим*

$$e = \min\{k \geq 1 \mid q^k \equiv 1 \pmod r\}, \quad \delta = (-1)^{e-1}, \quad f = \frac{e}{(e,2)}.$$

Пусть числа m и d обозначают частное и остаток от деления n на $2f$, т. е.

$$n = 2fm + d, \quad 0 \leq d < 2f.$$

[3]Отметим, что эта конструкция была введена в [7]. Однако там вместо символа "$\circledast$" использовался символ "$\otimes$", что нам представляется менее удачным выбором, поскольку он явно конфликтует с символом кронекерова произведения матриц.

Зафиксируем r-ичное представление числа m: $m = m_0+m_1r+\ldots+m_\nu r^\nu$, $0 \le m_i < r$ для всех i. Тогда для силовской r-подгруппы R группы G справедливо разложение

$$R = 1_d \times R_0^{m_0} \times \ldots \times R_\nu^{m_\nu},$$

здесь 1_d — тривиальная подгруппа в группе $\mathrm{Sp}_d(q)$, R_i — силовская r-подгруппа группы $G_i = \mathrm{Sp}_{2fr^i}(q)$ и возведение R_i в степень m_i означает прямое произведение m_i копий группы R_i. Для нормализатора подгруппы R имеют место разложения

$$N_G(R) = \mathrm{Sp}_d(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i}, \quad N_G(R)/R = \mathrm{Sp}_d(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i/R_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i},$$

где $N_i = N_{G_i}(R_i)$. Кроме того,

$$R_i = C_{(q^f-\delta)_r} \wr \underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}}, \quad N_i = (N_0/R_0) \circledast N_{\mathrm{Sym}_{r^i}}(\underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}})$$

и $N_i/R_i = \big(C_{(q^f-\delta)_{r'}} \rtimes C_{2f}\big) \times \underbrace{C_{r-1} \times \ldots \times C_{r-1}}_{i \text{ раз}}$.

Теорема 2. *Пусть n — нечетное число и $G = \mathrm{O}_n(q)$, где q — степень нечетного простого числа, и r — простое число такое, что $(2q, r) = 1$. Положим*

$$e = \min\{k \ge 1 \mid q^k \equiv 1 \pmod r\}, \quad \delta = (-1)^{e-1}, \quad f = \frac{e}{(e,2)}.$$

Пусть числа m и d обозначают частное и остаток от деления n на $2f$, т. е.

$$n = 2fm + d, \quad 0 \le d < 2f.$$

Зафиксируем r-ичное представление числа m: $m = m_0+m_1r+\ldots+m_\nu r^\nu$, $0 \le m_i < r$ для всех i. Тогда для силовской r-подгруппы R группы G справедливо разложение

$$R = 1_d \times R_0^{m_0} \times \ldots \times R_\nu^{m_\nu};$$

здесь 1_d — тривиальная подгруппа в группе $\mathrm{O}_d(q)$, R_i — силовская r-подгруппа группы $G_i = \mathrm{O}^\delta_{2fr^i}(q)$, а возведение R_i в степень m_i означает прямое произведение m_i копий группы R_i. Для нормализатора подгруппы R имеют место разложения

$$N_G(R) = \mathrm{O}_d(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i}, \quad N_G(R)/R = \mathrm{O}_d(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i/R_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i},$$

где $N_i = N_{G_i}(R_i)$. Кроме того,

$$R_i = C_{(q^f-\delta)_r} \wr \underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}}, \quad N_i = (N_0/R_0) \circledast N_{\mathrm{Sym}_{r^i}}(\underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}})$$

и $N_i/R_i = \big(C_{(q^f-\delta)_{r'}} \rtimes C_{2f}\big) \times \underbrace{C_{r-1} \times \ldots \times C_{r-1}}_{i \text{ раз}}$.

Теорема 3. *Пусть n — четное число и $G = \mathrm{O}^\varepsilon_n(q)$, где q — степень нечетного простого числа, и r — простое число такое, что $(2q, r) = 1$. Положим*

$$e = \min\{k \ge 1 \mid q^k \equiv 1 \pmod r\}, \quad \delta = (-1)^{e-1}, \quad f = \frac{e}{(e,2)}.$$

Определим число m следующим образом:

$$m = \begin{cases} \dfrac{n}{2f} - 1, & \text{если } 2f \text{ делит } n \text{ и } (\delta)^{n/2f} \neq \varepsilon, \\ \left[\dfrac{n}{2f}\right], & \text{иначе.} \end{cases}$$

Положим $d = n - 2fm$. Обозначим через K группу $\mathrm{O}_d^{\delta^m}(q)$, где $d = n - 2fm$. Зафиксируем r-ичное представление числа m: $m = m_0 + m_1 r + \ldots + m_\nu r^\nu$, $0 \leq m_i < r$ для всех i. Тогда для силовской r-подгруппы R группы G справедливо разложение

$$R = 1_d \times R_0^{m_0} \times \ldots \times R_\nu^{m_\nu};$$

здесь 1_d — тривиальная подгруппа в группе $\mathrm{O}_d^{\delta^m}(q)$, R_i — силовская r-подгруппа группы $G_i = \mathrm{O}_{2fr^i}^{\delta}(q)$, а возведение R_i в степень m_i означает прямое произведение m_i копий группы R_i. Для нормализатора подгруппы R имеют место разложения

$$N_G(R) = \mathrm{O}_d^{\delta^m}(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i}, \quad N_G(R)/R = \mathrm{O}_d^{\delta^m}(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i/R_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i},$$

где $N_i = N_{G_i}(R_i)$. Кроме того,

$$R_i = C_{(q^f-\delta)_r} \wr \underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}}, \quad N_i = (N_0/R_0) \circledast N_{\mathrm{Sym}_{r^i}}(\underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}})$$

и $N_i/R_i = \left(C_{(q^f-\delta)_{r'}} \rtimes C_{2f}\right) \times \underbrace{C_{r-1} \times \ldots \times C_{r-1}}_{i \text{ раз}}.$

Мы будем доказывать теоремы 1–3 в унифицированной форме, которая представлена в следующей теореме.

Теорема 4. *Пусть $G \in \{\mathrm{Sp}_n(p), \mathrm{O}_n^\varepsilon(q)\}$, где q — степень нечетного простого числа, и r — простое число такое, что $(2q, r) = 1$. Положим*

$$e = \min\{k \geq 1 \mid q^k \equiv 1 \pmod r\}, \quad \delta = (-1)^{e-1}, \quad f = \frac{e}{(e,2)}.$$

Определим число m следующим образом:

$$m = \begin{cases} \dfrac{n}{2f} - 1, & \text{если } G = \mathrm{O}_n^\varepsilon(q),\ 2f \text{ делит } n \text{ и } (\delta)^{n/2f} \neq \varepsilon, \\ \left[\dfrac{n}{2f}\right], & \text{иначе.} \end{cases}$$

Положим $d = n - 2fm$. Обозначим через K группу $\mathrm{Sp}_d(q)$ (для $G = \mathrm{Sp}_n(q)$) или $\mathrm{O}_d^{\varepsilon\delta^m}(q)$ (для $G = \mathrm{O}_n^\varepsilon(q)$). Зафиксируем r-ичное представление числа m

$$m = m_0 + m_1 r + \ldots + m_\nu r^\nu, \quad 0 \leq m_i < r \quad \text{для всех } i.$$

Тогда для силовской r-подгруппы R группы G справедливо разложение

$$R = 1_d \times R_0^{m_0} \times \ldots \times R_\nu^{m_\nu}. \tag{1.1}$$

Здесь 1_d — тривиальная подгруппа в группе K, R_i — силовская r-подгруппа группы $G_i = \mathrm{Sp}_{2fr^i}(q)$ (для $G = \mathrm{Sp}_n(q)$) или[4] *$\mathrm{O}_{2fr^i}^{\varepsilon\delta}(q)$ (для $G = \mathrm{O}_n^\varepsilon(q)$), а возведение R_i в степень m_i*

[4]Если ε — пустой символ, то считаем, что $\varepsilon\delta$ — тоже пустой символ.

означает прямое произведение m_i копий группы R_i. Для нормализатора подгруппы R имеют место разложения

$$N_G(R) = K \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i}, \tag{1.2}$$

$$N_G(R)/R = K \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i/R_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i}, \tag{1.3}$$

где $N_i = N_{G_i}(R_i)$. Кроме того,

$$R_i = C_{(q^f-\delta)_r} \wr \underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i\ \text{раз}}, \tag{1.4}$$

$$N_i = (N_0/R_0) \circledast N_{\mathrm{Sym}_{r^i}}(\underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i\ \text{раз}}) \tag{1.5}$$

и

$$N_i/R_i = \left(C_{(q^f-\delta)_{r'}} \rtimes C_{2f}\right) \times \underbrace{C_{r-1} \times \ldots \times C_{r-1}}_{i\ \text{раз}}. \tag{1.6}$$

Таким образом, для того чтобы завершить описание силовских подгрупп в классических простых группах, остается лишь случай ортогональных и симплектических групп характеристики 2.

2. Предварительные сведения и результаты

2.1. Обозначения

Конечное поле порядка q обозначается через $\mathbb{F}_q$. Группу $\mathrm{GL}_n(q)$ будем обозначать через $\mathrm{GL}_n^+(q)$, а группу $\mathrm{GU}_n(q)$ — через $\mathrm{GL}_n^-(q)$. Обозначим через e мультипликативный порядок числа q по модулю r, т. е.

$$e = \min\{k \geq 1 \mid q^k \equiv 1 \pmod r\}.$$

Вслед за [8] для удобства введем еще две величины: $\delta = (-1)^{e-1}$ и $f = \dfrac{e}{(e,2)}$. Отметим следующие эквивалентности:

$$(\delta q)^k \equiv 1 \pmod r \Leftrightarrow q^k \equiv \delta^k \pmod r \Leftrightarrow (q^k - \delta^k) \text{ делится на } r.$$

Через a обозначим число, определяемое равенством $r^a = (q^e - 1)_r$. Укажем, что знак δ выбирается таким образом, чтобы r^a делило $q^f - \delta$.

Через Sym_n будем обозначать симметрическую группу степени n. Следуя [7], мы полагаем удобным рассматривать симметрические группы как соответствующие группы подстановочных матриц. Подстановочное сплетение $X \wr Y$ матричной группы X и группы Y, состоящей из подстановочных матриц, определяется как группа, полученная заменой единиц и нулей (см. выше) соответственно в каждой матрице $y \in Y$ всевозможными матрицами из группы X и нулевыми матрицами той же степени, что и группа X. Таким образом, если $X \leq \mathrm{GL}_m(q)$ и $Y \leq \mathrm{Sym}_n$, то $X \wr Y \in \mathrm{GL}_{mn}(q)$. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — n копий группы X, действующих на пространствах $V_1, V_2, \ldots, V_n$ размерности m над полем $\mathbb{F}_q$ соответственно. Тогда можно считать, что $X \wr Y$ действует на пространстве $V = V_1 \bigoplus V_2 \bigoplus \cdots \bigoplus V_n$. При этом подгруппа $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ является базой сплетения $X \wr Y$ и оставляет на месте каждое слагаемое V_i, а группа Y переставляет слагаемые $V_1, \ldots, V_n$.

2.2. Радикальные подгруппы в симплектических и ортогональных группах

Пусть r — нечетное простое число, n — натуральное число, q — нетривиальная степень простого числа p, отличного от r. Пусть далее G — одна из групп $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$, $\mathrm{O}_{2n+1}(q)$, $\mathrm{O}^{\varepsilon}_{2n}(q)$, причем q предполагается нечетным. Поскольку q нечетно, всегда можно считать, что группа G совпадает с группой $I(V)$ изометрий некоторого векторного пространства V с соответствующей невырожденной кососимметрической или симметрической билинейной формой, которое мы будем называть естественным модулем для G. Следуя [7], подгруппу R группы G назовем *радикальной* подгруппой группы G, если $R = O_r(N(R))$. В данном разделе приведено описание радикальных r-подгрупп в симплектических и ортогональных группах согласно [5, разд. 1, 2]. Пусть

$$e = \min\{k \geq 1 \mid q^k \equiv 1 \pmod r\}, \quad \delta = (-1)^{e-1}, \quad f = \frac{e}{(e,2)}.$$

Пусть число a определяется равенством $(q^{2f}-1)_r = r^a$. Пусть γ — неотрицательное целое число и E_γ — экстраспециальная группа экспоненты r и порядка $r^{2\gamma+1}$ (если $\gamma = 0$, то E_γ — циклическая группа порядка r). Пусть α — неотрицательное целое число и Z_α — циклическая группа порядка $r^{a+\alpha}$. Пусть $R_{\alpha,\gamma}$ — центральное произведение групп E_γ и Z_α такое, что $Z(E_\gamma) = \Omega_1(Z_\alpha)$. Известно [5; 7; 9], что группа автоморфизмов группы $R_{\alpha,\gamma}$, оставляющих неподвижными элементы из $Z(E_\gamma)$, изоморфна группе $\mathrm{Sp}_{2\gamma}(r)$ и естественное полупрямое произведение $L_{\alpha,\gamma}$ групп $R_{\alpha,\gamma}$ и $\mathrm{Sp}_{2\gamma}(r)$ вкладывается в группу $\mathrm{GL}^{\delta}_{r^\gamma}(q^{fr^\alpha})$. В свою очередь [6, табл. 3.5.C, 3.5.E и 3.5.F], группа $\mathrm{GL}^{\delta}_{r^\gamma}(q^{fr^\alpha})$, расширенная элементом порядка $2fr^\alpha$, вкладывается в группу $I(V_{\alpha,\gamma})$, где $V_{\alpha,\gamma}$ — симплектическое или ортогональное пространство над полем $\mathbb{F}_q$ размерности $2fr^{\alpha+\gamma}$ и $\varepsilon(V_{\alpha,\gamma})$, т. е. знак сужения квадратичной формы на $V_{\alpha,\gamma}$, совпадает с δ, если $V_{\alpha,\gamma}$ — ортогональное пространство. Затем группу $I(V_{\alpha,\gamma})$ посредством вложения

$$g \mapsto \begin{pmatrix} g & & \\ & \ddots & \\ & & g \end{pmatrix}$$

можно вложить в группу $I(V_{m,\alpha,\gamma})$, где

$$V_{m,\alpha,\gamma} = \underbrace{V_{\alpha,\gamma} \perp \cdots \perp V_{\alpha,\gamma}}_{m \text{ раз}},$$

и в ортогональном случае $\varepsilon(V_{m,\alpha,\gamma}) = \delta^m$. Обозначим через $R_{m,\alpha,\gamma}$ и $L_{m,\alpha,\gamma}$ образы в $G_{m,\alpha,\gamma}$ групп $R_{\alpha,\gamma}$ и $L_{\alpha,\gamma}$ относительно этих вложений. Примем также $C_{m,\alpha,\gamma} = C_{G_{m,\alpha,\gamma}}(R_{m,\alpha,\gamma})$, $N_{m,\alpha,\gamma} = N_{G_{m,\alpha,\gamma}}(R_{m,\alpha,\gamma})$ и $N^0_{m,\alpha,\gamma} = \{g \in N_{m,\alpha,\gamma} \mid [g, Z(R_{m,\alpha,\gamma})] = 1\}$.

Далее, пусть $\mathfrak{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_l)$, где $c_1, c_2, \ldots, c_l$ — натуральные числа. Пусть A_{c_i} — транзитивная элементарная абелева подгруппа порядка r^{c_i} симметрической группы $S_{r^{c_i}}$ для любого $i = 1, \ldots, l$ и $A_{\mathfrak{c}}$ — подстановочное сплетение $A_{c_1} \wr A_{c_2} \wr \cdots \wr A_{c_l}$. Пусть также $u = r^{c_1+c_2+\cdots+c_l}$. Группу $A_{\mathfrak{c}}$ можно естественным образом отождествить с подгруппой из S_u. Кроме того, положим $G_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}} = I(V_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}})$, где

$$V_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}} = \underbrace{V_{m,\alpha,\gamma} \perp \cdots \perp V_{m,\alpha,\gamma}}_{u \text{ раз}},$$

причем в ортогональном случае $\varepsilon(V_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}}) = \delta^m$. Согласно [7, разд. 4] и [5, разд. 2] группа $R_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}} = R_{m,\alpha,\gamma} \wr A_{\mathfrak{c}}$ естественным образом вкладывается в группу $G_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}}$, определяется в ней однозначно с точностью до сопряжения и называется ее *базисной подгруппой.*

Пусть R — радикальная r-подгруппа группы G. Тогда [10, лемма 10] существуют соответствующие друг другу разложения

$$V = V_0 \perp V_1 \perp \cdots \perp V_t, \ R = R_0 \times R_1 \times \cdots \times R_t$$

такие, что R_0 — тривиальная подгруппа $I(V_0)$ и R_i — базисная подгруппа группы $I(V_i)$ при $i \geq 1$. Пусть $R(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c})$ — произведение тех из подгрупп R_i, для которых $R_i = R_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}}$, $V(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c})$ — сумма соответствующих этим R_i подпространств V_i, а $u(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c})$ — число таких R_i. Пусть также $G(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}) = I(V(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}))$ — соответствующая группа изометрий, отождествляемая с соответствующей подгруппой в G.

2.3. Силовские подгруппы в симплектических и ортогональных группах

Очевидно, что силовские подгруппы являются радикальными. Строение силовских подгрупп в классических группах описано в [11]. Нам будет удобно использовать адаптированный вариант этого описания из работы [8]. В данном подразделе кратко дано строение силовских r-подгрупп в симплектических и ортогональных группах, а также приведены параметры, соответствующие разложению силовской r-подгруппы, рассматриваемой как радикальная r-подгруппа, в прямое произведение базисных подгрупп.

Будем использовать обозначения, введенные в теореме 4. Порядок группы G определяется как

$$|G| = \begin{cases} q^{\frac{n^2}{4}}(q^2-1)(q^4-1)\dots(q^n-1), & G = \mathrm{Sp}_n(q), \\ 2q^{k^2}(q^2-1)(q^4-1)\dots(q^{2k}-1), & G = \mathrm{O}_{2k+1}(q), \\ 2q^{k(k-1)}(q^2-1)(q^4-1)\dots(q^{2k-2})(q^k-\varepsilon), & G = \mathrm{O}^{\varepsilon}_{2k}(q). \end{cases}$$

Силовская r-подгруппа R_0 группы $G_0 = \mathrm{O}^{\varepsilon}_{2f}(q)$ является циклической группой порядка $(q^f-\delta)_r = r^a$ и соответствует группе $R_{m,\alpha,\gamma}$ для $(m,\alpha,\gamma) = (1,0,0)$ в обозначениях подразд. 2.2. Группу $R_i = R_{i-1} \wr C_r, 1 \leq i \leq \nu$, можно рассматривать как подгруппу в $G_i \in \{\mathrm{Sp}_{2fr^i}(q), \mathrm{O}^{\varepsilon\delta}_{2fr^i}(q)\}$, а порядок группы R_i равен $r^{ar^i+\mu_i(r)}$, где $\mu_i(r) = 1 + r + \ldots + r^{i-1}$. В силу того что $|G_i|_r = |R_i|$, подгруппа R_i является r-силовской подгруппой группы G_i. Кроме того, в обозначениях подразд. 2.2 имеем

$$R_i = R_0 \wr \underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}} = R_{1,0,0} \wr A_{\mathfrak{c}_i}, \text{ где } \mathfrak{c}_i = \underbrace{(1,\ldots,1)}_{i \text{ раз}}.$$

Ясно, что группу $R = 1_d \times R_0^{m_0} \times \ldots \times R_\nu^{m_\nu}$ можно рассматривать как подгруппу в группе G. Ее порядок определяется как $|R| = r^N$, где $N = ar + \sum_{i=0}^{\nu} m_i\mu_i(r)$, и несложно убедиться в том, что r-часть порядка группы G в точности равна r^N. Таким образом, группа R — это действительно r-силовская подгруппа в группе G. Помимо этого, для R как для радикальной подгруппы выполнено разложение

$$R = 1_d \times \prod_{(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c})} R(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}) = 1_d \times \prod_{i=0}^{\nu} R(1,0,0,\mathfrak{c}_i) = 1_d \times \prod_{i=0}^{\nu} R^{m_i}_{1,0,0,\mathfrak{c}_i},$$

в частности, в обозначениях подразд. 2.2 имеем

$$R(1,0,0,\mathfrak{c}_i) = R^{m_i}_{1,0,0,\mathfrak{c}_i}, \quad u(1,0,0,\mathfrak{c}_i) = m_i, \quad G(1,0,0,\mathfrak{c}_i) = G_i^{m_i}. \tag{2.1}$$

3. Доказательство основных утверждений

3.1. Доказательство предложения 1

Утверждение предложения 1 тривиально, потому что индекс $|G : S|$ равен 1, 2 или 4 [6, 2.1.C, 2.1.D]. Следовательно, он не делится на нечетное простое r, и поэтому силовские r-подгруппы в группах G и S совпадают. Центр группы G также является 2-группой, откуда легко следует оставшаяся часть доказываемого утверждения. $\square$

3.2. Доказательство теорем 1–4

Как было сказано ранее, докажем теорему 4. Строение силовской r-подгруппы в группе G и ее разложение как радикальной r-подгруппы в прямое произведение базисных подгрупп приведено в подразд. 2.3. Исходя из этого, выполнены равенства (1.1) и (1.4).

Далее, применим лемму 11 из работы [10] для подгруппы R как для радикальной подгруппы группы G. Ввиду соответствия параметров (2.1) из леммы следует справедливость разложений (1.2) и (1.3).

Теперь докажем справедливость равенств (1.5) и (1.6). Применим п. 2 леммы 8 из [10] для $H = G_i$ и $R = R_i$ (в лемме вместо символа “ $\circledast$ ” используется символ “ $\otimes$ ”). В обозначениях леммы 8 имеем

$$R_{1,0,0,\mathfrak{c}_i} = R_0, \quad N_{1,0,0,\mathfrak{c}_i} = N_0, \quad c_i = 1, \quad u = r^i.$$

Строение нормализатора N_0 силовской r-подгруппы R_0 группы G_0 описано в [8, Ch. 3, Case 2 и Case 4] (G_0, R_0, N_0 в наших обозначениях соответствуют L, C, N в обозначениях [8]):

$$N_0 = C_{q^f-\delta} \rtimes C_{2f}, \quad N_0/R_0 = C_{(q^f-\delta)_{r'}} \rtimes C_{2f}.$$

С учетом этих равенств и того, что $GL_1(r) \simeq C_{r-1}$, из п. 2 леммы 8 из работы [10] напрямую следуют равенства (1.5), (1.6).

Теорема 4 доказана.

Формулировки теорем 1–3 получены из формулировки теоремы 4 путем опускания соответствующих случаев, поэтому теоремы 1–3 также доказаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Carter R., Fong P.** The Sylow 2-subgroups of the finite classical group // J. Algebra. 1964. Vol. 1. P. 131–151. doi: 10.1016/0021-8693(64)90030-4
2. **Кондратьев А.С., Мазуров В.Д.** 2-сигнализаторы конечных простых групп // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 5. С. 594–623. doi: 10.1023/A:1025923522954
3. **Кондратьев А.С.** Нормализаторы силовских 2-подгрупп в конечных простых группах // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 3. С. 338–346. doi: 10.4213/mzm2593
4. **Васильев А.С.** Нормализаторы силовских подгрупп в линейных и унитарных конечных группах // Алгебра и логика. 2020. Т. 59, № 1. С. 3–26. doi: 10.33048/alglog.2020.59.101
5. **An J.** Weights for classical groups // Trans. Am. Math. Soc. 1994. Vol. 342, no. 1. P. 1–42. doi: 10.2307/2154683
6. **Kleidman P. B., Liebeck M.** The subgroups structure of finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press., 1990. doi: 10.1017/CBO9780511629235
7. **Alperin J.L., Fong P.** Weights for symmetric and general linear groups // J. Algebra. 1990. Vol. 131, no. 1. P. 2–22. doi: 10.1016/0021-8693(90)90163-I
8. **Gross F.** Odd order Hall subgroups of the classical linear groups // Mathematische Zeitschrift. 1995. Vol. 220. P. 317–336. doi: 10.1007/BF02572618
9. **Griess R.** Automorphisms of extra special groups and nonvanishing degree 2 cohomology // Pacif. J. Math. 1973. Vol. 48. P. 403–411. doi: 10.1016/s0304-0208(08)71828-0
10. **Ревин Д.О.** Свойство D_π конечных групп в случае $2 \notin \pi$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 1. С. 166–182.
11. **Weir A.J.** Sylow p-subgroups of the classical groups over finite fields with characteristic prime to p // Proc. Amer. Math. Soc. 1955. Vol. 6, no. 4. P. 529–533. doi: 10.2307/2033424

Поступила 15.02.2024
После доработки 26.02.2024
Принята к публикации 29.02.2024

Васильев Алексей Сергеевич
стажер-исследователь
Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН
г. Новосибирск
e-mail: a.vasilev1@g.nsu.ru

REFERENCES

1. Carter R., Fong P The Sylow 2-subgroups of the finite classical group. *J. Algebra*, 1964, vol. 1, pp. 131–151. doi: 10.1016/0021-8693(64)90030-4
2. Kondratiev A.S., Mazurov V.D. 2-signalizers of finite simple groups. *Algebra and Logic*, 2003, vol. 42, no. 5. P. 594–623. doi: 10.1023/A:1025923522954
3. Kondrat'ev A.S. Normalizers of the Sylow 2-subgroups in finite simple groups. *Math. Notes.*, 2005, vol. 78, no. 3, pp. 338–346. doi: 10.4213/mzm2593
4. Vasilev A.S. Normalizers of Sylow subgroups in finite linear and unitary groups. *Algebra and Logic*, 2020, vol. 59, no. 1, pp. 3–26. doi: 10.33048/alglog.2020.59.101
5. An J. Weights for classical groups. *Trans. Am. Math. Soc.*, 1994, vol. 342, no. 1, pp. 1–42. doi: 10.2307/2154683
6. Kleidman P.B., Liebeck M. *The subgroups structure of finite classical groups.* Cambridge : Cambridge Univ. Press., 1990. doi: 10.1017/CBO9780511629235
7. Alperin J.L., Fong P. Weights for symmetric and general linear groups. *J. Algebra*, 1990, vol. 131, no. 1, pp. 2–22. doi: 10.1016/0021-8693(90)90163-I
8. Gross F. Odd order Hall subgroups of the classical linear groups. *Mathematische Zeitschrift*, 1995, vol. 220, pp. 317–336. doi: 10.1007/BF02572618
9. Griess R. Automorphisms of extra special groups and nonvanishing degree 2 cohomology. *Pacif. J. Math.*, 1973, vol. 48, pp. 403–411. doi: 10.1016/s0304-0208(08)71828-0
10. Revin D.O. The D_π property of finite groups in the case $2 \notin \pi$. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2007, vol. 13, no. 1, pp. 166–182. doi: 10.1134/S0081543807050124
11. Weir A.J. Sylow p-subgroups of the classical groups over finite fields with characteristic prime to p. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1955, vol. 6, no. 4, pp. 529–533. doi: 10.2307/2033424

Received February 15, 2024
Revised February 26, 2024
Accepted February 29, 2024

Funding Agency: The work was supported by the Russian Science Foundation (Grant no. 24-21-00163), https://rscf.ru/project/24-21-00163/ .

Alexey Sergeevich Vasilev, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 630090 Russia,
e-mail: a.vasilev1@g.nsu.ru .

Cite this article as: A. S. Vasilev. Normalizers of Sylow subgroups in symplectic and orthogonal groups over finite fields of odd characteristic. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 1, pp. 61–69 .