ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 1 2024

УДК 519.213.3

О НЕКОТОРЫХ ДОПОЛНЕНИЯХ К ТЕОРИИ ЛИУ[1]

Б. И. Ананьев

В рамках теории неопределенности Баодинга Лиу введены некоторые новые понятия и рассмотрены их свойства. В частности, введены регулярные функции неопределенности на несчетном произведении пространств. Получен аналог теоремы Ломницкого — Улама из традиционной теории вероятностей. Указаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция, заданная на банаховом пространстве ограниченных функций, была функцией распределения для некоторого неопределенного отображения. Обобщены некоторые понятия теории Лиу для несчетного количества объектов. Дан анализ примеров, показывающих сходство и отличие теории Лиу от теории вероятностей. На примерах рассмотрено приложение теории Лиу к теории оценивания.

Ключевые слова: функции неопределенности, неопределенные отображения, функции распределения, теория оценивания.

B. I. Ananyev. On some complements to Liu's theory.

In the framework of Baoding Liu's uncertainty theory, some new concepts are introduced and their properties are considered. In particular, regular functions of uncertainty are introduced on an uncountable product of spaces. An analog of the Lomnitskii–Ulam theorem from traditional probability theory is obtained. Necessary and sufficient conditions are specified under which a function defined on a Banach space of bounded functions is a distribution function for some uncertain mapping. Some notions of Liu's theory are generalized for uncountably many objects. Examples showing the similarity and the difference between Liu's theory and probability theory are analyzed. An application of Liu's theory to estimation theory is considered on examples.

Keywords: functions of uncertainty, uncertain mappings, distribution functions, theory of estimation.

MSC: 68T37, 93E10

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-1-5-20

1. Введение и необходимые сведения

Теория неопределенности Баодинга Лиу получила значительное развитие в последнее десятилетие, [1–3]. Элементы теории успешно применяются в теории управления, математическом программировании, финансовой математике, робототехнике и других направлениях прикладной математики, [4–7]. В настоящей работе проводятся некоторые параллели теории Лиу с теорией вероятностей и устанавливаются некоторые новые факты. Обсуждается также возможность приложения к теории оценивания.

Конечно, следует отметить, что теория Лиу — это лишь один из возможных подходов для описания и учета неопределенности. Построение и развитие математических теорий, работающих с объектами в условиях неопределенности, являются весьма актуальной задачей. Подобных теорий не так много. В той или иной степени к ним можно отнести различные варианты теории вероятностей, теорию нечетких множеств Заде, интервальный анализ, теорию хаоса [8–10]. Активно развивается теория возможности как альтернативы вероятности в работах [11; 12]. Широкую известность приобрела теория гарантированного оценивания [13; 14], основанная на теоретико-множественном описании неопределенности. Подход Лиу имеет пересечения с упомянутыми теориями, однако в данной работе этот вопрос не обсуждается.

[1]Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2023-913).

Пусть задано измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$, где Ω — произвольное множество, а $\mathcal{F}$ — σ-алгебра подмножеств из Ω. В теории вероятностей на $\mathcal{F}$ обычно задаются различные вероятностные меры [15], но на $\mathcal{F}$ могут быть рассмотрены и другие функции множества, не удовлетворяющие аксиоматике А. Н. Колмогорова. Например, в теории Лиу определяются функции $\mathcal{M}$ неопределенности множества, для которых выполняются аксиомы:

1. Нормальность. $\mathcal{M}(\Omega) = 1$.

2. Дуальность. $\mathcal{M}(A) + \mathcal{M}(A^c) = 1$ для любого события $A \in \mathcal{F}$, где $A^c = \Omega \setminus A$.

3. Субаддитивность. Для любой последовательности $A_i \in \mathcal{F}$ справедливо неравенство

$$\mathcal{M}\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}(A_i).$$

Всякая функция неопределенности (далее ФН) удовлетворяет соотношениям $0 \leqslant \mathcal{M}(A) \leqslant 1$ и $\mathcal{M}(A) \leqslant \mathcal{M}(B)$ для $\forall\, A, B \in \mathcal{F}$. Отметим, что любая вероятностная мера P удовлетворяет аксиомам 1–3 и является, следовательно, ФН, однако на произведении пространств ФН определяется иначе. Поскольку аксиома произведения в [1] дана только для счетного семейства пространств, введем следующее определение для произвольного множества T.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть задано семейство ФН-пространств $\big(\Omega_t, \mathcal{F}_t, \mathcal{M}_t\big)_{t\in T}$ с ФН $\mathcal{M}_t$ и пусть $(\Omega_T, \mathcal{F}_T)$ — произведение [16] измеримых пространств, где $\Omega_T = \prod_{t\in T}\Omega_t$ и $\mathcal{F}_T = \bigotimes_{t\in T}\mathcal{F}_t$. Тогда ФН $\mathcal{M}$ на произведении пространств задается соотношением

$$\mathcal{M}\big((C_T(t, A_t)\big) = \bigwedge_{t\in T} \mathcal{M}_t(A_t), \tag{1.1}$$

где $C_T(t, A_t) = \prod_{t\in T} A_t$ — произвольный элементарный цилиндр и символ $\bigwedge_{t\in T}\alpha_t$ означает $\inf_{t\in T}\alpha_t$.

Отметим, что в обозначении $C_T(t, A_t)$ символ t можно заменить любым символом $\alpha \in T$. Чтобы распространить ФН $\mathcal{M}$ на все $\mathcal{F}_T$, используется формула

$$\mathcal{M}(A) = \begin{cases} \sup\limits_{C_T(t,A_t)\subset A} \mathcal{M}\big(C_T(t, A_t)\big), & \text{если } \sup\limits_{C_T(t,A_t)\subset A} \mathcal{M}\big(C_T(t, A_t)\big) > 0.5; \\ 1 - \sup\limits_{C_T(t,A_t)\subset A^c} \mathcal{M}\big(C_T(t, A_t)\big), & \text{если } \sup\limits_{C_T(t,A_t)\subset A^c} \mathcal{M}\big(C_T(t, A_t)\big) > 0.5; \\ 0.5 & \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{1.2}$$

Здесь (1.1) и (1.2) обобщают аналогичные формулы в [1]. Нам предстоит показать, что (1.2) действительно определяет ФН на $(\Omega_T, \mathcal{F}_T)$. Будем называть ФН (1.2) *регулярной функцией* множества на произведении пространств, поскольку, вообще говоря, существуют и другие ФН на произведении. Укажем, что в оригинале ФН называется *uncertainty measure*. Представляется, что этот термин не совсем удачен, поскольку рассматриваемая функция множества не является мерой в классическом понимании теории меры.

Обобщим также понятие независимости на произвольное семейство событий.

О п р е д е л е н и е 2. Семейство событий $(A_t)_{t\in T}$ из $\mathcal{F}$ называется независимым, если

$$\mathcal{M}\Big(\bigcap_{t\in T} A_t^*\Big) = \bigwedge_{t\in T} \mathcal{M}(A_t^*),$$

где A_t^* — любое множество из совокупности $\{A_t, A_t^c, \Omega\}$.

Так же, как в [1, теорема 1.7], устанавливается, что независимость семейства эквивалентна соотношению $\mathcal{M}\big(\bigcup_{t\in T} A_t^*\big) = \bigvee_{t\in T}\mathcal{M}(A_t^*)$, где $A_t^* \in \{A_t, A_t^c, \Omega\}$, а символ $\bigvee_{t\in T}\alpha_t$ означает $\sup_{t\in T}\alpha_t$.

Неопределенным вектором $\xi \in \mathbb{R}^n$, заданным на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{M})$, будем называть любое измеримое отображение $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, т. е. такое, что $\xi^{-1}(\mathcal{B}^n) \subset \mathcal{F}$, где $\mathcal{B}^n$ — борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}^n$. В случае $n = 1$ имеем дело с неопределенной величиной (далее НВ). Данные понятия совпадают с понятиями случайных векторов и случайных величин. Система неопределенных векторов $\xi_{t \in T}$, где $\xi_t \in \mathbb{R}^n$, считается независимой, если события $\{\xi_t \in B_t\}$ независимы для произвольных борелевских множеств $B_t \in \mathcal{B}^n$.

Если ξ — НВ, то ее функция распределения (далее ФР) определяется формулой $\Phi(x) = \mathcal{M}(\xi \leqslant x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, что соответствует аналогичному понятию в теории вероятностей. Однако если там функция распределения однозначно задает распределение случайной величины на измеримом пространстве $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, то в теории Лиу это не так, ибо существуют различные НВ с одинаковой функцией распределения.

Зададим ФР и для произвольного семейства НВ $\xi_{t \in T}$ или для одного неопределенного отображения $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^T$, причем событие $\{\xi \leqslant x\}$ понимается как $\bigcap_{t \in T} \{\xi_t \leqslant x_t\}$. Итак, $\Phi(x) = \mathcal{M}(\xi \leqslant x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^T$, если все события $\{\xi \leqslant x\}$ измеримы при заданной в $\mathbb{R}^T$ σ-алгебре. Введем ряд понятий.

Если заданы два измеримых пространства $(\Omega, \mathcal{F})$ и $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$, то измеримое отображение $\xi : \Omega \to \mathcal{S}$ будем называть неопределенным отображением (НО) или неопределенным элементом. Измеримость удобно обозначать символом $\xi \in \mathcal{F}|\mathcal{B}$. Если на $(\Omega, \mathcal{F})$ дополнительно задана ФН $\mathcal{M}$ и $\xi \in \mathcal{F}|\mathcal{B}$, то распределение неопределенного элемента ξ задается соотношением $\mathcal{M}_\xi(B) = \mathcal{M}(\xi^{-1}(B))$, $B \in \mathcal{B}$. Функция множества $\mathcal{M}_\xi$ также будет являться ФН на $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$ в силу свойств многозначного отображения ξ^{-1}.

Будем считать, что числовая функция $\Phi(x_\bullet)$, заданная на всех функциях $x_\bullet : T \to \mathbb{R}$, таких что $\bigvee_{t \in T} |x_t| < \infty$, является неубывающей, если условие $x_t \leqslant y_t$, $\forall t \in T$, влечет $\Phi(x_\bullet) \leqslant \Phi(y_\bullet)$. На множестве

$$B(T) = \mathbb{R}^T \bigcap \Big\{ x_\bullet : \bigvee_{t \in T} |x_t| < \infty \Big\}$$

ограниченных числовых функций введем норму $\|x\| = \bigvee_{t \in T} |x_t|$ и превратим это множество в банахово пространство. Условимся также, что $x < y$ означает $x_t < y_t$, $\forall t \in T$. В данной работе мы обобщим теорему 2.2 из [1] и приведем необходимые и достаточные условия для того, чтобы неубывающая функция $\Phi : B(T) \to \mathbb{R}$ была ФР некоторого неопределенного элемента $\xi : \Omega \to B(T)$, заданного на ФН-пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{M})$.

Перейдем к понятию условной ФН. В теории Лиу условная ФН определяется по формуле

$$\mathcal{M}(A|B) = \begin{cases} \dfrac{\mathcal{M}(A \cap B)}{\mathcal{M}(B)}, & \text{если } \dfrac{\mathcal{M}(A \cap B)}{\mathcal{M}(B)} < 0.5; \\ 1 - \dfrac{\mathcal{M}(A^c \cap B)}{\mathcal{M}(B)}, & \text{если } \dfrac{\mathcal{M}(A^c \cap B)}{\mathcal{M}(B)} < 0.5; \\ 0.5, & \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{1.3}$$

Установлено [1, теорема 1.10], что функция множества $\mathcal{M}(\cdot|B)$ является ФН, если $\mathcal{M}(B) > 0$.

В настоящей работе обсуждается вопрос о нахождении условных распределений $\mathcal{M}(\xi = x|\eta = y)$ для НВ ξ, η, что весьма важно для теории оценивания. Приводятся также примеры, характеризующие особенности теории Лиу.

2. Основные результаты

Теорема 1. *Регулярная функция* (1.2) *на произведении пространств удовлетворяет аксиомам* 1–3 *и является* ФН.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Одновременное выполнение условий

$$\sup_{C_T(t, A_t) \subset A} \mathcal{M}\big(C_T(t, A_t)\big) > 0.5 \quad \text{и} \quad \sup_{C_T(t, A_t) \subset A^c} \mathcal{M}\big(C_T(t, A_t)\big) > 0.5$$

невозможно. Если предположить противное, то существуют число $\sigma > 0$, множества $C_T(t, A_t^*) \subset A$ и $C_T(t, A_t^{**}) \subset A^c$ такие, что $\mathcal{M}_t(A_t^*) \geqslant 0.5+\sigma$ и $\mathcal{M}_t(A_t^{**}) \geqslant 0.5+\sigma$ для всех $t \in T$. Далее имеем $\big(\prod_{t\in T} A_t^*\big) \bigcap \big(\prod_{t\in T} A_t^{**}\big) = \varnothing$. Но тогда существует хотя бы одно t, для которого $(A_t^*)^c \bigcup (A_t^{**})^c = \Omega_t$ и $1 \leqslant \mathcal{M}_t((A_t^*)^c) + \mathcal{M}_t((A_t^{**})^c) = 2 - \mathcal{M}_t(A_t^*) - \mathcal{M}_t(A_t^{**}) \leqslant -2\sigma - 1 + 2$, что невозможно.

Ясно, что $\mathcal{M}(\Omega_T) = 1$. Докажем равенство $\mathcal{M}(A) + \mathcal{M}(A^c) = 1$.

• Пусть $\sup\limits_{C_T(t,A_t)\subset A} \mathcal{M}\big(C_T(t, A_t)\big) > 0.5$, отсюда $\sup\limits_{C_T(t,A_t)\subset A^c} \mathcal{M}\big(C_T(t, A_t)\big) \leqslant 0.5$. Из формулы (1.2) следует, что $\mathcal{M}(A) = \sup_{C_T(t,A_t)\subset A} \mathcal{M}\big(C_T(t, A_t)\big)$, а

$$\mathcal{M}(A^c) = 1 - \sup_{C_T(t,A_t)\subset (A^c)^c} \mathcal{M}\big(C_T(t, A_t)\big) = 1 - \mathcal{M}(A).$$

Случай $\sup_{C_T(t,A_t)\subset A^c} \mathcal{M}\big(C_T(t, A_t)\big) > 0.5$ рассматривается аналогично.

• Пусть теперь

$$\sup_{C_T(t,A_t)\subset A} \mathcal{M}\big(C_T(t, A_t)\big) \leqslant 0.5 \quad \text{и} \quad \sup_{C_T(t,A_t)\subset A^c} \mathcal{M}(C_T(t, A_t)) \leqslant 0.5.$$

Тогда $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(A^c) = 0.5$.

Докажем субаддитивность $\mathcal{M}\big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\big) \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}(A_i)$ для любой последовательности $A_i \in \mathcal{F}_T$.

• Пусть все $\mathcal{M}(A_i) < 0.5$. Для любого $\sigma > 0$ найдутся цилиндры $C_T(t, A_t^{i,*}) \subset A_i^c$ такие, что

$$1 - \mathcal{M}\big(C_T(t, A_t^{i,*})\big) \leqslant \mathcal{M}(A_i) + \sigma/2^i.$$

Имеем $C_T\big(t, \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_t^{i,*}\big) \subset \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i^c$. Далее получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_t\Big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_t^{i,*}\Big) &= 1 - \mathcal{M}_t\Big(\Big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_t^{i,*}\Big)^c\Big) = 1 - \mathcal{M}_t\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Big(A_t^{i,*}\Big)^c\Big)\\ &\geqslant 1 - \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_t\big((A_t^{i,*})\big)^c = 1 - \sum_{i\in\mathbb{N}} \big(1 - \mathcal{M}_t(A_t^{i,*})\big)\end{aligned}$$

для любого $t \in T$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) &\leqslant 1 - \mathcal{M}\Big(C_T\Big(t, \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_t^{i,*}\Big)\Big) = 1 - \bigwedge_{t\in T} \mathcal{M}_t\Big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_t^{i,*}\Big)\\ &\leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} \bigvee_{t\in T} \big(1 - \mathcal{M}_t(A_t^{i,*})\big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \Big(1 - \mathcal{M}\big(C_T(t, A_t^{i,*})\big)\Big) \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}(A_i) + \sigma.\end{aligned}$$

В силу произвольности σ получаем субаддитивное неравенство.

• Предположим, что одно множество, скажем A_1, имеет $\mathcal{M}(A_1) \geqslant 0.5$, а для остальных $\mathcal{M}(A_i) < 0.5$ при $i > 1$. Если $\mathcal{M}\big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\big) = 0.5$, субаддитивность выполняется. Пусть $\mathcal{M}\big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\big) > 0.5$ или, что то же самое, $\mathcal{M}(A_1^c \cap B^c) < 0.5$, где $B = \bigcup_{i>1} A_i$. Оказывается, достаточно установить неравенство $\mathcal{M}(A \cup B) \leqslant \mathcal{M}(A) + \mathcal{M}(B)$ для двух множеств. Действительно, при $\mathcal{M}(A) < 0.5$ и $\mathcal{M}(B) < 0.5$ неравенство доказано даже для счетного числа множеств. Пусть $\mathcal{M}(A) \geqslant 0.5$, $\mathcal{M}(B) < 0.5$ и $\mathcal{M}(A \cup B) > 0.5$. $A^c \cup B = (A^c \cap B^c) \cup B$ и $\mathcal{M}(A^c \cup B) \leqslant \mathcal{M}(A^c \cap B^c) + \mathcal{M}(B)$, поскольку $\mathcal{M}(A^c \cap B^c) < 0.5$, отсюда $\mathcal{M}(A \cup B) = 1 - \mathcal{M}(A^c \cap B^c) \leqslant 1 - \mathcal{M}(A^c \cup B) + \mathcal{M}(B) \leqslant 1 - \mathcal{M}(A^c) + \mathcal{M}(B) = \mathcal{M}(A) + \mathcal{M}(B)$. Здесь использовали еще одно неравенство: $\mathcal{M}(A) \leqslant \mathcal{M}(A \cup B)$, если $\mathcal{M}(A) \leqslant 0.5$. Требуется его установить только при $\mathcal{M}(A \cup B) < 0.5$. В этом случае необходимое неравенство следует из соотношения

$$\sup_{C_T(t,A_t)\subset A^c} \mathcal{M}(C_T(t, A_t)) \geqslant \sup_{C_T(t,A_t)\subset A^c\cap B^c} \mathcal{M}(C_T(t, A_t)).$$

• Если два множества или более в объединении имеют ФН, большую либо равную 0.5, то субаддитивность тем более выполняется.

Теорема доказана.

Для произведения вероятностных пространств $\big(\Omega_t, \mathcal{F}_t, P_t\big)_{t\in T}$, $T = 1:2$, имеем $P_T(A_1 \times A_2) = P_1(A_1)P_2(A_2)$, следовательно, для вероятностных мер соотношение (1.1), вообще говоря, не выполняется. Приведем пример, показывающий, что ФН на произведении определяется неоднозначно.

П р и м е р 1. Пусть $\Omega_1 = \{a, b\}$, $\Omega_2 = \{c, d\}$, $\mathcal{M}_1(a) = 1/3$, $\mathcal{M}_1(b) = 2/3$, $\mathcal{M}_2(c) = 1/7$, $\mathcal{M}_2(d) = 6/7$. Упорядочим декартово произведение $\Omega_1 \times \Omega_2$ следующим образом: $(a, c) = 1$, $(b, c) = 2$, $(b, d) = 3$, $(a, d) = 4$. Тогда по формуле (1.1) выводим

$$\mathcal{M}(1) = 1/7, \quad \mathcal{M}(2) = 1/7, \quad \mathcal{M}(3) = 2/3, \quad \mathcal{M}(4) = 1/3,$$
$$\mathcal{M}(1,2,3) = 2/3, \quad \mathcal{M}(1,2,4) = 1/3,$$
$$\mathcal{M}(1,3,4) = 6/7, \quad \mathcal{M}(2,3,4) = 6/7.$$

Осталось определить ФН шести двухточечных множеств по формуле (1.2). Имеем

$$\mathcal{M}(1,2) = 1 - 6/7 = 1/7, \quad \mathcal{M}(3,4) = 6/7, \quad \mathcal{M}(1,4) = 1 - 2/3 = 1/3,$$
$$\mathcal{M}(2,3) = 2/3, \quad \mathcal{M}(1,3) = 2/3, \quad \mathcal{M}(2,4) = 1/3.$$

Однако если положить $\mathcal{M}(1,2) = 1/5$, $\mathcal{M}(3,4) = 4/5$, а остальные значения оставить прежними, то субаддитивность также выполняется. □

Итак, ФН на декартовом произведении можно определить, различными способами. Об этом, кстати, в книге [1] и в последующих работах не упоминается. По определению будем считать, что ФН на произведении пространств задается регулярной функцией (1.2). Теорема 1 позволяет строить произвольные семейства независимых событий и независимых отображений.

Следствие 1. *Пусть $B_t \in \mathcal{F}_t$ для $\forall t \in T$. Образуем множества $C_t = C_T(\alpha, A_\alpha)$, где $A_t = B_t$ и $A_\alpha = \Omega_\alpha$ для $\forall \alpha \neq t$. Тогда события C_t независимы на ФН-пространстве $\{\Omega_T, \mathcal{F}_T, \mathcal{M}\}$ с любой ФН, удовлетворяющей соотношению* (1.1). *Существует семейство $\xi_{t\in T}$ независимых* НО $\xi_t : \Omega_T \to \Omega_t$, $\xi_t \in \mathcal{F}_T|\mathcal{F}_t$, *таких что распределение $\mathcal{M}_{\xi_t} = \mathcal{M}_t$ на Ω_t.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\bigcap_{t\in T} C_t = C_T(t, B_t)$, имеем

$$\mathcal{M}\Big(\bigcap_{t\in T} C_t\Big) = \mathcal{M}\big(C_T(t, B_t)\big) = \bigwedge_{t\in T} \mathcal{M}_t(B_t) = \bigwedge_{t\in T} \mathcal{M}(C_t).$$

Заметим, что $C_t^c = C_T(\alpha, A_\alpha)$, где $A_t = B_t^c$ и $A_\alpha = \Omega_\alpha$ для $\forall \alpha \neq t$. Поэтому предыдущее равенство сохраняется, если некоторые множества C_t заменить их дополнениями C_t^c. Таким образом, события C_t независимы. Пусть $b_\bullet \in \Omega_T$. Зададим НО $\xi_t(b_\bullet) = b_t$ для $\forall t \in T$. Так как $\xi_t^{-1}(B_t) = C_t = C_T(\alpha, A_\alpha)$, где $A_t = B_t$ и $A_\alpha = \Omega_\alpha$ для $\forall \alpha \neq t$, то $\mathcal{M}_{\xi_t} = \mathcal{M}_t$, поскольку $\mathcal{M}(C_t) = \mathcal{M}_t(B_t)$. Вследствие независимости событий C_t получаем независимость НО ξ_t.

Следствие доказано.

Теорема 1 и следствие 1 являются полной аналогией теоремы Ломницкого — Улама в теории вероятностей (см. [16, теорема 2]).

Докажем теорему о функциях распределения. Условимся одним символом x обозначать как полубесконечный интервал $x = C_T(t, (-\infty, x_t]) \in 2^{B(T)}$ (произведение интервалов $(-\infty, x_t] \in \mathbb{R}$), так и элемент из $B(T)$, который его определяет. Из контекста будет ясно, о чем идет речь. В множестве $B(T)$ рассмотрим семейство подмножеств $\mathcal{L}$, состоящее из полубесконечных интервалов x, их дополнений x^c, пустого множества и всего $B(T)$. Для всякой возрастающей функции $\Phi : B(T) \to \mathbb{R}$ зададим ФН $\mathcal{M}$ на $\mathcal{L}$: $\mathcal{M}(x) = \Phi(x)$, $\mathcal{M}(x^c) = 1 - \Phi(x)$, $\mathcal{M}(\varnothing) = 0$, $\mathcal{M}(B(T)) = 1$.

Теорема 2. *Пусть на пространстве $B(T)$ задана σ-алгебра $\mathcal{B}^T = \bigotimes_{t\in T}\mathcal{B}$, где $\mathcal{B}$ — борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}$. Для того чтобы неубывающая числовая функция $\Phi(x)$ с областью определения $B(T)$, $0 \leqslant \Phi \leqslant 1$, была ФР для некоторого* НО $\xi : \Omega \to B(T)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

1. $\Phi \not\equiv 0$.
2. $\Phi \not\equiv 1$.
3. *Из условия $\Phi(x) = 1\ \forall x > x^*$ должно следовать $\Phi(x^*) = 1$.*
4. *Для всякого покрытия $A_{i\in\mathbb{N}}$ пространства $B(T)$, $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i = B(T)$, где $A_i \in \mathcal{L}$, выполняется неравенство $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \Phi(A_i) \geqslant 1$.*

Если условия 1–4 выполняются, то существуют ФН-*пространство* $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{M}\big)$ *и* НО $\xi : \Omega \to B(T)$ *такие, что $\mathcal{M}(\xi \leqslant x) = \Phi(x)$.*

З а м е ч а н и е. Условие 4 в теореме не следует из первых трех. Рассмотрим, например, функцию

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 + x_2 \geqslant 1, \\ 0, & \text{если } x_1 + x_2 < 1, \end{cases}$$

на пространстве $\mathbb{R}^2$. Для нее свойства 1–3 выполняются. Выберем счетное множество векторов $x^r = [1;0] + r[-1;1]$, где r — рациональные числа, на прямой $x_1 + x_2 = 1$. Имеем $\mathcal{M}(x^r) = \mathcal{M}((-\infty, x_1^r] \times (-\infty, x_2^r]) = \Phi(x^r) = 1$, следовательно, $\mathcal{M}(x^{r,c}) = 0$. Открытые множества $x^{r,c}$, имеющие ФН нуль, образуют покрытие пространства $\mathbb{R}^2$. Таким образом, условие 4 для Φ не выполняется. Однако в одномерном случае для возрастающей функции $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ условие 4 не требуется. Действительно, если предположить, что $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}(A_i) < 1$, то в сумму могут входить только ФН интервалов $(-\infty, x^i]$ и (x^j, ∞). Здесь пустые множества считаются удаленными. В сходящемся ряде $\sum_{i\in\mathbb{N}} \Phi(x^i) < 1$ выберем максимальное число $\Phi(x^*)$ и соответствующий интервал $(-\infty, x^*] = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(-\infty, x^i]$. Аналогично в сходящемся ряде $\sum_{j\in\mathbb{N}}(1 - \Phi(x^j)) < 1$ выберем максимальное число $1 - \Phi(x^{**})$ и соответствующий интервал $(x^{**}, \infty) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}}(x^j, \infty)$. Так как $(-\infty, x^*] \cup (x^{**}, \infty) = \mathbb{R}$, то $x^{**} \leqslant x^*$ и $\Phi(x^*) + 1 - \Phi(x^{**}) \geqslant 1$; получаем противоречие.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2.

• Условия 1–4 необходимы. Пусть числовая функция Φ является ФР для НО $\xi : \Omega \to B(T)$ на ФН-пространстве $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{M}\big)$, $\xi \in \mathcal{F}|\mathcal{B}^T$. Рассмотрим ФН-распределение $\mathcal{M}_\xi(B) = \mathcal{M}(\xi^{-1}(B))$. Возьмем любую последовательность x^i полубесконечных интервалов, для которых $\bigwedge_{t\in T} x_t^i \to \infty$. Они образуют покрытие пространства $B(T)$. Поскольку (пользуемся субаддитивностью)

$$1 = \mathcal{M}_\xi(B(T)) = \mathcal{M}_\xi\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} x^i\Big) \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_\xi(x^i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \Phi(x^i),$$

то существует индекс i, для которого $\Phi(x^i) > 0$. Берем теперь любую последовательность x^i полубесконечных интервалов, для которых $\bigvee_{t\in T} x_t^i \to -\infty$. Ввиду того, что $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} x^i = \varnothing$, имеем $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} x^{i,c} = B(T)$. Поскольку $1 = \mathcal{M}_\xi(B(T)) = \mathcal{M}_\xi\big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} x^{i,c}\big) \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_\xi(x^{i,c}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \big(1 - \Phi(x^i)\big)$, то существует индекс i, для которого $\Phi(x^i) < 1$. Пусть $\Phi(x) = 1\ \forall x > x^*$. Берем интервалы x^i с $x_t^i = x_t^* + 1/i$. Имеем $x^{*,c} \subset x^{i,c}$ и, тем более, $x^{*,c} \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} x^{i,c}$. Следовательно, $\mathcal{M}_\xi(x^{*,c}) = 1 - \Phi(x^*) \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_\xi(x^{i,c}) = \sum_{i\in\mathbb{N}}(1 - \Phi(x^i))$. По условию правый ряд состоит из нулей, значит $1 - \Phi(x^*) = 0$. Наконец, условие 4 также следует из субаддитивности. Действительно, если $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = B(T)$, где $A_i \in \mathcal{L}$, то $1 = \mathcal{M}_\xi(B(T)) \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_\xi(A_i)$.

• Перейдем к доказательству достаточности. На семействе $\mathcal{L}$ подмножеств $B(T)$ ФН $\mathcal{M}$

уже определена. Для произвольного множества $B \in \mathcal{B}^T$ полагаем

$$\mathcal{M}(B) = \begin{cases} \inf\limits_{B \subset \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i} \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}(A_i), & \text{если} \inf\limits_{B \subset \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i} \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}(A_i) < 0.5; \\ 1 - \inf\limits_{B^c \subset \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i} \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}(A_i), & \text{если} \inf\limits_{B^c \subset \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i} \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}(A_i) < 0.5; \\ 0.5, & \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь нижние грани берутся по всем последовательностям $\{A_i\}$, $A_i \in \mathcal{L}$, накрывающим соответствующие множества. Наша цель — показать, что формула (2.1) действительно определяет некоторую ФН на $\mathcal{B}^T$.

• Одновременно соотношения

$$\inf_{B \subset \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i} \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}(A_i) < 0.5, \quad \inf_{B^c \subset \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i} \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}(A_i) < 0.5$$

выполняться не могут. Если предположить противное, то найдутся последовательности $A_{i\in\mathbb{N}}$ и $B_{j\in\mathbb{N}}$ элементов из $\mathcal{L}$ такие, что

$$\bigcup_{i,j\in\mathbb{N}} \big(A_i \bigcup B_j\big) = B(T) \ \text{ и } \ \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}(A_i) + \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{M}(B_j) < 1.$$

Но это невозможно по условию 4.

• Покажем, что $\mathcal{M}(B^c) = 1 - \mathcal{M}(B)$. Пусть $\mathcal{M}(B) = \inf\limits_{B \subset \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i} \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}(A_i) < 0.5$. Тогда $\inf\limits_{B^c \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i} \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}(A_i) \geqslant 0.5$ и, следовательно, $\mathcal{M}(B^c) = 1 - \mathcal{M}((B^c)^c) = 1 - \mathcal{M}(B)$. Если $\inf\limits_{B^c \subset \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} x^i} \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}(x^i) < 0.5$, рассуждения аналогичны. В случае $\mathcal{M}(B) = \mathcal{M}(B^c) = 0.5$ утверждение очевидно.

Докажем субаддитивность $\mathcal{M}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i) \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}(B_i)$ для любой последовательности $B_i \in \mathcal{B}^T$.

• Пусть все $\mathcal{M}(B_i) < 0.5$. Для любого $\sigma > 0$ найдутся последовательности $A_{ij} \in \mathcal{L}$ такие, что

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{M}(A_{ij}) \leqslant \mathcal{M}(B_i) + \sigma/2^i, \quad \text{где} \ \ B_i \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_{ij}.$$

Суммируя неравенства по i, имеем

$$\sum_{i,j\in\mathbb{N}} \mathcal{M}(A_{ij}) \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}(B_i) + \sigma.$$

Поскольку объединение $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$ покрыто счетным семейством $A_{ij} \in \mathcal{L}$ и всегда выполнено неравенство

$$1 - \inf_{B^c \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i} \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}(A_i) \leqslant \mathcal{M}(B) \leqslant \inf_{B \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i} \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}(A_i), \tag{2.2}$$

то находим, что $\mathcal{M}\big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\big) \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}(B_i) + \sigma$. В силу произвольности σ получаем субаддитивное неравенство.

• Докажем неравенство $\mathcal{M}(A \cup B) \leqslant \mathcal{M}(A) + \mathcal{M}(B)$ для любых $A, B \in \mathcal{B}^T$. Для $\mathcal{M}(A) < 0.5$ и $\mathcal{M}(B) < 0.5$ неравенство уже доказано. Пусть $\mathcal{M}(A) \geqslant 0.5$ и $\mathcal{M}(B) < 0.5$, $\mathcal{M}(A \cup B) > 0.5$. Точно так же, как при доказательстве теоремы 1, можем записать $A^c \cup B = (A^c \cap B^c) \cup B$ и $\mathcal{M}(A^c \cup B) \leqslant \mathcal{M}(A^c \cap B^c) + \mathcal{M}(B)$, откуда $\mathcal{M}(A \cup B) = 1 - \mathcal{M}(A^c \cap B^c) \leqslant 1 - \mathcal{M}(A^c \cup$

$B) + \mathcal{M}(B) \leqslant 1 - \mathcal{M}(A^c) + \mathcal{M}(B) = \mathcal{M}(A) + \mathcal{M}(B)$. Здесь мы воспользовались неравенством $\mathcal{M}(A) \leqslant \mathcal{M}(A \cup B)$, если $\mathcal{M}(A) \leqslant 0.5$. Требуется его установить только при $\mathcal{M}(A \cup B) < 0.5$. В этом случае необходимое неравенство следует из того, что всякое покрытие $A \cup B \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ является также и покрытием множества A (см. формулы (2.1), (2.2)).

• Общая формула субаддитивности следует из предыдущего. Если $\mathcal{M}(B_1) \geqslant 0.5$ и $\mathcal{M}(B_i) < 0.5$ для всех индексов $i > 1$, то, обозначив объединение $\bigcup_{i>1} B_i$ через A, получим $\mathcal{M}(B_1 \cup A) \leqslant \mathcal{M}(B_1) + \mathcal{M}(A) \leqslant \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{M}(B_i)$. Если же два множества или более в объединении имеют меру, большую либо равную 0.5, то субаддитивность тем более выполняется.

• Полагаем $\Omega = B(T)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}^T$. Тогда НО $\xi(x_\bullet) = x_\bullet$ на ФН-пространстве $\big(B(T), \mathcal{B}^T, \mathcal{M}\big)$ будет иметь функцию Φ в качестве своей ФР.

Теорема доказана.

В теории Лиу разные НВ, заданные на $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, могут реализовывать одну и ту же ФР.

П р и м е р 2. Рассмотрим функцию $\Phi(x) = \big(\operatorname{atan}(x) + 1\big)/2$, где $\operatorname{atan}(x)$ — обратная функция к гиперболическому тангенсу. Данная функция строго возрастающая. На измеримом пространстве $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ зададим вероятность P, однозначно определяемую равенством $P([a, b]) = \Phi(b) - \Phi(a)$, $a \leqslant b$. Для всякой точки $b \in \mathbb{R}$ имеем $P(b) = 0$, и $P(\xi \leqslant x) = \Phi(x)$ для НВ $\xi(x) = x$. С другой стороны, на $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ определим ФН $\mathcal{M}$ по формуле (2.1). В теореме 2 показано, что НВ $\eta(x) = x$ на ФН-пространстве $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathcal{M}\big)$ будет иметь функцию Φ своей ФР. Однако распределение $\mathcal{M}_\eta$ существенно отличается от P_ξ, поскольку

$$\mathcal{M}_\eta(b) = \mathcal{M}(\eta = b) = \begin{cases} \Phi(b), & \text{если } \Phi(b) < 0.5; \\ 1 - \Phi(b), & \text{если } \Phi(b) > 0.5; \\ 0.5, & \text{если } \Phi(b) = 0.5. \end{cases}$$

Действительно, если $\Phi(b) < 0.5$, то точку b минимально накрывает интервал $(-\infty, b]$ с $\mathcal{M}((-\infty, b]) = \Phi(b)$. Если же $\Phi(b) > 0.5$, то точку b накрывает любой интервал $(b - 1/n, \infty)$ с $\mathcal{M}((b - 1/n, \infty)) = 1 - \Phi(b - 1/n)$. При достаточно больших n имеем $1 - \Phi(b - 1/n) < 0.5$. Вторая строка в формуле (2.1) не может реализоваться, поскольку множество $b^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, b - 1/n] \bigcup (b, \infty)$ не может иметь меру, меньшую 0.5. □

Неоднозначность НВ, отвечающих данной ФР, была отмечена ранее в [3, определение 1.9]. Дадим указанное определение.

О п р е д е л е н и е 3. НВ $\xi(x) = x$, заданная на измеримом пространстве $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ с ФР Φ, удовлетворяющей условиям 1–3 теоремы 2, называется *обыкновенной*, если ФН $\mathcal{M}_\xi$ порождается формулой (2.1), где T — одноточечное множество.

Распространим определение 3 для НО.

О п р е д е л е н и е 4. Тождественное НО $\xi(x_\bullet) = x_\bullet$, заданное на измеримом пространстве $(B(T), \mathcal{B}^T)$ с ФР Φ, удовлетворяющей условиям 1–4 теоремы 2, называется *обыкновенным*, если ФН $\mathcal{M}_\xi$ порождается формулой (2.1).

Определение 4, разумеется, включает в себя определение 3 при одноточечном T.

Для каждого НО $\xi \in B(T)$, заданного на ФН-пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{M})$, $\xi \in \mathcal{F}|\mathcal{B}^T$, можно определить семейство координатных НВ $\xi_t : \Omega \to \mathbb{R}$, заданных как $\xi_t(\omega) = \xi(\omega)_t$. Ясно, что $\xi_t \in \mathcal{F}|\mathcal{B}$ и $\mathcal{M}\{\omega : \|\xi_\bullet(\omega)\| < \infty\} = 1$. Справедливо в некотором смысле и обратное утверждение.

Пусть на ФН-пространствах $(\Omega_t, \mathcal{F}_t, \mathcal{M}_t)$ заданы НВ $\xi_t : \Omega_t \to \mathbb{R}$, $t \in T$. Используя индексированное НВ распределение $\mathcal{M}_{t,\xi_t}$, получаем семейство ФН-пространств $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathcal{M}_{t,\xi_t}\big)_{t \in T}$. Полагаем $\mathbb{R}^T = \prod_{t \in T} \mathbb{R}$ и $\mathcal{B}^T = \bigotimes_{t \in T} \mathcal{B}$. Введем на измеримом пространстве $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}^T)$ регулярную меру $\mathcal{M}$ по формуле (1.2). Тогда по следствию 1.1 существует семейство $\eta_{t \in T}$ независимых неопределенных элементов $\eta_t : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}$, $\eta_t \in \mathcal{B}^T|\mathcal{B}$, таких, что распределение $\mathcal{M}_{\eta_t} = \mathcal{M}_{t,\xi_t}$ на $\mathbb{R}$. Однако при таком построении нельзя утверждать, что тождественное отображение $\eta(x_\bullet) = x_\bullet$ при почти всех $x_\bullet$ по ФН $\mathcal{M}$ будет принадлежать $B(T)$, т. е. может быть $\mathcal{M}\{\omega : \|\xi_\bullet(\omega)\| < \infty\} < 1$. Но в случае конечного множества T последнее неравенство, разумеется, превращается в равенство.

Рассмотрим обыкновенное в смысле определения 4 НО ξ с ФР Φ и координатные НВ $\xi_t(x_\bullet) = x_t$. Пусть $F_t(x) = \mathcal{M}(\xi_t \leqslant x)$ — одномерная ФР для ξ_t. Тогда $F_t(x) = \mathcal{M}_\xi(C_x)$, где $C_x = C_T(\alpha, A_\alpha)$ и $A_t = (-\infty, x]$, $A_\alpha = \mathbb{R}\ \forall \alpha \neq t$. Приведем пример.

П р и м е р 3. Рассмотрим конечное измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$, где $\Omega = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, с регулярной ФН, заданной в примере 1. Положим $\eta(1) = [0;0]$, $\eta(2) = [1;0]$, $\eta(3) = [1;1]$, $\eta(4) = [0;1]$. Данное дискретное двумерное НО имеет ФР

$$\Phi(x_1,x_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 \geqslant 1,\ x_2 \geqslant 1; \\ 1/3, & \text{если } 0 \leqslant x_1 < 1,\ x_2 \geqslant 1; \\ 1/7, & \text{если } x_1 \geqslant 0,\ 0 \leqslant x_2 < 1; \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Поскольку функция Φ является ФР, она удовлетворяет условиям 1–4 теоремы 2. Образуем теперь обыкновенное НО ξ с функцией Φ и найдем ФР $F_1(x) = \mathcal{M}_\xi(C_x)$ для координатной НВ $\xi_1(x_1,x_2) = x_1$. Здесь множество C_x является левой полуплоскостью $\{[x_1;x_2] : x_1 \leqslant x\}$. Если $0 \leqslant x < 1$, то множество $C_x \subset [x;1] \cup [1;1]^c$ и $\mathcal{M}([x;1]) + \mathcal{M}([1;1]^c) = 1/3$. Поэтому $F_1(x) = 1/3$ при $0 \leqslant x < 1$. В других случаях найдутся покрытия из интервалов $[x_i, y_i]$ с нулевой суммой ФН при $x_i < 0$ и дополнений подобных интервалов при $x_i \geqslant 1$, $y_i < 0$. Итак, получаем

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ 1/3, & \text{если } 0 \leqslant x < 1; \\ 1, & \text{если } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Такую ФР имеет дискретная НВ ξ_1 с вероятностным распределением $\mathcal{M}_1(\xi_1 = 0) = 1/3$ и $\mathcal{M}_1(\xi_1 = 1) = 2/3$. Однако обыкновенная НВ с такой ФР имеет следующее распределение:

$$\mathcal{M}(B) = \begin{cases} 0, & \text{если } B \cap [0,1] = \varnothing; \\ 1/3, & \text{если } \exists x < 1,\ B \subset (-\infty, x],\ B \cap [0,1] \neq \varnothing; \\ 2/3, & \text{если } \nexists x < 1,\ B \subset (-\infty, x],\ B \cap [0,1] \neq \varnothing,\ B^c \cap [0,1] \neq \varnothing; \\ 1, & \text{если } B^c \cap [0,1] = \varnothing. \end{cases}$$

Для последовательности точек $B = \{1 - 1/i\}$ имеем $\mathcal{M}(B) = 2/3$. Ясно, что такая ФН $\mathcal{M}$ не является вероятностным распределением. □

Множество ФР для НВ включает в себя множество ФР для случайных величин. Более того, всякая неубывающая функция на $\mathbb{R}$, не равная тождественно нулю или единице и такая, что условие $\Phi(x) = 1$, $\forall x^*$, влечет $\Phi(x^*) = 1$, является ФР для некоторой НВ. Функция может не быть непрерывной справа, как обязательно должно быть в теории вероятностей. Функция, тождественно равная постоянной на $B(T)$, не может быть ФР в теории вероятностей, но в теории Лиу — может. Действительно, в условиях теоремы 2 рассмотрим функцию $\Phi(x) \equiv c$, где $c \in (0, 0.5)$, и ФН-пространство $(B(T), \mathcal{B}^T, \mathcal{M})$ с ФН, задаваемой формулой

$$\mathcal{M}(B) = \begin{cases} 0, & \text{если } B = \varnothing, \\ c, & \text{если } \exists \text{интервал } x,\ B \subset x; \\ 1-c, & \text{если } \exists \text{интервал } x,\ B^c \subset x; \\ 0.5, & \text{если } \nexists \text{интервалов } x,\ B^c \subset x \text{ и } B \subset x; \\ 1, & \text{если } B = B(T). \end{cases}$$

Тогда тождественное НО $\xi(x_\bullet) = x_\bullet$ будет иметь функцию Φ в качестве своей ФР. Если $c \in (0.5, 1)$, то зададим ФН как

$$\mathcal{M}(B) = \begin{cases} 0, & \text{если } B = \varnothing, \\ 1 - c, & \text{если } \exists \text{ интервал } x,\ B \subset x; \\ c, & \text{если } \exists \text{ интервал } x,\ B^c \subset x; \\ 0.5, & \text{если } \nexists \text{ интервалов } x,\ B^c \subset x \text{ и } B \subset x; \\ 1, & \text{если } B = B(T). \end{cases}$$

Тогда НО $\xi(x_\bullet) = -x_\bullet$ будет иметь функцию Φ в качестве своей ФР. Наконец, для $c = 0.5$ полагаем $\mathcal{M}(B) = 0.5$, если $B \neq \varnothing$, $B \neq B(T)$.

В отличие от теории вероятностей распределение $\mathcal{M}_\xi$ обыкновенного НО не может быть аналитически выражено через ФР $\Phi(x) = \mathcal{M}(\xi \leqslant x)$. Надо отметить одну особенность обыкновенного НО, которая указана в [3], но только для одномерного случая.

Теорема 3. *Пусть наряду с обыкновенным* НО ξ, *заданным на* $(B(T), \mathcal{B}^T)$, *как указано в определении 4, и имеющим* ФР Φ, *существует другое* НО $\eta : \Omega \to B(T)$, *заданное на* ФН-*пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{M})$ *и имеющее ту же* ФР Φ. *Тогда* $|\mathcal{M}_\xi(B) - 0.5| \leqslant |\mathcal{M}_\eta(B) - 0.5|$ *для каждого* $B \in \mathcal{B}^T$, *причем если* $\mathcal{M}_\xi(B) < 0.5$, *то* $\mathcal{M}_\eta(B) \leqslant \mathcal{M}_\xi(B)$, *и если* $\mathcal{M}_\xi(B) > 0.5$, *то* $\mathcal{M}_\eta(B) \geqslant \mathcal{M}_\xi(B)$. *То есть распределение обыкновенного* НО *ближе к* 0.5, *чем распределение любого другого* НО *с той же* ФР.

Доказательство. Для каждого $A \in \mathcal{L}$ имеем $\mathcal{M}_\xi(A) = \mathcal{M}_\eta(A)$. Для любого $B \in \mathcal{B}^T$ если $B \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ и $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_\xi(A_i) < 0.5$, то

$$\mathcal{M}_\eta(B) \leqslant \mathcal{M}_\eta\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_\eta(A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_\xi(A_i) < 0.5;$$

если $B^c \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ и $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_\xi(A_i) < 0.5$, то

$$\mathcal{M}_\eta(B) = 1 - \mathcal{M}_\eta(B^c) \geqslant 1 - \mathcal{M}_\eta\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) \geqslant 1 - \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_\eta(A_i) = 1 - \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_\xi(A_i) > 0.5.$$

Таким образом,

$$\mathcal{M}_\eta(B) \leqslant \mathcal{M}_\xi(B) = \inf_{B \subset \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i} \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_\xi(A_i), \text{ если } \inf_{B \subset \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i} \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_\xi(A_i) < 0.5,$$

и

$$\mathcal{M}_\eta(B) \geqslant \mathcal{M}_\xi(B) = 1 - \inf_{B^c \subset \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i} \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_\xi(A_i), \text{ если } \inf_{B^c \subset \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i} \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_\xi(A_i) < 0.5.$$

В других случаях $\mathcal{M}_\xi(B) = 0.5$.

Теорема доказана.

3. Некоторые особенности теории Лиу

В теории вероятностей независимость событий влечет совпадение условной и безусловной вероятностей. Покажем, что в теории Лиу это не так.

Пример 4. Рассмотрим то же декартово произведение с ФН, что и в примере 1. Пусть $A = \{1, 4\}$, $B = \{3, 4\}$. Тогда

$$\mathcal{M}(A \cap B) = \mathcal{M}(4) = 1/3 = \mathcal{M}(A) \wedge \mathcal{M}(B) = 1/3 \wedge 6/7 = 1/3;$$
$$\mathcal{M}(A^c \cap B) = \mathcal{M}(3) = 2/3 = \mathcal{M}(A^c) \wedge \mathcal{M}(B) = 2/3 \wedge 6/7 = 2/3;$$
$$\mathcal{M}(A \cap B^c) = \mathcal{M}(1) = 1/7 = \mathcal{M}(A) \wedge \mathcal{M}(B^c) = 1/3 \wedge 1/7 = 1/7;$$
$$\mathcal{M}(A^c \cap B^c) = \mathcal{M}(2) = 1/7 = \mathcal{M}(A^c) \wedge \mathcal{M}(B^c) = 2/3 \wedge 1/7 = 1/7.$$

Итак, события A и B независимы. Подсчитаем условные ФН:

$$\mathcal{M}(A|B) = \frac{\mathcal{M}(A\cap B)}{\mathcal{M}(B)} = \mathcal{M}(4)/\mathcal{M}(3,4) = 1/3 : 6/7 = 7/18 \neq \mathcal{M}(A) = 1/3,$$

$$\mathcal{M}(B|A) = 1 - \frac{\mathcal{M}(A\cap B^c)}{\mathcal{M}(A)} = 1 - \mathcal{M}(1)/\mathcal{M}(1,4) = 1 - 1/7 : 1/3 = 4/7 \neq \mathcal{M}(B) = 6/7. \qquad \square$$

Для любых событий A и B в теории Лиу выполняются неравенства

$$1 - \frac{\mathcal{M}(A^c\cap B)}{\mathcal{M}(B)} \leqslant \mathcal{M}(A|B) \leqslant \frac{\mathcal{M}(A\cap B)}{\mathcal{M}(B)}, \tag{3.1}$$

которые для независимых событий в теории вероятностей превращаются в равенства.

Нормальная величина $\mathcal{N}(e,\sigma)$ в теории Лиу определяется функцией распределения

$$\Phi(x) = \Big(1 + \exp\Big(\frac{\pi(e-x)}{\sqrt{3}\sigma}\Big)\Big)^{-1}. \tag{3.2}$$

Выделяется класс регулярных функций распределения, которые непрерывны и строго монотонно возрастают во всех точках x, где $0 < \Phi(x) < 1$. Кроме того, должны выполняться предельные равенства $\lim_{x\to-\infty}\Phi(x) = 0$ и $\lim_{x\to\infty}\Phi(x) = 1$. Всякая регулярная функция распределения имеет обратную непрерывную и строго монотонно возрастающую функцию $\Phi^{-1}(\alpha)$, где $\alpha \in (0,1)$. И напротив, всякая непрерывная и строго монотонно возрастающая функция $\Phi^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$ является обратной для некоторой регулярной функции распределения. Функция (3.2) регулярна. По аналогии с одномерным случаем введем

Определение 5. ФР $\Phi : B(T) \to \mathbb{R}$ назовем *регулярной*, если она удовлетворяет условиям 1–4 теоремы 2, непрерывна и строго монотонно возрастает во всех x, где $0 < \Phi(x) < 1$. Кроме того, выполняются предельные равенства $\lim_{\bigvee_{t\in T} x_t\to-\infty}\Phi(x) = 0$ и $\lim_{\bigwedge_{t\in T} x_t\to\infty}\Phi(x) = 1$.

Математическое ожидание (МО) неопределенной величины ξ определяется по формуле

$$\mathrm{E}\xi = \int\limits_0^\infty \mathcal{M}(\xi \geqslant x)dx - \int\limits_{-\infty}^0 \mathcal{M}(\xi \leqslant x)dx,$$

если хотя бы один интеграл конечен. Функция $1-\Phi(x)$ отличается от функции $\mathcal{M}(\xi \geqslant x)$ лишь в счетном числе точек, поэтому

$$\mathrm{E}\xi = \int\limits_0^\infty (1-\Phi(x))dx - \int\limits_{-\infty}^0 \Phi(x)dx = \int\limits_0^\infty x d\Phi(x) + \int\limits_{-\infty}^0 x d\Phi(x).$$

Второе равенство устанавливается здесь интегрированием по частям. Для величин с регулярным распределением имеем

$$\int\limits_0^\infty x d\Phi(x) = \int\limits_{\Phi(0)}^1 \Phi^{-1}(\alpha)d\alpha, \quad \int\limits_{-\infty}^0 x d\Phi(x) = \int\limits_0^{\Phi(0)} \Phi^{-1}(\alpha)d\alpha.$$

Для величин с конечным МО $\mathrm{E}\xi = e$ определяется дисперсия (вариация)

$$V\xi = \mathrm{E}(\xi-e)^2 = \int\limits_0^\infty \mathcal{M}((\xi-e)^2 \geqslant x)dx. \tag{3.3}$$

Раскрывая неравенство, получаем следующее:

$$V\xi = \int_0^\infty \mathcal{M}((\xi \geqslant e + \sqrt{x}) \cup (\xi \leqslant e - \sqrt{x}))dx \leqslant \int_0^\infty (1 - \Phi(e + \sqrt{x}) + \Phi(e - \sqrt{x}))dx. \tag{3.4}$$

П р и м е р 5. Рассмотрим измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$, где $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, с ФН, заданной в примерах 1, 3. Для неопределенной величины ξ, для которой $\xi(1) = -1$, $\xi(2) = 0$, $\xi(3) = 1$, $\xi(4) = 2$, имеем

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [2, \infty); \\ 2/3, & x \in [1, 2); \\ 1/7, & x \in [-1, 1); \\ 0, & x \in (-\infty, -1). \end{cases}$$

Значит, $\mathrm{E}\xi = e = 6/7 + 1/3 - 1/7 = 22/21$. Для вычисления дисперсии по формуле (3.3) рассмотрим величину $\eta = (\xi - e)^2$, для которой $\eta(1) = (1 + e)^2$, $\eta(2) = e^2$, $\eta(3) = (e - 1)^2$, $\eta(4) = (2 - e)^2$. Для этой величины находим

$$\mathcal{M}(\eta \geqslant x) = \begin{cases} 0, & x \in ((1 + e)^2, \infty); \\ 1/7, & x \in ((2 - e)^2, (1 + e)^2]; \\ 1/3, & x \in ((e - 1)^2, (2 - e)^2]; \\ 1, & x \in [0, (e - 1)^2]. \end{cases}$$

Следовательно, $V\xi = (e-1)^2 + ((2-e)^2 - (e-1)^2)/3 + ((1+e)^2 - (2-e)^2)/7 = e^2 + 11/7 - 38e/21 = 0.7732$. Если же вычисляем правую часть неравенства (3.4), то получим число $(2 - e)^2/3 + 2(e - 1)^2/3 + ((e + 1)^2 - (e - 1)^2)/7 = 0.9025$, которое больше. $\square$

Несмотря на то что неравенство в (3.4) может быть строгим, в теории Лиу дисперсия часто определяется именно правой частью этого неравенства (соглашение 2.3 [1, p. 77]).

К сожалению, МО не обладает свойством аддитивности. Пусть в примере 4 дана еще одна величина β, для которой $\beta(1) = 1$, $\beta(2) = 0$, $\beta(3) = -1$, $\beta(4) = 0$. Сумма $(\xi + \beta)(4) = 2$ и $\xi + \beta = 0$ — в других точках, $\mathrm{E}(\xi + \beta) = 2/3$. Находим

$$\Phi_\beta(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1, \infty); \\ 6/7, & x \in [0, 1); \\ 2/3, & x \in [-1, 0); \\ 0, & x \in (-\infty, -1). \end{cases}$$

Следовательно, $\mathrm{E}(\xi + \beta) = 2/3 > \mathrm{E}\xi + \mathrm{E}\beta = 22/21 - 11/21 = 11/21$.

4. Теория оценивания и теория Лиу

В данном разделе мы лишь слегка затронем этот вопрос и разовьем исследование в последующих работах. В теории вероятностей весьма часто рассматривается следующая задача оценивания. Даны вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и два вероятностных элемента $\xi : \Omega \to \mathcal{H}$ и $\eta : \Omega \to \mathcal{S}$, где $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$ — произвольное измеримое пространство, а $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство. Элемент ξ считается ненаблюдаемым, а η — наблюдаемым. Требуется найти измеримое отображение $f : \mathcal{S} \to \mathcal{H}$ так, чтобы

$$\mathrm{E}\|\xi - f(\eta)\|^2 \to \min_f. \tag{4.1}$$

Решением задачи (4.1) является условное математическое ожидание $f(\eta) = \mathrm{E}(\xi|\eta)$, которое в большинстве случаев существует благодаря теореме Радона — Никодима, [15; 16]. В теории Лиу ФН не является мерой и указанная теорема, вообще говоря, не применима. Но можно попытаться воспользоваться аналогией с теорией вероятностей и искать условную вероятность $\mathcal{M}(\xi = x|\eta = r)$ по формуле (1.3).

Начнем рассмотрение вопроса на примерах.

Пример 6. Пусть $\xi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — обыкновенное НО с регулярной ФР $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ смысле определений 4, 5. Пусть проекция ξ_1 ненаблюдаема, а ξ_2 наблюдаема. Требуется найти условное распределение $\mathcal{M}(\xi_1 = x|\xi_2 = y)$. Воспользуемся формулой (1.3). Событие $\{\xi = [x; y]\}$ имеет ФН

$$\mathcal{M}_\xi(\xi = [x; y]) = F(x, y) \bigwedge (1 - F(x, y)).$$

Событие $\{\xi_2 = y\}$ имеет ФН

$$\mathcal{M}_\xi(\xi_2 = y) = F_2(y) \bigwedge (1 - F_2(y)).$$

где ФР $F_2(y) = \mathcal{M}_\xi(C_y)$ для 2-й координаты. Здесь множество C_y является нижней полуплоскостью $\{[x_1; x_2] : x_2 \leqslant y\}$. Имеем $C_y \subset [m; y] \cup [m; m]^c$ в обозначениях теоремы 2 и $\mathcal{M}_\xi(C_y) \leqslant F(m, y) + 1 - F(m, m)$. Устремляя m к ∞, получаем $\mathcal{M}_\xi(C_y) \leqslant F(\infty, y)$. С другой стороны, $C_y^c \subset [m; y - \alpha]^c$ и $\mathcal{M}_\xi(C_y^c) \leqslant 1 - F(m, y - \alpha)$. Устремляя m к ∞, выводим $\mathcal{M}_\xi(C_y^c) \leqslant 1 - F(\infty, y - \alpha)$. Значит, $\mathcal{M}_\xi(C_y^c) \leqslant 1 - F(\infty, y)$ в силу произвольности α. Так как покрытия минимальны, заключаем, что $F_2(y) = F(\infty, y)$. По формуле (3.1) приходим к равенству

$$\mathcal{M}_\xi(\xi_1 = x|\xi_2 = y) = \frac{F(x, y) \bigwedge (1 - F(x, y))}{F(\infty, y) \bigwedge (1 - F(\infty, y))}, \tag{4.2}$$

если правая часть < 0.5. К сожалению, аналитического выражения для $\mathcal{M}_\xi(\xi_1 \neq x, \xi_2 = y)$ в общем случае не существует. Но поскольку $\{\xi_2 = y\} = \{\xi_1 \neq x, \xi_2 = y\} \cup \{\xi_1 = x, \xi_2 = y\}$, можем записать неравенство

$$\mathcal{M}_\xi(\xi_1 \neq x, \xi_2 = y) \geqslant F(\infty, y) \bigwedge (1 - F(\infty, y)) - F(x, y) \bigwedge (1 - F(x, y)),$$

откуда по формуле (3.1) находим

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\mathcal{M}_\xi(\xi_1 \neq x, \xi_2 = y)}{\mathcal{M}_\xi(\xi_2 = y)} &\leqslant 1 + \frac{\mathcal{M}_\xi(\xi_1 = x, \xi_2 = y)}{\mathcal{M}_\xi(\xi_2 = y)} - \frac{\mathcal{M}_\xi(\xi_2 = y)}{\mathcal{M}_\xi(\xi_2 = y)} \\ &= \frac{\mathcal{M}_\xi(\xi_1 = x, \xi_2 = y)}{\mathcal{M}_\xi(\xi_2 = y)} \leqslant \mathcal{M}_\xi(\xi_1 = x|\xi_2 = y). \end{aligned}$$

Итак, формула (4.2) справедлива без дополнительных условий. В этом примере регулярность ФР F использовалась при предельных переходах. □

Пример 7. Изменим условия предыдущего примера. Пусть ξ_1 и ξ_2 — две обыкновенные и независимые между собой НВ с ФР F_1 и F_2 соответственно. Пусть также x — точка непрерывности для F_1, а y — точка непрерывности для F_2. По-прежнему ξ_1 — ненаблюдаемая величина, а ξ_2 — наблюдаемая. Имеем

$$\begin{gathered} \mathcal{M}(\xi_1 = x, \xi_2 = y) = \mathcal{M}(\xi_1 = x) \bigwedge \mathcal{M}(\xi_2 = y), \\ \mathcal{M}(\xi_1 = x) = F_1(x) \bigwedge (1 - F_1(x)), \quad \mathcal{M}(\xi_2 = y) = F_2(y) \bigwedge (1 - F_2(y)), \\ \mathcal{M}(\xi_1 \neq x, \xi_2 = y) = \mathcal{M}(\xi_1 \neq x) \bigwedge \mathcal{M}(\xi_2 = y), \\ \mathcal{M}(\xi_1 \neq x) = 1 - F_1(x) \bigwedge (1 - F_1(x)). \end{gathered}$$

Запишем формулу (1.3):

$$\mathcal{M}(\xi_1 = x|\xi_2 = y) = \begin{cases} \dfrac{\mathcal{M}(\xi_1 = x, \xi_2 = y)}{\mathcal{M}(\xi_2 = y)}, & \text{если } \dfrac{\mathcal{M}(\xi_1 = x, \xi_2 = y)}{\mathcal{M}(\xi_2 = y)} < 0.5; \\ 1 - \dfrac{\mathcal{M}(\xi_1 \neq x, \xi_2 = y))}{\mathcal{M}(\xi_2 = y)}, & \text{если } \dfrac{\mathcal{M}(\xi_1 \neq x, \xi_2 = y))}{\mathcal{M}(\xi_2 = y)} < 0.5; \\ 0.5, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Возможны 4 варианта.

1. $\mathcal{M}(\xi_1 = x)$ и $\mathcal{M}(\xi_1 \neq x) \geqslant \mathcal{M}(\xi_2 = y)$. Тогда

$$\mathcal{M}(\xi_1 = x|\xi_2 = y) = 0.5.$$

2. $\mathcal{M}(\xi_1 = x) < \mathcal{M}(\xi_2 = y) \leqslant \mathcal{M}(\xi_1 \neq x)$. Тогда

$$\mathcal{M}(\xi_1 = x|\xi_2 = y) = \begin{cases} \dfrac{\mathcal{M}(\xi_1 = x)}{\mathcal{M}(\xi_2 = y)}, & \text{если } \dfrac{\mathcal{M}(\xi_1 = x)}{\mathcal{M}(\xi_2 = y)} < 0.5; \\ 0.5, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

3. $\mathcal{M}(\xi_1 \neq x) < \mathcal{M}(\xi_2 = y) \leqslant \mathcal{M}(\xi_1 = x)$. Тогда

$$\mathcal{M}(\xi_1 = x|\xi_2 = y) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\mathcal{M}(\xi_1 \neq x)}{\mathcal{M}(\xi_2 = y)}, & \text{если } \dfrac{\mathcal{M}(\xi_1 \neq x)}{\mathcal{M}(\xi_2 = y)} < 0.5; \\ 0.5, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

4. $\mathcal{M}(\xi_1 = x)$ и $\mathcal{M}(\xi_1 \neq x) < \mathcal{M}(\xi_2 = y)$. Тогда

$$\mathcal{M}(\xi_1 = x|\xi_2 = y) = \begin{cases} \dfrac{\mathcal{M}(\xi_1 = x)}{\mathcal{M}(\xi_2 = y)}, & \text{если } \dfrac{\mathcal{M}(\xi_1 = x)}{\mathcal{M}(\xi_2 = y)} < 0.5; \\ 1 - \dfrac{\mathcal{M}(\xi_1 \neq x)}{\mathcal{M}(\xi_2 = y)}, & \text{если } \dfrac{\mathcal{M}(\xi_1 \neq x)}{\mathcal{M}(\xi_2 = y)} < 0.5; \\ 0.5, & \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{4.3}$$

Заметим, что формула (4.3) включает все предыдущие варианты. □

Заключение

Основными результатами проведенного нами исследования являются следующие:

• Введен ряд новых определений, отсутствующих в имеющейся литературе по теории неопределенности Лиу, и рассмотрены свойства введенных объектов.

• Получен аналог теоремы Ломницкого — Улама из традиционной теории вероятностей.

• Указаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция, заданная на банаховом пространстве ограниченных функций, была функцией распределения для некоторого неопределенного отображения.

• Рассмотрены примеры, показывающие сходство и различие теории Лиу с теорией вероятностей.

• На примерах рассмотрено приложение теории Лиу к теории оценивания.

Мы предполагаем дальнейшее развитие теории Лиу и изучение приложения теории неопределенности к оцениванию многошаговых и непрерывных динамических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Baoding Liu.** Uncertainty theory. 4-th ed. Ser. Springer Uncertainty Research. 2015. 487 p. doi: 10.1007/978-3-662-44354-5
2. **Kai Yao.** Uncertain differential equations. Ser. Springer Uncertainty Research. 2016. 158 p. doi: 10.1007/978-3-662-52729-0
3. **Zhu Yuanguo.** Uncertain optimal control. Ser. Springer Uncertainty Research. 2019. 208 p. doi: 10.1007/978-981-13-2134-4
4. **Sheng L., Zhu Y., Yan H., Wang K.** Uncertain optimal control approach for CO2 mitigation problem // Asian J. Control. 2017. Vol. 19, no. 6. P. 1931–1942. doi: 10.1002/asjc.1524
5. **Hou Yongchao, Yang Shengyan.** Uncertain programming with recourse // J. Chem. Pharm. Research. 2015. Vol. 7, no. 3. P. 2366–2372.
6. **Baoding Liu.** Toward uncertain finance theory // J. Uncertainty Anal. Appl. 2013. Vol. 1, art. no. 1. 15 p.
7. **Ananyev B.I.** A State Estimation of Liu Equations // AIP Conference Proceedings. 2015. Vol. 1690, art. no. 040005. doi: 10.1063/1.4936712
8. **Кофман А.** Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь, 1982. 432 с.
9. **Молодцов Д.А.** Теория мягких множеств. М.: УРСС, 2004.
10. **Малинецкий Г.Г.** Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент. Введение в нелинейную динамику. 3-е изд. М.: УРСС. 2001. 256 с.
11. **Пытьев Ю.П.** Возможность. Элементы теории и применения. М.: УРСС, 2000. 192 с.
12. **Пытьев Ю.П.** Возможность как альтернатива вероятности. Математические и эмпирические основы, приложения. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Физматлит, 2016. 600 с.
13. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
14. **Kurzhanski A., Varaiya P.** Dynamics and control of trajectory tubes: Theory and computation. SCFA. Boston: Birkhäuser, 2014. 445 p. doi: 10.1007/978-3-319-10277-1
15. **Ширяев А.Н.,** Вероятность 1, 2. М.: Изд-во МЦНМО, 2004. 924 с.
16. **Булинский А.В., Ширяев А.Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2003. 399 с.

Поступила 15.07.2023
После доработки 20.10.2023
Принята к публикации 23.10.2023

Ананьев Борис Иванович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: abi@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Liu Baoding. *Uncertainty theory*, Ser. Springer Uncertainty Research, 2015, 487 p. doi: 10.1007/978-3-662-44354-5
2. Yao Kai. *Uncertain differential equations*, Ser. Springer Uncertainty Research, 2016, 158 p. doi: 10.1007/978-3-662-52729-0
3. Zhu Yuanguo. *Uncertain optimal control.* Ser. Springer Uncertainty Research, 2019, 208 p. doi: 10.1007/978-981-13-2134-4
4. Sheng L., Zhu Y., Yan H., Wang K. Uncertain optimal control approach for CO_2 mitigation problem. *Asian J. Control*, 2017, vol. 19, no. 6, pp. 1931–1942. doi: 10.1002/asjc.1524
5. Hou Yongchao, Yang Shengyan. Uncertain programming with recourse. *J. Chem. Pharm. Research*, 2015, vol. 7, no. 3, pp. 2366–2372.
6. Liu Baoding. Toward uncertain finance theory. *J. Uncertainty Anal. Appl.*, 2013, vol. 1, art. no. 1. doi: 10.1186/2195-5468-1-1
7. Ananyev B.I. A state estimation of Liu equations. *AIP Conference Proceedings*, 2015, vol. 1690, art. no. 040005. doi: 10.1063/1.4936712

8. Kaufmann A. *Introduction to the theory of fuzzy subsets*, NY, Acad. Press, 1975, 416 p. ISBN: 0124023010 . Translated to Russian under the title *Vvedenie v teoriyu nechetkikh mnozhestv*, Moscow, Radio i Svyaz' Publ., 1982, 432 p.
9. Molodtsov D.A. *Teoriya myagkikh mnozhestv* [Theory of soft sets], Moscow, Editorial URSS, 2004. ISBN: 5-354-00810-7 .
10. Malinetskii G.G. *Khaos. Struktury. Vychislitel'nyi eksperiment. Vvedenie v nelineinuyu dinamiku* [Chaos. Structures. Computational experiment. Introduction to nonlinear dynamics]. Moscow, Editorial URSS, 2001, 256 p. ISBN: 5-354-00063-7 .
11. Pyt'ev Yu.P. *Vozmozhnost'. Elementy teorii i primeneniya* [Possibility. Elements of theory and application]. Moscow, Editorial URSS, 2000, 192 p. ISBN: 5-8360-0129-4 .
12. Pyt'ev Yu.P. *Vozmozhnost' kak al'ternativa veroyatnosti. Matematicheskie i empiricheskie osnovy, prilozheniya* [Possibility as an alternative to probability. Mathematical and empirical fundamentals, applications]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2016, 600 p. ISBN: 978-5-9221-1657-2 .
13. Kurzhanskii A.B. *Upravlenie i nabludenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and observation in conditions of indefiniteness]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 392 p.
14. Kurzhanski A., Varaiya P. *Dynamics and control of trajectory tubes: theory and computation*. Ser. Systems & Control: Foundations & Applications, Boston, Birkhäuser, 2014, 445 p. doi: 10.1007/978-3-319-10277-1
15. Shiryaev A.N. *Veroyatnost' 1, 2* [Probability 1, 2]. Moscow, Mosk. Tsentr Nepr. Matem. Obr. Publ., 2004, 924 p. ISBN: 5-94057-036-4 .
16. Bulinskii A.V., Shiryaev A.N. *Teoriya sluchainykh protsessov* [The theory of stochastic processes]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003, 399 p. ISBN: 5-9221-0335-0 .

Received July 15, 2023
Revised October 20, 2023
Accepted October 23, 2023

Funding Agency: The work was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075-02-2023-913).

Boris Ivanovich Ananyev, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: abi@imm.uran.ru .

Cite this article as: B. I. Ananyev. On some complements to Liu's theory. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 1, pp. 5–20 .