

УДК 519.632.4+519.635.1+539.3

КОЛЛОКАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ С ПОЛИНОМАМИ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ НА ТРЕУГОЛЬНЫХ СЕТКАХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РАСЧЕТА ИЗГИБА КРУГЛЫХ ПЛАСТИН С ОТВЕРСТИЯМИ¹

Л. С. Брындин, В. А. Беляев

Разработан новый коллокационный метод (h -КМ₄) численного решения двумерных эллиптических задач со старшими производными второго порядка. В качестве аппроксимации выступали полиномы четвертой степени в треугольных ячейках сетки, сгенерированной в пакете Gmsh. Неизвестные коэффициенты полиномиального разложения определялись из решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), состоящей из уравнений коллокации, условий согласования и краевых условий. В h -КМ₄ СЛАУ является квадратной, что принципиально отличает его от опубликованных ранее вариантов метода коллокации и наименьших квадратов, в котором выписываются аналогичные уравнения, но СЛАУ переопределена. Последнее приводит к увеличению времени вычислений и необходимости поиска специальных значений весовых коэффициентов, на которые домножаются уравнения приближенной задачи. Численно установлен четвертый порядок сходимости h -КМ₄ на гладких тестовых решениях уравнения Пуассона и системы уравнений с частными производными (УЧП), возникающей при расчете изгиба пластин в рамках теории Рейсснера – Миндлина (ТРМ). Продемонстрирована возможность рассчитывать напряженно-деформированное состояние (НДС) достаточно тонких пластин в ТРМ с помощью h -КМ₄. Показано, что для решения системы УЧП, описывающей изгиб пластины в рамках теории Кирхгофа – Лява (ТКЛ) в смешанной постановке, необходимо в h -КМ₄ увеличивать количество уравнений приближенной задачи. Таким образом, аппроксимация свелась к построению нового варианта метода коллокации и наименьших квадратов (h -МКНК₄), имеющего порядок сходимости не хуже третьего. Проведен анализ НДС круглых пластин с отверстиями в зависимости от толщины пластины в ТРМ и ТКЛ, а также от эксцентриситета в случае одного отверстия. Для повышения точности вычислений в задачах с большими градиентами и ограниченной гладкостью решения использовались адаптивные сетки, позволяющие в последнем случае повышать порядок сходимости. Их применение расширило возможности разработанных здесь h -КМ₄ и h -МКНК₄ по сравнению с предыдущими вариантами метода коллокации и наименьших квадратов, что подтверждено численными экспериментами.

Ключевые слова: метод коллокации, уравнение Пуассона, теория Рейсснера – Миндлина, теория Кирхгофа – Лява, изгиб пластины.

L. S. Bryndin, V. A. Belyaev. Collocation methods with fourth degree polynomials on triangular grids and their application to the calculation of bending of round plates with holes.

A new collocation method (h -CM₄) is developed for the numerical solution of two-dimensional elliptic problems with second-order derivatives. Fourth-degree polynomials on triangular cells of a grid generated by Gmsh are used as an approximation. Unknown coefficients of the polynomial decomposition are determined from the solution of a system of linear algebraic equations (SLAE) consisting of collocation equations, matching conditions, and boundary conditions. In the h -CM₄, the SLAE is quadratic in contrast to published versions of the least-squares collocation method, where similar equations are written, but the SLAE is overdetermined. This leads to an increase in computation time and the need to search for special values of the weight coefficients multiplying the equations of the approximate problem. The fourth order of convergence of the h -CM₄ is established numerically on smooth test solutions of the Poisson's equation and of a system of partial differential equations (PDEs) arising in the calculation of bending within the Reissner–Mindlin plate theory (RMPT). The possibility of calculation of the stress–strain state (SSS) of sufficiently thin plates in the RMPT is demonstrated. It is shown that in order to solve the PDE system describing the plate bending within the Kirchhoff–Love plate theory (KLPT) in a mixed formulation, it is necessary to increase the number of equations of the approximate problem in the h -CM₄. Thus, the approximation is reduced to the construction of a new version of the least-squares collocation method (h -LSCM₄), whose convergence order is no worse than the third. The SSS of round plates with holes is analyzed depending on the thickness of a plate in the RMPT and KLPT as well as on eccentricity in the case of one hole. Adaptive grids are used to improve accuracy in problems with large gradients and limited smoothness of the solution, which resulted in improving the order of convergence in the latter case. The application of adaptive grids expands the capabilities of the h -CM₄ and h -LSCM₄ compared to previous versions of the least-squares collocation method, which is confirmed by numerical examples.

Keywords: collocation method, Poisson's equation, Reissner–Mindlin theory, Kirchhoff–Love theory, plate bending.

¹Работа выполнена в рамках государственного задания ИТПМ СО РАН.

MSC: 65N35, 65N50, 74K20

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-1-43-60

Введение

Настоящая статья посвящена решению двумерных эллиптических задач в квадратных и многосвязных с криволинейной границей областях с помощью новых коллокационных методов. Рассматриваются примеры с особенностями в виде больших градиентов [1] и разрыва вторых производных в угловых точках области [2]. Разрабатываемые нами коллокационные методы применяются для расчета изгиба пластин в рамках теорий Рейсснера — Миндлина (ТРМ) [3, подразд. 3.4.4] и Кирхгофа — Лява (ТКЛ) [4, гл. IV]. В качестве объекта исследования выбраны круглые пластины в общем случае с нецентрными отверстиями, в окрестности которых возникают градиенты напряжений. Такие пластины широко используются в качестве силовых элементов различных конструкций в авиационной, ракетно-космической и судостроительной промышленности, в том числе для уменьшения веса [5], а также являются перекрытиями железобетонных конструкций колодца, защищая их от обвала грунта и нагрузок, передающихся от транспортных средств.

Развитие коллокационных методов является одной из актуальных задач вычислительной математики, поскольку они обладают рядом преимуществ по сравнению с другими известными методами. Например, коллокационные методы, в отличие от различных вариантов метода конечных элементов:

- 1) работают быстрее за счет отсутствия интегрирования, а также в некоторых случаях имеют меньшее количество ненулевых элементов в матрице системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) [6; 7];
- 2) более удобны для аппроксимации уравнений с частными производными (УЧП) высоких порядков со сложными краевыми условиями, в том числе в нерегулярных областях [8];
- 3) лучше подходят для автоматизированного построения h -вариантов и их реализации на компьютере с одновременной возможностью измельчать шаги сетки (h -подход) и увеличивать степень аппроксимирующих полиномов (p -подход) [1; 2; 9].

Для решения указанного выше класса задач весьма эффективными являются сеточные варианты численных методов. Некоторые бессеточные (псевдо)спектральные методы [1; 2; 8–10], в которых численные решения в виде полиномов достаточно высокой степени строятся в одной ячейке, в том числе включающей исходную нерегулярную область, демонстрируют экспоненциальную (или даже факториальную [11]) скорость уменьшения погрешности только при наличии высокого порядка гладкости искомых решений. Кроме того, такой подход построения сетки попросту неприменим для решения задач в многосвязных областях, поскольку аналитические продолжения решений за внутренний контур имеют логарифмические точки ветвления [9]. Для коллокационных методов нет необходимости в наличии фундаментального решения, построить которое затруднительно (или невозможно) при решении сложных разрешающих систем УЧП с переменными коэффициентами, что является необходимым условием для реализации метода граничных элементов [12, разд. 1.2]. Запись краевых условий в коллокационных методах осуществляется исключительно в точках, принадлежащих границе расчетной области [1; 2; 7–10], без потери порядка сходимости, которая может иметь место в методе конечных разностей [13].

По способу построения сеточные коллокационные методы можно разделить на две группы. К первой группе относятся методы, у которых кусочно-полиномиальное решение между ячейками склеено автоматически и принадлежит как минимум классу C^{r-1} , где r — порядок старшей производной разрешающей системы УЧП. Например, такая возможность реализована в изогеометрическом коллокационном методе с применением рациональных В-сплайнов с неравномерным расположением узлов [6] и в коллокационном методе с бикубическим эрмитовым базисом [7]. Последний подход аппроксимации привязан к обязательному расположе-

нию точек коллокации в корнях полиномов Лежандра и использованию прямоугольных сеток для обеспечения оптимального порядка сходимости. Однако стоит признать, что такая техника построения расчетных сеток может быть неэффективной, когда возникает необходимость использования сгущающихся сеток. Вторую группу составляют коллокационные методы, в которых склейка решения происходит “принудительным” образом только в нескольких точках на общих границах между ячейками [9; 14]. При этом в других точках на этих границах приближенное решение из разных соседних ячеек не обязано совпадать.

Ярким представителем последнего подхода является метод коллокации и наименьших квадратов, применяющийся чаще всего для численного решения двумерных стационарных задач [1; 2; 9; 15–19]. Отличительная особенность метода коллокации и наименьших квадратов заключается в необходимости решения переопределенных СЛАУ для отыскания приближенного решения. Они состоят из уравнений коллокации, условий согласования (необходимых для склейки решения между ячейками) и краевых условий. Переопределение позволяет получить СЛАУ с конечным числом обусловленности соответствующей ей прямоугольной матрицы, причем для каждой задачи оптимальная степень переопределения — своя [15; 17]. Однако переопределенные СЛАУ по сравнению со СЛАУ, имеющими квадратные матрицы, при одинаковом числе неизвестных обладают двумя недостатками. Во-первых, время решения таких СЛАУ больше, а во-вторых, при решении линейной задачи наименьших квадратов возникает необходимость поиска специальных значений весовых коэффициентов, на которые домножаются аппроксимирующие уравнения в методе коллокации и наименьших квадратов [15; 17; 18]. Они влияют на обусловленность СЛАУ, скорость сходимости метода итераций по подобластям для ее решения, а также на точность полученных результатов.

В данной работе при построении полиномиального решения четвертой степени ($p = 4$) на треугольных сетках нам впервые удалось обнаружить способ записи уравнений приближенной задачи, приводящий к невырожденным квадратным СЛАУ с небольшим и конечным числом обусловленности в рамках подхода с записью уравнений коллокации, условий согласования и краевых условий (аналогично тому, как это делается в методе коллокации и наименьших квадратов). Это оказалось возможным только для случаев, когда количество краевых условий совпадало с количеством искомых функций. Для решения системы УЧП в ТКЛ в смешанной постановке приходилось переопределять СЛАУ. Как итог, аппроксимация свелась к построению нового варианта метода коллокации и наименьших квадратов для решения этой задачи.

1. Постановка задачи

В данной работе мы рассмотрели несколько постановок задач.

- *Задача Дирихле для уравнения Пуассона в области $\Omega \subset R^2$ с границей $\partial\Omega$:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1.1)$$

$$u = g, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (1.2)$$

где $u(x, y)$ — искомая функция, $f(x, y)$ и $g(x, y)$ — заданные.

- *Задача изгиба однослойных изотропных пластин постоянной толщины $t = \text{const}$ в рамках ТРМ, описываемая следующей системой УЧП [3, п. 3.4.4]:*

$$\frac{K}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \right) \right) = -1, \quad (1.3)$$

$$\frac{(2-\nu)\beta^2}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + \frac{\beta^2}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\beta^2}{12(1+\nu)} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} - \frac{K}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \right) = 0, \quad (1.4)$$

$$\frac{(2-\nu)\beta^2}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\beta^2}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \frac{\beta^2}{12(1+\nu)} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} - \frac{K}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \right) = 0, \quad (1.5)$$

где $K = 5/6$ — сдвиговой коэффициент Тимошенко; $\nu = \text{const}$ — коэффициент Пуассона; $w(x, y)$ — прогиб; $\phi_x(x, y)$ и $\phi_y(x, y)$ — углы поворота нормали срединной поверхности вокруг осей y и x соответственно; $\beta = t/L$ — малый параметр; $L = \text{const}$ — характерный размер области.

Система (1.3)–(1.5) записана в безразмерном виде (в ней волнистые черточки над переменными уже опущены): $\tilde{x} = x/L$, $\tilde{y} = y/L$, $\tilde{w} = w \cdot Et^3/(qL^4)$, $\tilde{\phi}_x = \phi_x \cdot Et^3/(qL^3)$, $\tilde{\phi}_y = \phi_y \cdot Et^3/(qL^3)$. Здесь $E = \text{const}$ — модуль упругости; $q = \text{const}$ — поперечная нагрузка.

Из (1.4) и (1.5) видно, что в ТРМ, в отличие от ТКЛ, возникают малые параметры при старших производных ϕ_x и ϕ_y , если $t \rightarrow 0$ (см. [19, гл. 1], а также далее (1.6)–(1.9)). Кроме того, для (1.3)–(1.5) характерен эффект сдвигового запираания [20; 21], связанный с тем, что при $t \rightarrow 0$ приближенное решение все хуже удовлетворяет требованиям, допускающим нулевые деформации поперечного сдвига. Как итог, деформации и перемещения могут значительно недооцениваться при численном решении. В (1.4) и (1.5) при $t \rightarrow 0$ слагаемые $(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x)$ и $(\frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y)$ стремятся к нулю. В то же время в (1.3) сумма их производных должна уравновесить нагрузку q (после обезразмеривания имеем константу в правой части). Одним из средств преодоления этой неприятности является решение задачи с использованием полиномов относительно высокой степени. Например, в [20] отмечается эффективность применения метода конечных элементов с полиномами третьей степени или выше в зависимости от малости толщины пластины. Информацию о других способах “борьбы” со сдвиговым запираанием читатель может найти в [21] и цитируемой там литературе.

- Система УЧП, описывающая изгиб однослойных изотропных пластин в рамках ТКЛ в смешанной постановке [4, гл. IV]:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -1, \quad (1.6)$$

$$M_x + \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (1.7)$$

$$M_y + \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (1.8)$$

$$M_{xy} + \frac{1}{12(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \quad (1.9)$$

где M_x , M_y и M_{xy} — изгибающие моменты. Система (1.6)–(1.9) записана также в безразмерном виде (черточки опущены): $\tilde{x} = x/L$, $\tilde{y} = y/L$, $\tilde{w} = w \cdot Et^3/(qL^4)$, $\tilde{M}_x = M_x/(qL^2)$, $\tilde{M}_y = M_y/(qL^2)$, $\tilde{M}_{xy} = M_{xy}/(qL^2)$.

Системы (1.3)–(1.5) и (1.6)–(1.9) дополнялись краевыми условиями защемления С (от англ. *clamped*) и шарнирного закрепления S (от англ. *simply supported*) [22; 4, гл. IV]:

$$\text{С (ТРМ): } w = 0, \quad \phi_n = \phi_x n_x + \phi_y n_y = 0, \quad \phi_s = \phi_y n_x - \phi_x n_y = 0, \quad (1.10)$$

$$\text{С (ТКЛ): } w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} n_x + \frac{\partial w}{\partial y} n_y = 0, \quad (1.11)$$

$$\text{S (ТРМ): } w = 0, \quad M_n = 0, \quad \phi_s = 0, \quad (1.12)$$

$$\text{S (ТКЛ): } w = 0, \quad M_n = 0, \quad (1.13)$$

где (n_x, n_y) — компоненты внешней нормали к границе области $\partial\Omega$; $M_n = M_x n_x^2 + 2M_{xy} n_x n_y + M_y n_y^2$ — изгибающий момент. В ТРМ $M_x = D_{11} \frac{\partial\phi_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial\phi_y}{\partial y}$, $M_y = D_{12} \frac{\partial\phi_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial\phi_y}{\partial y}$, $M_{xy} = D_{66} \left(\frac{\partial\phi_x}{\partial y} + \frac{\partial\phi_y}{\partial x} \right)$, $D_{11} = D_{22} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$, $D_{12} = \frac{\nu Et^3}{12(1-\nu^2)}$, $D_{66} = \frac{Et^3}{12(1+\nu)}$.

Отметим, что на сегодняшний день для нерегулярных областей предложено и реализовано два адаптивных варианта метода коллокации и наименьших квадратов [15; 16], в которых строились расчетные сетки с треугольными [15] и квадратными [16] ячейками. В этих работах решались эллиптические задачи второго порядка с применением кусочно-полиномиального базиса только степеней $p = 2$ и $p = 3$.

Изложенное выше побудило нас разработать и исследовать новые варианты коллокационных методов решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона (1.1), краевых задач для (1.3)–(1.5) и (1.6)–(1.9), а также провести анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) круглых пластин с отверстиями в зависимости от их расположения, краевых условий, толщины пластин и рассматриваемых теорий. В этом заключается постановка задачи. Обозначим далее через h -КМ₄ метод коллокации без использования переопределенных СЛАУ с применением пространства полиномов четвертой степени, а через h -МКНК₄ — вариант метода коллокации и наименьших квадратов (с аналогичными аппроксимирующими полиномами четвертого порядка), в котором возникают переопределенные СЛАУ.

2. Описание численного метода

Покроем двумерную область Ω (рис. 1 (а)) неструктурированной сеткой в количестве N_{cells} треугольных ячеек с помощью пакета Gmsh (рис. 1 (б)). При этом к каждой стороне одной треугольной ячейки примыкает не более одной стороны другой ячейки. В данной работе адаптация сетки осуществляется к заранее известному (или предполагаемому) месту особенности решения задачи. Ячейки, две вершины которых лежат на $\partial\Omega$, назовем граничными, остальные — внутренними. Введем в каждой j -й ячейке, $j = 1, \dots, N_{cells}$, свою локальную систему координат

$$\xi_1 = \frac{x - x_{c_j}}{h_j}, \quad \xi_2 = \frac{y - y_{c_j}}{h_j}, \quad (2.1)$$

где (x_{c_j}, y_{c_j}) — центр j -й ячейки, являющийся точкой пересечения медиан образующего ее треугольника, h_j — радиус описанной вокруг него окружности.

Решение в каждой j -й ячейке ищется в виде полинома четвертой степени, базисными функ-

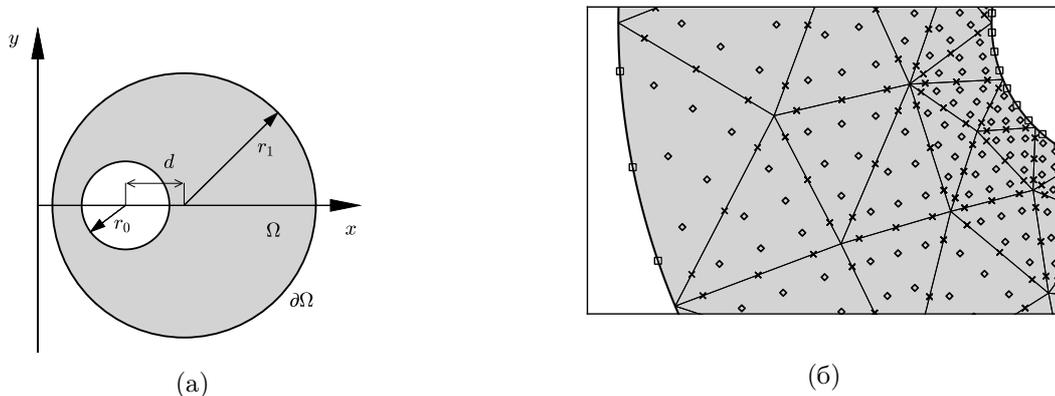


Рис. 1. Пример двусвязной области решения задачи (а) и фрагмент с адаптивной сеткой (б), где \diamond — точки коллокации; \times — точки согласования, \square — точки записи краевых условий

циями которого являются мономы:

$$u_{hj}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i_1=0}^4 \sum_{i_2=0}^{4-i_1} c_{i_1 i_2, j} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2}, \quad (2.2)$$

где $c_{i_1 i_2, j}$ — неизвестные коэффициенты.

Для определения $c_{i_1 i_2, j}$ в каждой ячейке выписываются уравнения коллокации, условия согласования и краевые условия, если ячейка является граничной. Опишем сначала h -КМ₄ на примере решения (1.1), (1.2).

Подставляя (2.2) в уравнение (1.1) в точке (x_{col}, y_{col}) , получим уравнение коллокации:

$$\frac{1}{h_j^2} \left(\frac{\partial^2 u_{hj}}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 u_{hj}}{\partial \xi_2^2} \right) = f. \quad (2.3)$$

Для расстановки точек коллокации (x_{col}, y_{col}) сперва выберем натуральное число N_c . Обозначим через $l_i, i = 1, 2, 3$, расстояние от i -й вершины треугольника до его центра. Далее треугольник, образующий ячейку, расширяется таким образом, что центр нового треугольника совпадает с начальным, а каждая вершина нового треугольника лежит на продолжении отрезка, соединяющего вершину исходного треугольника и его центр. При этом расстояние от новой вершины до центра составляет $(1 + 1/(N_c + 1))l_i$. Затем каждая сторона расширенного треугольника делится на равные отрезки $(N_c + 2)$ точками, включающими его вершины. В качестве точек коллокации выберем все пересечения линий, проведенных между точками разбиения сторон, отстоящих от каждой вершины на одинаковое количество делений. Таким образом, получим $(N_c + 1)N_c/2$ точек коллокации, расположенных внутри ячейки. На рис. 1 (б) приведен пример расстановки точек в случае $N_c = 3$. Данный алгоритм расширения треугольника проводится с целью расположения точек коллокации более равномерно как внутри ячейки, так и в целом во всей расчетной области.

Условия согласования выписываются в N_{match} точках, равномерно расположенных на каждой стороне j -й ячейки, обе вершины которой одновременно не принадлежат $\partial\Omega$ (см. рис. 1 (б)) и имеют следующий вид:

$$u_{hj} + \frac{\partial u_{hj}}{\partial \vec{n}_j} = \hat{u}_h + \frac{\partial \hat{u}_h}{\partial \vec{n}_j}, \quad (2.4)$$

где \hat{u}_h — решение из соседней ячейки, имеющей общую сторону с j -й; \vec{n}_j — единичная внешняя нормаль к границе j -й ячейки. Отметим, что из уравнений (2.4), выписанных в j -й и соседней с ней ячейках, следуют отдельные равенства [15]: $u_{hj} = \hat{u}_h, \frac{\partial u_{hj}}{\partial \vec{n}_j} = \frac{\partial \hat{u}_h}{\partial \vec{n}_j}$.

В случае если j -я ячейка является граничной, на отрезке дуги границы области, заключенной между двумя вершинами треугольника, которые принадлежат $\partial\Omega$, в N_{bound} равномерно распределенных точках (см. рис. 1 (б)) выписываются краевые условия

$$u_{hj} = g. \quad (2.5)$$

З а м е ч а н и е 1. При решении систем (1.3)–(1.5) и (1.6)–(1.9) уравнения коллокации получаются аналогично (2.3), краевые условия (1.10), (1.11), (1.12), (1.13) аппроксимируются аналогично (2.5). Условия согласования (2.4) выписываются для каждой неизвестной функции.

З а м е ч а н и е 2. В данной работе при решении краевых задач для (1.1) и (1.3)–(1.5) применяется h -КМ₄ при $N_c = 3, N_{match} = 3, N_{bound} = 3$. Здесь в каждой ячейке выписывается 6 уравнений коллокации и в сумме 9 условий согласования и краевых условий (в зависимости от типа ячеек) на 15 неизвестных коэффициентов для каждой неизвестной функции. В этом случае глобальная СЛАУ, представленная объединением всех вышеперечисленных уравнений во всех ячейках области, является квадратной.

З а м е ч а н и е 3. При решении (1.6)–(1.9) было рассмотрено несколько вариантов расстановки точек коллокации, согласования и записи краевых условий. Установлено, что при

$N_c = 3$, $N_{match} = 3$, $N_{bound} = 6$ глобальная СЛАУ является квадратной, но ее матрица A имеет очень большое число обусловленности в спектральной норме ($\text{cond}_2(A)$). Как следствие, в расчетах была получена плохая точность результатов. Небольшое переопределение сразу позволило существенно снизить $\text{cond}_2(A)$ и на несколько порядков улучшить погрешность решения задачи. Отметим, что при решении переопределенных СЛАУ, возникающих в данном случае в h -МКНК₄, уравнения коллокации для (1.6)–(1.9) домножались на h_j^2 ; в условиях согласования (2.4) перед производной по нормали в левой и правой частях вес брался равным h_j ; во втором уравнении краевого условия (1.11) также проводилось домножение на h_j . Такой выбор весов связан с порядком старшей производной в каждом конкретном уравнении. Более подробные количественные характеристики приведены ниже.

Неизвестные коэффициенты $c_{i_1 i_2, j}$ определялись из решения глобальной разреженной (в общем случае переопределенной) СЛАУ с помощью ортогонального метода, реализованного в библиотеке SuiteSparse [23], в комбинации с распараллеливанием вычислений на видеокарте Nvidia за счет применения технологии CUDA.

3. Результаты численных экспериментов и их обсуждение

В представленных ниже результатах относительная погрешность $\|E_r^u\|_\infty$ и абсолютная $\|E_a^u\|_\infty$ вычислялись по следующим формулам:

$$\|E_r^u\|_\infty = \frac{\max_{i=1, \dots, \mathfrak{M}} |u^{ex}(x_i, y_i) - u^h(x_i, y_i)|}{\max_{i=1, \dots, \mathfrak{M}} |u^{ex}(x_i, y_i)|}, \quad (3.1)$$

$$\|E_a^u\|_\infty = \max_{i=1, \dots, \mathfrak{M}} |u^{ex}(x_i, y_i) - u^h(x_i, y_i)|, \quad (3.2)$$

где u^{ex} — точное решение задачи; u^h — приближенное кусочно-полиномиальное решение; (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, \mathfrak{M}$, — вершины всех треугольных ячеек расчетной области.

Для оценки величины погрешности при расчете изгиба круглых пластин с нецентральной дыркой (или несколькими дырками) рассматривалась следующая величина:

$$\|E_r^u\|_\infty = \frac{\max_{i=1, \dots, \mathfrak{M}} |u_1^h(x_i, y_i) - u_2^h(x_i, y_i)|}{\max_{i=1, \dots, \mathfrak{M}} |u_1^h(x_i, y_i)|}, \quad (3.3)$$

где u_1^h и u_2^h — приближенные решения на подробной и грубой сетках соответственно. Верхний индекс “ u ” в (3.1), (3.2) или (3.3) обозначает функцию, для которой вычисляется погрешность. Здесь в качестве множества $\{(x_i, y_i), i = 1, \dots, \mathfrak{M}\}$ взяты точки, которые равномерно расположены в количестве 10000 в минимальном по площади прямоугольнике, включающем исходную область, и принадлежат ей. Обращаем внимание, что формула (3.3) показывает погрешность именно для решения u_2^h на грубой сетке.

Порядок сходимости погрешности приближенного решения определим следующим образом:

$$R = \frac{\log_2 \frac{E_2}{E_1}}{\log_2 \sqrt{\frac{N_{cells,1}}{N_{cells,2}}}},$$

где E_1 и E_2 — погрешности ((3.1), (3.2) или (3.3)) на двух сетках с количеством ячеек $N_{cells,1}$ и $N_{cells,2}$ соответственно, где $N_{cells,1} > N_{cells,2}$.

3.1. Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона

Пример 1. Рассмотрим жесткую краевую задачу Дирихле для уравнения Пуассона (1.1), (1.2) в $\Omega = (-0.5, 0.5)^2$ с тестовым решением $u(x, y) = e^{-\gamma(x^2+y^2)}$ при $\gamma = 1000$, имеющего большой градиент в окрестности точки $(0, 0)$ в форме пика и малое изменение в других частях области (рис. 2). В этом случае правая часть уравнения $f(x, y) = 4(\gamma^2(x^2 + y^2) - \gamma)e^{-\gamma(x^2+y^2)}$.

В табл. 1 приведено сравнение результатов решения данной задачи, полученных с помощью метода коллокации и наименьших квадратов (МКНК) при $p = 4$ с представлением приближенного решения в виде (2.2), которое реализовано на равномерной квадратной сетке по алгоритму из [1], и h -КМ₄ — на треугольной сетке, адаптируемой к особенности в точке $(0, 0)$ с показателем сгущения $\eta = 10$. Он рассчитан как отношение максимального характерного размера ячейки к минимальному.

В методе коллокации и наименьших квадратов [1] на 15 неизвестных коэффициентов в каждой ячейке выписывалось 36 уравнений, т. е. переопределение было более чем в два раза. Размер матрицы глобальной СЛАУ составляет в этом случае $36N_{cells} \times 15N_{cells}$ элементов в отличие от h -КМ₄, в котором он равняется $15N_{cells} \times 15N_{cells}$. Из табл. 1 видно, что метод коллокации и наименьших квадратов и h -КМ₄ сходятся с четвертым порядком. Однако адаптивный h -КМ₄ по точности существенно превосходит метод коллокации и наименьших квадратов, позволяя достигать одинаковую точность, имея на порядок меньшее число ячеек. Числа обусловленности $\text{cond}_2(A)$ в спектральной норме для h -КМ₄ для $N_{cells} = 88, 396, 1660$ были небольшими и равнялись $3.20e+2, 1.84e+3$ и $4.97e+3$ соответственно.

Пример 2. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона (1.1), (1.2) при $f(x, y) = 1$ и $g(x, y) = 0$ с особенностью в виде разрыва вторых производных в угловых точках квадратной области $\Omega = (0, 1)^2$.

Точным решением здесь является равномерно и абсолютно сходящийся ряд [2; 24]

$$u(x, y) = \frac{-16}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2m-1)\pi x) \sin((2n-1)\pi y)}{(2m-1)(2n-1)((2m-1)^2 + (2n-1)^2)}.$$

Численные результаты, полученные h -КМ₄ на сетке, сгущающейся к вершинам квадратной области, приведены в табл. 2. В этом примере видно, что порядок сходимости R у h -КМ₄ не хуже третьего. Этого удалось достигнуть за счет применения адаптации при использовании равномерных сеток $R = 2$ вне зависимости от порядка аппроксимации численных методов для гладких функций. Это было установлено в статье [24] при использовании метода конечных

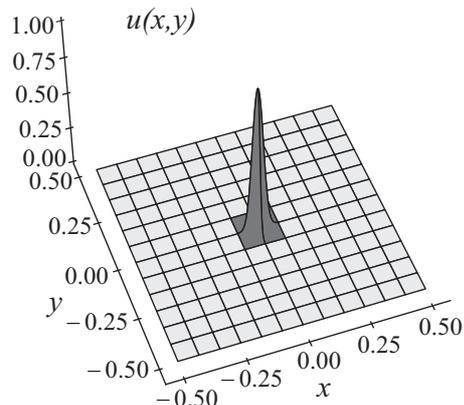


Рис. 2. График решения $u(x, y) = e^{-1000(x^2+y^2)}$ из примера 1

Т а б л и ц а 1

Результаты численных экспериментов
в примере 1

МКНК, алгоритм из [1]			h -КМ ₄ , эта работа		
N_{cells}	$\ E_r\ _{\infty}$	R	N_{cells}	$\ E_r\ _{\infty}$	R
100	4.99e-1	—	88	4.25e-1	—
400	1.31e-1	1.92	396	7.35e-3	5.39
1600	3.32e-3	5.30	1660	1.58e-4	5.35
6400	1.81e-4	4.19	6678	5.85e-6	4.73
25600	1.01e-5	4.16	25712	3.54e-7	4.16
102400	6.57e-7	3.94	101714	1.82e-8	4.31

Т а б л и ц а 2
Результаты численных экспериментов для h -КМ₄ в примере 2

N_{cells}	η	$\ E_a\ _\infty$	R
498	16	5.88e-7	—
1530	24	5.44e-8	4.24
6494	48	2.51e-9	4.25
26482	64	2.73e-10	3.15

Т а б л и ц а 3
Зависимость точности и порядка сходимости h -КМ₄ от показателя сгущения в примере 2

N_{cells}	$\ E_a\ _\infty$	R	N_{cells}	$\ E_a\ _\infty$	R
$\eta = 16$			$\eta = 24$		
498	5.88e-7	—	534	5.64e-7	—
1418	7.72e-8	3.88	1530	5.44e-8	4.44
5558	1.80e-8	2.13	5934	7.99e-9	2.83
21840	4.41e-9	2.05	23280	1.95e-9	2.06
$\eta = 48$			$\eta = 64$		
622	5.89e-7	—	678	6.16e-7	—
1648	8.19e-8	4.04	1716	7.28e-8	4.38
6494	2.51e-9	5.08	6730	2.69e-9	4.68
25460	4.91e-10	2.38	26482	2.73e-10	3.34

разностей второго, шестого и десятого порядка аппроксимации, а также в работе [2], в которой применялся метод коллокации и наименьших квадратов с представлением решения в виде прямого произведения полиномов Чебышева степени $p = 6, 8, 10, 12, 14, 16$. В частности, на сетке 40×40 разностной схемой десятого порядка была достигнута точность $\|E_a\|_\infty = 4.34e-8$, а методом коллокации и наименьших квадратов при $p = 16$ — $\|E_a\|_\infty = 4.28e-8$. Аналогичная точность достигается h -КМ₄ на сетке, состоящей из 1530 ячеек. Однако в методе коллокации и наименьших квадратов при $p = 16$ [2] количество неизвестных коэффициентов в каждой ячейке составляло 289, а в h -КМ₄ — 15. При этом для их отыскания в [2] решалась переопределенная СЛАУ, а здесь — квадратная.

В табл. 3 показана зависимость погрешности $\|E_a\|_\infty$ и порядка сходимости R от показателя сгущения сетки η . Для того чтобы R превышал три, необходимо на сетках, состоящих из более чем 6000 ячеек, сильнее проводить адаптацию к угловым точкам квадратной области при переходе с одного размера на другой. Если этого не делать, то порядок сходимости опускается до двух. Как следствие, на подробных сетках (> 6000 ячеек) повышается и точность, которая на грубых практически не изменяется при увеличении η .

3.2. Расчет НДС круглых пластин с одним отверстием в ТРМ и ТКЛ

Во всех представленных ниже расчетах, в том числе и в подразд. 3.3, степень сгущения сетки $\eta = 8$. Характерный размер ячейки около внешней окружности на самой грубой сетке задавался равным 0.4 (для обезразмеренных координат), около отверстия — 0.05 (в подразд. 3.3 около каждого отверстия). При измельчении сетки каждое из этих двух чисел делилось в два раза. В качестве параметров материала были взяты $E = 2 \cdot 10^5$, $\nu = 0.28$. Численный расчет и анализ НДС круглых пластин с отверстием разделим на два этапа. При этом внешняя окружность таких пластин описывалась уравнением $x^2 + y^2 = r_1^2$, а внутренняя — $(x + d)^2 + y^2 = r_0^2$, где $r_1 = 5$ и $r_0 = 1$ — их радиусы; d — эксцентриситет (рис. 1 (а)).

3.2.1. Верификация h -КМ₄ и h -МКНК₄ при расчете НДС кольцевой пластины с центральным отверстием. Результаты сходимости h -КМ₄ на последовательности измельчающихся сеток при расчете изгиба защемленной по всем краям (1.10) кольцевой пластины в рамках ТРМ (1.3)–(1.5) приведены в табл. 4. Точное решение задачи в этом случае для размерных переменных имеет следующий вид:

$$w = C_1 \left(\frac{\log r}{GtK} - \frac{r^2 \log r}{4D} + \frac{r^2}{8D} \right) - \frac{C_2 r^2}{2} - C_3 \log r + C_4 - \frac{qr^2}{4GtK} + \frac{qr^4}{64D}, \quad (3.4)$$

$$\phi_x = \left(C_2 + \frac{C_3}{r^2} + \frac{C_1}{2D} \log r - \frac{qr^2}{16D} \right) x, \quad \phi_y = \left(C_2 + \frac{C_3}{r^2} + \frac{C_1}{2D} \log r - \frac{qr^2}{16D} \right) y, \quad (3.5)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — полярный радиус; $G = E/(2(1 + \nu))$ — модуль сдвига; константы C_1 – C_4 определяются из решения СЛАУ размера 4×4 в зависимости от типа краевых условий (1.10) или (1.12). Ввиду громоздкости выражений для C_1 – C_4 мы их здесь не приводим. Для нахождения точного решения использовалась техника из работы [22] с учетом слагаемых $\log r$ и $1/r$ при интегрировании разрешающих уравнений в полярной системе координат.

Из табл. 4 видно, что h -КМ₄ сходится с порядком сходимости не хуже четвертого, за исключением случаев $t = 10^{-2}$ на грубых сетках и сильно тонкой пластины $t = 10^{-3}$. В последнем случае величина малого параметра $\beta^2 = 10^{-8}$ в (1.4), (1.5), если в качестве характерного размера принять значение диаметра внешней окружности, который на четыре (!) порядка превышает толщину пластины. Отметим, что с подобными проблемами сходимости сталкивались авторы статьи [20], когда использовали метод hp-Clouds высокого порядка аппроксимации при $t \rightarrow 0$. Также заметим, что с уменьшением толщины t относительная погрешность начинает ухудшаться, но, как это хорошо видно, h -КМ₄ способен рассчитывать НДС с точностью 1% и лучше на сетках достаточно умеренного размера для тонких пластин, когда $\beta \sim 10^{-2} \div 10^{-3}$. Величины $\|E_r^{\phi_y}\|_\infty$ и R для ϕ_y близки к соответствующим значениям для ϕ_x .

Рассмотрим теперь численное решение защемленной (1.11) (и шарнирно закрепленной (1.13)) по всем краям кольцевой пластины в рамках ТКЛ (1.6)–(1.9). Точное решение этой задачи для размерных переменных имеет следующий вид [9]:

$$w = \frac{qr^4}{64D} + C_5 r^2 (\log r - 1) + \frac{C_6 r^2}{4} + C_7 \log r + C_8, \quad (3.6)$$

где $D = Et^3/(12(1 - \nu^2))$; $L = r_1$; значения моментов M_x, M_y, M_{xy} с учетом обезразмеривания определяются по формулам (1.7)–(1.9); константы C_5 – C_8 находятся из решения СЛАУ размера 4×4 в зависимости от типа краевых условий (1.11) или (1.13).

Т а б л и ц а 4

**Результаты численных экспериментов расчета
изгиба кольцевой пластины в ТРМ**

N_{cells}	$t = 1$				$t = 10^{-1}$			
	$\ E_r^w\ _\infty$	R	$\ E_r^{\phi_x}\ _\infty$	R	$\ E_r^w\ _\infty$	R	$\ E_r^{\phi_x}\ _\infty$	R
254	1.29e-3	—	2.15e-3	—	3.52e-2	—	3.49e-2	—
820	6.41e-5	5.12	1.67e-4	4.36	1.65e-3	5.22	1.11e-3	5.88
2972	2.22e-6	5.22	6.18e-6	5.12	9.34e-5	4.46	1.02e-4	3.70
11374	1.13e-7	4.43	3.12e-7	4.44	5.47e-6	4.22	6.69e-6	4.05
$t = 10^{-2}$				$t = 10^{-3}$				
254	2.43e+0	—	1.79e+0	—	9.47e+0	—	1.08e+1	—
820	1.85e+0	0.46	1.54e+0	0.25	1.29e+0	3.40	1.18e+0	3.77
2972	1.11e-2	7.94	1.10e-2	7.67	1.62e+0	-0.35	1.40e+0	-0.26
11374	3.14e-4	5.31	2.71e-4	5.51	1.38e+0	0.23	5.33e+0	-1.99

Т а б л и ц а 5

**Результаты численных экспериментов расчета
изгиба кольцевой пластины в ТКЛ**

N_{cells}	C (1.11), $t = 10^{-1}$				S (1.13), $t = 1$			
	$\ E_r^w\ _\infty$	R	$\ E_r^{M_x}\ _\infty$	R	$\ E_r^w\ _\infty$	R	$\ E_r^{M_x}\ _\infty$	R
254	4.13e-3	—	7.77e-3	—	2.00e-3	—	1.20e-2	—
820	6.47e-5	4.22	9.42e-4	4.22	9.31e-5	5.23	1.01e-3	4.22
2972	4.13e-6	3.37	1.07e-4	3.37	8.84e-6	3.65	1.15e-4	3.37
11374	2.20e-7	4.36	1.94e-5	2.54	1.37e-6	2.77	1.24e-5	3.31

Кратко отметим, что решения (3.4), (3.5) и (3.6) содержат слагаемые $\log r$, для которых $(0, 0)$ является точкой ветвления, где решения обращаются в бесконечность. Несмотря на то что эта точка находится вне области решения задачи Ω , для некоторых численных методов ее наличие принципиально важно. Речь идет о бессеточных коллокационных методах (см. [8–10]), в которых нерегулярная Ω включается в прямоугольник, а уже затем в нем строится единое непрерывное полиномиальное решение без разбиения на подобласти. С помощью такого подхода данную задачу решить не удастся [9], что лишний раз подчеркивает актуальность применения сеточных методов.

Краевые задачи для системы (1.6)–(1.9) принципиально отличаются от других рассмотренных в данной работе краевых задач для (1.1) и (1.3)–(1.5) тем, что в первых количество неизвестных (четыре) не совпадает с количеством краевых условий (два). При применении h -КМ₄ для ТКЛ возникает необходимость взять $N_c = 3$, $N_{match} = 3$, $N_{bound} = 6$. Однако в этом случае обусловленность СЛАУ оказывается очень большой. Например, при расчете изгиба шарнирно закрепленной пластины толщиной $t = 1$ на сетке из 254 ячеек $\text{cond}_2(A) = 1.32 \cdot 10^{11}$, а погрешность $\|E_r^{M_x}\|_\infty = 2.18 \cdot 10^{-2}$ на сетке из 11374 ячеек. Установлено, что для заметного снижения обусловленности необходимо слегка переопределить СЛАУ, добавив одну точку согласования на каждой стороне. Таким образом, достаточно взять $N_c = 3$, $N_{match} = 4$, $N_{bound} = 2$ для h -МКНК₄. Тогда на сетке из 254 ячеек $\text{cond}_2(A) = 1.04 \cdot 10^7$, а $\|E_r^{M_x}\|_\infty = 1.24 \cdot 10^{-5}$ на сетке из 11374 ячеек. Дальнейшее переопределение практически никак не влияло на результаты расчетов. Результаты численных экспериментов по сходимости h -МКНК₄ приведены в табл. 5, из которой видно, что метод в среднем имеет третий порядок сходимости.

3.2.2. Анализ НДС круглых пластин с нецентральной дыркой в зависимости от эксцентриситета, толщины и теорий пластин. Далее проведен анализ компонент НДС в зависимости от эксцентриситета d и толщины t при расчете изгиба круглых пластин с нецентральной дыркой в рамках ТРМ и ТКЛ. Напряжения вычислялись по следующим формулам,

в ТРМ:

$$\sigma_x = \overline{E_1} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \overline{E_{12}} \frac{\partial \phi_y}{\partial y}, \quad \sigma_y = \overline{E_{12}} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \overline{E_1} \frac{\partial \phi_y}{\partial y}, \quad \sigma_{xy} = Gz \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right),$$

$$\sigma_{xz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \right), \quad \sigma_{yz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \right), \quad \overline{E_1} = \frac{Ez}{1 - \nu^2}, \quad \overline{E_{12}} = \frac{E\nu z}{1 - \nu^2}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)},$$

в ТКЛ:

$$\sigma_x = \frac{12M_x z}{t^3}, \quad \sigma_y = \frac{12M_y z}{t^3}, \quad \sigma_{xy} = \frac{12M_{xy} z}{t^3}, \quad z \in [-t/2, t/2].$$

Для сравнения касательных напряжений в ТКЛ и в ТРМ σ_{xz} и σ_{yz} восстанавливались по методике из [3, п. 5.2.2] с использованием уравнения равновесия трехмерной теории упругости:

$$\sigma_{xz}^* = - \int_{-t/2}^z \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) dz, \quad \sigma_{yz}^* = - \int_{-t/2}^z \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) dz. \quad (3.7)$$

В табл. 6 и 7 приведены результаты сходимости h -КМ₄ и h -МКНК₄ при расчете изгиба пластин в рамках ТРМ и ТКЛ соответственно для разных краевых условий (С или S), толщин t ($\beta = t/r_1$) и значений эксцентриситета d . В ТРМ сходимость расчетных значений для ϕ_y^h аналогична ϕ_x^h ; для σ_{xy}^h , σ_y^h , M_x^h , M_y^h , M_{xy}^h — для σ_x^h , для σ_{yz}^h — σ_{xz}^h , для σ_{yz}^{*h} — σ_{xz}^{*h} . В ТКЛ сходимость расчетных значений для σ_x^h , σ_y^h , σ_{xy}^h , M_y^h , M_{xy}^h аналогична M_x^h ; для σ_{yz}^{*h} — σ_{xz}^{*h} .

Т а б л и ц а 6
Сходимость h -КМ₄ в ТРМ при $d = 1.5$

N_{cells}	S, $\beta = 0.02$			S, $\beta = 0.2$		
	818	2942	10858	818	2942	10858
$\ E_r^w\ _\infty$	9.86e-4	4.97e-5	3.53e-6	2.63e-5	8.25e-7	5.95e-8
R	—	4.42	4.05	—	5.40	4.02
$\ E_r^{\phi_x}\ _\infty$	8.21e-4	5.83e-5	4.68e-6	3.00e-5	2.25e-6	8.72e-8
R	—	4.13	3.86	—	4.04	4.97
$\ E_r^{\sigma_x}\ _\infty$	1.36e-3	1.23e-4	2.73e-5	2.56e-4	2.15e-5	1.18e-6
R	—	3.75	2.30	—	3.87	4.44
$\ E_r^{\sigma_{xz}}\ _\infty$	2.90e-2	2.27e-3	1.62e-4	9.00e-4	7.42e-5	3.96e-6
R	—	3.98	4.04	—	3.89	4.48
$\ E_r^{\sigma_{xz}^*}\ _\infty$	1.47e-2	2.53e-3	1.00e-3	5.70e-4	1.21e-4	2.03e-5
R	—	2.74	1.42	—	2.42	2.73

Т а б л и ц а 7
Сходимость h -МКНК₄ в ТКЛ

N_{cells}	S, $\beta = 0.1, d = 3.5$			C, $\beta = 0.2, d = 0.5$		
	648	2294	8670	824	3040	11278
$\ E_r^w\ _\infty$	8.02e-5	2.75e-6	3.94e-7	3.56e-5	2.56e-6	1.68e-7
R	—	5.33	2.92	—	4.03	4.15
$\ E_r^{M_x}\ _\infty$	7.84e-3	5.24e-4	6.05e-5	3.60e-4	3.38e-5	2.41e-6
R	—	5.33	3.24	—	3.62	4.02
$\ E_r^{\sigma_{xz}^*}\ _\infty$	1.95e-1	1.88e-2	4.48e-3	1.17e-2	1.13e-3	1.93e-4
R	—	5.33	2.15	—	3.58	2.69

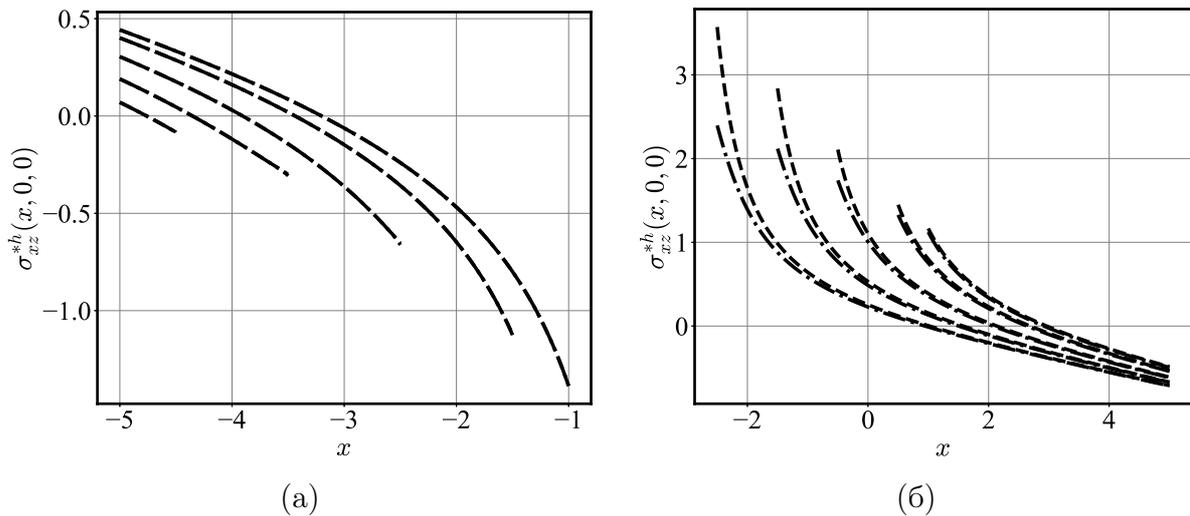


Рис. 3. Восстановленные нормированные напряжения σ_{xz}^{*h} в зависимости от эксцентриситета $d = 0, 0.5, 1.5, 2.5, 3.5$ для шарнирно закрепленной пластины при $t = 0.1$ слева от отверстия (а) и заземленной при $t = 1$ справа от отверстия (б) в ТКЛ (—) и ТРМ (- · -)

Результаты табл. 6 и 7 демонстрируют высокую точность расчетов. При этом для h -КМ₄ порядок сходимости R для w^h , ϕ_x^h , σ_x^h и σ_{xz}^h равняется приблизительно четырем. Компонента σ_{xz}^{*h} имеет в среднем порядок сходимости не хуже второго. Снижение порядка сходимости по сравнению с другими характеристиками НДС объясняется наличием вторых производных

Т а б л и ц а 8

Результаты расчетов изгиба пластины в зависимости от эксцентриситета

d	E_{left}^w	E_{right}^w	$E_{\text{left}}^{\sigma_{xz}^*}$	$E_{\text{right}}^{\sigma_{xz}^*}$	E_{left}^w	E_{right}^w	$E_{\text{left}}^{\sigma_{xz}^*}$	$E_{\text{right}}^{\sigma_{xz}^*}$
	C, $\beta = 0.2, t = 1$				S, $\beta = 0.2, t = 1$			
0	4.76e-1	4.76e-1	3.74e-2	3.74e-2	1.98e-1	1.98e-1	1.29e-2	1.29e-2
0.5	5.37e-1	4.23e-1	1.02e-2	9.11e-2	2.31e-1	1.73e-1	2.30e-2	4.57e-2
1.5	6.86e-1	3.39e-1	6.59e-2	2.11e-1	3.29e-1	1.35e-1	1.07e-1	1.02e-1
2.5	8.53e-1	2.76e-1	2.73e-2	3.39e-1	5.14e-1	1.10e-1	2.08e-1	1.54e-1
3.5	9.81e-1	2.28e-1	6.92e-2	4.90e-1	8.89e-1	9.13e-2	2.21e-1	2.04e-1
	C, $\beta = 0.1, t = 0.5$				S, $\beta = 0.1, t = 0.5$			
0	1.86e-1	1.86e-1	1.09e-2	1.09e-2	5.86e-2	5.86e-2	3.26e-3	3.26e-3
0.5	2.24e-1	1.57e-1	1.36e-2	3.90e-2	6.99e-2	5.02e-2	1.58e-2	2.05e-2
1.5	3.46e-1	1.17e-1	3.76e-2	1.01e-1	1.07e-1	3.84e-2	6.16e-2	4.86e-2
2.5	5.86e-1	9.18e-2	6.86e-3	1.63e-1	2.04e-1	3.07e-2	1.17e-1	7.56e-2
3.5	9.30e-1	7.35e-2	2.08e-2	2.34e-1	6.62e-1	2.52e-2	9.49e-2	9.99e-2
	C, $\beta = 0.02, t = 0.1$				S, $\beta = 0.02, t = 0.1$			
0	9.09e-3	9.09e-3	7.12e-4	6.49e-4	2.49e-3	2.49e-3	4.03e-5	1.06e-4
0.5	1.13e-2	7.53e-3	4.13e-3	5.53e-3	2.98e-3	2.12e-3	3.72e-3	3.53e-3
1.5	2.03e-2	5.50e-3	9.81e-3	1.73e-2	4.74e-3	1.61e-3	1.34e-2	7.63e-3
2.5	5.33e-2	4.24e-3	7.35e-3	2.57e-2	9.89e-3	1.28e-3	2.95e-2	1.32e-2
3.5	3.34e-1	3.38e-3	1.09e-2	3.54e-2	7.17e-2	1.05e-3	6.30e-3	1.82e-2

от углов поворота. В h -МКНК₄ порядок сходимости для рассматриваемых величин в среднем не хуже третьего.

Использование сеток без сгущения к отверстию приводит к потере точности. Например, применение h -КМ₄ при $\beta = 0.02$ позволяет достичь $\|E_r^w\|_\infty = 4.75e-3, 4.30e-4, 2.70e-5$ на сетках $N_{\text{cells}} = 906, 3186, 11554$ соответственно. Полученные значения погрешности практически на один десятичный порядок хуже представленных в табл. 6. На рис. 3 в качестве примера отражены нормированные значения $\sigma_{xz}^{*h} \cdot t/(qL)$ при $z = 0$ в двух теориях, из которых видно увеличение градиента напряжений при приближении к отверстию. Отметим, что на рис. 3(а) для тонкой пластины визуально графики напряжений не отличаются.

В табл. 8 приведены относительные отклонения максимальных значений w^h и σ_{xz}^{*h} в рамках ТКЛ и ТРМ в зависимости от эксцентриситета при различных условиях закрепления и толщины пластин. В качестве эталонного решения принимались значения в ТРМ. Отклонения рассматривались по отдельности вдоль двух линий: при $y = 0$ вдоль оси x слева (индекс "left") и справа (индекс "right") от отверстия.

Анализ табл. 8 показал следующее:

- 1) при увеличении значений эксцентриситета отклонения значений прогибов на левом участке и восстановленных напряжений на правом участке увеличиваются для любого t ;
- 2) отличия между ТРМ и ТКЛ более заметны при увеличении толщины t , что и следовало ожидать [19, подразд. 3.3];
- 3) отклонения менее 20% достигаются при выполнении одновременно $\beta \leq 0.1$ и $l/t \geq 10$ — для защемленной пластины и $\beta \leq 0.2$ и $l/t \geq 5$ — для шарнирно закрепленной (здесь l — минимальное расстояние между внешней и внутренней окружностями пластины).

Отметим, что для круглой шарнирно закрепленной пластины без отверстия отклонения, вычисляемые на всем отрезке $x \in [-5, 5], y = 0$, равняются $E^w = 4.13e-2$ при $t = 1$ и $E^w = 4.30e-4$ при $t = 0.1$, а для защемленной — $E^w = 1.50e-1$ при $t = 1$ и $E^w = 1.77e-3$ при $t = 0.1$, что существенно меньше отклонений при наличии отверстия (табл. 8). При этом напряжения $\sigma_{xz}^*, \sigma_{yz}^*$ в двух теориях в данном случае полностью совпадают, что можно обнаружить, подставляя

точные решения задач в уравнения (3.7). В случае круглой пластины без отверстия выражения для компонент НДС уже не будут содержать слагаемые $\log r$, а для определения неизвестных констант в зависимости от вида краевых условий достаточно решить СЛАУ размера 2×2 . Тогда в ТРМ и ТКЛ восстановленные касательные напряжения определяются как

$$\sigma_{xz}^* = -\frac{3qx(t^2 - 4z^2)}{4t^3}, \quad \sigma_{yz}^* = -\frac{3qy(t^2 - 4z^2)}{4t^3}.$$

3.3. Расчет НДС круглой пластины с несколькими отверстиями

Рассмотрим применение разработанных коллокационных методов к расчету изгиба круглой пластины толщины $t = 1$, имеющей несколько круглых отверстий. Внешняя граница области задавалась уравнением $x^2 + y^2 = 5^2$, а границы внутренних отверстий — $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1^2$, $(x-2)^2 + (y-0.5)^2 = 1.5^2$ и $(x+1.5)^2 + (y+2.5)^2 = 0.5^2$. Предполагалось, что внешний контур шарнирно закреплен, а внутренние отверстия зацементированы. Были взяты следующие параметры материала: $E = 2 \cdot 10^5$, $\nu = 0.28$. В табл. 9 приведены результаты сходимости h -КМ₄ и h -МКНК₄, демонстрирующие характер поведения скорости уменьшения погрешности, что и в случае круглой пластины с одним отверстием (см. табл. 6 и 7).

На рис. 4 и 5 приведены значения интенсивности напряжений, отнесенной к q , вычисляемой по формуле

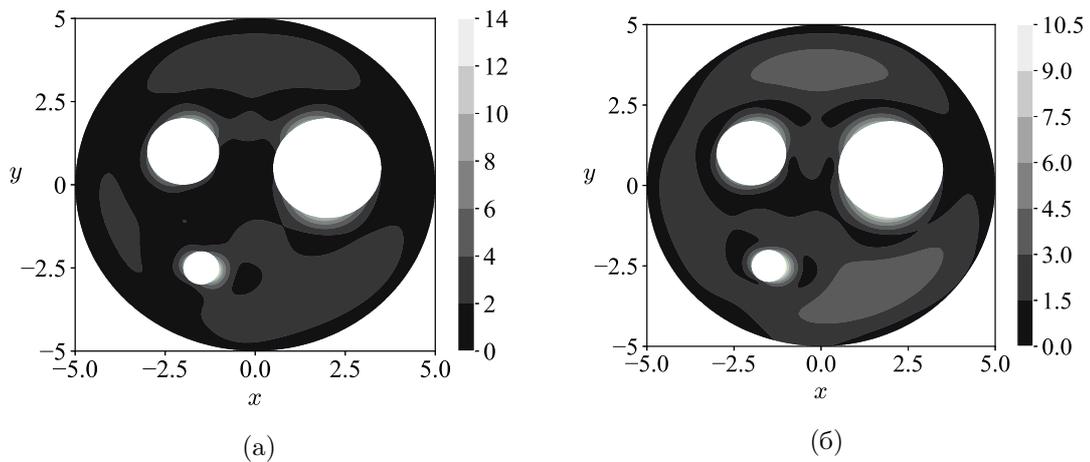
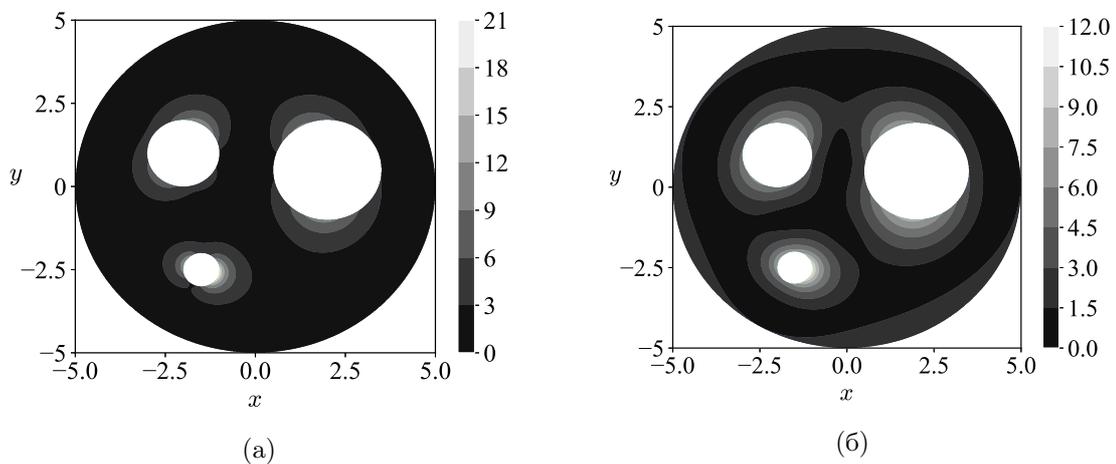
$$I^* = \frac{1}{q\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + (\sigma_{xz}^*)^2 + (\sigma_{yz}^*)^2)}.$$

Отметим, что при $z = t/2$ напряжения σ_{xz}^* и σ_{yz}^* равны 0 (рис. 4), а при $z = 0$ компоненты σ_x , σ_y и σ_{xy} равняются нулю (рис. 5). Качественно картины в ТКЛ и ТРМ схожи: максимальные значения I^* достигаются в одинаковых зонах в окрестности отверстий. Однако относительные отклонения при $z = t/2$ и $z = 0$, которые получаем, как максимум модуля разности интенсивностей в ТРМ и ТКЛ, разделив на максимум интенсивности в ТРМ, составляют 37.74% и 79.69% соответственно. Кроме того, количественные значения σ_{xz}^* и σ_{yz}^* находятся на одном уровне и даже превышают напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$, что вносит большие погрешности при расчете в ТКЛ, в которой сдвиговые напряжения σ_{xz} и σ_{yz} не учитываются. Соответствующие отклонения для тонкой пластины ($t = 0.1$) составляют 1.61% и 37.68%. Максимальные относительные отклонения значений прогибов между двумя теориями составляют 44.95% и 0.98% при $t = 1$ и $t = 0.1$.

Т а б л и ц а 9

Сходимость h -КМ₄ и h -МКНК₄ в ТРМ и ТКЛ
в случае пластины с тремя отверстиями

	ТРМ			ТКЛ		
	N_{cells}	772	2342	9062	772	2342
$\ E_r^w\ _\infty$	1.58e-3	9.59e-5	4.33e-6	5.79e-3	2.01e-4	1.67e-5
R	—	5.04	4.57	—	6.05	3.67
$\ E_r^{\phi_x}\ _\infty$	1.54e-2	2.79e-4	1.31e-5	—	—	—
R	—	7.22	4.52	—	—	—
$\ E_r^{\sigma_x}\ _\infty$	5.20e-2	1.92e-3	1.28e-4	5.48e-2	2.34e-3	1.51e-4
R	—	5.94	4.00	—	5.62	4.05
$\ E_r^{\sigma_{xz}}\ _\infty$	2.28e-2	1.27e-3	7.45e-5	—	—	—
R	—	5.20	4.19	—	—	—
$\ E_r^{\sigma_{xz}^*}\ _\infty$	4.97e-2	1.82e-3	2.24e-4	4.46e-1	2.30e-2	6.43e-3
R	—	5.96	3.09	—	5.34	1.88


 Рис. 4. Нормированная интенсивность напряжений I^* при $z = t/2$ в ТКЛ (а) и ТРМ (б) в случае $t = 1$.

 Рис. 5. Нормированная интенсивность напряжений I^* при $z = 0$ в ТКЛ (а) и ТРМ (б) в случае $t = 1$.

Заключение

В настоящей работе предложены, реализованы и протестированы новые адаптивные коллокационные методы, обладающие преимуществами по сравнению с предыдущими вариантами метода коллокации и наименьших квадратов. Установлено, что для систем УЧП, в которых количество неизвестных функций совпадает с количеством краевых условий, достаточно использовать h -КМ₄ четвертого порядка сходимости. В ином случае необходимо применять h -МКНК₄ с решением переопределенных СЛАУ, имеющий порядок сходимости не хуже третьего.

С помощью h -КМ₄ и h -МКНК₄ проведен анализ НДС при статическом изгибе толстых и тонких круглых пластин с нецентральной дыркой в зависимости от положения эксцентриситета и краевых условий. Численно получены оценки, гарантирующие отклонение прогибов и восстановленных напряжений между ТРМ и ТКЛ в 20% и меньше в зависимости от соотношений между толщинами пластины и положения отверстия. Показаны возможность расчета изгиба круглых пластин с несколькими отверстиями и отличия между интенсивностью напряжений в рамках ТРМ и ТКЛ, значительно возрастающие при увеличении толщины пластины.

Дальнейшие перспективы развития темы связаны с построением и исследованием возможностей hp -вариантов на адаптивных треугольных сетках в рамках описанного подхода аппроксимации за счет записи уравнений коллокации, условий согласования и краевых условий. С другой стороны, актуальным является применение разрабатываемых коллокационных методов для расчета и сравнительного анализа изгиба многослойных композитных пластин нерегулярных форм в рамках различных теорий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Беляев В.А.** Об эффективной реализации и возможностях метода коллокации и наименьших квадратов решения эллиптических уравнений второго порядка // Вычисл. методы и программирование. 2021. Т. 22, № 3. С. 211–229. doi: 10.26089/NumMet.v22r313
2. **Беляев В.А.** Решение уравнения Пуассона с особенностями методом коллокации и наименьших квадратов // Сиб. журн. вычисл. математики. 2020. Т. 23, № 3. С. 249–263. doi: 10.15372/SJNM20200302
3. **Reddy J.N.** Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. 2nd edn. Boca Raton; London; NY.; Washington, D.C.: CRC Press, 2004. 858 p. doi: 10.1201/b12.409
4. **Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.** Пластины и оболочки. М.: Физматгиз, 1966. 625 с.
5. **Lee W.M., Chen J.T.** Free vibration analysis of a circular plate with multiple circular holes by using indirect BIEM and addition theorem // J. Appl. Mech. 2011. Vol. 78. Art. 011015. P. 1–10. doi: 10.1115/1.4001993
6. **Schillinger D., Evans J.A., Reali A., Scott M.A., Hughes T.J.R.** Isogeometric collocation: Cost comparison with Galerkin methods and extension to adaptive hierarchical NURBS discretizations // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2013. Vol. 267. P. 170–232. doi: 10.1016/j.cma.2013.07.017
7. **Киреев В.А.** Метод коллокации с бикубическим эрмитовым базисом в области с криволинейной границей // Вестн. СибГАУ им. академика М. Ф. Решетнёва. 2014. № 3 (55). С. 73–77.
8. **Shao W., Wu X., Chen S.** Chebyshev tau meshless method based on the integration-differentiation for biharmonic-type equations on irregular domain // Eng. Anal. Bound. Elem. 2012. Vol. 36, no. 12. P. 1787–1798. doi: 10.1016/j.enganabound.2012.06.005
9. **Беляев В.А., Брындин Л.С., Голушко С.К., Семисалов Б.В., Шапеев В.П.** Н-, р- и hp-варианты метода коллокации и наименьших квадратов для решения краевых задач для бигармонического уравнения в нерегулярных областях и их приложения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2022. Т. 62, № 4. С. 531–552. doi: 10.31857/S0044466922040020
10. **Mai-Duy N., See H., Tran-Cong T.** A spectral collocation technique based on integrated Chebyshev polynomials for biharmonic problems in irregular domains // Appl. Math. Model. 2009. Vol. 33, no. 1. P. 284–299. doi: 10.1016/j.apm.2007.11.002
11. **Семисалов Б.В.** Быстрый нелокальный алгоритм решения краевых задач Неймана — Дирихле с контролем погрешности // Вычисл. методы программирование. 2016. Т. 17, № 4. С. 500–522.
12. **Кацикаделис Дж.Т.** Граничные элементы: теория и приложения. М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2007. 348 с.
13. **Drozdov G.M., Shapeev V.P.** CAS application to the construction of high-order difference schemes for solving Poisson equation // Lect. Notes Comput. Sci. 2014. Vol. 8660. P. 99–110. doi: 10.1007/978-3-319-10515-4_8.
14. **Shao W., Wu X.** An effective Chebyshev tau meshless domain decomposition method based on the integration-differentiation for solving fourth order equations // Appl. Math. Model. 2015. Vol. 39, no. 9. P. 2554–2569. doi: 10.1016/j.apm.2014.10.048
15. **Слепцов А.Г., Шокин Ю.И.** Адаптивный проекционно-сеточный метод для эллиптических задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1997. Т. 37, № 5. С. 572–586.
16. **Беляев В.В., Шапеев В.П.** Метод коллокаций и наименьших квадратов на адаптивных сетках в области с криволинейной границей // Вычисл. технологии. 2000. Т. 5, № 4. С. 13–21.
17. **Исаев В.И., Шапеев В.П., Еремин С.А.** Исследование свойств метода коллокации и наименьших квадратов решения краевых задач для уравнения Пуассона и уравнений Навье — Стокса // Вычисл. технологии. 2007. Т. 12, № 3. С. 53–70.
18. **Голушко С.К., Идимешев С.В., Шапеев В.П.** Метод коллокаций и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин // Вычисл. технологии. 2013. Т. 18, № 6. С. 31–43.
19. **Идимешев С.В.** Модифицированный метод коллокаций и наименьших невязок и его приложение в механике многослойных композитных балок и пластин: дис. ... канд. физ.-мат. наук / ИВТ СО РАН. Новосибирск, 2016. 179 с.
20. **Garcia O. Fancello E.A., de Barcellos C.S., Duarte C.A.** Hp-clouds in Mindlin's thick plate model // Int. J. Numer. Methods Eng. 2000. Vol. 47, no. 8. P. 1367–1522. doi: 10.1002/(SICI)1097-0207(20000320)47:8<1381::AID-NME833>3.0.CO;2-9

21. **Tiago C., Leitão V.M.A.** Eliminating shear-locking in meshless methods: a critical overview and a new framework for structural theories // *Advances in meshfree techniques. Computational methods in applied sciences*. 2007. Vol. 5. P. 123–147. doi: 10.1007/978-1-4020-6095-3_7
22. **Ike C.C.** Mathematical solutions for the flexural analysis of Mindlin’s first order shear deformable circular plates // *Math. Models in Eng.* 2018. Vol. 4, no. 2. P. 50–72. doi: 10.21595/mme.2018.1982.
23. **Davis T.A.** Algorithm 915, SuiteSparseQR: Multifrontal multithreaded rank-revealing sparse QR factorization // *ACM Trans. Math. Softw.* 2011. Vol. 38, no. 1. P. 8:1–8:22. doi: 10.1145/2049662.2049670
24. **Шапеев В.П., Шапеев А.В.** Решение эллиптических задач с особенностями по схемам высокого порядка аппроксимации // *Вычисл. технологии*. 2006. Т. 11, ч. 2: специальный выпуск. С. 84–91.

Поступила 23.10.2023

После доработки 20.11.2023

Принята к публикации 27.11.2023

Брындин Лука Сергеевич

младший науч. сотрудник

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН;

аспирант Новосибирского национального исследовательского государственного университета

г. Новосибирск

e-mail: l.bryndin@g.nsu.ru

Беляев Василий Алексеевич

канд. физ.-мат. наук, инженер-исследователь

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН

г. Новосибирск

e-mail: belyaevasily@mail.ru

REFERENCES

1. Belyaev V.A. On the effective implementation and capabilities of the least-squares collocation method for solving second-order elliptic equations. *Vychisl. Metody i Progr.*, 2021, vol. 22, no. 3, pp. 211–229 (in Russian). doi: 10.26089/NumMet.v22r313
2. Belyaev V.A. Solving a Poisson equation with singularities by the least-squares collocation method // *Numer. Anal. Appl.*, 2020, vol. 13, no. 3, pp. 207–218. doi: 10.1134/S1995423920030027
3. Reddy J. N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*, 2nd edn. Boca Raton, London, NY, Washington, D.C.: CRC Press, 2004, 858 p. doi: 10.1201/b12409
4. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. *Theory of plates and shells*, Engineering Societies Monographs, 2nd Ed., NY, Toronto: McGraw-Hill Book Comp., 1959, 580 p. ISBN 0-07-064779-8. Translated to Russian under the title *Plastiny i obolochki*, Moscow, Fizmatgiz Publ., 1966, 625 p.
5. Lee W.M., Chen J.T. Free vibration analysis of a circular plate with multiple circular holes by using indirect BIEM and addition theorem. *J. Appl. Mech.*, 2011, vol. 78, no. 1, art. no. 011015, pp. 1–10. doi: 10.1115/1.4001993
6. Schillinger D., Evans J. A., Reali A., Scott M. A., Hughes T. J. R. Isogeometric collocation: Cost comparison with Galerkin methods and extension to adaptive hierarchical NURBS discretizations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2013, vol. 267, pp. 170–232. doi: 10.1016/j.cma.2013.07.017
7. Kireev V.A. Hermite bicubic collocation method in domain with curvilinear boundary. *Vestnik Sibirskogo Gosudarstvennogo Aerokosmicheskogo Universiteta imeni Akademika M.F. Reshetneva*, 2014, no. 3 (55), pp. 73–77 (in Russian).
8. Shao W., Wu X., Chen S. Chebyshev tau eshless method based on the integration-differentiation for biharmonic-type equations on irregular domain. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 2012, vol. 36, no. 12, pp. 1787–1798. doi: 10.1016/j.enganabound.2012.06.005
9. Belyaev V.A., Bryndin L.S., Golushko S.K., Semisalov B.V., Shapeev V.P. H -, p -, and hp -versions of the least-squares collocation method for solving boundary value problems for biharmonic equation in irregular domains and their applications. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2022, vol. 62, no. 4, pp. 517–537. doi: 10.1134/S0965542522040029

10. Mai-Duy N., See H., Tran-Cong T. A spectral collocation technique based on integrated Chebyshev polynomials for biharmonic problems in irregular domains. *Appl. Math. Model.*, 2009, vol. 33, no. 1, pp. 284–299. doi: 10.1016/j.apm.2007.11.002
11. Semisalov B.V. A fast nonlocal algorithm for solving Neumann–Dirichlet boundary value problems with error control. *Vychisl. Metody i Progr.*, 2016, vol. 17, no. 4, pp. 500–522 (in Russian).
12. Katsikadelis J.T. *Boundary elements: theory and applications*, Amsterdam, London, NY, Elsevier, 2002, 448 p. ISBN: 9780080528243. Translated to Russian under the title *Granichnye elementy: teoriya i prilozheniya*, Moscow, Izd. Assots. Stroitel'nykh Vuzov, 2007, 348 p. ISBN 978-5-93093-473-1.
13. Drozdov G. M., Shapeev V. P. CAS application to the construction of high-order difference schemes for solving Poisson equation. *Lect. Notes Comput. Sci.*, 2014, vol. 8660, pp. 99–110. doi: 10.1007/978-3-319-10515-4_8
14. Shao W., Wu X. An effective Chebyshev tau meshless domain decomposition method based on the integration–differentiation for solving fourth order equations. *Appl. Math. Model.*, 2015, vol. 39, no. 9, pp. 2554–2569. doi: 10.1016/j.apm.2014.10.048
15. Sleptsov A. G., Shokin Yu. I. An adaptive grid-projection method for elliptic problems. *Comput. Math. Math. Phys.*, 1997, vol. 37, no. 5, pp. 558–571.
16. Belyaev V.V., Shapeev V.P. The collocation and least squares method on adaptive grids in a domain with a curvilinear boundary. *Vychislit. Tekhnologii*, 2000, vol. 5, no. 4, pp. 13–21 (in Russian).
17. Isaev V.I., Shapeev V.P., Eremin S.A. An investigation of the collocation and the least squares method for solution of boundary value problems for the Navier–Stokes and Poisson equations. *Vychislit. Tekhnologii*, 2007, vol. 12, no. 3, pp. 53–70 (in Russian).
18. Golushko S.K., Idimeshev S.V., Shapeev V.P. Application of collocations and least residuals method to problems of the isotropic plates theory. *Vychislit. Tekhnologii*, 2013, vol. 18, no. 6, pp. 31–43.
19. Idimeshev S. V. *Modificirovannyj metod kollokacij i naimen'shix nevyazok i ego prilozhenie v mekhanike mnogoslojnyh kompozitnyh balok i plastin* [Modified method of collocations and least residuals and its application in the mechanics of multilayer composite beams and plates]. Dissertation, Cand. Sci. (Phys.–Math.), Novosibirsk, 2016, 179 p. (in Russian).
20. Garcia O. Fancello E.A., de Barcellos C.S., Duarte C.A. Hp-clouds in Mindlin's thick plate model. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2000, vol. 47, no. 8, pp. 1381–1400. doi: 10.1002/(SICI)1097-0207(20000320)47:8<1381::AID-NME833>3.0.CO;2-9
21. Tiago C., Leitão V.M.A. Eliminating shear-locking in meshless methods: a critical overview and a new framework for structural theories. *Advances in meshfree techniques. Computational methods in applied sciences*, 2007, vol. 5, pp. 123–147. doi: 10.1007/978-1-4020-6095-3_7
22. Ike C. C. Mathematical solutions for the flexural analysis of Mindlin's first order shear deformable circular plates. *Mathematical Models in Engineering*, 2018, vol. 4, no. 2, pp. 50–72. doi: 10.21595/mme.2018.19825
23. Davis T.A. Algorithm 915, SuiteSparseQR: Multifrontal multithreaded rank-revealing sparse QR factorization *ACM Trans. Math. Softw.*, 2011, vol. 38, no. 1, pp. 8:1–8:22. doi: 10.1145/2049662.2049670
24. Shapeev V. P., Shapeev A. V. Solutions of the elliptic problems with singularities using finite difference schemes with high order of approximation. *Vychislit. Tekhnologii*, 2006, vol. 11, part 2, special iss., pp. 84–91 (in Russian).

Received October 23, 2023

Revised November 20, 2023

Accepted November 27, 2023

Funding Agency: This research was carried out within a state task to the Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences.

Luka Sergeevich Bryndin, doctoral student, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia; Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia, e-mail: l.bryndin@g.nsu.ru.

Vasilii Alexeyevich Belyaev, Cand. Sci. (Phys.–Math.), Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia, e-mail: belyaevasily@mail.ru.

Cite this article as: L. S. Bryndin, V. A. Belyaev. Collocation methods with fourth degree polynomials on triangular grids and their application to the calculation of bending of round plates with holes. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 1, pp. 43–60.