ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 1 2024

УДК 519.176

О РЕШЕТКАХ, АССОЦИИРОВАННЫХ С МАКСИМАЛЬНЫМИ ГРАФИЧЕСКИМИ РАЗБИЕНИЯМИ

В. А. Баранский, В. В. Зуев

Цель данной работы состоит в описании для заданного графического разбиения λ веса $2m$ и ранга r множества всех максимальных графических разбиений μ веса $2m$, доминирующих λ. Для этого достаточно найти множество голов таких разбиений. В теореме 1 установлено, что для любого натурального числа t множество голов всех максимальных графических разбиений μ веса $2m$ и ранга t, доминирующих λ, образует интервал решетки всех целочисленных разбиений, если такие разбиения μ ранга t существуют. Указаны алгоритмы вычисления наибольших и наименьших разбиений в этих интервалах.

Ключевые слова: решетка, целочисленное разбиение, диаграмма Ферре, граф, максимальное графическое разбиение.

V. A. Baransky, V. V. Zuev. On lattices associated with maximal graphical partitions.

The aim of this paper is to describe, for a given graphical partition λ of weight $2m$ and rank r, the set of all maximal graphical partitions μ of weight $2m$ that dominate λ. To do this, it is enough to find the set of heads of such partitions. Theorem 1 states that, for any natural number t, the set of heads of all maximal graphical partitions μ of weight $2m$ and rank t dominating λ forms an interval of the integer partition lattice if such partitions μ of rank t exist. Algorithms are also provided for finding the smallest and largest elements of this interval.

Keywords: lattice, integer partition, Ferrers diagram, graph, maximal graphical partition.

MSC: 05A17, 05C07, 05C35

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-1-32-42

Введение

Целочисленным разбиением или просто разбиением [1] называется последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ целых неотрицательных чисел такая, что λ содержит лишь конечное число ненулевых компонент и $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$. Через $\sum(\lambda)$ будем обозначать сумму всех компонент разбиения λ. Если $\sum(\lambda) = m$, то говорят, что λ является разбиением числа m, а m называют весом разбиения λ. Число $\ell = \ell(\lambda)$ такое, что $\lambda_\ell > 0$ и $\lambda_{\ell+1} = \lambda_{\ell+2} = \ldots = 0$, называют длиной разбиения λ. Будем считать, что нулевое разбиение $(0, 0, \ldots)$ числа 0 имеет длину 0. Разбиение λ длины $\ell > 0$ будем иногда записывать для удобства в виде $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$, где $t \geq \ell$.

Теория разбиений представляет собой важный классический раздел комбинаторики, который активно развивается более 300 лет и имеет многочисленные приложения в разных областях математики, а также в химии и статистической механике.

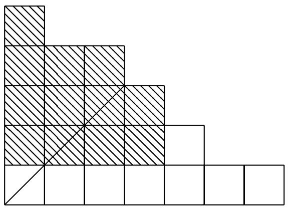
Через IPL будем обозначать множество всех разбиений всех целых неотрицательных чисел, а через $IPL(m)$ — множество всех разбиений заданного целого неотрицательного числа m. На множествах будем рассматривать известное отношение доминирования, полагая $\lambda \leq \mu$, если $\lambda_1 + \ldots + \lambda_i \leq \mu_1 + \ldots + \mu_i$ для любого натурального числа i. Множества вида IPL и $IPL(m)$ являются решетками относительно отношения доминирования (см., например, [2]).

Данная работа продолжает цикл исследований В. А. Баранского, Т. А. Королевой и Т. А. Сеньчонок, которые за последние 15 лет разработали оригинальный метод элементарных преобразований для разбиений и связанный с ним метод вращения ребер в графах.

С помощью этих методов они получили новые результаты о деталях строения решетки разбиений и свойствах графических разбиений, включая максимальные графические разбиения и как итог — результаты о связи графов с пороговыми графами, рассмотрен важный класс двудольно-пороговых графов (см., например, Baransky V.A., Senchonok T.A. Around the Erdös-Gallai criterion. *Ural Math. J.*, 2023, vol. 9, no. 1, pp. 29–48.) Далее мы будем придерживаться терминологии и обозначений, принятых в [3]. Для изображения диаграмм Ферре разбиений будем использовать декартову форму их представления.

Через $cut(\lambda;t,p)$, где λ — разбиение, а t и p — целые неотрицательные числа, обозначим разбиение, диаграмма Ферре которого получается из диаграммы Ферре разбиения λ удалением всех столбцов с номерами, большими t, и удалением в оставшихся столбцах первых p строк. Разбиение $cut(\lambda;t,p)$ будем называть *урезанием разбиения λ по первым t столбцам и p строкам.* Ясно, что $cut(\lambda;t,p) = (\max(0,\lambda_1 - p), \max(0,\lambda_2 - p), \ldots, \max(0,\lambda_t - p))$.

На рис. 1 представлена диаграмма Ферре разбиения $\lambda = (5,4,4,3,2,1,1)$, где заштриховано $cut(\lambda;4,1) = (4,3,3,2)$.



$\lambda = (5,4,4,3,2,1,1)$

Рис. 1. Удаление первой строки и всех столбцов после четвертого.

Аналогично можно определить *урезание разбиения λ по первым t строкам и p столбцам*, диаграмма Ферре которого получается из диаграммы Ферре разбиения λ удалением всех строк с номерами, большими t, и удалением в оставшихся строках первых p столбцов.

Как нетрудно заметить, такое урезание по строкам совпадает с разбиением, сопряженным к $cut(\lambda^*;t,p)$.

Разбиение $cut(\lambda;t,t-1)$ обозначим через $hd_t(\lambda)$, а разбиение $cut(\lambda^*;t,t)$ — через $tl_t(\lambda)$.

Ранг $r = r(\lambda)$ разбиения λ по определению равен $\max\{i|\lambda_i \geq i\}$. В качестве *головы* $hd(\lambda)$ разбиения λ возьмем разбиение, которое получается из разбиения λ уменьшением всех первых r компонент на одно и то же число $r-1$ и обнулением всех компонент с номерами $r+1, r+2, \ldots$. В качестве *хвоста* $tl(\lambda)$ возьмем разбиение, сопряженное с разбиением, полученным из разбиения λ удалением первых r столбцов.

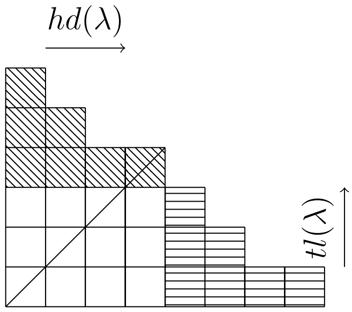
В качестве иллюстрации на рис. 2 изображена диаграмма Ферре разбиения $\lambda = (6,5,4,4,3,2,1,1)$ ранга 4 с головой $hd(\lambda) = (3,2,1,1)$ и хвостом $tl(\lambda) = (4,2,1)$. Компоненты разбиения $hd(\lambda)$ считываются по столбцам слева направо, а компоненты разбиения $tl(\lambda)$ считываются по строкам снизу вверх.

Ясно, что если r — ранг разбиения λ, то $hd_r(\lambda) = hd(\lambda)$ и $tl_r(\lambda) = tl(\lambda)$. В некотором смысле $hd_t(\lambda)$ и $tl_t(\lambda)$ — это голова и хвост разбиения λ, если бы у него был бы ранг t. Например, на рис. 3 представлена диаграмма Ферре разбиения $\lambda = (5,4,4,3,2,1,1)$ ранга 3, а также разбиений $hd_2(\lambda) = (4,3)$ и $tl_2(\lambda) = (5,3)$.

Разбиение $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell, 0, 0, \ldots)$ длины ℓ называется *графическим*, если существует граф $G = (V,E)$ на ℓ вершинах такой, что $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_\ell\}$ и $deg(v_1) = \lambda_1, deg(v_2) = \lambda_2, \ldots, deg(v_\ell) = \lambda_\ell$, иными словами, $\lambda = dpt(G)$, где $dpt(G)$ — степенное разбиение графа G. Различные критерии графичности разбиений см. в [3–6].

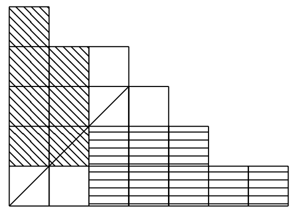
Разбиение λ веса $2m$ будем называть *максимальным графическим разбиением*, если оно максимально относительно порядка $\leq$ среди всех графических разбиений веса $2m$ [7].

Разбиение λ является максимальным графическим разбиением тогда и только тогда, когда $hd(\lambda) = tl(\lambda)$ (см. теорему 1 в [7]). Поэтому максимальное графическое разбиение однозначно



$\lambda = (6, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$

Рис. 2. Разбиение $(6, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$ ранга 4 с головой $(3, 2, 1, 1)$ и хвостом $(4, 2, 1)$.



$\lambda = (5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$

Рис. 3. Голова и хвост ранга 2 разбиения $(5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$, имеющего ранг 3.

задается своей головой, поскольку ранг такого разбиения равен длине головы. Ясно, что любое разбиение является головой некоторого максимального графического разбиения.

Цель настоящей работы состоит в следующем: для заданного графического разбиения λ веса $2m$ и ранга r найти множество всех максимальных графических разбиений μ веса $2m$, доминирующих λ. Для этого достаточно определить множество голов таких разбиений.

В основном результате данной работы, теореме 1, будет установлено, что для любого натурального числа t множество голов всех максимальных графических разбиений μ веса $2m$ и ранга r, доминирующих λ, образует интервал решетки IPL, если такие разбиения ранга t существуют. Кроме того, представлены алгоритмы для вычисления наименьшего и наибольшего элементов таких интервалов.

Множество всех максимальных графических разбиений, доминирующих заданное графическое разбиение, очевидно образует антицепь в решетке разбиений. Представляется удивительным тот факт, что множество голов таких разбиений фиксированного ранга t, для которого разбиения существуют, образуют интервал в решетке разбиений.

1. Основные результаты

Приведем сначала ряд вспомогательных утверждений и лемм, необходимых для доказательства теоремы 1.

Пусть $m \in \mathbb{N}$. Для произвольного числа $t \in \mathbb{N}$ определим отношение $\leq_t$ на $IPL(2m)$, полагая $\lambda \leq_t \mu$ тогда и только тогда, когда $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t, 0, 0, \ldots) \leq (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_t, 0, 0, \ldots)$, т. е. когда $\lambda_1 + \ldots + \lambda_i \leq \mu_1 + \ldots + \mu_i$ для любого $i = 1, \ldots, t$.

Лемма 1. *Пусть λ и μ — произвольные разбиения. Положим $\ell(\mu) = \ell$. Пусть $\lambda \leq_\ell \mu$ и $\sum(\lambda) \leq \sum(\mu)$. Тогда $\lambda \leq \mu$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенства $\lambda_1 + \ldots + \lambda_i \leq \mu_1 + \ldots + \mu_i$ верны при $i = 1, \ldots, \ell$ по определению $\lambda \leq_\ell \mu$. По условию выполняется $\ell(\mu) = \ell$, поэтому $\mu_1 + \ldots + \mu_\ell = \sum(\mu)$. Тогда для $i = 1, 2, \ldots$ справедливы и соотношения $\lambda_1 + \ldots + \lambda_{\ell+i} \leq \sum(\lambda) \leq \sum(\mu) = \mu_1 + \ldots + \mu_{\ell+i}$. Все полученные неравенства вместе дают неравенство $\lambda \leq \mu$.

Лемма доказана.

Через $MGP_r(2m)$ будем обозначать множество всех максимальных графических разбиений веса $2m$ и ранга r. Пусть $\mu \in MGP_r(2m)$. Поскольку $hd(\mu) = tl(\mu)$, то $\sum(\mu) = 2\sum(hd(\mu)) + r(r-1)$, следовательно,

$$\sum(hd(\mu)) = \frac{\sum(\mu) - r(r-1)}{2} = m - \frac{r(r-1)}{2} \geq r.$$

Отсюда имеем $2m \geq 2r + r(r-1)$, т. е. $0 \geq r^2 + r - 2m$, и поэтому

$$r \leq \Big\lfloor \frac{\sqrt{8m+1}-1}{2} \Big\rfloor.$$

Обозначим через $IPL(m,t)$, где $m \geq t$, множество всех разбиений веса m и длины t. Нетрудно видеть, что решетка $IPL(m,t)$ является интервалом решетки $IPL(m)$.

Обозначим через $minp(m,t)$ наименьшее разбиение веса m и длины t, а через $maxp(m,t)$ — наибольшее разбиение веса m и длины t. Разбиение $maxp(m,t)$ имеет вид $(m-t+1,1,1,\ldots,1)$, а разбиение $minp(m,t)$ — вид $(\lceil m/t \rceil, \ldots, \lceil m/t \rceil, \lfloor m/t \rfloor, \ldots, \lfloor m/t \rfloor)$, где $\lceil m/t \rceil$ повторяется $m (\mathrm{mod}\ t)$ раз.

Диаграмма Ферре разбиения $minp(m,t)$ строится добавлением блоков по рядам снизу вверх и в каждом ряду — слева направо. На рис. 4 приведены диаграммы Ферре разбиений $minp(8,3) = (3,3,2)$ и $maxp(8,3) = (6,1,1)$.

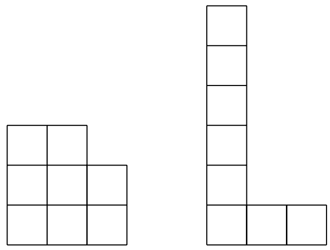


Рис. 4. Наименьшее и наибольшее разбиения веса 8 и длины 3.

Пусть λ — фиксированное графическое разбиение веса $2m$. Обозначим через $hdMGP_k(\lambda)$ множество всех голов максимальных графических разбиений μ веса $2m$ и ранга k таких, что $\lambda \leq \mu$. Поскольку $\sum(hd(\mu)) = m - k(k-1)/2$, то $hdMGP_k(\lambda) \subseteq IPL(m-k(k-1)/2, k)$.

Далее будет показано, что любое непустое множество вида $hdMGP_k(\lambda)$ является интервалом решетки $IPL(m-k(k-1)/2, k)$.

Лемма 2. *Пусть λ и μ — разбиения веса $2m$, $\mathrm{rank}(\mu) = s$, $\lambda \leq_s \mu$ и $\mu^* \leq_s \lambda^*$. Тогда $\lambda \leq \mu$.*

Доказательство. Пусть λ' и μ' — разбиения, диаграммы Ферре которых получаются из диаграмм Ферре разбиений λ и μ соответственно переносом всех блоков из первых s столбцов и всех блоков из строк, расположенных выше s-строки (т. е. строки с номером s), в $(s+1)$-столбец. При этом $(s+1)$-столбец сделаем первым.

Поскольку $\mathrm{rank}(\mu) = s$, выполняется $\mu_{s+1} \leq s$, отсюда следует, что в диаграмме Ферре разбиения μ нет блоков, лежащих выше s-строки и расположенных правее s-столбца. Ясно, что диаграмма μ' получается из диаграммы μ просто переносом всех блоков из первых s столбцов в $(s+1)$-столбец и выполняются при $i = 1, 2, \ldots$ равенства

$$\mu'_1 + \mu'_2 + \ldots + \mu'_i = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{s+i}.$$

В диаграмме Ферре разбиения λ могут быть блоки, лежащие выше s-строки и расположенные правее $(s+1)$-столбца. Тогда диаграмма λ' получается из диаграммы λ, кроме переносов всех блоков из первых s столбцов в $(s+1)$-столбец, еще и переносом всех блоков, изначально находившихся выше s-строки и правее $(s+1)$-столбца, по очереди. Верхний крайний правый блок при этом переносится в $(s+1)$-столбец, который становится первым. Каждый перенос блока влево увеличивает разбиение (см. [7]), следовательно, выполняются при $i = 1, 2, \ldots$ неравенства

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{s+i} \leq \lambda'_1 + \ldots + \lambda'_i.$$

Рассмотрим сопряженные разбиения $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots)$ и $\mu^* = (\mu_1^*, \mu_2^*, \ldots)$.

Пусть $\lambda^{(1)} = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_s^*, 0, 0, \ldots)$ и $\mu^{(1)} = (\mu_1^*, \mu_2^*, \ldots, \mu_s^*, 0, 0, \ldots)$ — разбиения, первые s компоненты которых равны первым s компонентам разбиений λ^* и μ^* соответственно, а остальные компоненты равны нулю.

Так как по условию $\mu^* \le_s \lambda^*$, справедливо соотношение $\mu^{(1)} \le \lambda^{(1)}$. Также выполняется неравенство $\ell(\lambda^{(1)}) \le s$, а для $\mu^{(1)}$ верно равенство $\ell(\mu^{(1)}) = s$, поскольку $\operatorname{rank}(\mu) = s$.

Далее проведем следующую цепочку преобразований.

1. Припишем $\sum(\lambda^{(1)}) - \sum(\mu^{(1)})$ единичных компонент в конец разбиения $\mu^{(1)}$, а $\lambda^{(1)}$ оставим без изменений. Отметим, что число $\sum(\lambda^{(1)}) - \sum(\mu^{(1)})$ неотрицательно, так как $\lambda^{(1)} \ge \mu^{(1)}$.

Положим $\lambda^{(2)} = \lambda^{(1)}$, $\mu^{(2)} = (\mu_1^*, \mu_2^*, \ldots, \mu_s^*, 1, \ldots, 1, 0, \ldots)$, где единица записана $\sum(\lambda^{(1)}) - \sum(\mu^{(1)})$ раз. Теперь $\sum(\lambda^{(2)}) = \sum(\mu^{(2)})$. Обозначим $\ell(\lambda^{(1)})$ через ℓ, это число также равно $\ell(\lambda^{(2)})$. Так как $\mu^{(1)} \le \lambda^{(1)}$ и $\ell \le \ell(\mu^{(1)})$, верно соотношение $\mu^{(2)} \le_\ell \lambda^{(2)}$. Тогда по лемме 1 выполняется соотношение $\mu^{(2)} \le \lambda^{(2)}$.

2. Переходя к сопряженным разбиениям, положим $\lambda^{(3)} = (\lambda^{(2)})^*$ и $\mu^{(3)} = (\mu^{(2)})^*$. Так как $\sum(\lambda^{(2)}) = \sum(\mu^{(2)})$ и $\mu^{(2)} \le \lambda^{(2)}$, справедливо соотношение $\lambda^{(3)} \le \mu^{(3)}$.

3. Увеличим первую компоненту обоих разбиений на $2m - \sum(\lambda^{(3)})$. Отметим, что число $2m - \sum(\lambda^{(3)})$ неотрицательно, поскольку $2m \ge \sum(\lambda^{(1)}) = \sum(\lambda^{(2)}) = \sum(\lambda^{(3)})$. В результате получим разбиения $\lambda^{(4)}$ и $\mu^{(4)}$, где $\sum(\lambda^{(4)}) = \sum(\mu^{(4)}) = 2m$ и $\lambda^{(4)} \le \mu^{(4)}$.

4. Для каждого из разбиений $\lambda^{(4)}$ и $\mu^{(4)}$ удалим первые s компонент и прибавим их сумму к $(s+1)$-й компоненте соответствующего разбиения, при этом $(s+1)$-ю компоненту сделаем первой. Для диаграмм Ферре это преобразование соответствует перемещению всех блоков из первых s столбцов в $(s+1)$-столбец. Получим разбиения $\lambda^{(5)}$ и $\mu^{(5)}$, и соотношение $\lambda^{(5)} \le \mu^{(5)}$ сохраняется, так как i-е частичные суммы разбиений $\lambda^{(5)}$ и $\mu^{(5)}$ — это $(s+i)$-е частичные суммы разбиений $\lambda^{(4)}$ и $\mu^{(4)}$ соответственно. Отметим, что $\sum(\lambda^{(5)}) = \sum(\mu^{(5)}) = 2m$, а диаграммы Ферре разбиений $\lambda^{(5)}$ и $\mu^{(5)}$ отличаются от диаграмм исходных разбиений λ и μ удалением всех блоков выше s-строки, удалением первых s столбцов и добавлением блоков по числу удаленных в новый первый столбец. Таким образом, верно $\lambda^{(5)} = \lambda'$ и $\mu^{(5)} = \mu'$. Следовательно, выполняется соотношение $\lambda' \le \mu'$. $\square$

По определению отношения доминирования из соотношения $\lambda' \le \mu'$ вытекают для $i = 1, 2, \ldots$ неравенства $\lambda'_1 + \lambda'_2 + \ldots + \lambda'_i \le \mu'_1 + \mu'_2 + \ldots + \mu'_i$.

Совмещая эту систему с ранее установленными системами, получаем при $i = 1, 2, \ldots$ неравенства $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{s+i} \le \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{s+i}$.

Вместе с условием $\lambda \le_s \mu$ отсюда имеем $\lambda \le \mu$.

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 1. Проиллюстрируем доказательство леммы 2 с помощью примеров. На рис. 5 приведены диаграммы Ферре разбиений $\lambda = (5, 4, 4, 4, 4, 3)$ и $\mu = (6, 6, 4, 3, 3, 2)$,

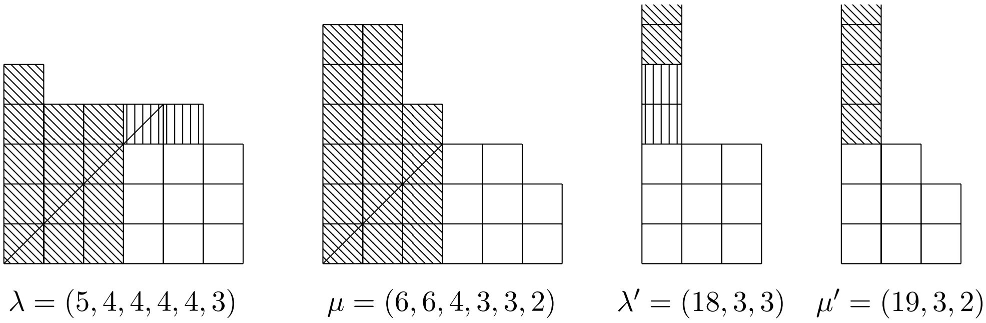


Рис. 5. Перенос первых трех столбцов и строк выше третьей строки в четвертый столбец.

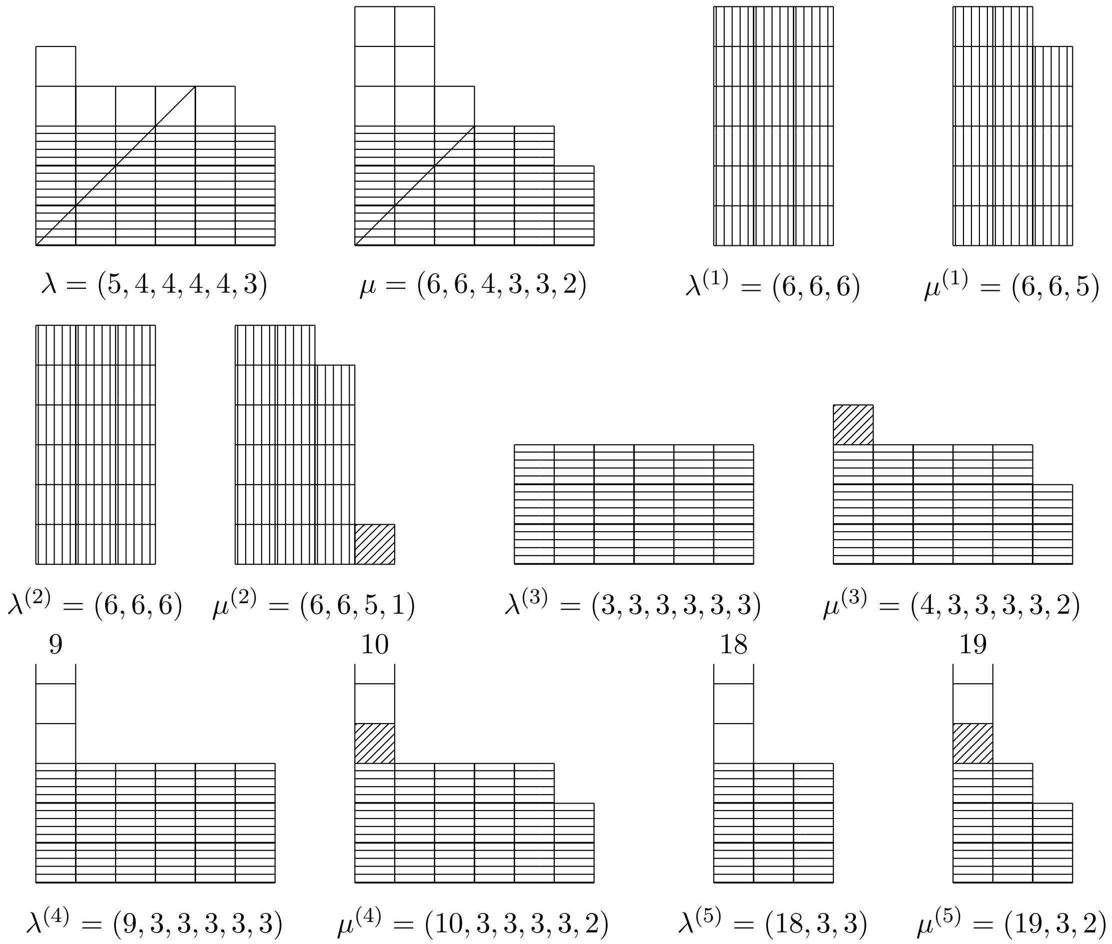


Рис. 6. Последовательность преобразований в соответствии с доказательством леммы 2.

где $2m = 24, s = 3$, а также диаграммы Ферре соответствующих разбиений $\lambda' = (18, 3, 3)$ и $\mu' = (19, 3, 2)$. На рис. 6 показаны диаграммы Ферре разбиений $\lambda = (5, 4, 4, 4, 4, 3)$ и $\mu = (6, 6, 4, 3, 3, 2)$, а также всех разбиений, получающихся в процессе преобразований.

Подставляя в условие леммы 2 разбиения μ^* и λ^* вместо λ и μ соответственно и r вместо s в соотношения, получаем

Следствие 1. *Пусть λ и μ — разбиения веса $2m$, $\operatorname{rank}(\lambda) = r$, $\lambda \le_r \mu$ и $\mu^* \le_r \lambda^*$. Тогда $\lambda \le \mu$.*

Лемма 3. *Пусть λ и μ — произвольные разбиения одинакового веса $2m$ такие, что $\lambda \le \mu$, и t, p — произвольные целые неотрицательные числа. Тогда $cut(\lambda; t, p) \le cut(\mu; t, p)$.*

Доказательство. Обозначим $cut(\lambda; t, p)$ через λ' и $cut(\mu; t, p)$ через μ'. Положим $\ell_1 = \ell(\lambda')$ и $\ell_2 = \ell(\mu')$. По определению процедуры урезания cut числа ℓ_1 и ℓ_2 не превосходят t.

Случай 1. $\ell_1 \le \ell_2$. В этом случае первые ℓ_1 компонент разбиений λ' и μ' получаются из первых ℓ_1 компонент λ и μ соответственно уменьшением на p, поэтому из $\lambda \le \mu$ следует $\lambda' \le_{\ell_1} \mu'$. При этом все компоненты разбиения λ' с номерами больше числа ℓ_1 равны нулю. Следовательно, $\lambda' \le \mu'$.

Случай 2. $\ell_1 > \ell_2$. Аналогично первому случаю выполняется $\lambda' \le_{\ell_2} \mu'$. Первые ℓ_1 компонент разбиения λ' находим из первых ℓ_1 компонент разбиения λ' просто уменьшением их на число p. Поэтому верно равенство $\sum(\lambda') = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{\ell_1} - \ell_1 p$.

Для разбиения μ' справедливо $\mu' = (\max(0, \mu_1 - p), \max(0, \mu_2 - p), \ldots, \max(0, \mu_t - p))$ и одновременно с этим имеем $\mu' = (\mu_1 - p, \mu_2 - p, \ldots, , \mu_{\ell_2} - p, 0, 0, \ldots)$.

Следовательно, компоненты разбиения μ' с номерами от (ℓ_2+1) до ℓ_1 меньше не более чем на p соответствующих компонент разбиения μ. Поэтому выполняется неравенство $\sum(\mu') \geq \mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{\ell_1}-\ell_1 p$.

Наконец, из того, что $\lambda \leq \mu$, следует $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{\ell_1}-\ell_1 p \leq \mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{\ell_1}-\ell_1 p$.

Совмещая полученные соотношения, выводим неравенство $\sum(\lambda') \leq \sum(\mu')$. Вместе с ранее доказанным соотношением $\lambda' \leq_{\ell_2} \mu'$ по лемме 1 получаем $\lambda' \leq \mu'$.

Лемма доказана.

Следствие 2. *Пусть λ и μ — произвольные разбиения одинакового веса $2m$ такие, что $\lambda \leq \mu$. Тогда для любого $t \in \mathbb{N}$ выполняется $hd_t(\lambda) \leq hd_t(\mu)$ и $tl_t(\lambda) \geq tl_t(\mu)$.*

Отметим, что неравенство $tl_t(\lambda) \geq tl_t(\mu)$ выводится из леммы 3 подстановкой μ^* и λ^* вместо λ и μ соответственно.

Лемма 4. *Пусть λ и μ — произвольные ненулевые разбиения одинакового веса $2m$,*

$$\operatorname{rank}(\lambda)=r, \quad \operatorname{rank}(\mu)=s.$$

Пусть $hd_s(\lambda) \leq hd(\mu)$ и $tl_s(\lambda) \geq tl(\mu)$. Тогда $\lambda \leq \mu$.

Доказательство. Случай 1. $r \geq s$. В этом случае головы $hd_s(\lambda)$ и $hd(\mu)$ получаются уменьшением первых s компонент разбиений λ и μ соответственно на одно и то же число $s-1$. Тогда из соотношения $hd_s(\lambda) \leq hd(\mu)$ следует $\lambda \leq_s \mu$. Аналогично из $tl_s(\lambda) \geq tl(\mu)$ вытекает $\lambda^* \geq_s \mu^*$. Отсюда по лемме 2 верно $\lambda \leq \mu$.

Случай 2. $r < s$. Положим $\ell_1 = \ell(hd_s(\lambda))$ и $\ell_2 = \ell(tl_s(\lambda))$. В этом случае только первые ℓ_1 компонент разбиения $hd_s(\lambda)$ получаются уменьшением на $s-1$ соответствующих компонент разбиения λ, и только первые ℓ_2 компонент разбиения $tl_s(\lambda)$ находим уменьшением на s соответствующих компонент разбиения λ^*. Аналогично первому случаю выполняется $\lambda \leq_{\ell_1} \mu$ и $\lambda^* \geq_{\ell_2} \mu^*$.

Поскольку для всех $i \in \mathbb{N}$, таких что $\ell_1 < i \leq r$, справедливо $\lambda_i \leq s$ и $\mu_i \geq s$, из соотношения $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{\ell_1} \leq \mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{\ell_1}$ следуют неравенства

$$\begin{gathered}
\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{\ell_1+1} \leq \mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{\ell_1+1}, \\
\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{\ell_1+2} \leq \mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{\ell_1+2}, \\
\ldots \\
\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_r \leq \mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_r.
\end{gathered}$$

Таким образом, $\lambda \leq_r \mu$.

Рассмотрим сопряженные разбиения $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\ldots)$ и $\mu^*=(\mu_1^*,\mu_2^*,\ldots)$.

Поскольку $\operatorname{rank}(\lambda)=r$, справедливо $2m=\lambda_1+\ldots+\lambda_r+\lambda_1^*+\ldots+\lambda_r^*-r^2$.

Пусть k — количество блоков в диаграмме Ферре разбиения μ, расположенных правее r-столбца и выше r-строки. Число k положительно, так как $s>r$. Тогда верно $2m=\mu_1+\ldots+\mu_r+\mu_1^*+\ldots+\mu_r^*-r^2+k$.

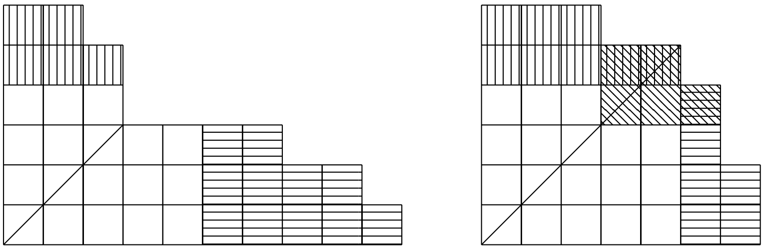
Из ранее доказанного соотношения $\lambda \leq_r \mu$ следует, что $\lambda_1+\ldots+\lambda_r \leq \mu_1+\ldots+\mu_r$.

Совмещая это неравенство с ранее полученными формулами для $2m$, мы выводим неравенство $\lambda_1^*+\ldots+\lambda_r^*-r^2 \geq \mu_1^*+\ldots+\mu_r^*-r^2+k$.

Отсюда верно неравенство $\lambda_1^*+\ldots+\lambda_r^* \geq \mu_1^*+\ldots+\mu_r^*$.

Поскольку для всех $i \in \mathbb{N}$, таких что $\ell_2 < i \leq r$, выполняется $\lambda_i^* \leq s$ и $\mu_i^* \geq s$, из найденного неравенства вытекают следующие соотношения:

$$\begin{gathered}
\lambda_1^*+\ldots+\lambda_{r-1}^* \geq \mu_1^*+\ldots+\mu_{r-1}^*, \\
\lambda_1^*+\ldots+\lambda_{r-2}^* \geq \mu_1^*+\ldots+\mu_{r-2}^*, \\
\ldots \\
\lambda_1^*+\ldots+\lambda_{\ell_2+1}^* \geq \mu_1^*+\ldots+\mu_{\ell_2+1}^*.
\end{gathered}$$



$\lambda = (6, 6, 5, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 1)$ $\mu = (6, 6, 6, 5, 5, 4, 2)$

Рис. 7. Разбиения λ и μ рангов 3 и 5 соответственно; выделены головы и хвосты ранга 5, а также все блоки, лежащие сверху от третьей строки и справа от третьего столбца.

Эти неравенства и ранее доказанное соотношение $\lambda^* \geq_{\ell_2} \mu^*$ вместе дают $\lambda^* \geq_r \mu^*$.

Таким образом, $\lambda \leq_r \mu$ и $\lambda^* \geq_r \mu^*$, отсюда в силу следствия 1 выполняется $\lambda \leq \mu$.

Лемма доказана.

Замечание 2. Проиллюстрируем доказательство леммы 4 с помощью примера. На рис. 7 изображены разбиения $\lambda = (6, 6, 5, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 1)$ и $\mu = (6, 6, 6, 5, 5, 4, 2)$, где $2m = 34, r = 3, s = 5$ и $\lambda \leq \mu$. Для разбиения λ выполняется $hd_s(\lambda) = (2, 2, 1), tl_s(\lambda) = (5, 4, 2)$, $\ell_1 = 3$ и $\ell_2 = 3$.

Для разбиения μ выполняется $hd(\mu) = (2, 2, 2, 1, 1), tl(\mu) = (2, 2, 1, 1), k = 5$.

В леммах 1, 2 и 4 приведены три достаточных условия доминирования, которые нашли применение в данной работе и могут быть полезны в дальнейших исследованиях решетки разбиений IPL.

Приведем теперь основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть λ — произвольное графическое разбиение веса $2m$ и ранга r. Пусть t — произвольное натуральное число. Положим*

$$\eta_1 = hd_t(\lambda) \vee minp(m - t(t-1)/2, t), \quad \eta_2 = tl_t(\lambda) \wedge maxp(m - t(t-1)/2, t),$$

где $\vee$ и $\wedge$ — соответственно объединение и пересечение разбиений в решетке IPL. Тогда

1. *Если $\eta_1 \leq \eta_2$, то множество $hdMGP_t(\lambda)$ голов максимальных графических разбиений веса $2m$ и ранга t, доминирующих λ, является интервалом решетки $IPL(m-t(t-1)/2, t)$ с наименьшим элементом η_1 и наибольшим элементом η_2;*

2. *Если η_1 и η_2 не сравнимы или $\eta_1 > \eta_2$, то не существует максимальных графических разбиений веса $2m$ и ранга t, лежащих над λ, т. е. множество $hdMGP_t(\lambda)$ пусто.*

Доказательство. 1. Убедимся, что любая голова максимального графического разбиения веса $2m$ и ранга t, доминирующего λ, лежит в интервале от η_1 до η_2.

Пусть μ — произвольное максимальное графическое разбиение веса $2m$ и ранга t, доминирующее λ. Положим $\eta = hd(\mu) = tl(\mu)$. Так как $\mu \in MGP_t(2m)$, имеем $\mu \in IPL(m-t(t-1)/2, t)$. Следовательно, $minp(m - t(t-1)/2, t) \leq \eta \leq maxp(m - t(t-1)/2, t)$. Кроме того, в силу следствия 2 справедливо $hd_t(\lambda) \leq hd_t(\mu)$ и $tl_t(\lambda) \geq tl_t(\mu)$. Поскольку $hd_t(\mu) = tl_t(\mu) = \eta$, отсюда выводим $hd_t(\lambda) \leq \eta \leq tl_t(\lambda)$ Совмещая полученные двойные неравенства, имеем $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$.

Таким образом, если $\eta \in hdMGP_t(\lambda)$, то выполняется $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$.

2. Покажем, что любое разбиение, лежащее в интервале от η_1 до η_2, является головой максимального графического разбиения веса $2m$ и ранга t, доминирующего λ.

Пусть η — любое такое разбиение, что $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$. Тогда верно

$$minp(m - t(t-1)/2, t) \leq \eta \leq maxp(m - t(t-1)/2, t).$$

Следовательно, выполняется $\eta \in IPL(m - t(t-1)/2, t)$. Обозначим через μ максимальное графическое разбиение с головой η. Тогда верны равенства $\operatorname{rank}(\mu) = \ell(\eta) = t$ и $\sum(\mu) = 2\sum(\eta) + t(t-1) = 2m$, поэтому $\mu \in MGP_t(2m)$.

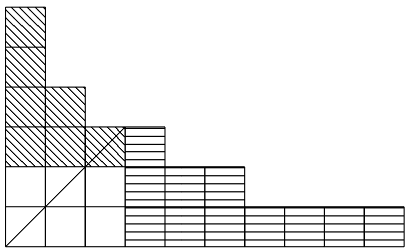
Из двойного неравенства $\eta_1 \le \eta \le \eta_2$ также вытекает, что $hd_t(\lambda) \le \eta \le tl_t(\lambda)$. Поскольку $hd(\mu) = tl(\mu) = \eta$, имеем $hd_t(\lambda) \le hd(\mu)$ и $tl(\mu) \le tl_t(\lambda)$. Следовательно, в силу леммы 4 верно $\lambda \le \mu$. Поэтому если $\eta_1 \le \eta \le \eta_2$, то $\eta \in hdMGP_t(\lambda)$.

Значит, множество $hdMGP_t(\lambda)$ голов максимальных графических разбиений веса $2m$ и ранга t, доминирующих λ, совпадает с множеством всех разбиений η таких, что $\eta_1 \le \eta \le \eta_2$.

Теперь ясно, что если не выполняется $\eta_1 \le \eta_2$, то не существует максимальных графических разбиений веса $2m$ и ранга t, доминирующих λ.

Теорема доказана.

П р и м е р. Рассмотрим разбиение $\lambda = (6,4,3,3,2,2,1,1,1,1)$ (см. рис. 8), где $m = 12$.



$\lambda = (6,4,3,3,2,2,1,1,1,1)$

Рис. 8. Графическое разбиение $(6,4,3,3,2,2,1,1,1,1)$.

Поскольку $\sum(\lambda) = 24$ и $hd(\lambda) = (4,2,1) \le tl(\lambda) = (7,3,1)$, разбиение λ является графическим. Максимальный возможный ранг доминирующих его максимальных графических разбиений того же веса вычисляется по формуле

$$\left\lfloor \frac{\sqrt{8m+1}-1}{2} \right\rfloor = 4,$$

т. е. все искомые максимальные графические разбиения имеют ранг не более 4.

1. Пусть $t = 1$. Тогда $hd_t(\lambda) = (6)$, $tl_t(\lambda) = (9)$,

$$minp(m - t(t-1)/2, t) = (12), \quad maxp(m - t(t-1)/2, t) = (12),$$

$\eta_1 = (12)$, $\eta_2 = (9)$ и не выполняется условие $\eta_1 \le \eta_2$. Следовательно, множество $hdMGP_1(\lambda)$ пусто.

2. Пусть $t = 2$. Тогда $hd_t(\lambda) = (5,3)$, $tl_t(\lambda) = (8,4)$,

$$minp(m - t(t-1)/2, t) = (6,5), \quad maxp(m - t(t-1)/2, t) = (10,1),$$

$\eta_1 = (6,5)$, $\eta_2 = (8,3)$ и $\eta_1 \le \eta_2$. Значит, множество $hdMGP_2(\lambda)$ непустое и содержит разбиения $(6,5), (7,4)$ и $(8,3)$. Максимальные графические разбиения, построенные по этим головам, имеют вид $(7,6,2,2,2,2,2,1)$, $(8,5,2,2,2,2,1,1,1)$, $(9,4,2,2,2,1,1,1,1,1)$.

3. Пусть $t = 3$. Тогда $hd_t(\lambda) = (4,2,1)$, $tl_t(\lambda) = (7,3,1)$,

$$minp(m - t(t-1)/2, t) = (3,3,3), \quad maxp(m - t(t-1)/2, t) = (7,1,1),$$

$\eta_1 = (4,3,2)$, $\eta_2 = (7,1,1)$ и $\eta_1 \le \eta_2$. Итак, множество $hdMGP_3(\lambda)$ непустое и является интервалом $[\eta_1, \eta_2]$ решетки разбиений IPL. В этом интервале лежат разбиения $(4,3,2)$, $(4,4,1)$,

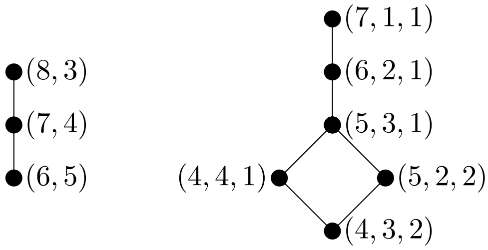


Рис. 9. Множество голов всех максимальных графических разбиений веса 24, доминирующих разбиение $(6,4,3,3,2,2,1,1,1,1)$.

$(5,2,2)$, $(5,3,1)$, $(6,2,1)$ и $(7,1,1)$. Максимальные графические разбиения, построенные по этим головам, имеют вид

$$(6,5,4,3,3,2,1),\quad (6,6,3,3,2,2,2),\quad (7,4,4,3,3,1,1,1),\quad (7,5,3,3,2,2,1,1),$$
$$(8,4,3,3,2,1,1,1,1),\quad (9,3,3,3,1,1,1,1,1,1).$$

4. Пусть $t=4$. Тогда $hd_t(\lambda)=(3,1)$, $tl_t(\lambda)=(6,2)$,

$$minp(m-t(t-1)/2,t)=(2,2,1,1),\quad maxp(m-t(t-1)/2,t)=(3,1,1,1),$$

$\eta_1=(3,1,1,1)$, $\eta_2=(3,1,1,1)$ и $\eta_1\le\eta_2$. Следовательно, множество $hdMGP_4(\lambda)$ непустое и содержит единственный элемент $(3,1,1,1)$. Максимальное графическое разбиение, построенное по этой голове, имеет вид $(6,4,4,4,4,1,1)$.

Таким образом, существует 10 максимальных графических разбиений веса 24, доминирующих λ. Они, конечно, не сравнимы между собой, но их головы образуют три подрешетки в IPL. Эти подрешетки показаны на рис. 9.

Обратим внимание, что множество голов всех максимальных графических разбиений веса $2m$, доминирующих λ, в данном примере не является ординальной суммой указанных трех подрешеток. Кроме того, имеется максимальное графическое разбиение $(5,5,5,3,3,3)$ веса 24, не доминирующее λ, голова которого $(3,3,3)$ лежит в интервале от $(3,1,1,1)$ до $(8,3)$, т.е. множество голов всех максимальных графических разбиений веса $2m$, доминирующих λ, в данном примере не является интервалом решетки IPL, но является объединением трех интервалов.

Отметим, что В. В. Зуевым проведен численный эксперимент по проверке теоремы 1 с помощью переборного алгоритма для всех графических разбиений веса не превосходящего 50.

В заключение заметим, что с помощью теоремы 1 можно построить эффективный алгоритм нахождения всех максимальных графических разбиений, доминирующих заданное графическое разбиение, который полезен для нахождений всех пороговых графов [8], получаемых из заданного графа с помощью повышающих вращений ребер (см. [7]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Andrews G.E**. The theory of partitions. Cambridge: Cambridge University Press, 1976. 255 p.
2. **Brylawski T.** The lattice of integer partitions // Discrete Math. 1973. Vol. 6, no. 3. P. 201–219. doi: 10.1016/0012-365X(73)90094-0 .
3. **Баранский В.А., Сеньчонок Т.А.** О максимальных графических разбиениях, ближайших к заданному графическому разбиению // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 338–363. doi: 10.33048/semi.2020.17.022
4. **Erdös P., Gallai T.** Graphs with given degree of vertices // Math. Lapok. 1960. Vol. 11. P. 264–274.
5. **Sierksma G., Hoogeven H.** Seven criteria for integer sequences being graphic // J. Graph Theory. 1991. Vol. 15, no. 2. P. 223–231. doi: 10.1002/jgt.3190150209
6. **Kohnert A.** Dominance order and graphical partitions // Elec. J. Comb. 2004. Vol. 11, no. 1. Art. no. N4. P. 1–17. doi: 10.37236/1845

7. **Баранский В.А., Сеньчонок Т.А.** О максимальных графических разбиениях // Сиб. электрон. мат. изв. 2017. Т. 14. С. 112–124. doi: 10.17377/semi.2017.14.012
8. **Mahadev N.V.R., Peled U.N.** Threshold graphs and related topics. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1995. 542 p. (Ser. Annals of Discr. Math.; vol. 56.)

Поступила 30.11.2023
После доработки 19.12.2023
Принята к публикации 25.12.2023

Баранский Виталий Анатольевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: vitaly.baransky@urfu.ru

Зуев Валентин Викторович
аспирант
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: valentin.zuev@urfu.ru

REFERENCES

1. Andrews G.E. *The theory of partitions.* Cambridge: Cambridge University Press, 1976. 255 p.
2. Brylawski T. The lattice of integer partitions. *Discrete Math.*, 1973, vol. 6, no. 3, pp. 201–219. doi: 10.1016/0012-365X(73)90094-0
3. Baransky V.A., Senchonok T.A. On maximal graphical partitions that are the nearest to a given graphical partition. *Sib. Elect. Math. Reports*, 2020, vol. 17, pp. 338–363 (in Russian). doi: 10.33048/semi.2020.17.022
4. Erdös P., Gallai T. Graphs with given degree of vertices. *Math. Lapok*, 1960, vol. 11, pp. 264–274.
5. Sierksma G., Hoogeven H. Seven criteria for integer sequences being graphic. *J. Graph Theory*, 1991, vol. 15, no. 2. P. 223–231. doi: 10.1002/jgt.3190150209
6. Kohnert A. Dominance order and graphical partitions. *Elec. J. Comb.*, 2004, vol. 11, no. 1, art. no. N4, pp. 1–17. doi: 10.37236/1845
7. Baransky V.A., Senchonok T.A. On maximal graphical partitions. *Sib. Electron. Mat. Izv.*, 2017, vol. 14, pp. 112–124 (in Russian). doi: 10.17377/semi.2017.14.012
8. Mahadev N.V.R., Peled U.N. *Threshold graphs and related topics.* Ser. Annals of Discr. Math., vol. 56, Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1995, 542 p.

Received November 30, 2023
Revised December 19, 2023
Accepted December 25, 2023

Vitaly Anatolievich Baransky, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Ural Federal University Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: vitaly.baransky@urfu.ru .

Valentin Viktorovich Zuev, doctoral student, Ural Federal University Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: valentin.zuev@urfu.ru .

Cite this article as: V. A. Baransky, V. V. Zuev. On lattices associated with maximal graphical partitions. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 1, pp. 32–42.