ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 1 2024

УДК 517.968.4

ВОПРОСЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ, ОТСУТСТВИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ВСЕЙ ПРЯМОЙ С ОПЕРАТОРОМ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА — СТИЛТЬЕСА[1]

А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян

Работа посвящена изучению вопросов существования, несуществования и единственности решения одного класса интегральных уравнений типа Гаммерштейна — Стилтьеса на всей числовой прямой с вогнутой и монотонной нелинейностью. Указанный класс уравнений имеет непосредственное применение в различных отраслях современного естествознания. В частности, в зависимости от представления соответствующего ядра (предъядра) и нелинейности, уравнения такого рода встречаются в теории вероятностей (в марковских процессах), в теории p-адической струны, в теории переноса излучения в спектральных линиях, в эпидемиологии, в кинетической теории газов и плазмы. При определенных ограничениях на ядро и на нелинейность уравнения доказывается конструктивная теорема существования непрерывного положительного и ограниченного решения. Излагается также метод построения приближенного решения, суть которого заключается в получении равномерной оценки для разности построенного решения и соответствующих последовательных приближений, при этом правая часть данной оценки стремится к нулю со скоростью некоторой геометрической прогрессии. В случае, когда ядро уравнения удовлетворяет условию стохастичности, доказывается отсутствие нетривиального непрерывного и ограниченного решения. В классе неотрицательных нетривиальных непрерывных и ограниченных функций устанавливается также теорема единственности. На основе некоторых геометрических оценок для вогнутых функций исследуется асимптотическое поведение построенного решения на бесконечности. В конце статьи приводятся прикладные примеры ядра (предъядра) и нелинейности изучаемого уравнения для иллюстрации полученных результатов.

Ключевые слова и фразы: ограниченное решение, монотонность, предъядро, вогнутость, последовательные приближения.

A. Kh. Khachatryan, Kh. A. Khachatryan, H. S. Petrosyan. Questions of existence, absence, and uniqueness of a solution to one class of nonlinear integral equations on the whole line with an operator of Hammerstein–Stieltjes type.

The work is devoted to the study of questions of the existence, nonexistence, and uniqueness of a solution to one class of integral equations of the Hammerstein–Stieltjes type on the whole line with a concave and monotone nonlinearity. This class of equations has direct applications in various areas of modern natural science. In particular, depending on the representation of the corresponding kernel (or subkernel) and nonlinearity, equations of this kind are found in probability theory (Markov processes), p-adic string theory, the theory of radiative transfer in spectral lines, epidemiology, and the kinetic theory of gases and plasma. Under certain constraints on the kernel and on the nonlinearity of the equation, a constructive theorem for the existence of a continuous positive bounded solution is proved. A method for constructing an approximate solution is also outlined, the essence of which is to obtain a uniform estimate of the difference between the constructed solution and the corresponding successive approximations; the right-hand side of this estimate tends to zero at a rate of some geometric progression. In the case where the kernel of the equation satisfies the stochasticity condition, the absence of a nontrivial continuous bounded solution is proved. In the class of nonnegative nontrivial continuous bounded functions, a uniqueness theorem is also established. Using some geometric estimates for concave functions, the asymptotic behavior of the constructed solution at infinity is studied. At the end of the article, to illustrate the results obtained, practical examples of the kernel (subkernel) and nonlinearity of the equation under study are given.

Keywords: bounded solution, monotonicity, subkernel, concavity, successive approximations.

MSC: 45G05

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-1-249-269

[1]Исследование первого и третьего авторов выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21T-1A047. Исследование второго автора выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 23RL-1A027.

1. Введение

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим следующий класс нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна — Стилтьеса на множестве $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x,t) G(f(t)) d_t F(t-x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

относительно искомой неотрицательной измеримой и ограниченной на $\mathbb{R}$ функции $f(x)$. В уравнении (1.1) функция (ядро) $\mu(x,t)$ удовлетворяет условиям

$a)$ (условия непрерывности и симметрии)

$$\mu \in C(\mathbb{R}^2), \quad \mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \mu(x,t) = \mu(t,x), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2;$$

$b)$ (условие ограниченности)

- $b_1)$ $0 \leq \mu(x,t) \leq 1$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, причем
- $b_2)$ $\mu(x,t) > 0$ при $|x| + |t| > 0$;

$c)$ (условие суммируемости)

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} (1 - \mu(x,t)) \in L_1^0(\mathbb{R}),$$

где $L_1^0(\mathbb{R})$ — пространство суммируемых (по Лебегу) функций на множестве $\mathbb{R}$, имеющих нулевой предел на $\pm\infty$.

Функция F определена на множестве $\mathbb{R}$ и обладает следующими свойствами:

I) (условия непрерывности и монотонности)
$F \in C(\mathbb{R})$, $F(x)$ монотонно возрастает на множестве $\mathbb{R}$;

II) (условие о предельных значениях на $\pm\infty$)

$$F(-\infty) := \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad F(+\infty) := \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1;$$

III) (условия симметричности и суммируемости)

$$F(-x) + F(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 1 - F \in L_1(0, +\infty).$$

Исходя из соответствующего определения работы [1], функцию F назовем предъядром уравнения (1.1).

Нелинейность G определена на множестве $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$ и удовлетворяет следующим ограничениям, а именно:

A) (условия непрерывности, вогнутости и монотонности)
$G \in C(\mathbb{R}^+)$, G вогнута (выпукла вверх) на множестве $\mathbb{R}^+$ и монотонно возрастает на $\mathbb{R}^+$;

B) (условие существования двух неподвижных точек отображения G)
$G(0) = 0$ и существует положительное число η такое, что $G(\eta) = \eta$;

C) (условие об априорной оценке снизу)
существует отображения $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ со свойствами: $\varphi \in C[0,1]$, φ монотонно возрастает и вогнута на отрезке $[0,1]$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ такая, что имеет место неравенство снизу

$$G(\sigma u) \geq \varphi(\sigma) G(u), \quad u \in [0, \eta], \quad \sigma \in [0,1].$$

Основная цель настоящей работы — исследование вопросов существования, отсутствия и единственности неотрицательного тождественно ненулевого непрерывного и ограниченного на $\mathbb{R}$ решения уравнения (1.1) при условиях a)–c), I)–III) и A)–C). Мы также будем исследовать асимптотическое поведение решения на $\pm\infty$.

1.2. Возможные приложения уравнения (1.1)

Исследования уравнения (1.1), кроме чисто математического интереса, имеют определенный интерес в различных направлениях физики, биологии и теории вероятностей. В частности, уравнение (1.1) имеет приложение в теории марковских процессов и в теории восстановления (см. [1–3]). Если предъядро F представляет собой абсолютно непрерывную функцию на $\mathbb{R}$, уравнения такого рода встречаются в теории p-адических струн и в космологии (см. [4–9]). Например, когда $\mu(x,t) \equiv 1$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, а $G(u) = \sqrt[p]{u}$, $u \in \mathbb{R}$ ($p > 2$ — нечетное число), уравнением (1.1) описывается динамика p-адических струн для скалярного поля тахионов (см. [4–7]). В случае абсолютно непрерывных F при различных представлениях нелинейности G уравнение (1.1) имеет приложения в кинетической теории газов и плазмы (в рамках нелинейной модифицированной модели Бхатнагара — Гросса — Крука) (см. [10–12]), в теории нелинейного переноса излучения в неоднородных средах (см. [13]), а также в математической теории распространения эпидемических заболеваний в рамках моделей Аткинсона — Ройтера и Дикмана — Капера (см. [14–16]).

Следует также отметить, что линейный аналог уравнения (1.1) для абсолютно непрерывных F имеет применение в задачах нахождения стационарных состояний популяций с миграцией и распределенным потомством в рамках модели Ульфа Дикмана (см. [17–19]). К линейному аналогу уравнения (1.1) сводится также интегро-дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка из задачи распределения национального дохода в рамках модели Дж. Саргана (см. [20]).

1.3. История исследования уравнения (1.1)

В том случае, когда $F \in AC(\mathbb{R})$ ($AC(\mathbb{R})$ — класс абсолютно непрерывных функций на множестве $\mathbb{R}$), при различных дополнительных ограничениях на G, μ и F уравнение (1.1) исследовалось многими авторами (см. [4–9; 14–16; 21–27]). Первоначальные исследования уравнения типа (1.1) проводились научной школой академика В. С. Владимирова в том частном случае, когда

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}, \quad \mu(x,t) \equiv 1, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

$$G(u) = \sqrt[p]{u} \ \text{ или } \ G^{-1}(u) = au^3 + (1-a)u, \quad u \in \mathbb{R}, \quad a \in (0,1],$$

где G^{-1} — обратная функция функции G (см. [4–9]). В указанных работах исследованы вопросы существования нечетного ограниченного непрерывного решения и асимптотического поведения построенного решения на $\pm\infty$. В дальнейшем эти результаты были обобщены и усилены в [21–23], когда $F \in AC(\mathbb{R})$ и $F'(x)$ — произвольная четная ограниченная суммируемая и монотонно убывающая на $\mathbb{R}^+$ функция, $\mu(x,t) \equiv 1$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, а $G(u)$ — любая нечетная функция со свойствами A) и B). Вопросы единственности и качественного анализа решения уравнения (1.1) при указанных здесь условиях изучались в [24; 25].

Если же нарушается условие III), то историю исследования уравнения (1.1) будем рассматривать с работ [14–16], где предполагалось, что $F \in AC(\mathbb{R})$, $\mu(x,t) \equiv 1$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, и для определенных значений положительного параметра α сходится интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t}|t|F'(t)dt < +\infty$, а нелинейность G помимо условий A), B) удовлетворяет следующему дополнительному ограничению: существуют конечная производная в нуле $G'(0)$ и число $c_0 > 0$ такие, что

$G(u) \geq G'(0)u - c_0u^2$, $u \in [0, \eta]$. При этих, довольно жестких, условиях на функции μ, F и G в [14–16] доказаны конструктивные теоремы существования и качественного анализа положительных и ограниченных решений уравнения (1.1).

Нам удалось ослабить (см. [26; 27]) указанные выше условия на функции F, G и при этом получить аналогичные результаты, как и в работах [14–16], а также доказать теорему единственности построенного решения в конкретно выбранном конусном отрезке. Кроме того, в [26] исследован многомерный аналог уравнения (1.1) в случае, когда нарушается условие III),

$$F \in AC(\mathbb{R}), \quad \mu(x,t) \equiv 1, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t}|t|F'(t)dt < +\infty,$$

а также когда существуют числа $c_0 > 0$ и $\varepsilon \in (0, 1]$ такие, что $G(u) \geq G'(0)u - c_0u^{1+\varepsilon}$, $G'(0) < +\infty$, $u \in [0, \eta]$. В [27] рассматривались вопросы существования и единственности решения уравнения (1.1), если F не является абсолютно непрерывной функцией, нарушается условие III), $\mu(x,t) \equiv 1$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, сходится интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t}|t|dF(t)dt < +\infty$, а G удовлетворяет соответствующим условиям исследования [26].

1.4. Структура работы и сводка основных результатов

Сначала заметим, что условия B) и II) влекут за собой существование тождественно нулевого решения уравнения (1.1), а в случае $\mu(x,t) \equiv 1$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, решениями уравнения (1.1) являются $f(x) \equiv 0$ и $f(x) \equiv \eta$. Такие решения мы назовем тривиальными. В настоящей работе исследуются вопросы существования, несуществования и единственности неотрицательного нетривиального непрерывного и ограниченного на $\mathbb{R}$ решения уравнения (1.1) при общих условиях a)–c), I)–III) и A)–C). Изучается также асимптотическое поведение такого решения на $\pm\infty$. Структура работы следующая. Раздел 2 посвящен некоторым обозначениям и вспомогательным фактам. В разд. 3 доказывается, что если $\mu(x,t) \not\equiv 1$, то при условиях a)–c), I)–III) и A)–C) уравнение (1.1) имеет положительное непрерывное и ограниченное на $\mathbb{R}$ решение f, причем f является равномерным пределом (когда $n \to \infty$) следующих последовательных приближений:

$$f_{n+1}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mu(x,t)G(f_n(t))d_tF(t-x), \quad f_0(x) \equiv \eta, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

и

$$\eta - f \in L_1^0(\mathbb{R}).$$

Раздел 4 посвящен доказательству теоремы единственности решения уравнения (1.1) в классе неотрицательных тождественно ненулевых ограниченных и непрерывных на множестве $\mathbb{R}$ функций. Из этой теоремы, в частности, следует, что в случае $\mu(x,t) \equiv 1$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, уравнение (1.1) в классе неотрицательных нетривиальных ограниченных и непрерывных на $\mathbb{R}$ функций не имеет решения. Наконец, в разд. 6 приводятся наглядные примеры функций μ, F и G, удовлетворяющие всем условиям доказанных утверждений.

2. Обозначения и вспомогательные факты

2.1. Априорные оценки решения

Докажем следующую простую, но полезную для дальнейшего изложения лемму.

Лемма 2.1. *Пусть $f(x)$ — произвольное неотрицательное и ограниченное на $\mathbb{R}$ решение уравнения* (1.1). *Тогда при условиях b_1*), I), II), A) *и* B) *данное решение удовлетворяет неравенству*

$$f(x) \le \eta, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Обозначим через $c_0 := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$. Понятно, что в случае, когда $f(x) \equiv 0$, утверждение леммы очевидно. Предположим, что $f(x) \ge 0$ и $f(x) \not\equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда $c_0 > 0$. Из (1.1) в силу условий b_1), I), II) и A) будем иметь

$$f(x) \le G(c_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d_tF(t-x) = G(c_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} dF(y) = G(c_0)(F(+\infty) - F(-\infty)) = G(c_0), \quad x \in \mathbb{R},$$

откуда следует, что

$$c_0 \le G(c_0). \tag{2.1}$$

Убедимся, что $c_0 \le \eta$. Предположим обратное: $c_0 > \eta$. Тогда, принимая во внимание условия A) и B), получим $\dfrac{G(c_0)}{c_0} < \dfrac{G(\eta)}{\eta} = 1$, ибо $\dfrac{G(u)}{u}$ монотонно убывает на $(0, +\infty)$. Последнее неравенство противоречит неравенству (2.1) Следовательно, $f(x) \le c_0 \le \eta$, $x \in \mathbb{R}$.

Лемма доказана.

Пусть теперь $f(x)$ — произвольное неотрицательное тождественно ненулевое и непрерывное на $\mathbb{R}$ решение уравнения (1.1). Тогда в силу непрерывности f существуют точка $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и число $\delta \in (0, |x_0|)$ такие, что

$$\alpha := \inf_{x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)} f(x) > 0. \tag{2.2}$$

Учитывая условия b), I), II), а также тот факт, что $G(0) = 0$ и $G(u) \uparrow$ на $\mathbb{R}^+$, из (1.1) в силу (2.2) имеем

$$f(x) \ge \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \mu(x,t)G(f(t))d_tF(t-x) \ge G(\alpha) \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \mu(x,t)d_tF(t-x) > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

ибо $\mu(x,t) > 0$, $(x,t) \in \mathbb{R} \times (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $0 \notin (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

На основе вышеизложенного можно утверждать, что имеет место

Лемма 2.2. *При условиях b*), I) *и* II), *если $G(0) = 0$ и $G(u) \uparrow$ на $\mathbb{R}^+$, то любое неотрицательное тождественно ненулевое и непрерывное на $\mathbb{R}$ решение уравнения* (1.1) *является положительной функцией на множестве $\mathbb{R}$.*

2.2. Суммируемость функции $G(f(x)) - f(x)$

Следующая лемма играет ключевую роль в дальнейших рассуждениях.

Лемма 2.3. *Пусть функция μ удовлетворяет двойному неравенству*

$$0 \le \mu(x,t) \le 1, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Тогда при условиях c), I)–III), A) *и* B) *любое неотрицательное измеримое и ограниченное на $\mathbb{R}$ решение f обладает свойством $G(f) - f \in L_1(\mathbb{R})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть f — произвольное неотрицательное и ограниченное на $\mathbb{R}$ решение уравнения (1.1). Тогда, используя утверждение леммы 2.1, а также условия I), II), c), A) и B), из (1.1) будем иметь

$$\begin{aligned}
0\le\eta-f(x)&=\eta\int\limits_{-\infty}^{\infty}d_tF(t-x)-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mu(x,t)G(f(t))d_tF(t-x)\\
&=\eta\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1-\mu(x,t))d_tF(t-x)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mu(x,t)(\eta-G(f(t)))d_tF(t-x)\\
&\le\eta\sup_{t\in\mathbb{R}}(1-\mu(x,t))+\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\eta-G(f(t)))d_tF(t-x),\quad x\in\mathbb{R}.
\end{aligned}\tag{2.3}$$

Пусть $r>0$ — произвольное число. Интегрируя обе части полученного выше неравенства (2.3) и при этом принимая во внимание условия c), I), II), III), A) и B), получим

$$0\le\int\limits_0^r(\eta-f(x))dx\le\eta\int\limits_0^r\sup_{t\in\mathbb{R}}(1-\mu(x,t))dx+\int\limits_0^r\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\eta-G(f(t)))d_tF(t-x)dx$$

$$\le\eta\int\limits_0^{\infty}\sup_{t\in\mathbb{R}}(1-\mu(x,t))dx+\int\limits_0^r\int\limits_{-\infty}^{0}(\eta-G(f(t)))d_tF(t-x)dx+\int\limits_0^r\int\limits_0^{\infty}(\eta-G(f(t)))d_tF(t-x)dx$$

$$\le\eta\int\limits_0^{\infty}\sup_{t\in\mathbb{R}}(1-\mu(x,t))dx+\eta\int\limits_0^r\int\limits_{-\infty}^{0}d_tF(t-x)dx+\int\limits_0^r\int\limits_{-x}^{\infty}(\eta-G(f(x+y)))dF(y)dx$$

$$\le\eta\int\limits_0^{\infty}\sup_{t\in\mathbb{R}}(1-\mu(x,t))dx+\eta\int\limits_0^{\infty}F(-x)dx+\int\limits_0^r\int\limits_{-x}^{r-x}(\eta-G(f(x+y)))dF(y)dx$$

$$+\int\limits_0^r\int\limits_{r-x}^{\infty}(\eta-G(f(x+y)))dF(y)dx\le\eta\int\limits_0^{\infty}\sup_{t\in\mathbb{R}}(1-\mu(x,t))dx+\eta\int\limits_0^{\infty}(1-F(x))dx$$

$$+\int\limits_0^r\int\limits_{-x}^{r-x}(\eta-G(f(x+y)))dF(y)dx+\eta\int\limits_0^r\int\limits_{r-x}^{\infty}dF(y)dx=\eta\int\limits_0^{\infty}\sup_{t\in\mathbb{R}}(1-\mu(x,t))dx$$

$$+\eta\int\limits_0^{\infty}(1-F(x))dx+\eta\int\limits_0^r(1-F(r-x))dx+\int\limits_0^r\int\limits_{-x}^{r-x}(\eta-G(f(x+y)))dF(y)dx$$

$$\le\eta\int\limits_0^{\infty}\sup_{t\in\mathbb{R}}(1-\mu(x,t))dx+2\eta\int\limits_0^{\infty}(1-F(x))dx+\int\limits_0^r\int\limits_{-x}^{r-x}(\eta-G(f(x+y)))dF(y)dx.$$

Рассмотрим теперь последний интеграл

$$I:=\int\limits_0^r\int\limits_{-x}^{r-x}(\eta-G(f(x+y)))dF(y)dx.$$

Используя измеримость функции f, непрерывность нелинейности G, а также условия I)–III), для предъядра F в силу теоремы Тонелли — Фубини (см. [28]) имеем

$$\begin{aligned} I = \int_{-r}^{r}\int_{-y}^{r-y}(\eta - G(f(x+y)))dxdF(y) &= \int_{-r}^{r}\int_{0}^{r}(\eta - G(f(t)))dtdF(y) \\ &= (F(r)-F(-r))\int_0^r(\eta - G(f(t)))dt \leq \int_0^r(\eta - G(f(t)))dt. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Таким образом, учитывая полученное выше неравенство

$$0 \leq \int_0^r(\eta - f(x))dx \leq \eta\int_0^\infty \sup_{t\in\mathbb{R}}(1-\mu(x,t))dx + 2\eta\int_0^\infty(1-F(x))dx + \int_0^r\int_{-x}^{r-x}(\eta - G(f(x+y)))dF(y)dx,$$

а также оценку (2.4) приходим к следующему неравенству:

$$0 \leq \int_0^r(\eta - f(x))dx \leq \eta\int_0^\infty \sup_{t\in\mathbb{R}}(1-\mu(x,t))dx + 2\eta\int_0^\infty(1-F(x))dx + \int_0^r(\eta - G(f(x)))dx.$$

Из условий A), B) и утверждения леммы 2.1 немедленно выводим, что

$$G(f(x)) \geq f(x), \quad x\in\mathbb{R}.$$

Значит,

$$0 \leq \int_0^r(G(f(x)) - f(x))dx \leq \eta\int_0^\infty \sup_{t\in\mathbb{R}}(1-\mu(x,t))dx + 2\eta\int_0^\infty(1-F(x))dx. \tag{2.5}$$

Устремляя число r к бесконечности в неравенстве (2.5), получим

$$0 \leq \int_0^\infty(G(f(x)) - f(x))dx \leq \eta\int_0^\infty \sup_{t\in\mathbb{R}}(1-\mu(x,t))dx + 2\eta\int_0^\infty(1-F(x))dx < +\infty. \tag{2.6}$$

Аналогичными рассуждениями можно доказать, что

$$0 \leq \int_{-\infty}^0(G(f(x)) - f(x))dx \leq \eta\int_{-\infty}^0 \sup_{t\in\mathbb{R}}(1-\mu(x,t))dx + 2\eta\int_0^\infty(1-F(x))dx < +\infty. \tag{2.7}$$

Следовательно, $G(f) - f \in L_1(\mathbb{R})$, и из (2.6), (2.7) имеем

$$0 \leq \int_{-\infty}^\infty(G(f(x)) - f(x))dx \leq \eta\int_{-\infty}^\infty \sup_{t\in\mathbb{R}}(1-\mu(x,t))dx + 4\eta\int_0^\infty(1-F(x))dx := C < +\infty. \tag{2.8}$$

Таким образом, лемма доказана.

Полезна следующая

Лемма 2.4. *Пусть f — произвольное неотрицательное непрерывное и ограниченное на $\mathbb{R}$ решение уравнения* (1.1), *для которого существует число $\delta = \delta(f) > 0$ такое, что $\beta := \inf\limits_{\{x\in\mathbb{R}:|x|\geq\delta\}} f(x) \in (0,\eta)$. Тогда при условиях леммы* 2.3 *имеет место включение*

$$\eta - f \in L_1(\mathbb{R}).$$

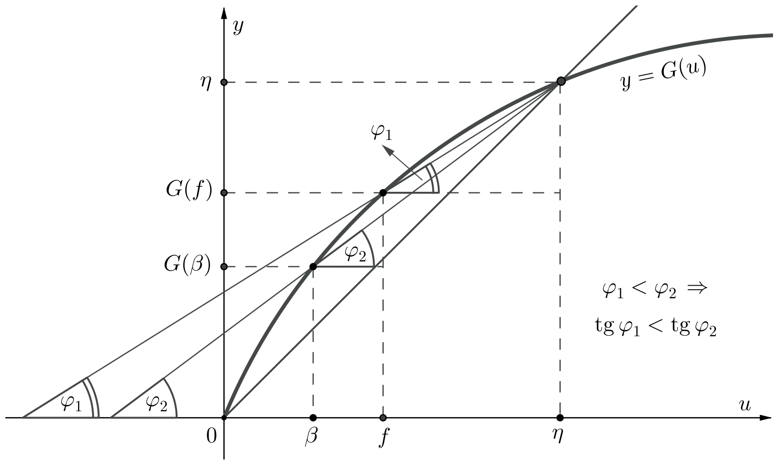

Рис. 1

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2.8) немедленно следует, что $G(f) - f \in L_1(\Omega)$, где $\Omega := (-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty)$, причем

$$\int\limits_{\Omega} (G(f(x)) - f(x))dx \leq C. \tag{2.9}$$

Так как $\beta \leq f(x) \leq \eta$ при $x \in \Omega$ (см. лемму 2.1) и $\beta \in (0, \eta)$, то, используя условия A) и B), имеем (см. рис. 1)

$$\eta - G(f(x)) \leq \frac{\eta - G(\beta)}{\eta - \beta}(\eta - f(x)), \quad x \in \Omega,$$

откуда следует, что

$$G(f(x)) - f(x) \geq \frac{G(\beta) - \beta}{\eta - \beta}(\eta - f(x)), \quad x \in \Omega. \tag{2.10}$$

Поскольку $\beta \in (0, \eta)$, то $G(\beta) > \beta$. Следовательно, принимая во внимание (2.10) и (2.9), получаем, что $\eta - f \in L_1(\Omega)$ и

$$0 \leq \int\limits_{\Omega} (\eta - f(x))dx \leq \frac{C(\eta - \beta)}{G(\beta) - \beta}. \tag{2.11}$$

Так как $f \in C(\mathbb{R})$, то $\eta - f \in L_1(-\delta, \delta)$. Таким образом, в силу последнего включения и (2.11) приходим к завершению доказательства леммы.

3. Существование положительного ограниченного и непрерывного решения уравнения (1.1)

3.1. Последовательные приближения для уравнения (1.1). Монотонность, непрерывность и положительность инфимумов последовательных приближений

Рассмотрим следующие последовательные приближения для уравнения (1.1):

$$f_{n+1}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mu(x,t)G(f_n(t))d_tF(t-x), \quad f_0(x) \equiv \eta, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Сначала индукцией по n докажем, что

$$f_n(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{3.2}$$

$$f_n(x) \quad \text{монотонно не возрастают по} \quad n, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

В случае $n = 0$ неравенство (3.2) очевидно, а неравенство $f_1(x) \leq f_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$, сразу следует из условий b), I), II) и B). Предположим, что $f_n(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$, и $f_n(x) \leq f_{n-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, при некотором натуральном n. Тогда, используя условия b), A), B), I) и II), будем иметь

$$f_{n+1}(x) \geq \int\limits_{-\infty}^{-1} \mu(x,t)G(f_n(t))d_tF(t-x) + \int\limits_{1}^{\infty} \mu(x,t)G(f_n(t))d_tF(t-x) > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$f_{n+1}(x) \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mu(x,t)G(f_{n-1}(t))d_tF(t-x) = f_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ввиду непрерывности функции μ и свойств I), II) для предъядра F индукцией по n несложно проверить, что

$$f_n \in C(\mathbb{R}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.4}$$

Предположим теперь, что

$$\mu(x,t) \not\equiv 1, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2. \tag{3.5}$$

Тогда в силу непрерывности функции μ существует круг $E \subset \mathbb{R}^2$ такой, что

$$\mu(x,t) < 1, \quad (x,t) \in E. \tag{3.6}$$

Рассмотрим функцию

$$\chi(x) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mu(x,t)d_tF(t-x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

Из (3.6), b), I) и II) следует, что, когда $x \in P_r^{Ox}(E)$, имеет место оценка

$$\chi(x) = \int\limits_{P_r^{Ot}(E)} \mu(x,t)d_tF(t-x) + \int\limits_{\mathbb{R}\setminus P_r^{Ot}(E)} \mu(x,t)d_tF(t-x)$$

$$< \int\limits_{P_r^{Ot}(E)} d_tF(t-x) + \int\limits_{\mathbb{R}\setminus P_r^{Ot}(E)} \mu(x,t)d_tF(t-x)$$

$$\leq \int\limits_{P_r^{Ot}(E)} d_tF(t-x) + \int\limits_{\mathbb{R}\setminus P_r^{Ot}(E)} d_tF(t-x) = F(+\infty) - F(-\infty) = 1,$$

где $P_r^{Ox}(E)$ и $P_r^{Ot}(E)$ есть проекции множества E на осях Ox и Ot соответственно. Значит,

$$\chi(x) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{и} \quad \chi(x) < 1, \quad x \in P_r^{Ox}(E). \tag{3.8}$$

Принимая во внимание условия $b), c)$, I) и II), имеем

$$0 \leq 1 - \chi(x) \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}}(1-\mu(x,t))d_tF(t-x) = \sup_{t\in\mathbb{R}}(1-\mu(x,t)) \to 0$$

при $x \to \pm\infty$. Следовательно, существует число $r_0 > 0$ такое, что при $|x| > r_0$ справедливо неравенство

$$\chi(x) \geq \frac{9}{10}. \tag{3.9}$$

С другой стороны, так как $\chi \in C[-r_0, r_0]$ и $\chi(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$ (см. условия b), I) и II)), согласно (3.8) и теореме Вейерштрасса получаем

$$\gamma := \min_{x \in [-r_0, r_0]} \chi(x) \in (0,1). \tag{3.10}$$

Из (3.9) и (3.10) немедленно следует, что

$$\chi(x) \geq \min\left\{\gamma, \frac{9}{10}\right\} := \sigma \in (0,1). \tag{3.11}$$

Учитывая (3.11), (3.3), (3.7) и (3.1) имеем

$$\sigma f_0(t) \leq f_1(t) \leq f_0(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.12}$$

Из (3.12) в силу I), II), b) и A) выводим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu(x,t) G(\sigma f_0(t)) d_t F(t-x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x,t) G(f_1(t)) d_t F(t-x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x,t) G(f_0(t)) d_t F(t-x)$$

или, принимая во внимание условие C), будем иметь

$$\varphi(\sigma) f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_1(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.13}$$

Из (3.13) в свою очередь получаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu(x,t) G(\varphi(\sigma) f_1(t)) d_t F(t-x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x,t) G(f_2(t)) d_t F(t-x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x,t) G(f_1(t)) d_t F(t-x),$$

откуда в силу условия C) приходим к неравенству

$$\varphi(\varphi(\sigma)) f_2(x) \leq f_3(x) \leq f_2(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Продолжая этот процесс в n-м шаге, имеем

$$\underbrace{\varphi(\varphi \ldots \varphi(\sigma))}_{n} f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.14}$$

3.2. Равномерная сходимость последовательных приближений (3.1)

Обозначим через $\mathcal{F}_n(\sigma) := \underbrace{\varphi(\varphi \ldots \varphi(\sigma))}_{n}$, $n = 2, 3, \ldots$. Из свойств функции φ (см. условие C)) немедленно следует, что (см. рис. 2) для всякого $\varepsilon \in (0,1)$ имеет место неравенство

$$\varphi(\sigma) \geq k_\varepsilon \sigma + 1 - k_\varepsilon, \tag{3.15}$$

где $k_\varepsilon := \dfrac{1 - \varphi(\sigma\varepsilon)}{1 - \sigma\varepsilon}$, а число σ определяется по формуле (3.11).

Так как $\sigma < k_\varepsilon \sigma + 1 - k_\varepsilon < 1$ (ибо $\sigma \in (0,1)$, $\varphi(\sigma\varepsilon) > \sigma\varepsilon$), то, снова используя свойства функции φ из (3.15), получим

$$F_2(\sigma) = \varphi(\varphi(\sigma)) \geq \varphi(k_\varepsilon \sigma + 1 - k_\varepsilon) \geq k_\varepsilon(k_\varepsilon \sigma + 1 - k_\varepsilon) + 1 - k_\varepsilon = k_\varepsilon^2 \sigma + 1 - k_\varepsilon^2.$$

Продолжая данный процесс, в n-м шаге приходим к соотношению

$$F_n(\sigma) \geq k_\varepsilon^n \sigma + 1 - k_\varepsilon^n,$$

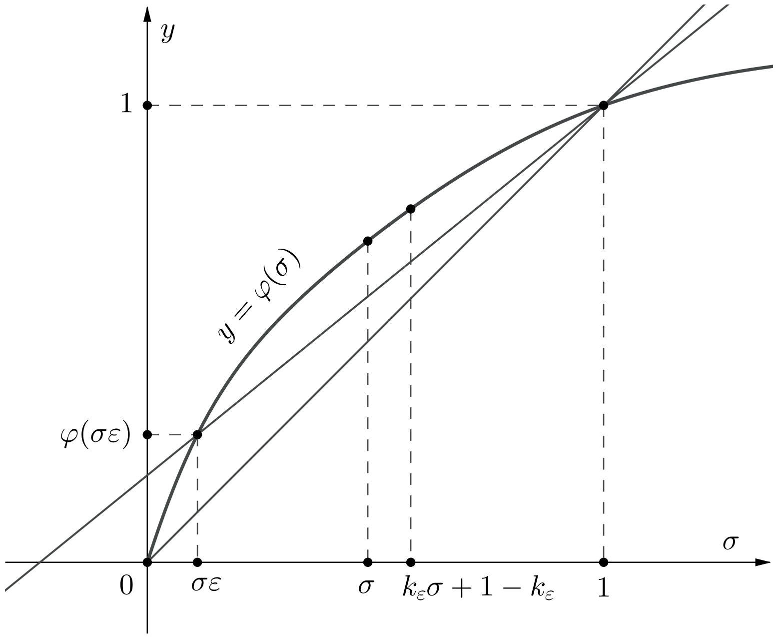

Рис. 2

откуда в силу очевидного неравенства $F_n(\sigma) < \underbrace{\varphi(\varphi\ldots\varphi(1))}_{n} = \varphi(1) = 1$, $n = 2, 3, \ldots$, получим

$$0 < 1 - F_n(\sigma) \le k_\varepsilon^n (1-\sigma), \quad n = 2, 3, \ldots. \tag{3.16}$$

Из (3.14) и (3.16) приходим к неравенствам

$$0 \le f_n(x) - f_{n+1}(x) \le \eta\, k_\varepsilon^n (1-\sigma), \quad n = 2, 3, \ldots, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.17}$$

где $k_\varepsilon \in (0,1)$ ввиду неравенств $1 > \varphi(\sigma\varepsilon) > \sigma\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, $0 < \sigma < 1$.

Индукцией по n докажем теперь, что существуют

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_n(x) = \eta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.18}$$

В случае $n = 0$ предельное соотношение (3.18) сразу следует из определения нулевого приближения в итерациях (3.1). Предположим, что (3.18) имеет место при некотором натуральном n. Тогда из (3.1) в силу (3.3), b), I), II), A) и B) имеем

$$0 \le \eta - f_{n+1}(x) \le \eta \sup_{t\in\mathbb{R}} (1 - \mu(x,t)) + \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - G(f_n(x+y)))dF(y), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.19}$$

Дополнительно докажем, что существует

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - G(f_n(x+y)))dF(y) = 0. \tag{3.20}$$

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \eta$ (согласно индукционному предположению), то в силу условий A) и B) существует $\lim\limits_{\tau\to+\infty} (\eta - G(f_n(\tau)) = 0$. Следовательно, при всяком $\varepsilon > 0$ существует число $r_1 = r_1(\varepsilon) > 0$ такое, что при $\tau \ge r_1$ имеет место неравенство

$$0 \le \eta - G(f_n(\tau)) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.21}$$

С другой стороны, так как $F(-\infty)=0$, то для всякого $\varepsilon>0$ существует число $r_2=r_2(\varepsilon)>0$ такое, что при $\tau\geq r_2$ справедлива оценка

$$0\leq F(-\tau)<\frac{\varepsilon}{2\eta}. \tag{3.22}$$

Теперь, выбирая $x\geq\max\{2r_1,2r_2\}$, в силу (3.21) и (3.22) получаем

$$0\leq\int_{-\infty}^{\infty}(\eta-G(f_n(x+y)))dF(y)=\int_{-\infty}^{-x/2}(\eta-G(f_n(x+y)))dF(y)+\int_{-x/2}^{\infty}(\eta-G(f_n(x+y)))dF(y)$$

$$\leq\eta\int_{-\infty}^{-x/2}dF(y)+\int_{-x/2}^{\infty}(\eta-G(f_n(x+y)))dF(y)<\eta F\Big(-\frac{x}{2}\Big)+\frac{\varepsilon}{2}\Big(1-F\Big(-\frac{x}{2}\Big)\Big)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Аналогичным образом доказывается, что существует

$$\lim_{x\to-\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\eta-G(f_n(x+y)))dF(y)=0. \tag{3.23}$$

Принимая во внимание (3.20), (3.23), (3.19) и условие c), приходим к предельному соотношению (3.18) для номера $n+1$.

Так как $k_\varepsilon\in(0,1)$, то из (3.17) следует равномерная сходимость последовательности непрерывных положительных и монотонно невозрастающих функций $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}:\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, причем $f\in C(\mathbb{R})$. Используя теорему Б. Леви (см. [29]), несложно проверить, что f удовлетворяет уравнению (1.1). Из (3.8) и условия B) сразу получаем, что

$$0\leq f(x)\leq\eta,\quad f(x)\not\equiv\eta,\quad x\in\mathbb{R}. \tag{3.24}$$

Докажем, что на самом деле

$$0\leq f(x)<\eta,\quad x\in\mathbb{R}. \tag{3.25}$$

Действительно, учитывая непрерывность функций f и (3.24), можно утверждать, что существует множество $U\subset\mathbb{R}$ с положительной мерой такое, что $f(x)<\eta$, $x\in U$. Значит, в силу условий b), A), B), I) и II) имеем

$$f(x)<\eta\int_U\mu(x,t)d_tF(t-x)+\int_{\mathbb{R}\setminus U}\mu(x,t)G(f(t))d_tF(t-x)$$

$$\leq\eta\int_U\mu(x,t)d_tF(t-x)+\eta\int_{\mathbb{R}\setminus U}\mu(x,t)d_tF(t-x)\leq\eta(F(+\infty)-F(-\infty))=\eta,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Убедимся теперь в справедливости предельных соотношений

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\eta. \tag{3.26}$$

Поскольку

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f_0(x)+\sum_{n=0}^{\infty}(f_{n+1}(x)-f_n(x)) \tag{3.27}$$

и ряд (3.27) сходится равномерно по $x\in\mathbb{R}$ (см. неравенство (3.17)), то ввиду (3.18) из (3.27) получим

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}f_0(x)+\sum_{n=0}^{\infty}(\lim_{x\to\pm\infty}f_{n+1}(x)-\lim_{x\to\pm\infty}f_n(x))=\eta.$$

Неравенство (3.17) перепишем для значений $n+1, n+2, \dots, n+p$:

$$\begin{cases} 0 \le f_{n+1}(x) - f_{n+2}(x) \le \eta\, k_\varepsilon^{n+1}(1-\sigma), & x \in \mathbb{R}, \\ 0 \le f_{n+2}(x) - f_{n+3}(x) \le \eta\, k_\varepsilon^{n+2}(1-\sigma), & x \in \mathbb{R}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ 0 \le f_{n+p-1}(x) - f_{n+p}(x) \le \eta\, k_\varepsilon^{n+p-1}(1-\sigma), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.28}$$

Из (3.17) и (3.28) следует, что

$$0 \le f_n(x) - f_{n+p}(x) \le \eta\,(1-\sigma)k_\varepsilon^n(1+\ldots+k_\varepsilon^{p-1}) \le \frac{\eta\,(1-\sigma)k_\varepsilon^n}{1-k_\varepsilon}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.29}$$

В неравенстве (3.29), устремляя число $p \to +\infty$, получим

$$0 \le f_n(x) - f(x) \le \frac{\eta(1-\sigma)k_\varepsilon^n}{1-k_\varepsilon}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.30}$$

Из (3.26) и (3.25) сразу очевидно, что существует число $\delta > 0$ такое, что

$$\inf_{\{x\in\mathbb{R}:|x|\ge\delta\}} f(x) \in \left(\frac{\eta}{2}, \eta\right).$$

Таким образом, согласно лемме 2.4 для построенного решения f получаем интегральную асимптотику

$$\eta - f \in L_1(\mathbb{R}),$$

а из леммы 2.2 имеем, что $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

На основе выше изложенного приходим к следующему результату.

Теорема 3.1. *При условиях* (3.5)*, a)–c),* I)–III) *и* A)–C) *уравнение* (1.1) *имеет положительное ограниченное и непрерывное на множестве* $\mathbb{R}$ *решение* f*. Более того,* $0 < f(x) < \eta$*,* $x \in \mathbb{R}$*,* $\eta - f \in L_1^0(\mathbb{R})$ *и* f *удовлетворяет неравенствам* (3.30)*, где последовательность непрерывных и ограниченных функций* $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ *определяется из рекуррентных соотношений* (3.1) *и обладает свойствами* (3.2)*–*(3.4) *и* (3.17)*.*

4. Единственность решения уравнения (1.1)

Имеет место следующая

Теорема 4.1. *При условиях* (3.5)*, a)–c),* I)–III) *и* A)–C) *уравнение* (1.1) *имеет единственное решение в классе неотрицательных тождественно ненулевых непрерывных и ограниченных на* $\mathbb{R}$ *функций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим обратное: уравнение (1.1), кроме решения f, когда оно построено при помощи последовательных приближений (3.1) (см. теорему 3.1), имеет также другое решение $\tilde{f}$ в классе неотрицательных тождественно ненулевых непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций. Используя лемму 2.1, индукцией по n несложно проверить, что

$$\tilde{f}(x) \le f_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

В соотношении (4.1), устремляя число $n \to \infty$, приходим к неравенству

$$\tilde{f}(x) \le f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Так как $\tilde{f}, f \in C(\mathbb{R})$ и $\tilde{f}(x) \not\equiv f(x)$, то в силу (4.2) получаем, что измеримое множество $\mathfrak{M} := \{x \in \mathbb{R} : \tilde{f}(x) < f(x)\}$ имеет положительную меру. С другой стороны, согласно лемме 2.3

$$G(\tilde{f}(x)) - \tilde{f}(x) \in L_1(\mathbb{R}). \tag{4.3}$$

Умножая обе части очевидного соотношения

$$0 \le f(x) - \tilde{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x,t)(G(f(t)) - G(\tilde{f}(t)))d_t F(t-x), \quad x \in \mathbb{R},$$

на функцию $G(\tilde{f}(x)) - \tilde{f}(x)$, при этом принимая во внимание (4.3), условия $a), b)$, I)–III) и используя теорему Тонелли — Фубини, будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} (G(\tilde{f}(x)) - \tilde{f}(x))(f(x) - \tilde{f}(x))dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (G(\tilde{f}(x)) - \tilde{f}(x)) \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x,t)(G(f(t)) - G(\tilde{f}(t)))d_t F(t-x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (G(\tilde{f}(x)) - \tilde{f}(x)) \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x,x+y)(G(f(x+y)) - G(\tilde{f}(x+y)))dF(y)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (G(\tilde{f}(x)) - \tilde{f}(x))\mu(x,x+y)(G(f(x+y)) - G(\tilde{f}(x+y)))dxdF(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (G(\tilde{f}(\tau-y)) - \tilde{f}(\tau-y))\mu(\tau-y,\tau)(G(f(\tau)) - G(\tilde{f}(\tau)))d\tau dF(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (G(f(\tau)) - G(\tilde{f}(\tau))) \int_{-\infty}^{\infty} (G(\tilde{f}(\tau-y)) - \tilde{f}(\tau-y))\mu(\tau-y,\tau)dF(y)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (G(f(\tau)) - G(\tilde{f}(\tau))) \int_{-\infty}^{\infty} (G(\tilde{f}(x)) - \tilde{f}(x))\mu(x,\tau)(-d_x F(\tau-x))d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (G(f(\tau)) - G(\tilde{f}(\tau))) \int_{-\infty}^{\infty} (G(\tilde{f}(x)) - \tilde{f}(x))\mu(x,\tau)d_x F(x-\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (G(f(\tau)) - G(\tilde{f}(\tau))) \int_{-\infty}^{\infty} (G(\tilde{f}(x)) - \tilde{f}(x))\mu(\tau,x)d_x F(x-\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (G(f(\tau)) - G(\tilde{f}(\tau)))\Bigg(\int_{-\infty}^{\infty} G(\tilde{f}(x))\mu(\tau,x)d_x F(x-\tau)$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} (Q(G(\tilde{f}(x)))\mu(\tau,x)d_x F(x-\tau)\Bigg)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (G(f(\tau)) - G(\tilde{f}(\tau)))\Bigg(\tilde{f}(\tau) - \int_{-\infty}^{\infty} (Q(G(\tilde{f}(x)))\mu(\tau,x)d_x F(x-\tau)\Bigg)d\tau,$$

где Q — обратная функция функции G на $\mathbb{R}^+$. Итак, мы получили следующее соотношение:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (G(\tilde{f}(x)) - \tilde{f}(x))(f(x) - \tilde{f}(x))dx$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} (G(f(\tau)) - G(\tilde{f}(\tau)))\Big(\tilde{f}(\tau) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} (Q(G(\tilde{f}(x)))\mu(\tau, x)d_x F(x-\tau)\Big)d\tau. \tag{4.4}$$

Отдельно оценим последний интеграл, используя непрерывный аналог неравенства Йенсена (см. [30]):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (Q(G(\tilde{f}(x)))\mu(t, x)d_x F(x-t)$$

$$\geq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mu(t,x)d_x F(x-t) Q\left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} G(\tilde{f}(x))\mu(t,x)d_x F(x-t)}{\int_{-\infty}^{\infty} \mu(t,x)d_x F(x-t)}\right), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

Обозначим через

$$v_t := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mu(t,x)d_x F(x-t), \quad u_t := \frac{\int_{-\infty}^{\infty} G(\tilde{f}(x))\mu(t,x)d_x F(x-t)}{\int_{-\infty}^{\infty} \mu(t,x)d_x F(x-t)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Из свойств b), I), II), A), B), (4.2) и теоремы 3.1 немедленно следует, что $v_t \in (0,1]$, $u_t \in (0, +\infty)$, $t \in \mathbb{R}$. Ввиду следующего легко проверяемого неравенства для выпуклых функций Q

$$v_t Q(u_t) \geq Q(v_t u_t), \quad t \in \mathbb{R},$$

из (4.5) выводим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} Q(G(\tilde{f}(x)))\mu(t,x)d_x F(x-t) \geq Q\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\tilde{f}(x))\mu(t,x)d_x F(x-t)\Big) = Q(\tilde{f}(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.6}$$

Таким образом, принимая во внимание (4.6), из (4.4) приходим к неравенству

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \big(G(\tilde{f}(x)) - \tilde{f}(x)\big)\big(f(x) - \tilde{f}(x)\big)dx \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} (G(f(t)) - G(\tilde{f}(t)))\big(\tilde{f}(t) - Q(\tilde{f}(t))\big)dt$$

или, что то же самое,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \big\{(G(\tilde{f}(x)) - \tilde{f}(x))(f(x) - \tilde{f}(x)) - (G(f(x)) - G(\tilde{f}(x)))(\tilde{f}(x) - Q(\tilde{f}(x)))\big\}dx \leq 0. \tag{4.7}$$

Согласно оценке (4.2) и определению множества $\mathfrak{M}$ неравенство (4.7) можно переписать в виде

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} \big\{(G(\tilde{f}(x)) - \tilde{f}(x))(f(x) - \tilde{f}(x)) - (G(f(x)) - G(\tilde{f}(x)))(\tilde{f}(x) - Q(\tilde{f}(x)))\big\}dx \leq 0.$$

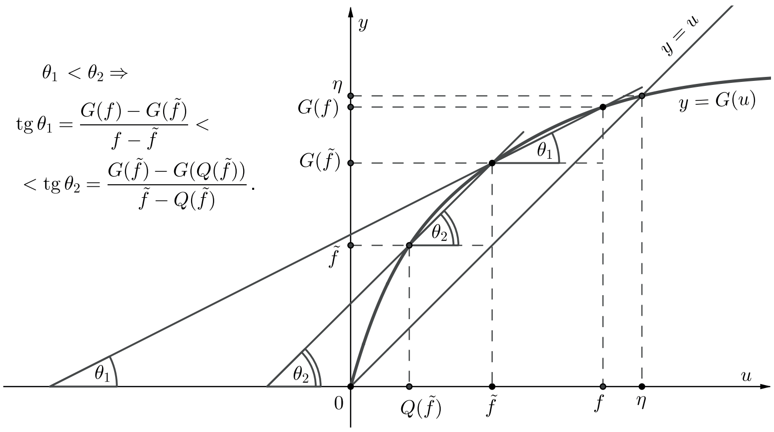

Рис. 3

В силу определения $\mathfrak{M}$ и положительности функции $\tilde f$ (см. лемму 2.2) последнее неравенство можно записать так:

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} (f(x)-\tilde f(x))(\tilde f(x)-Q(\tilde f(x)))\Big(\frac{G(\tilde f(x))-G(Q(\tilde f(x)))}{\tilde f(x)-Q(\tilde f(x))}-\frac{G(f(x))-G(\tilde f(x))}{f(x)-\tilde f(x)}\Big)dx \le 0. \quad (4.8)$$

С другой стороны, в соответствии с условиями A) и B) справедливо строгое неравенство (см. рис. 3)

$$\frac{G(\tilde f(x))-G(Q(\tilde f(x)))}{\tilde f(x)-Q(\tilde f(x))} > \frac{G(f(x))-G(\tilde f(x))}{f(x)-\tilde f(x)}, \quad x\in\mathfrak{M}. \quad (4.9)$$

Так как для всех точек x из $\mathfrak{M}$ выполняются неравенства $f(x) > \tilde f(x)$, $\tilde f(x) > Q(\tilde f(x))$ (ибо $0<\tilde f(x)<f(x)<\eta$, $x\in\mathfrak{M}$), то, учитывая (4.9) в (4.8), получаем противоречие. Следовательно, $f(x)=\tilde f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, и теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Следует отметить, что в том случае, когда предъядро F является абсолютно непрерывной функцией на $\mathbb{R}$, теорема единственности уравнения (1.1) остается справедливой даже в классе неотрицательных тождественно ненулевых и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций, поскольку свертка суммируемой и ограниченной функций непрерывна (см. [31]).

Повторяя рассуждения, аналогично доказательству теоремы 4.1, можно получить следующий результат.

Теорема 4.2. *Пусть* $\mu(x,t)\equiv 1$, $(x,t)\in\mathbb{R}^2$. *Тогда при условиях* I)–III), A) *и* B) *уравнение* (1.1) *в классе неотрицательных тождественно ненулевых непрерывных и ограниченных на* $\mathbb{R}$ *функций, кроме тривиального решения* $f(x)\equiv\eta$, $x\in\mathbb{R}$, *других решений не имеет.*

5. Примеры

В конце работы приведем несколько наглядных примеров функции μ, предъядра F и нелинейности G. Часть приведенных примеров, помимо чисто математического интереса, имеет также прикладное значение в различных областях естествознания. Сперва приведем примеры функции μ:

$m_1)$ $\mu(x,t)=1-e^{-(x^2+t^2)}, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^2,$

$m_2)$ $\mu(x,t)=1-e^{-(|x|+|t|)}, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^2,$

$m_3)$ $\mu(x,t)=1-\dfrac{1}{x^2+t^2+1}, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^2.$

Перейдем теперь к примером предъядра F:

$q_1)$ $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2} dt, \quad x \in \mathbb{R},$

$q_2)$ $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \int_{a}^{b} e^{-|t|s} B(s) ds dt$, где $0 < B \in C[a, b)$, $0 < a < b \leq +\infty$ и $2 \displaystyle\int_{a}^{b} \frac{B(s)}{s} ds = 1.$

Наконец, приведем примеры нелинейности G:

$d_1)$ $G(u) = \sqrt[p]{u}$, $u \in \mathbb{R}^+$, $p > 2$ — нечетное число,

$d_2)$ $G(u) = \dfrac{1}{2}(u + \sqrt[p]{u})$, $u \in \mathbb{R}^+$,

$d_3)$ $G(u) = \gamma(1 - e^{-u^{1/p}})$, $u \in \mathbb{R}^+$, а $\gamma > pe$ — числовой параметр.

Подробно остановимся на примере $d_3)$. Проверка соответствующих условий для примеров $m_1)$–$m_3)$, $q_1), q_2)$, $d_1)$ и $d_2)$ осуществляется легче. Сначала заметим, что для примера $d_3)$ имеют место

$$G(0) = 0, \quad G'(u) = \frac{\gamma}{p} u^{1/p-1} e^{-u^{1/p}} > 0,$$

$$G''(u) = \frac{\gamma}{p^2}(1-p) u^{1/p-2} e^{-u^{1/p}} - \frac{\gamma}{p^2} u^{2/p-2} e^{-u^{1/p}} = \frac{\gamma}{p^2} u^{1/p-2} e^{-u^{1/p}} (1-p-u^{1/p}) < 0, \quad u \in (0, +\infty),$$

ибо $p > 2$. Следовательно, условие A) выполняется. Докажем теперь, что существует $\eta > 0$ такое, что $G(\eta) = \eta$. С этой целью рассмотрим функцию $\mathcal{L}(u) := \gamma(1 - e^{-u^{1/p}}) - u$. Очевидно, что

$$\mathcal{L}(0) = 0, \quad \mathcal{L} \in C(\mathbb{R}^+), \quad \mathcal{L}'(u) = \frac{\gamma}{p} u^{1/p-1} e^{-u^{1/p}} - 1, \quad u \in (0, +\infty),$$

$$\mathcal{L}(+\infty) = -\infty, \quad \mathcal{L}'(1) = \frac{\gamma}{pe} - 1 > 0.$$

Поскольку $\mathcal{L}' \in C(0, +\infty)$, то из приведенных соотношений следует, что существует число $\eta > 1$ такое, что $\mathcal{L}(\eta) = 0$. Единственность положительной неподвижной точки отображения $G(u) = \gamma(1 - e^{-u^{1/p}})$ следует из вогнутости данной функции ($G''(u) < 0$, $u \in (0, +\infty)$). Таким образом, условие B) тоже выполняется. Наконец, проверим условие C). Рассмотрим следующую вспомогательную функцию $\tilde{G}(u) := \gamma(1 - e^{-u})$, $u \in \mathbb{R}^+$. Так как

$$\tilde{G}(0) = 0, \quad \tilde{G}'(u) = \gamma e^{-u} > 0, \quad \tilde{G}''(u) = -\gamma e^{-u} < 0, \quad u \in \mathbb{R}^+, \quad \tilde{\mathcal{L}}(+\infty) = -\infty,$$

где $\tilde{\mathcal{L}}(u) = \gamma(1 - e^{-u}) - u$, $u \in \mathbb{R}^+$, то функция $\tilde{G}(u)$ удовлетворяет условиям A) и B). Заметим теперь, что для всех $a \in [0, 1]$, $b \in [0, +\infty)$ имеет место неравенство: $\tilde{G}(ab) \geq a\tilde{G}(b)$. Действительно, в случаях $a = 0, b = 0$ или $a = 1$ данное нестрогое неравенство автоматически превращается в равенство. Предположим, что $a \in (0, 1)$, $b > 0$. Тогда, используя тот факт, что $\dfrac{\tilde{G}(u)}{u}$ монотонно убывает на $(0, +\infty)$, получим $\dfrac{\tilde{G}(ab)}{ab} > \dfrac{\tilde{G}(b)}{b}$, откуда $\tilde{G}(ab) > a\tilde{G}(b)$. Теперь в качестве функции $\varphi(\sigma)$ выберем $\varphi(\sigma) = \sigma^{1/p}$, $\sigma \in [0, +\infty)$, и проверим выполнение неравенства $G(\sigma u) \geq \varphi(\sigma) G(u)$, $u \in [0, \eta]$, $\sigma \in [0, 1]$. Действительно, учитывая доказанное выше неравенство $\tilde{G}(ab) \geq a\tilde{G}(b)$, $a \in [0, 1]$, $b \geq 0$, будем иметь

$$G(\sigma u) = \tilde{G}((\sigma u)^{1/p}) = \tilde{G}(\varphi(\sigma)\varphi(u)) \geq \varphi(\sigma)\tilde{G}(\varphi(u)) = \varphi(\sigma)\tilde{G}(u^{1/p}) = \varphi(\sigma) G(u),$$

$$u \in [0, +\infty), \quad \sigma \in [0, 1].$$

Следовательно, условие C) выполняется.

З а м е ч а н и е 2. Небезынтересно отметить, что примеры $m_1), m_2), q_1), q_2), d_1)$ и $d_2)$ встречаются в теории p-адических струн и в кинетической теории газов (см. [4–7; 10]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Енгибарян Н.Б.** Уравнения в свертках, содержащие вероятностные распределения // Изв. РАН. Сер. математическая. 1996. Т. 60, № 2. P. 21–48. doi: 10.4213/im70
2. **Spitzer F.** The Wiener-Hopf equation, whose kernel is a probability density // Duke Math. J. 1957. Vol. 24, no. 3. P. 323–343. doi: 10.1215/S0012-7094-57-02439-0
3. **Феллер В.** Введение в теории вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1967.
4. **Владимиров В.С., Волович Я.И.** О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны // Теорет. и мат. физика. 2004. Т. 138, № 3. P. 355–368. doi: 10.4213/tmf36
5. **Владимиров В.С.** Об уравнении p-адической открытой струны для скалярного поля тахионов // Изв. РАН. Сер. математическая. 2005. Т. 69, № 3. P. 55–80. doi: 10.4213/im640
6. **Владимиров В.С.** О нелинейных уравнениях p-адических открытых, замкнутых и открыто-замкнутых струн // Теорет. и мат. физика. 2006. Т. 149, № 3. P. 354–367. doi: 10.4213/tmf5522
7. **Владимиров В.С.** К вопросу несуществования решений уравнений p-адических струн // Теорет. и мат. физика. 2013. Т. 174, № 2. P. 208–215. doi: 10.4213/tmf8390
8. **Жуковская Л.В.** Итерационный метод решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих роллинговые решения в теории струн // Теорет. и мат. физика. 2006. Т. 146, № 3. P. 402–409. doi: 10.4213/tmf2043
9. **Aref'eva I.Ya., Volovich I.V.** Cosmological daemon // J. High Energy Physics. 2011. Vol. 2011, no. 8. Art. no. 102. doi: 10.1007/JHEP08(2011)102
10. **Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А.** О разрешимости нелинейного модельного уравнения Больцмана в задаче плоской ударной волны // Теорет. и мат. физика. 2016. Т. 189, № 2. С. 239–255. doi:10.4213/tmf9108
11. **Cercignani C.** The Boltzmann equation and its applications. NY: Springer-Verlag, 1988. 455 p. doi: 10.1007/978-1-4612-1039-9
12. **Коган М.Н.** Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 p.
13. **Енгибарян Н.Б.** Об одной задаче нелинейного переноса излучения // Астрофизика. 1966. Т. 2, № 1. P. 31–36.
14. **Atkinson C., Reuter G.E.H.** Deterministic epidemic waves // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1976. Vol. 80, no. 2. P. 315–330. doi: 10.1017/S0305004100052944
15. **Diekmann O., Kaper H.G.** On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation // Nonlinear Anal.: Theory, Method and Appl. 1978. Vol. 2, no. 6. P. 721–737. doi: 10.1016/0362-546X(78)90015-9
16. **Diekmann O.** Threshold and travelling waves for the geographical spread of infection // J. Math. Biology. 1978. Vol. 6, no. 2. P. 109–130. doi:10.1007/BF02450783
17. **Law R., Dieckmann U.** Moment approximations of individual-based models // The geometry of ecological interactions: Simplifying spatial complexity / eds. U. Dieckmann, R. Law, J.A.J. Metz. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. P. 252–270. doi: 10.1017/CBO9780511525537.017
18. **Dieckmann U., Law R.** Relaxation projections and the method of moments // The geometry of ecological interactions: Simplifying spatial complexity / eds. U. Dieckmann, R. Law, J.A.J. Metz, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. P. 412–455. doi: 10.1017/CBO9780511525537.025
19. **Давыдов А.А., Данченко В.И., Звягин М.Ю.** Существование и единственность стационарного распределения биологического сообщества // Тр. МИАН. Особенности и приложения: сб. ст. 2009. Т. 267. С. 46–55.
20. **Sargan J.D.** The distribution of wealth // Econometrica. 1957. Vol. 25, no. 4. P. 568–590. doi: 10.2307/1905384
21. **Хачатрян Х.А.** О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории p-адической струны // Изв. РАН. Сер. математическая. 2018. Т. 82, № 2. С. 172–193. doi: 10.4213/im8580
22. **Андриян С.М., Кроян А.К., Хачатрян Х.А.** О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений в p-адической теории струн // Уфим. мат. журн. 2018. Т. 10, № 4. P. 12–23.
23. **Хачатрян Х.А.** О разрешимости одной граничной задачи в p-адической теории струн // Тр. Моск. мат. общества. 2018. Т. 79, № 1. P. 117–132.
24. **Хачатрян Х.А.** Существование и единственность решения одной граничной задачи для интегрального уравнения свертки с монотонной нелинейностью // Изв. РАН. Сер. математическая. 2020. Т. 84, № 4. P. 198–207. doi: 10.4213/im8898

25. **Петросян А.С., Хачатрян Х.А.** О единственности решения одного класса интегральных уравнений с суммарно-разностным ядром и с выпуклой нелинейностью на положительной полупрямой // Мат. заметки. 2023. Т. 113, № 4. P. 529–543. doi: 10.4213/mzm13627
26. **Khachatryan Kh.A., Petrosyan H.S.** On a class of integral equations with convex nonlinearity on semiaxis // J. Contemp. Math. Anal. 2020. Vol. 55. P. 42–53. doi: 10.3103/S1068362320010057
27. **Хачатрян Х.А., Петросян А.С.** О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна — Стилтьеса на всей прямой // Труды МИАН. 2020. Vol. 308. P. 253–264. doi: 10.4213/tm4051
28. **Зорич В.А.** Математический анализ, М.: Наука, 1984. 640 p.
29. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 p.
30. **Rudin W.** Real and complex analysis. NY; London; Hamburg: McGraw-Hill Book Company, 1987. 483 p.
31. **Рудин У.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 450 p.

Поступила 10.01.2024
После доработки 29.01.2024
Принята к публикации 5.02.2024

Хачатрян Агавард Хачатурович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой высшей математики, физики и прикладной механики
Национальный аграрный университет Армении;
Институт математики НАН Армении
г. Ереван
e-mail: Aghavard59@mail.ru

Хачатрян Хачатур Агавардович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой теории функций и дифференциальных уравнений
Ереванский государственный университет;
Институт математики НАН Армении
г. Ереван
e-mail: khachatur.khachatryan@ysu.am

Петросян Айкануш Самвеловна
канд. физ.-мат. наук
доцент кафедры высшей математики, физики и прикладной механики
Национальный аграрный университет Армении
г. Ереван
e-mail: Haykuhi25@mail.ru

REFERENCES

1. Engibaryan N.B. Convolution equations containing singular probability distributions. *Izvestiya: Math.*, 1996, vol. 60, no. 2, pp. 251–279. doi: 10.1070/IM1996v060n02ABEH000070
2. Spitzer F. The Wiener–Hopf equation, whose kernel is a probability density. *Duke Math. J.*, 1957, vol. 24, no. 3,pp. 327–343. doi: 10.1215/S0012-7094-57-02439-0
3. Feller W. *An introduction to probability theory and its applications*, vol. 2, John Wiley & Sons, 1966, 626 p. Translated to Russian under the title *Vvedenie v teoriyu veroyatnostei i ee prilozheniya*, vol. 2, Moscow, Mir Publ., 1967.
4. Vladimirov V.S., Volovich Ya.I. Nonlinear dynamics equation in p-adic string theory. *Theoret. and Math. Phys.*, 2004, vol. 138, no. 3, pp. 297–309. doi: 10.1023/B:TAMP.0000018447.02723.29
5. Vladimirov V.S. The equation of the p-adic open string for the scalar tachyon field. *Izvestiya: Math.*, 2005, vol. 69, no. 3, pp. 487–512. doi: 10.1070/IM2005v069n03ABEH000536
6. Vladimirov V.S. Nonlinear equations for p-adic open, closed, and open-closed strings. *Theoret. and Math. Phys.*, 2006, vol. 149, no. 3, pp. 1604–1616. doi: 10.1007/s11232-006-0144-z

7. Vladimirov V.S. Nonexistence of solutions of the p-adic strings. *Theoret. and Math. Phys.*, 2013, vol. 174, no. 2, pp. 178–185. doi: 10.1007/s11232-013-0015-3
8. Zhukovskaya L.V. Iterative method for solving nonlinear integral equations describing rolling solutions in string theory. *Theoret. and Math. Phys.*, 2006, vol. 146, no. 3, pp. 335–342. doi: 10.1007/s11232-006-0043-3
9. Aref'eva I.Ya., Volovich I.V. Cosmological daemon. *J. High Energy Physics*, 2011, vol. 2011, no. 8, art. no. 102. doi: 10.1007/JHEP08(2011)102
10. Khachatryan A.Kh., Khachatryan Kh.A. Solvability of a nonlinear model Boltzmann equation in the problem of a plane shock wave. *Theoret. and Math. Phys.*, 2016, vol. 189, no. 2, pp. 1609–1623. doi: 10.1134/S0040577916110064
11. Cercignani C. *The Boltzmann equation and its applications*, NY, Springer-Verlag, 1988, 455 p. doi: 10.1007/978-1-4612-1039-9 .
12. Kogan M.N. *Rarefied gas dynamics*, New York, Springer, 1969, 515 p. doi: 10.1007/978-1-4899-6381-9 . Original Russian text published in Kogan M.N., *Dinamika razrezhennogo gaza*, Moscow, Nauka Publ., 1967, 440 p.
13. Engibaryan N.B. On a problem in nonlinear radiative transfer. *Astrophysics*, 1966, vol. 2, no. 1, pp. 12–14. doi: 10.1007/bf01014505
14. Atkinson C., Reuter G.E.H. Deterministic epidemic waves. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1976, vol. 80, no. 2, pp. 315–330. doi: 10.1017/S0305004100052944
15. Diekmann O., Kaper H.G. On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation. *Nonlinear Anal.: Theory, Method and Appl.*, 1978, vol. 2, no. 6, pp. 721–737. doi: 10.1016/0362-546X(78)90015-9
16. Diekmann O. Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection. *J. Math. Biology,* 1978, vol. 6, no. 2, pp. 109–130. doi:10.1007/BF02450783
17. Law R., Dieckmann U. *Moment approximations of individual-based models.* In: *The geometry of ecological interactions: Simplifying spatial complexity*, eds. U.Dieckmann, R.Law, J.A.J.Metz, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2000, pp. 252–270. doi: 10.1017/CBO9780511525537.017
18. Dieckmann U., Law R. *Relaxation projections and the method of moments.* In: *The geometry of ecological interactions: Simplifying spatial complexity*, eds. U.Dieckmann, R.Law, J.A.J.Metz, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2000, pp. 412–455. doi: 10.1017/CBO9780511525537.025
19. Davydov A.A., Danchenko V.I., Zvyagin M.Yu. Existence and uniqueness of a stationary distribution of a biological community. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2009, vol. 267, pp. 40–49. doi: 10.1134/S0081543809040038
20. Sargan J.D. The distribution of wealth. *Econometrica*, 1957, vol. 25, no. 4, pp. 568–590. doi: 10.2307/1905384
21. Khachatryan Kh.A. On the solubility of certain classes of non-linear integral equations in p-adic string theory. *Izvestiya: Math.*, 2018, vol. 82, no. 2, pp. 407–427. doi: 10.1070/IM8580
22. Andriyan S.M., Kroyan A.K., Khachatryan Kh.A. On solvability of class of nonlinear integral equations in p-adic string theory. *Ufa Math. J.*, 2018, vol. 10, no. 4, pp. 12–23. doi: 10.13108/2018-10-4-12
23. Khachatryan Kh.A. On the solvability of a boundary value problem in p-adic string theory. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2018, pp. 101–115. doi: 10.1090/mosc/281
24. Khachatryan Kh.A. Existence and uniqueness of solution of a certain boundary-value problem for a convolution integral equation with monotone non-linearity. *Izvestiya: Math.*, 2020, vol. 84, no. 4, pp. 807–815. doi: 10.1070/IM8898
25. Petrosyan H.S., Khachatryan Kh.A. Uniqueness of the solution of a class of integral equations with sum-difference kernel and with convex nonlinearity on the positive half-line. *Math. Notes*, 2023, vol. 113, no. 4, pp. 512–524. doi: 10.1134/S0001434623030239
26. Khachatryan Kh.A., Petrosyan H.S. On a class of integral equations with convex nonlinearity on semiaxis. *J. Contemp. Math. Anal.*, 2020, vol. 55, pp. 42–53. doi: 10.3103/S1068362320010057
27. Khachatryan Kh.A., Petrosyan H.S. On the solvability of a class of nonlinear Hammerstein–Stieltjes integral equations on the whole line. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2020, vol. 308, pp. 238–249. doi: 10.1134/S0081543820010198
28. Zorich V.A. *Mathematical analysis.* Vol. 1: Berlin, Heidelberg, Springer, 2004, 574 p. ISBN: 978-3-540-87451-5 . Vol. 2: Berlin, Heidelberg, Springer, 2016, 720 p. doi: 10.1007/978-3-662-48993-2 . Original Russian text published in Zorich V.A., *Matematicheskii analiz*, Moscow, Nauka Publ., 1984, 640 p.

29. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis*, vol. 1, 2, Mineola, New York, Dover Publ., 1999, 288 p. ISBN: 0486406830 . Original Russian text published in Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza*, Moscow, Nauka Publ., 1976, 544 p.
30. Rudin W. *Real and complex analysis*, New York, London, Hamburg, McGraw-Hill Book Company, 1987, 483 p. ISBN: 978-0070542341 .
31. Rudin W. *Functional analysis*, New York, McGraw-Hill Book Company, 1973, 407 p. Translated to Russian under the title *Funktsional'nyi analiz*, Moscow, Mir Publ., 1975, 450 p.

Received January 10, 2024
Revised January 29, 2024
Accepted February 5, 2024

Funding Agency: The research of the first and third authors was supported by the Science Committee of the Ministry of Education, Science, Culture, and Sport of the Republic of Armenia (project no. 21T-1A047). The research of second author was supported by the Science Committee of the Ministry of Education, Science, Culture, and Sport of the Republic of Armenia (project no. 23RL-1A027).

Aghavard Khachaturovich Khachatryan, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Armenian National Agrarian University, 0009, Yerevan; Institute of Mathematics NAS, 0019, Yerevan, Republic of Armenia, e-mail: aghavard59@mail.ru .

Khachatur Aghavardovich Khachatryan, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Yerevan State University, 0025, Yerevan; Institute of Mathematics NAS, 0019, Yerevan, Republic of Armenia,
e-mail: khachatur.khachatryan@ysu.am .

Haykanush Samvelovna Petrosyan, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Armenian National Agrarian University, 0009, Yerevan, Republic of Armenia, e-mail: Haykuhi25@mail.ru .

Cite this article as: A. Kh. Khachatryan, Kh. A. Khachatryan, H. S. Petrosyan. Questions of existence, absence, and uniqueness of a solution to one class of nonlinear integral equations on the whole line with an operator of Hammerstein–Stieltjes type. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 1, pp. 249–269 .