ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 1 2024

УДК 517.977.1

ПРОДОЛЖИМОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ КВАДРАТИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Е. Н. Хайлов

В работе рассматриваются задачи минимизации со свободным правым концом на заданном отрезке времени для управляемых аффинных систем дифференциальных уравнений. Для такого класса задач исследуется оценка числа различных нулей функций переключений, определяющих вид соответствующих оптимальных управлений. В основе такого исследования лежит анализ неавтономных линейных систем дифференциальных уравнений для функций переключений и отвечающих им вспомогательных функций. Подробно рассматриваются неавтономные линейные системы третьего порядка. В них выполняется замена переменных, которая преобразует матрицу такой системы к специальному верхне-треугольному виду, что позволяет, привлекая обобщенную теорему Ролля, оценить число нулей соответствующих функций переключений. В случае линейной системы третьего порядка это преобразование осуществляется с помощью функций, удовлетворяющих неавтономной системе квадратичных дифференциальных уравнений того же порядка. В работе представлены два подхода, обеспечивающие продолжимость решений неавтономной системы квадратичных дифференциальных уравнений на заданный отрезок времени. Первый подход использует дифференциальные неравенства и теорему сравнения Чаплыгина. Второй подход сочетает расщепление неавтономной системы квадратичных дифференциальных уравнений на подсистемы более низкого порядка с применением условия квазиположительности к этим подсистемам.

Ключевые слова: функция переключений, обобщенная теорема Ролля, неавтономная система квадратичных дифференциальных уравнений, продолжимость решений, условие квазиположительности решений.

E. N. Khailov. Extensibility of solutions of non-autonomous systems of quadratic differential equations and their application in optimal control problems.

The paper considers minimization problems with a free right endpoint on a given time interval for control affine systems of differential equations. For this class of problems, we study an estimate for the number of different zeros of switching functions that determine the form of the corresponding optimal controls. This study is based on the analysis of non-autonomous linear systems of differential equations for switching functions and the corresponding auxiliary functions. Non-autonomous linear systems of third order are considered in detail. In these systems, the variables are changed so that the matrix of the system is transformed to a special upper triangular form. As a result, the number of zeros of the corresponding switching functions is estimated using the generalized Rolle's theorem. In the case of a linear system of third order, this transformation is carried out using functions that satisfy a non-autonomous system of quadratic differential equations of the same order. The paper presents two approaches that ensure the extensibility of solutions to a non-autonomous system of quadratic differential equations to a given time interval. The first approach uses differential inequalities and Chaplygin's comparison theorem. The second approach combines splitting a non-autonomous system of quadratic differential equations into subsystems of lower order and applying the quasi-positivity condition to these subsystems.

Keywords: switching function, generalized Rolle's theorem, non-autonomous system of quadratic differential equations, extensibility of solutions, condition for quasi-positivity of solutions.

MSC: 34H05, 49K15, 92C50, 92D30, 93C10

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-1-237-248

Введение

В задаче минимизации со свободным правым концом на заданном отрезке времени для управляемой аффинной системы дифференциальных уравнений изучение управлений, определяемых из принципа максимума Понтрягина ([1–3]), тесно связано с анализом неавтономной линейной системы дифференциальных уравнений для функции переключений и отвечающих ей вспомогательных функций. Эти функции непосредственно зависят от решений соответствующей сопряженной системы. Считая, что условие максимума почти всюду однозначно определяет такие управления, можно говорить о том, что функции переключений полностью задают вид оптимальных управлений ([1–3]).

В свою очередь, исследование поведения функции переключений связано с оценкой количества ее различных нулей на заданном отрезке времени. А это напрямую зависит от возможности приведения с помощью замены переменных матрицы упомянутой неавтономной линейной системы дифференциальных уравнений к специальному верхне-треугольному виду ([4;5]). Функции, осуществляющие такую замену переменных, удовлетворяют неавтономной системе квадратичных дифференциальных уравнений, а потому определены лишь локально, в окрестности заданного начального условия. Поэтому важным является продолжимость решения такой системы квадратичных уравнений из некоторой окрестности начального условия на заданный отрезок времени. Это связано с тем, что применение обобщенной теоремы Ролля к преобразованной неавтономной линейной системе дифференциальных уравнений дает оценку числа нулей соответствующей функции переключений.

В связи с этим выделим работу [6], в которой приведено утверждение, гарантирующее существование решения неавтономной системы квадратичных дифференциальных уравнений, определенного на заданном отрезке времени. Обоснование этого утверждение использует дифференциальные неравенства и теорему сравнения Чаплыгина. В настоящей работе приводится формулировка такого утверждения и отмечается его применимость при анализе неавтономных линейных систем дифференциальных уравнений для функций переключений и отвечающих им вспомогательных функций в различных задачах минимизации из эпидемиологии.

Кроме того, в настоящей работе описывается новый подход, обосновывающий продолжимость решений неавтономной системы квадратичных дифференциальных уравнений на заданный отрезок времени. Он основан на сочетании расщепления этой системы квадратичных уравнений на подсистемы меньшей размерности и применения условия квазиположительности к этим подсистемам. Также указывается применимость данного подхода при анализе неавтономных линейных систем дифференциальных уравнений для функций переключений и отвечающих им вспомогательных функций в различных задачах минимизации из медицины.

1. Функции переключений в задачах оптимального управления

На заданном отрезке времени $[0,T]$ рассмотрим управляемую систему:

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) + \sum\limits_{i=1}^{m} u_i(t) g_i(x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ — траектория системы (1.1), которая удовлетворяет включению

$$x(t) \in G \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in [0,T]. \tag{1.2}$$

Здесь G — открытое ограниченное множество из $\mathbb{R}^n$. Компоненты вектор-функций $f(x)$ и $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, мы считаем бесконечно дифференцируемыми на множестве G. В прикладных задачах в роли G наиболее часто выступают следующие множества:

$$\Big\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 < x_1 < x_1^{\max},\ 0 < x_2 < x_2^{\max},\ \ldots,\ 0 < x_n < x_n^{\max} \Big\},$$

$$\Big\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ \ldots,\ x_n > 0,\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n < M \Big\},$$

где $x_i^{\max}$, $i = 1, \ldots, n$, и M — заданные константы.

Для управляемой системы (1.1) включение (1.2) обычно устанавливается заранее, на основе анализа ее дифференциальных уравнений. Это включение важно для системы (1.1), поскольку показывает физичность ее переменных $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, а также корректность записи ее уравнений. Кроме того, включение (1.2) гарантирует существование решения $x(t)$ такой системы на всем отрезке $[0, T]$.

В системе (1.1) также присутствуют управляющие функции $u_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$, удовлетворяющие ограничениям

$$0 \leq u_i^{\min} \leq u_i(t) \leq u_i^{\max}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad t \in [0, T]. \tag{1.3}$$

Мы предполагаем, что множество допустимых управлений $\Omega(T)$ состоит из всевозможных совокупностей управлений $(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t))$, компоненты $u_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$, которых являются измеримыми по Лебегу функциями и при почти всех $t \in [0, T]$ подчиняются соответствующим ограничениям (1.3).

З а м е ч а н и е 1. Компоненты $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, решения $x(t)$ системы (1.1), отвечающего совокупности управлений $(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t))$ из $\Omega(T)$, являются абсолютно непрерывными функциями.

К управляемой системе (1.1) мы добавляем целевую функцию

$$J(u_1, u_2, \ldots, u_m) = g_0(x(T)) + \int_0^T \Big(f_0(x(t)) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) b_i(x(t)) \Big) dt, \tag{1.4}$$

где функции $b_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, а также $f_0(x)$ и $g_0(x)$ бесконечно дифференцируемы на множестве G. Для целевой функции (1.4) мы ставим задачу оптимального управления, заключающуюся в минимизации этой функции на множестве допустимых управлений $\Omega(T)$:

$$J(u_1, u_2, \ldots, u_m) \to \min_{(u_1(\cdot), u_2(\cdot), \ldots, u_m(\cdot)) \in \Omega(T)} \tag{1.5}$$

Особенности задачи минимизации (1.5) вместе с теоремой 4 из ([3], гл. 4) гарантируют существование оптимального решения, состоящего из совокупности $(u_1^*(t), u_2^*(t), \ldots, u_m^*(t))$ оптимальных управлений и отвечающего ей оптимального решения $x_*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t), \ldots, x_n^*(t))$ системы (1.1).

Для анализа оптимального решения применим принцип максимума Понтрягина (теорема 1, гл. 6, [2]) как необходимое условие оптимальности. Для этого сначала выпишем отвечающую задаче (1.5) функцию Гамильтона

$$H(x, \psi, u) = \langle f(x), \psi \rangle + \sum_{i=1}^{m} u_i \langle g_i(x), \psi \rangle - \Big(f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i(x) \Big),$$

где $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ — вектор сопряженных переменных, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ — вектор управлений, а $\langle r, s \rangle$ — скалярное произведение векторов r и s из $\mathbb{R}^n$. Затем вычислим необходимые частные производные этой функции:

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, \psi, u) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial g_i}{\partial x}(x) \Big)^{\top} \psi - \Big(\frac{\partial f_0}{\partial x}(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial b_i}{\partial x}(x) \Big),$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_i}(x, \psi, u) = \langle g_i(x), \psi \rangle - b_i(x), \quad i = 1, \ldots, m.$$

Здесь $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x)$, $\dfrac{\partial g_i}{\partial x}(x)$, $i = 1, \ldots, m$, — квадратные матрицы порядка $n \times n$; $\dfrac{\partial f_0}{\partial x}(x)$, $\dfrac{\partial b_i}{\partial x}(x)$, $i = 1, \ldots, m$ — вектор-столбцы порядка n. Знак $^{\top}$ означает транспонирование.

Тогда согласно принципу максимума Понтрягина для совокупности оптимальных управлений $u_*(t) = (u_1^*(t), u_2^*(t), \ldots, u_m^*(t))$ и оптимальной траектории $x_*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t), \ldots, x_n^*(t))$ существует такая сопряженная функция $\psi_*(t) = (\psi_1^*(t), \psi_2^*(t), \ldots, \psi_n^*(t))$, что

- функция $\psi_*(t)$ является абсолютно непрерывным нетривиальным решением сопряженной системы

$$\begin{cases} \psi_*'(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(x_*(t), \psi_*(t), u_*(t)) \\ \qquad = -\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_*(t)) + \sum\limits_{i=1}^{m} u_i^*(t)\dfrac{\partial g_i}{\partial x}(x_*(t))\right)^{\top} \psi_*(t) \\ \qquad\quad + \left(\dfrac{\partial f_0}{\partial x}(x_*(t)) + \sum\limits_{i=1}^{m} u_i^*(t)\dfrac{\partial b_i}{\partial x}(x_*(t))\right), \\ \psi_*(T) = -\dfrac{\partial g_0}{\partial x}(x_*(T)), \end{cases} \tag{1.6}$$

где $\dfrac{\partial g_0}{\partial x}(x)$ — вектор-столбец порядка n;

- оптимальные управления $u_i^*(t)$, $i = 1, \ldots, m$, доставляют максимум функции Гамильтона $H(x_*(t), \psi_*(t), u)$ по переменным u_i, $i = 1, \ldots, m$, удовлетворяющим ограничениям (1.3). Тогда для этих управлений справедливы соотношения

$$u_i^*(t) = \begin{cases} u_i^{\max}, & \text{если} \quad L_i(t) > 0, \\ \text{любое } u \in [u_i^{\min}, u_i^{\max}], & \text{если} \quad L_i(t) = 0, \\ u_i^{\min}, & \text{если} \quad L_i(t) < 0, \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{1.7}$$

где отвечающие управлениям $u_i^*(t)$, $i = 1, \ldots, m$, абсолютно непрерывные функции

$$L_i(t) = \langle g_i(x_*(t)), \psi_*(t) \rangle - b_i(x_*(t)), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1.8}$$

являются функциями переключений. Они описывают поведение соответствующих оптимальных управлений $u_i^*(t)$, $i = 1, \ldots, m$, согласно формулам (1.7).

В результате образуется двух-точечная краевая задача принципа максимума, состоящая из систем (1.1) и (1.6), а также соотношений (1.7).

Анализ формул (1.7) и (1.8) определяет свойства оптимальных управлений $u_i^*(t)$, $i = 1, \ldots, m$, и особенности отвечающих им функций переключений $L_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$ ([7], гл. 2). А именно, управления $u_i^*(t)$, $i = 1, \ldots, m$, могут иметь только релейный вид и переключаться между соответствующими значениями $u_i^{\min}$ и $u_i^{\max}$, $i = 1, \ldots, m$. Это происходит, когда при прохождении через точки, в которых функции переключений $L_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$, обращаются в нуль, знак этих функций изменяется. Такие точки называются переключениями. Или в дополнение к участкам, на которых управления $u_i^*(t)$, $i = 1, \ldots, m$, являются релейными функциями, они могут также содержать так называемые особые режимы. Это возникает, когда функции переключений $L_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$, по отдельности или несколько одновременно равны тождественно нулю на некоторых интервалах отрезка $[0, T]$, называемых особыми участками.

Будем предполагать, что функция переключений $L_i(t)$ не обращается тождественно в нуль ни на каком интервале отрезка $[0, T]$. Тогда возможно ее обращение в нуль только в отдельных точках, слева и справа от которых на интервалах ненулевой длины она принимает значения разных знаков. Соответственно возникает вопрос об оценке числа различных нулей функции переключений $L_i(t)$ на интервале $(0, T)$. В свою очередь, это приводит к нахождению соответствующей оценки числа переключений управления $u_i^*(t)$ на данном интервале. Обсуждению того, каким образом это можно сделать, и посвящена настоящая статья.

З а м е ч а н и е 2. Иногда ввиду положительности компонент $x_i^*(t)$, $i = 1, \ldots, n$, решения $x_*(t)$, функция переключений $L_i(t)$ допускает представление $L_i(t) = d_i(t)\widetilde{L}_i(t)$, где функция $d_i(t)$ положительна и непрерывна на отрезке $[0, T]$. Тогда удобно ввести новую функцию переключений $\widetilde{L}_i(t)$ и для нее проводить дальнейшие рассуждения, поскольку функции $L_i(t)$ и $\widetilde{L}_i(t)$ одновременно обращаются в нуль и синхронно изменяют свои знаки.

Для функции переключений $L_i(t)$ путем ее дифференцирования с использованием соответствующих уравнений систем (1.1) и (1.6) можно получить систему дифференциальных уравнений, которая будет неавтономной линейной системой дифференциальных уравнений для функции $L_i(t)$ и отвечающих ей некоторых вспомогательных функций. Наличие такой системы является существенной особенностью задачи минимизации (1.5) при оценке числа различных нулей функции переключений $L_i(t)$.

Дальнейшие рассуждения о том, каким образом можно оценивать число различных нулей функции переключений $L_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, справедливы для каждой такой функции. А потому для упрощения этих рассуждений мы опустим индекс i в $L_i(t)$ и рассмотрим случай $n = 3$.

2. Системы трех дифференциальных уравнений для функций переключений

На заданном отрезке времени $[0, T]$ рассмотрим неавтономную линейную систему дифференциальных уравнений для функции переключений $L(t)$ и отвечающих ей двух вспомогательных функций $G(t)$ и $P(t)$:

$$\begin{cases} L'(t) = a_1(t)L(t) + b_1(t)G(t), \\ G'(t) = a_2(t)L(t) + b_2(t)G(t) + c_2(t)P(t), \\ P'(t) = a_3(t)L(t) + b_3(t)G(t) + c_3(t)P(t), \end{cases} \tag{2.1}$$

где $a_i(t)$ и $b_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, $c_i(t)$, $i = 2, 3$, — заданные измеримые по Лебегу ограниченные функции. Также мы считаем, что функции $b_1(t)$ и $c_2(t)$ положительны почти всюду на интервале $(0, T)$.

Для оценки числа различных нулей функции $L(t)$ используем преобразование системы (2.1), предложенное в [4; 5]. Оно заключается в приведении матрицы этой системы к следующему верхне-треугольному виду:

$$\begin{pmatrix} a_1(t) & b_1(t) & 0 \\ a_2(t) & b_2(t) & c_2(t) \\ a_3(t) & b_3(t) & c_3(t) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

где “$*$” обозначены ненулевые элементы матрицы. Для этого выполним в системе (2.1) невырожденную замену переменных:

$$\widetilde{L}(t) = L(t), \quad \widetilde{G}(t) = G(t) + h_1(t)L(t), \quad \widetilde{P}(t) = P(t) + h_2(t)L(t) + h_3(t)G(t),$$

где функции $h_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, удовлетворяют неавтономной системе квадратичных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} h_1'(t) = b_1(t)h_1^2(t) - c_2(t)h_1(t)h_3(t) + (b_2(t) - a_1(t))h_1(t) + c_2(t)h_2(t) - a_2(t), \\ h_2'(t) = c_2(t)h_2(t)h_3(t) + (c_3(t) - a_1(t))h_2(t) - a_2(t)h_3(t) - a_3(t), \\ h_3'(t) = c_2(t)h_3^2(t) - b_1(t)h_2(t) + (c_3(t) - b_2(t))h_3(t) - b_3(t). \end{cases} \tag{2.2}$$

Добавим к системе (2.2) начальные условия

$$h_i(0) = h_i^0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.3}$$

Тогда в силу теоремы существования и единственности решения задачи Коши (теорема 1.1 [8]), соответствующее решение $h(t) = (h_1(t), h_2(t), h_3(t))$ системы (2.2), (2.3) будет определено на полуинтервале $[0, t_{\max})$, который является максимально возможным полуинтервалом существования такого решения, и либо $t_{\max} = +\infty$, либо $t_{\max} < +\infty$. При этом всюду на $[0, t_{\max})$ система (2.1) преобразуется к системе требуемого вида:

$$\begin{cases} \widetilde{L}'(t) = (a_1(t) - b_1(t)h_1(t))\widetilde{L}(t) + b_1(t)\widetilde{G}(t), \\ \widetilde{G}'(t) = (b_2(t) + b_1(t)h_1(t) - c_2(t)h_3(t))\widetilde{G}(t) + c_2(t)\widetilde{P}(t), \\ \widetilde{P}'(t) = (c_3(t) + c_2(t)h_3(t))\widetilde{P}(t). \end{cases} \tag{2.4}$$

Рассуждения от противного в такой системе и одновременное использование в первых двух ее уравнениях обобщенной теоремы Ролля [4; 5] приводят к заключению о том, что на полуинтервале $[0, t_{\max})$ функция переключений $L(t) = \widetilde{L}(t)$ имеет не более двух различных нулей. Поскольку хотелось бы иметь такую оценку числа нулей функции $L(t)$ не на полуинтервале $[0, t_{\max})$, а на отрезке $[0, T]$ (при этом, может оказаться так, что $t_{\max} \leq T$), то необходимо иметь утверждение о существовании решения $h(t) = (h_1(t), h_2(t), h_3(t))$ системы (2.2), (2.3), которое было бы определено на всем отрезке $[0, T]$.

Замечание 3. Эти рассуждения одновременно означают продолжимость решения $h(t) = (h_1(t), h_2(t), h_3(t))$ системы (2.2), (2.3) с полуинтервала $[0, t_{\max})$ на заданный отрезок $[0, T]$ в ситуации, когда $t_{\max} \leq T$.

3. Теорема сравнения Чаплыгина

В упомянутой работе [6] утверждение о существовании решения $h(t) = (h_1(t), h_2(t), h_3(t))$ системы (2.2), (2.3), которое было бы определено на всем отрезке $[0, T]$, было доказано в виде теоремы 1. Чтобы его сформулировать, запишем систему (2.2) в векторном виде. Введем симметричные матрицы

$$Q_1(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) & 0 & -0.5c_2(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.5c_2(t) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; Q_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5c_2(t) \\ 0 & 0.5c_2(t) & 0 \end{pmatrix}, \; Q_3(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2(t) \end{pmatrix},$$

вектор-функции

$$d_1(t) = \begin{pmatrix} b_2(t) - a_1(t) \\ c_2(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \; d_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c_3(t) - a_1(t) \\ -a_2(t) \end{pmatrix}, \; d_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -b_1(t) \\ c_3(t) - b_2(t) \end{pmatrix},$$

и скалярные функции

$$f_1(t) = -a_2(t), \quad f_2(t) = -a_3(t), \quad f_3(t) = -b_3(t).$$

Тогда система (2.2) перепишется в виде

$$\begin{cases} h_1'(t) = \langle Q_1(t)h(t), h(t)\rangle + \langle d_1(t), h(t)\rangle + f_1(t), \\ h_2'(t) = \langle Q_2(t)h(t), h(t)\rangle + \langle d_2(t), h(t)\rangle + f_2(t), \\ h_3'(t) = \langle Q_3(t)h(t), h(t)\rangle + \langle d_3(t), h(t)\rangle + f_3(t). \end{cases} \tag{3.1}$$

Также считаем положительные константы $A_{\max}$, $B_{\max}$, $C_{\max}$ оценками соответствующих величин $Q_i(t)$, $d_i(t)$, $f_i(t)$, $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \sqrt{(q_1(t))^2 + (q_2(t))^2 + (q_3(t))^2} &\leq A_{\max}, \\ \sqrt{||d_1(t)||^2 + ||d_2(t)||^2 + ||d_3(t)||^2} &\leq B_{\max}, \\ \sqrt{(f_1(t))^2 + (f_2(t))^2 + (f_3(t))^2} &\leq C_{\max}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $q_i(t)$ — наибольшее по модулю собственное значение матрицы $Q_i(t)$, $i = 1, 2, 3$. Кроме того, $||p||$ — евклидова норма вектора $p \in \mathbb{R}^3$.

З а м е ч а н и е 4. При получении системы (2.1) в каждом конкретном примере можно видеть, что функция переключений $L(t)$ и отвечающие ей вспомогательные функции $G(t)$ и $P(t)$ выражаются в первую очередь через компоненты сопряженной функции $\psi_*(t)$ и, может быть, через компоненты оптимального решения $x_*(t)$. Функции $a_i(t)$ и $b_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, $c_i(t)$, $i = 2, 3$, задаются также с помощью компонент оптимального решения $x_*(t)$ и, может быть, оптимальных управлений $u_i^*(t)$, $i = 1, \ldots, m$. Поэтому при нахождении констант $A_{\max}$, $B_{\max}$, $C_{\max}$ в соотношениях (3.2) для оценки функций $a_i(t)$ и $b_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, $c_i(t)$, $i = 2, 3$, используются включение (1.2), справедливое для компонент $x_i^*(t)$, $i = 1, \ldots, n$, оптимального решения $x_*(t)$ и неравенства (1.3), которые выпоняются для оптимальных управлений $u_i^*(t)$, $i = 1, \ldots, m$.

В результате требуемое утверждение формулируется следующим образом.

Теорема 1. *Пусть для системы уравнений* (3.1) *неравенства* (3.2) *выполняются при всех* $t \in [0, T]$. *Более того, величины* $A_{\max}$, $B_{\max}$, $C_{\max}$ *удовлетворяют соотношению*

$$(B_{\max})^2 - 4A_{\max}C_{\max} > 0.$$

Тогда существует решение $h_\star(t) = (h_1^\star(t), h_2^\star(t), h_3^\star(t))$ *системы* (3.1), (2.3), *которое определено на всем отрезке* $[0, T]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы использует дифференциальные неравенства и теорему сравнения Чаплыгина (теорема 16.2 [9]).

Из теоремы 1 следует, что система (2.4), в которой использованы функции $h_i^\star(t)$, $i = 1, 2, 3$, также определена на всем отрезке $[0, T]$. Это означает, что функция переключений $L(t)$ имеет не более двух различных нулей на отрезке времени $[0, T]$.

З а м е ч а н и е 5. Применение теоремы 1 при анализе неавтономных линейных систем дифференциальных уравнений для функций переключений и отвечающих им вспомогательных функций в различных задачах минимизации (1.5) из эпидемиологии демонстрируется в [10–13]. Другие задачи оптимального управления, возникающие в математических моделях эпидемиологии, представлены, например, в [14; 15].

4. Расщепление и условие квазиположительности

Существование решения $h_\star(t) = (h_1^\star(t), h_2^\star(t), h_3^\star(t))$ системы (2.2), (2.3) или, что то же самое, системы (3.1), (2.3), определенного на всем отрезке $[0, T]$, можно обосновать и другим способом, не привлекая теорему 1. Соответствующие рассуждения проводятся следующим образом. Сначала мы расщепим неавтономную систему квадратичных дифференциальных уравнений (2.2) на две подсистемы меньшей размерности. Для этого заметим, что второе и третье уравнения этой системы не содержат переменную $h_1(t)$. Поэтому такие уравнения вместе с соответствующими начальными условиями из (2.3) будут образовывать первую подсистему квадратичных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} h_2'(t) = c_2(t)h_2(t)h_3(t) + (c_3(t) - a_1(t))h_2(t) - a_2(t)h_3(t) - a_3(t), \\ h_3'(t) = c_2(t)h_3^2(t) - b_1(t)h_2(t) + (c_3(t) - b_2(t))h_3(t) - b_3(t), \\ h_2(0) = h_2^0, \ h_3(0) = h_3^0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Затем в первом уравнении системы (2.2) мы введем новую переменную $h_0(t)$ по формуле

$$h_0(t) = h_1(t)h_3(t) - h_2(t). \tag{4.2}$$

После чего найдем дифференциальное уравнение для функции $h_0(t)$. В результате, добавляя соответствующие начальные условия из (2.3) и (4.2), мы получаем вторую подсистему квадратичных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} h_0'(t) = b_1(t)h_0(t)h_1(t) + (c_3(t) - a_1(t))h_0(t) - b_3(t)h_1(t) + a_3(t), \\ h_1'(t) = b_1(t)h_1^2(t) - c_2(t)h_0(t) + (b_2(t) - a_1(t))h_1(t) - a_2(t), \\ h_0(0) = h_0^0 = h_1^0 h_3^0 - h_2^0,\ h_1(0) = h_1^0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Таким образом, выполнив расщепление системы (2.2), (2.3), мы перешли от этой системы уравнений к двум подсистемам (4.1) и (4.3).

Теперь, наоборот, предположим, что имеем две подсистемы (4.1) и (4.3). Покажем, что справедливо связующее равенство (4.2). Для этого введем функцию

$$m(t) = h_1(t)h_3(t) - h_2(t) - h_0(t).$$

Из начальных условий подсистем (4.1) и (4.3) следует, что $m(0) = 0$. Кроме того, используя уравнения этих подсистем, мы находим линейное однородное дифференциальное уравнение для этой функции

$$m'(t) = \big(b_1(t)h_1(t) + c_2(t)h_3(t) + (c_3(t) - a_1(t))\big)m(t).$$

Нулевое начальное условие немедленно приводит к тому, что $m(t) = 0$ всюду, где одновременно определены решения $h_0(t)$, $h_1(t)$ подсистемы (4.3) и решения $h_2(t)$, $h_3(t)$ подсистемы (4.1). Это означает выполнение связующего равенства (4.2). Подстановка этого равенства во второе уравнение подсистемы (4.3) и добавление уравнений подсистемы (4.1) приводит нас к исходной системе (2.2), (2.3).

Проведенные рассуждения показывают, что система (2.2), (2.3) эквивалентна двум подсистемам (4.1) и (4.3) в том смысле, что эта система, к которой мы добавляем связующее уравнение (4.2), имеет те же решения, что и подсистемы (4.1) и (4.3). Поэтому далее важно исследовать эти подсистемы, поскольку анализ двух подсистем второго порядка легче, чем изучение системы уравнений третьего порядка.

Далее, выполним в подсистемах квадратичных дифференциальных уравнений (4.1) и (4.3) линейную замену переменных:

$$g_i(t) = \mu_i(t)h_i(t) + \nu_i(t), \quad i = 0, 1, 2, 3, \tag{4.4}$$

где $\mu_i(t)$ — некоторая заданная функция. Например, она может либо быть равной 1 или -1, либо быть связанной с какой-либо конкретной функцией из совокупности $\{b_1(t); c_2(t)\}$. Величина $\nu_i(t)$ может либо, как и $\mu_i(t)$, иметь отношение к какой-то конкретной функции из совокупности $\{a_i(t), i = 1, 2, 3;\ b_i(t), i = 2, 3;\ c_3(t)\}$, либо быть равной 0, либо, наоборот, быть неизвестной и подлежащей определению.

В результате такой замены переменных возникают две новые подсистемы квадратичных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} g_0'(t) = \Psi_0(t, g_0(t), g_1(t)), \\ g_1'(t) = \Psi_1(t, g_0(t), g_1(t)), \end{cases} \tag{4.5}$$

$$\begin{cases} g_2'(t) = \Psi_2(t, g_2(t), g_3(t)), \\ g_3'(t) = \Psi_3(t, g_2(t), g_3(t)). \end{cases} \tag{4.6}$$

Важная особенность уравнений этих подсистем заключается в том, что перед слагаемыми с $g_0(t)g_1(t)$ и $g_1^2(t)$ в подсистеме (4.5), а также перед слагаемыми с $g_2(t)g_3(t)$ и $g_3^2(t)$ в подсистеме (4.6) стоят знаки минус. По своему внешнему виду такие уравнения похожи на соответствующие уравнения подсистем (4.1) и (4.3).

Далее мы считаем, что

- начальные значения g_0^0 и g_1^0 в подсистеме (4.5), а также начальные значения g_2^0 и g_3^0 в подсистеме (4.6) неотрицательны;
- решения $g_0(t)$, $g_1(t)$ подсистемы (4.5) и решения $g_2(t)$, $g_3(t)$ подсистемы (4.6) определены на соответствующих максимально возможных полуинтервалах $[0, t_{0,1})$ и $[0, t_{2,3})$ существования этих решений.

Тогда применим к подсистемам (4.5) и (4.6) условие квазиположительности (теорема 2.1.1 из [16]). Оно заключается в проверке условий

$$\begin{cases} \Psi_0(t, 0, g_1) \geq 0 \text{ при всех } g_1 \geq 0, \\ \Psi_1(t, g_0, 0) \geq 0 \text{ при всех } g_0 \geq 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

для подсистемы (4.5) и условий

$$\begin{cases} \Psi_2(t, 0, g_3) \geq 0 \text{ при всех } g_3 \geq 0, \\ \Psi_3(t, g_2, 0) \geq 0 \text{ при всех } g_2 \geq 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

для подсистемы (4.6).

При выполнении соотношений (4.7) и (4.8) существуют соответствующие неотрицательные функции $g_0(t)$ и $g_1(t)$, являющиеся решениями подсистемы (4.5) на полуинтервале $[0, t_{0,1})$, а также неотрицательные функции $g_2(t)$ и $g_3(t)$, удовлетворяющие подсистеме (4.6) на полуинтервале $[0, t_{2,3})$.

При этом, возможны следующие ситуации:

- условия (4.7) и (4.8) приводят к дифференциальным неравенствам для нахождения неизвестных функций $\nu_i(t)$, $i = 0, 1, 2, 3$ в замене переменных (4.4);
- при заданных функциях $\nu_i(t)$, $i = 0, 1, 2, 3$ в замене переменных (4.4), условия (4.7) и (4.8) справедливы без каких-либо дополнительных ограничений;
- при заданных функциях $\nu_i(t)$, $i = 0, 1, 2, 3$ в замене переменных (4.4), условия (4.7) и (4.8) выполняются при некоторых дополнительных ограничениях.

Заметим, что из трех указанных ситуаций наиболее предпочтительна вторая ситуация. Именно ее возможное возникновение для подсистем (4.1) и (4.3) является другой важной причиной поиска подходящих функций $\mu_i(t)$, $\nu_i(t)$, $i = 0, 1, 2, 3$, и последующего выполнения замены переменных (4.4). Первая и третья ситуации более обременительны, поскольку приводят либо к необходимости решения дифференциальных неравенств для функций $\nu_i(t)$, $i = 0, 1, 2, 3$ (первая ситуация), либо к появлению дополнительных ограничений, связывающих функции $a_i(t)$, $b_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ и $c_i(t)$, $i = 2, 3$ (третья ситуация).

Теперь остается обосновать продолжимость решений $g_0(t)$, $g_1(t)$ и $g_2(t)$, $g_3(t)$ с соответствующих полуинтервалов $[0, t_{0,1})$ и $[0, t_{2,3})$ на весь отрезок $[0, T]$, если $t_{0,1} \leq T$ и $t_{2,3} \leq T$. Для этого рассмотрим функции Ляпунова

$$V_{01}(g_0, g_1) = 0.5 \left(g_0^2 + g_1^2 \right), \quad V_{23}(g_2, g_3) = 0.5 \left(g_2^2 + g_3^2 \right).$$

После чего вычислим производные этих функций в силу соответствующих подсистем (4.5) и (4.6). Знаки минус у слагаемых с $g_0^2(t)g_1(t)$, $g_1^3(t)$ и $g_2^2(t)g_3(t)$, $g_3^3(t)$, а также неотрицательность функций $g_i(t)$, $i = 0, 1, 2, 3$, приводят к дифференциальным неравенствам, интегрирование которых и дает ограниченность этих функций на максимальных полуинтервалах их существования. В свою очередь, это означает продолжимость решений $g_0(t)$, $g_1(t)$ подсистемы (4.5) и решений $g_2(t)$, $g_3(t)$ подсистемы (4.6) на требуемый отрезок $[0, T]$. Наконец, возвращаясь к первоначальным функциям $h_i(t)$, $i = 0, 1, 2, 3$, мы и для них делаем подобное заключение.

Затем мы обращаемся к системе уравнений (2.4) для нахождения оценки числа различных нулей функции переключений $L(t)$ на отрезке $[0, T]$.

З а м е ч а н и е 6. В первой ситуации функции $\nu_i(t)$, $i = 0,1,2,3$, могут быть определены на некотором отрезке $[\tau,\theta]$, длина которого меньше T. Тогда продолжение решений $g_i(t)$, $i = 0,1,2,3$, будет осуществляться только на такой отрезок времени. Систему (2.4) также будем рассматривать на отрезке $[\tau,\theta]$. В результате снова, рассуждая от противного в этой системе и применяя в первых двух ее уравнениях обобщенную теорему Ролля, мы приходим к выводу о том, что функция переключений $L(t)$ имеет не более двух различных нулей на отрезке $[\tau,\theta]$. Значит, мы можем получить требуемую оценку числа нулей функции $L(t)$ на всем отрезке $[0,T]$ в виде $2([T/(\theta-\tau)]+1)$, где $[\omega]$ — целая часть положительного числа ω.

З а м е ч а н и е 7. Применение описанного подхода при анализе неавтономных линейных систем дифференциальных уравнений для функций переключений и отвечающих им вспомогательных функций в различных задачах минимизации (1.5) из медицины демонстрируется в [17–19]. Другие задачи оптимального управления, возникающие в математических моделях медицины, представлены, например, в [20].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
2. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
3. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
4. **Дмитрук А.В.** Об одном обобщении оценки числа нулей решений линейного дифференциального уравнения // Тр. ВНИИ системных исследований. 1990. № 1. С. 72–76.
5. **Dmitruk A.V.** A generalized estimate on the number of zeros for solutions of a class of linear differential equations // SIAM J. Control Optim. 1992. Vol. 30, no. 5. P. 1087–1091. doi: 10.1137/0330057
6. **Хайлов Е.Н., Григорьева Э.В.** О продолжимости решений неавтономных квадратичных дифференциальных систем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 279–288.
7. **Schättler H., Ledzewicz U.** Geometric optimal control: theory, methods and examples. NY; Heidelberg; Dordrecht; London: Springer, 2012. 640 p.
8. **Хартман Ф.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
9. **Szarski J.** Differential inequalities. Warszawa: Polish Sci. Publ., 1965. 256 p.
10. **Grigorieva E.V., Khailov E.N.** Optimal vaccination, treatment, and preventive campaigns in regard to the SIR epidemic model // Math. Model. Nat. Pheno. 2014. Vol. 9, no. 4. P. 105–121. doi: 10.1051/mmnp/20149407
11. **Grigorieva E.V., Khailov E.N.** Optimal intervention strategies for a SEIR control model of Ebola epidemics // Mathematics. 2015. Vol. 3, no. 4. P. 961–983. doi: 10.3390/math3040961
12. **Grigorieva E.V., Khailov E.N., Korobeinikov A.** Optimal control for a SIR epidemic model with nonlinear incidence rate // Math. Model. Nat. Pheno. 2016. Vol. 11, no. 4. P. 89–104. doi: 10.1051/mmnp/201611407
13. **Grigorieva E., Khailov E., Korobeinikov A.** Optimal control for an SEIR epidemic model with nonlinear incidence rate // Stud. Appl. Math. 2018. Vol. 141. P. 353–398. doi: 10.1111/sapm.12227
14. **Martcheva M.** An introduction to mathematical epidemiology. NY; Heidelberg; Dordrecht; London: Springer, 2015. 453 p.
15. **Sharomi O., Malik T.** Optimal control in epidemiology // Ann. Oper. Res. 2017. Vol. 251. P. 55–71. doi: :10.1007/s10479-015-1834-4
16. **Кузенков О.А., Рябова Е.А.** Математическое моделирование процессов отбора. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 2007. 324 с.
17. **Khailov E., Grigorieva E., Klimenkova A.** Optimal CAR T-cell immunotherapy strategies for a leukemia treatment model // Games. 2020. Vol. 11, no. 4, art. no. 53. P. 1–26. doi: 10.3390/g11040053
18. **Grigorieva E.V., Khailov E.N., Korobeinikov A.** Optimal controls of the highly active antiretroviral therapy // Abstr. Appl. Anal. 2020. Vol. 2020, article ID 8107106. P. 1–23. doi: 10.1155/2020/8107106
19. **Григоренко Н.Л., Хайлов Е.Н., Григорьева Э.В., Клименкова А.Д.** Оптимальные стратегии CAR-T терапии лечения лейкемии в модели хищник — жертва Лотки — Вольтерры // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 3. С. 43–58. doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-3-43-58

20. **Schättler H., Ledzewicz U.** Optimal control for mathematical models of cancer therapies: an application of geometric methods. NY; Heidelberg; Dordrecht; London: Springer, 2015. 496 p.

Поступила 20.12.2023
После доработки 10.01.2024
Принята к публикации 15.01.2024

Хайлов Евгений Николаевич
канд. физ.-мат. наук, доцент
фак. ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова
г. Москва
e-mail: khailov@cs.msu.su

REFERENCES

1. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*, ed. L.W. Neustadt, NY; London, Interscience Publ. John Wiley & Sons, Inc., 1962, 360 p. ISBN: 0470693819 . Original Russian text published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow: Fizmatgiz Publ., 1961, 391 p.
2. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods], Moscow: Publ. House "Factorial Press", 2002, 824 p.
3. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory.* NY, London, Sydney: John Wiley & Sons, Inc., 1967, 576 p. Translated under the title *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya*, Moscow, Nauka Publ., 1972, 576 p. ISBN: 0471522635 .
4. Dmitruk A.V. On a certain generalization of the bound on a number of zeros of solutions for a linear differential equation. *Sbornik trudov VNII sistemnykh issledovanii*, 1990, no. 1, pp. 72–76.
5. Dmitruk A.V. A generalized estimate on the number of zeros for solutions of a class of linear differential equations. *SIAM J. Control Optim.*, 1992, vol. 30, no. 5, pp. 1087–1091. doi: 10.1137/0330057
6. Khailov E.N., Grigorieva E.V. On the extensibility of solutions of nonautonomous quadratic differential systems. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2013, vol. 19, no. 4, p. 279–288.
7. Schättler H., Ledzewicz U. *Geometric optimal control: theory, methods and examples.* NY, Heidelberg, Dordrecht, London: Springer, 2012, 640 p.
8. Hartman Ph. *Ordinary differential equations.* 2nd ed. Ser. Classics Appl. Math. (Book 38), NY, London, Sydney: SIAM, 1982, 632 p. ISBN: 978-0521682947 . Translated to Russian under the title *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya.* Moscow: Mir Publ., 1970, 720 p.
9. Szarski J. Differential inequalities. Warszawa: Polish Sci. Publ., 1965. 256 p.
10. Grigorieva E.V., Khailov E.N. Optimal vaccination, treatment, and preventive campaigns in regard to the SIR epidemic model. *Math. Model. Nat. Pheno.*, 2014, vol. 9, no. 4, pp. 105–121. doi: 10.1051/mmnp/20149407
11. Grigorieva E.V., Khailov E.N. Optimal intervention strategies for a SEIR control model of Ebola epidemics. *Mathematics*, 2015, vol. 3, no. 4, pp. 961–983. doi: 10.3390/math3040961
12. Grigorieva E.V., Khailov E.N., Korobeinikov A. Optimal control for a SIR epidemic model with nonlinear incidence rate. *Math. Model. Nat. Pheno.*, 2016, vol. 11, no. 4, pp. 89–104. doi: 10.1051/mmnp/201611407
13. Grigorieva E., Khailov E., Korobeinikov A. Optimal control for an SEIR epidemic model with nonlinear incidence rate. *Stud. Appl. Math.*, 2018, vol. 141, pp. 353–398. doi: 10.1111/sapm.12227
14. Martcheva M. An introduction to mathematical epidemiology. NY; Heidelberg; Dordrecht; London: Springer, 2015, 453 p.
15. Sharomi O., Malik T. Optimal control in epidemiology. *Ann. Oper. Res.*, 2017, vol. 251, pp. 55–71.
16. Kuzenkov O.A., Ryabova E.A. *Matematicheskoe modelirovanie protsessov otbora* [Mathematical simulation of selection processes]. Nizhnii Novgorod: Izdatel'stvo Nizhnegorod. Univ., 2007, 324 p. ISBN: 978-5-91326-011-6 .
17. Khailov E., Grigorieva E., Klimenkova A. Optimal CAR T-cell immunotherapy strategies for a leukemia treatment model. *Game*, 2020, vol. 11, no. 4, art. no. 53, pp. 1–26. doi: 10.3390/g11040053
18. Grigorieva E.V., Khailov E.N., Korobeinikov A. Optimal controls of the highly active antiretroviral therapy. *Abstr. Appl. Anal.*, 2020, vol. 2020, art. id 8107106, pp. 1–23. doi: 10.1155/2020/8107106

19. Grigorenko N.L., Khailov E.N., Grigorieva E.V., Klimenkova A.D. Optimal strategies of CAR T-Cell therapy in the treatment of leukemia within the Lotka–Volterra predator–prey model. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 43–58 .
doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-3-43-58
20. Schättler H., Ledzewicz U. Optimal control for mathematical models of cancer therapies: an application of geometric methods. NY; Heidelberg; Dordrecht; London: Springer, 2015, 496 p.

Received December 20, 2023
Revised January 10, 2024
Accepted January 15, 2024

Evgenii Nikolaevich Khailov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow State Lomonosov University, Moscow, 119992, Russia,
e-mail: khailov@cs.msu.su .

Cite this article as: E. N. Khailov. Extensibility of solutions of non-autonomous systems of quadratic differential equations and their application in optimal control problems. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 1, pp. 237–248 .