ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 1 2024

УДК 517.983.54

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА КОНЕЧНОМ ВРЕМЕННОМ ПРОМЕЖУТКЕ

В. П. Танана

Данная работа посвящена доказательству единственности решения обратной граничной задачи теплопроводности на конечном временном промежутке. В этих целях использовано расширение исходной задачи на бесконечный временной промежуток, после чего к новой задаче применено преобразование Фурье по времени. Посредством этого преобразования искомая задача сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решена в явном виде. Доказана теорема единственности для обратной граничной задачи в Фурье образах.

Ключевые слова: обратная задача теплопроводности, преобразование Фурье, некорректная задача.

V. P. Tanana. On the uniqueness of the solution to the inverse boundary value problem for the heat equation on a finite time interval.

This work is devoted to proving the uniqueness of the solution to the inverse boundary value problem of heat conduction on a finite time interval. For these purposes, the original problem is extended to an infinite time interval, and then the Fourier transform in time is applied to the new problem. As a result, the problem is reduced to a system of ordinary differential equations, which is solved explicitly. A uniqueness theorem is proved for the inverse boundary value problem in Fourier images.

Keywords: inverse heat conduction problem, Fourier transform, ill-posed problem.

MSC: 80A23, 35K05, 35R30

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-1-223-236

Введение

При планировании экспериментальных исследований проблем эксплуатации теплонагруженного узла технической конструкции необходимо учитывать важную роль, которую играет температурная кривая, зависящая от времени. Информация о такой кривой позволяет обеспечить надежную работу узла. Трудность в получении данной информации вызвана тем, что, как правило, прямое измерение температуры в этом узле невозможно. Одним из известных способов решения указанной проблемы является использование численных методов при определении температуры. Для этой цели измеряют температуру там, где доступно прямое измерение, затем разрабатывают математическую модель, позволяющую по известной температуре численно определить искомую температуру. Как правило, такая модель описывается обратной граничной задачей для уравнения теплопроводности. Известно, что подобного рода задачи в основном не корректны по Адамару, т. е. этот факт обуславливает высокие требования к разрабатываемой модели, а также к использованию высокоточных методов для решения соответствующей обратной задачи. Одним из важнейших требований, предъявляемых к постановке обратной задачи, является единственность ее решения.

В работе [1] сказано о значении обратных граничных задач для уравнения теплопроводности в аэрокосмических исследованиях, а также о математических постановках таких задач и их исследовании на предмет единственности решения и его устойчивости. Таким образом, тема статьи актуальна. В [2] изучена обратная граничная задача для уравнения теплопроводности на временной полуоси, найдены условия на гладкость искомого решения, позволяющие применять для решения обратной задачи преобразование Фурье по времени; оно позволило свести задачу к задаче для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, решив которую получали не только решение, но и точную по порядку оценку его погрешности. Настоящая статья ближе всего примыкает к результатам этой книги. В отличие от указанных результатов у нас обратная граничная задача ставится на конечном временном промежутке. Основная идея исследования заключается в продолжении данной задачи на бесконечный временной промежуток, использовании преобразования Фурье и ее сведения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для полученной системы единственность решения следует из соответствующей теоремы, сформулированной в книге [3]. Аналогичная обратная задача исследовалась в [4] и [5, гл. 8, § 4, теорема 8.4.2, с. 250]. В отличие от результатов нашей статьи в этих работах предполагалось выполнение уравнения теплопроводности на замкнутом прямоугольнике. Здесь, как следует из теоремы 1, приведенной в разд. 1, это условие не выполняется на всей границе.

1. Постановка и решение прямой задачи теплопроводности на конечном временном промежутке $[0, t_0]$, $t_0 > 0$, которая является первой краевой задачей для уравнения теплопроводности

Пусть тепловой процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le t_0, \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \tag{1.2}$$

$$u(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le t_0, \tag{1.3}$$

$$u(1,t) = q_1(t), \quad 0 \le t \le t_0, \tag{1.4}$$

где

$$q_1(t) \in C^2[0,t_0], \quad q_1(0) = q_1'(0) = q_1'(t_0) = q_1''(t_0) = 0. \tag{1.5}$$

Прямой задачей (1.1)–(1.4) назовем задачу, в которой функция $q_1(t)$ известна, а функцию $u(x,t)$ требуется определить.

Для решения поставленной задачи сделаем замену

$$v(x,t) = u(x,t) - xq_1(t), \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le t \le t_0, \tag{1.6}$$

воспользовавшись которой сведем задачу (1.1)–(1.4) к следующей:

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - xq_1'(t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le t_0, \tag{1.7}$$

$$v(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \tag{1.8}$$

$$v(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le t_0, \tag{1.9}$$

$$v(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le t_0. \tag{1.10}$$

Решая задачу (1.7)–(1.10), получим, что

$$v(x,t) := 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin \pi n x \int_0^t e^{-(\pi n)^2 (t-\tau)} q_1'(\tau) d\tau, \quad 0 < x \le 1, \quad 0 \le t \le t_0. \tag{1.11}$$

Интегрируя по частям каждое слагаемое правой части (1.11), преобразуем ряд (1.11):

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(\pi n)^3} \left[q_1'(t) - \int_0^t q_1''(\tau)\, e^{-(\pi n)^2 (t-\tau)} d\tau \right] \sin \pi n x, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le t \le t_0. \tag{1.12}$$

Продифференцировав по x каждое слагаемое ряда (1.12), получим ряд из производных:

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(\pi n)^2}\left[q_1'(t)-\int_0^t q_1''(\tau)\,e^{-(\pi n)^2(t-\tau)}d\tau\right]\cos\pi nx,\quad 0\le x\le 1,\quad 0\le t\le t_0. \tag{1.13}$$

Для применения признака Вейерштрасса к рядам (1.12) и (1.13) оценим каждое из слагаемых этих рядов.

Из условия (1.5) будем иметь существование числа $d_1>0$ такого, что для любого $t\in[0,t_0]$

$$\max_t\{|q_1'(t)|,|q_1''(t)|\}\le d_1.$$

Таким образом, из последнего соотношения будет следовать, что для любых $t\in[0,t_0]$ и n

$$\left|q_1'(t)-\int_0^t q_1''(\tau)\,e^{-(\pi n)^2(t-\tau)}d\tau\right|\le|q_1'(t)|+\int_0^{t_0}|q_1''(\tau)|d\tau\le d_1(1+t_0). \tag{1.14}$$

Из (1.12)–(1.14) будем иметь, что для любых n, $t\in[0,t_0]$ и $x\in[0,1]$

$$\max\left\{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(\pi n)^3}\left[q_1'(t)+\int_0^t q_1''(\tau)\,e^{-(\pi n)^2(t-\tau)}d\tau\right]\sin\pi nx\right|,\right.$$

$$\left.\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(\pi n)^2}\left[q_1'(t)+\int_0^t q_1''(\tau)\,e^{-(\pi n)^2(t-\tau)}d\tau\right]\cos\pi nx\right|\right\}\le\frac{d_1(1+t_0)}{(\pi n)^2}.$$

Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$, поэтому по признаку Вейерштрасса ряды (1.12) и (1.13) сходятся равномерно на множестве $[0,1]\times[0,t_0]$.

Кроме того,

$$v(x,t)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(\pi n)^3}\left[q_1'(t)-\int_0^t q_1''(\tau)\,e^{-(\pi n)^2(t-\tau)}d\tau\right]\sin\pi nx,\quad 0\le x\le 1,\quad 0\le t\le t_0, \tag{1.15}$$

а также

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(\pi n)^2}\left[q_1'(t)-\int_0^t q_1''(\tau)\,e^{-(\pi n)^2(t-\tau)}d\tau\right]\cos\pi nx,\quad 0\le x\le 1,\quad 0\le t\le t_0. \tag{1.16}$$

Из (1.15), (1.16) следует, что

$$v(x,t)\ \text{ и }\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\in C([0,1]\times[0,t_0]).$$

Далее перейдем к исследованию непрерывности функций $\dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t}$. Для этого, поскольку рассуждения аналогичны, достаточно ограничится исследованием одной из них.

Продифференцировав каждое из слагаемых ряда (1.16) по x, получим ряд из вторых производных:

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}\left[q_1'(t)-\int_0^t q_1''(\tau)\,e^{-(\pi n)^2(t-\tau)}d\tau\right]\sin\pi nx,\quad 0\le x\le 1,\quad 0\le t\le t_0. \tag{1.17}$$

Теперь представим ряд (1.17) в виде суммы рядов

$$2q_1'(t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\pi nx,\quad 0\le x\le 1,\quad 0\le t\le t_0, \tag{1.18}$$

и

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\pi n}\left[\int_0^t q_1''(\tau)\,e^{-(\pi n)^2(t-\tau)}d\tau\right]\sin\pi nx,\quad 0\le x\le 1,\quad 0\le t\le t_0, \tag{1.19}$$

которые исследуем по отдельности.

Лемма 1. *Для любого* $\varepsilon>0$ *функциональный ряд* (1.18) *сходится равномерно на множестве* $[0,1-\varepsilon]\times[0,t_0]$.

Доказательство. Так как $q_1'(t)$ не зависит от n, то достаточно ограничится исследованием равномерной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\pi n}\sin\pi nx,\ 0\le x\le 1.$$

Для доказательства используем признак Дирихле. Сначала оценим частичную сумму

$$\sum_{\kappa=1}^{N}(-1)^n\sin\pi nx,\quad 0\le x\le 1, \tag{1.20}$$

в которой разделим слагаемые на пары

$$(\sin 2\pi x-\sin\pi x)+(\sin 4\pi x-\sin 3\pi x)$$
$$+(\sin 2\kappa\pi x-\sin(2\kappa-1)\pi x)+\ldots+(\sin 2K\pi x-\sin(2K-1)\pi x),\quad K=[N/2]. \tag{1.21}$$

Затем каждое слагаемое суммы (1.21) представим в виде произведения

$$\sin 2\kappa\pi x-\sin(2\kappa-1)\pi x=2\cos\frac{4\kappa-1}{2}\pi x\cdot\sin\frac{\pi}{2}x.$$

Подставляя эти произведения в сумму (1.20), получаем

$$2\sin\frac{\pi}{2}x\sum_{\kappa=1}^{2K}\cos\frac{4\kappa-1}{2}\,\pi x,\quad 0\le x\le 1. \tag{1.22}$$

Для того, чтобы свернуть сумму (1.22), умножим ее и разделим на $\sin\pi x$, после чего она примет вид

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\sin\pi x}\sum_{\kappa=1}^{2K}2\cos\frac{4\kappa-1}{2}\,\pi x\sin\pi x,\quad 0\le x\le 1.$$

Поскольку

$$\begin{gathered}2\cos\frac{4\kappa-1}{2}\,\pi x\sin\pi x=\sin\frac{4\kappa+1}{2}\,\pi x-\sin\frac{4\kappa-3}{2}\,\pi x,\\ 2\cos\frac{4(\kappa+1)-1}{2}\,\pi x\sin\pi x=\sin\frac{4\kappa+5}{2}\,\pi x-\sin\frac{4\kappa+1}{2}\,\pi x,\end{gathered} \tag{1.23}$$

то из (1.23) после сокращения сумма (1.20) будет преобразована в выражение

$$-\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\sin\pi x}\left[\sin\frac{\pi}{2}x-\sin\frac{4K+5}{2}\pi x\right],\quad 0\le x\le 1. \tag{1.24}$$

Из (1.20)–(1.24) будет следовать, что для любых значений $\varepsilon > 0$, $x \in [0, 1-\varepsilon]$ и N

$$\Big|\sum_{n=1}^{N}(-1)^n \sin \pi n x\Big| \leq \frac{3}{\sin \pi(1-\varepsilon)}. \tag{1.25}$$

Так как последовательность $\left\{\dfrac{1}{\pi n}\right\}$, убывая, стремится к нулю при $n \to \infty$, то из (1.25) следует равномерная сходимость ряда (1.18) на $[0, 1-\varepsilon] \times [0, t_0]$.

Тем самым лемма доказана.

Лемма 2. *Функциональный ряд* (1.19) *равномерно сходится на множестве* $[0, 1] \times [0, t_0]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (1.5) следует существование числа $d_1 > 0$ такого, что для любого $t \in [0, t_0]$

$$|q_1''(t)| \leq d_1.$$

Откуда для любого n

$$\Big|\int_0^t q_1''(\tau) e^{-(\pi n)^2(t-\tau)} d\tau\Big| \leq d_1 e^{-(\pi n)^2 t} \int_0^t e^{(\pi n)^2 \tau} d\tau, \tag{1.26}$$

$$\int_0^t e^{(\pi n)^2 \tau} d\tau = \frac{1}{(\pi n)^2}[e^{(\pi n)^2 t} - 1].$$

Таким образом, из (1.26) будем иметь

$$\Big|\int_0^t q_1''(\tau)\, e^{-(\pi n)^2(t-\tau)} d\tau\Big| \leq \frac{d_1 t_0}{(\pi n)^2}. \tag{1.27}$$

Учитывая (1.19) и (1.27), получим, что для любых значений $x \in [0, 1]$, $t \in [0, t_0]$ и n

$$\Big|\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}\Big[\int_0^t q_1''(\tau)\, e^{-(\pi n)^2(t-\tau)} d\tau\Big] \sin \pi n x\Big| \leq \frac{d_1 t_0}{(\pi n)^3}. \tag{1.28}$$

Из предыдущего соотношения по признаку Вейерштрасса будем иметь равномерную сходимость ряда (1.19) на множестве $[0, 1] \times [0, t_0]$.

Тем самым лемма доказана.

Из лемм 1 и 2 вытекает, что для любых значений $x \in [0, 1)$ и $t \in [0, t_0]$

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi n}\sin \pi n x\Big[q_1'(t) - \int_0^t q_1''(\tau)\, e^{-(\pi n)^2(t-\tau)} d\tau\Big], \tag{1.29}$$

а также что

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \in C([0, 1) \times [0, t_0]).$$

Из (1.29) и лемм 1, 2 следует

Теорема 1. *Пусть* $q_1(t)$ *удовлетворяет условию* (1.5). *Тогда решение* $v(x,t)$ *задачи* (1.7)–(1.10) *существует и определяется рядом* (1.12), *при этом*

$$v(x,t),\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \in C([0,1]\times[0,t_0]),$$

а

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2},\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \in C([0,1)\times[0,t_0]).$$

Кроме того, решение $u(x,t)$ *задачи* (1.1)–(1.4), *которое связано с решением* $v(x,t)$ *формулой* (1.6), *существует и удовлетворяет следующим условиям гладкости:*

$$u(x,t),\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \in C([0,1]\times[0,t_0]),$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in C((0,1)\times[0,t_0]).$$

Из теоремы 1 выводим: решение $u(x,t),\ 0\le x\le 1,\ 0\le t\le t_0$, задачи (1.1)–(1.4) является классическим, а на основании теоремы единственности, сформулированной и доказанной в книге [6, гл. 3, § 1, п. 6, с 193], можем утверждать, что это решение единственно.

Из теоремы 1 также следует, что решение $u(x,t)$ задачи (1.1)–(1.4) удовлетворяет уравнению (1.1) при $t=t_0$, т. е.

$$\frac{\partial u(x,t_0)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t_0)}{\partial x^2}, \quad 0\le x\le 1.$$

2. Постановка обратной граничной задачи теплопроводности для задачи (1.1)–(1.4)

Пусть в системе (1.1)–(1.4) функция $q_1(t)$ неизвестна, а вместо нее даны две функции $f(x)$ и $g_1(t)$ такие, что

$$f(x) = u(x,t_0), \quad 0\le x\le 1, \tag{2.1}$$

$$g_1(t) = \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}, \quad 0\le t\le t_0. \tag{2.2}$$

Предполагаем, что существует функция $q_1(t)$, удовлетворяющая условию (1.5), при подстановке которой в систему (1.1)–(1.4) полученное решение $u(x,t)$ удовлетворяет равенствам (2.1) и (2.2). Требуется доказать единственность такой функции $q_1(t)$.

Для доказательства единственности функции $q_1(t)$ используем методику, предложенную для исследования и решения обратных граничных задач теплопроводности на бесконечном временном промежутке $[0,\infty)$ в работае [2, гл. 5, с. 74–100].

Применение этой методики предполагает существование продолжения решения обратной задачи на бесконечный временной промежуток. Ввиду того что к этому продолжению предъявляются достаточно высокие требования, связанные со стыковкой решений двух различных задач в точке $t=t_0$, требуется, чтобы продолжение сохраняло необходимую гладкость решения, а также не влияло на обратную задачу.

Для выполнения этих требований проверим гладкость функции $u(x,t_0),\quad 0\le x\le 1$, в которой и произойдет стыковка двух задач.

Из (1.5) и (1.12) следует, что

$$v(x,t_0) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(\pi n)^3}\left(\int\limits_0^{t_0} q_1''(\tau)\,e^{-(\pi n)^2(t_0-\tau)}d\tau\right)\sin\pi n x, \quad 0\le x\le 1, \tag{2.3}$$

Теперь продифференцируем по x один, два и три раза каждое слагаемое ряда (2.3) и выпишем ряды из производных:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(\pi n)^2}\left(\int\limits_0^t q_1''(\tau)\,e^{-(\pi n)^2(t_0-\tau)}d\tau\right)\cos\pi nx,\quad 0\le x\le 1, \tag{2.4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\pi n}\left(\int\limits_0^t q_1''(\tau)\,e^{-(\pi n)^2(t_0-\tau)}d\tau\right)\sin\pi nx,\quad 0\le x\le 1, \tag{2.5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\int\limits_0^t q_1''(\tau)\,e^{-(\pi n)^2(t_0-\tau)}d\tau\right)\cos\pi nx,\quad 0\le x\le 1. \tag{2.6}$$

Оценим каждое из слагаемых рядов (2.4)–(2.6), используя оценки (1.26)–(1.28), получим

$$\sup_{0\le x\le 1}\left\{\left|\int\limits_0^t q_1''(\tau)\,e^{-(\pi n)^2(t_0-\tau)}d\tau\right|,\right.$$

$$\left.\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(\pi n)^2}\cos n\pi x\right|,\left|\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin n\pi x\right|,|(-1)^{n+1}\cos n\pi x|\right\}\le\frac{d_1t_0}{(\pi n)^2}. \tag{2.7}$$

Поскольку $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$, то из мажорантной оценки (2.7) будет следовать равномерная сходимость рядов (2.4)–(2.6), а также что

$$v(x,t_0)\in C^3[0,1]. \tag{2.8}$$

3. Продолжение решения $u(x,t)$ задачи (1.1)–(1.4) на множество $[0,1]\times[t_0,\infty)$

Через $\overline{u}(x,t)$ обозначим продолжение решения $u(x,t)$ задачи (1.1)–(1.4) на полосу $[0,1]\times[t_0,\infty)$.

Это продолжение определяется системой

$$\frac{\partial\overline{u}(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2\overline{u}(x,t)}{\partial x^2},\quad 0<x<1,\quad t\ge t_0, \tag{3.1}$$

$$\overline{u}(x,t_0)=u(x,t_0),\quad 0\le x\le 1, \tag{3.2}$$

где $u(x,t_0)$ — решение задачи (1.1)–(1.4) при $t=t_0$,

$$\overline{u}(0,t)=0,\quad t\ge t_0, \tag{3.3}$$

$$\overline{u}(1,t)=q_1(t_0),\quad t\ge t_0. \tag{3.4}$$

Для решения задачи (3.1)–(3.4) сделаем замену

$$\overline{u}(x,t)=\overline{v}(x,t)+xq_1(t_0),\quad 0\le x\le 1,\quad t\ge t_0, \tag{3.5}$$

после которой сведем ее к следующей задаче:

$$\frac{\partial\overline{v}(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2\overline{v}(x,t)}{\partial x^2},\quad 0<x<1,\quad t\ge t_0, \tag{3.6}$$

$$\overline{v}(x,t_0)=v(x,t_0),\quad 0\le x\le 1, \tag{3.7}$$

где $v(x,t_0)$ — решение задачи (1.7)–(1.10) при $t=t_0$,

$$\overline{v}(0,t)=\overline{v}(1,t)=0, \quad t\geq t_0. \tag{3.8}$$

Из (2.8) и (3.7) имеем, что

$$\overline{v}(x,t_0)\in C^3[0,1]. \tag{3.9}$$

Решение задачи (3.6)–(3.8) определяется формулой

$$\overline{v}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{v}_n e^{-(\pi n)^2(t-t_0)}\sin\pi nx, \quad 0\leq x\leq 1, \quad t\geq t_0, \tag{3.10}$$

где $\overline{v}_n=2\int_0^1 v(x,t_0)\sin\pi nxdx$.

Из (2.3), (2.4) и (3.7) следует существование $d_2>0$ такого, что для любого n

$$|\overline{v}_n|\leq\frac{d_1}{(\pi n)^5}, \tag{3.11}$$

а из (3.8) вытекает, что для общего члена ряда (3.10) имеет место оценка при любых $x\in[0,1]$, $t\geq t_0$ и n

$$|\overline{v}_n\, e^{-(\pi n^2)^2(t-t_0)}\sin\pi nx|\leq\frac{d_2}{(\pi n)^5}.$$

Продифференцировав по x каждое слагаемое ряда (3.10), (3.11), оценим общий член ряда из производных. Тогда для любых $x\in[0,1]$, $t\geq t_0$ и n будут иметь место оценки

$$|\pi n\overline{v}_n\, e^{-(\pi n^2)^2(t-t_0)}\cos\pi nx|\leq\frac{d_2}{(\pi n)^4} \quad \text{и} \quad |(\pi n)^2\overline{v}_n\, e^{-(\pi n^2)^2(t-t_0)}\sin\pi nx|\leq\frac{d_2}{(\pi n)^3}. \tag{3.12}$$

Исходя из признака Вейерштрасса из (3.12), а также из сходимости мажорантных рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3},$$

получаем равномерную сходимость рядов, состоящих из первых и вторых производных по x ряда (3.10) на множестве $[0,1]\times[t_0,\infty)$.

Таким образом, будем иметь

$$\overline{v}(x,t),\ \frac{\partial\overline{v}(x,t)}{\partial x},\ \frac{\partial^2\overline{v}(x,t)}{\partial x^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial\overline{v}(x,t)}{\partial t}\in C([0,1]\times[t_0,\infty)). \tag{3.13}$$

Лемма 3. *Пусть* $\overline{u}(x,t)$, $0\leq x\leq 1$, $t\geq t_0$ *— решение продолженной задачи* (3.1)–(3.4). *Тогда это решение удовлетворяет следующим условиям гладкости*: $\overline{u}(x,t)$, $\dfrac{\partial\overline{u}(x,t)}{\partial x}\in C([0,1]\times[t_0,\infty))$, *а* $\dfrac{\partial^2\overline{u}(x,t)}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial\overline{u}(x,t)}{\partial t}\in C((0,1)\times[t_0,\infty))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (3.5) следует, что $\overline{u}(x,t)=\overline{v}(x,t)+xq_1(t_0)$, $0\leq x\leq 1$, $t\geq t_0$. Таким образом, из (3.5) и (3.10) имеем

$$\overline{u}(x,t)=x\,q_1(t_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{v}_n\, e^{-(\pi n)^2(t-t_0)}\sin\pi nx, \quad 0\leq x\leq 1, \quad t\geq t_0, \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial\overline{u}(x,t)}{\partial x}=q_1(t_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\pi n\overline{v}_n\, e^{-(\pi n)^2(t-t_0)}\cos\pi nx, \quad 0\leq x\leq,\ t\geq t_0. \tag{3.15}$$

Для любого $\varepsilon > 0$

$$\frac{\partial^2 \overline{u}(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \overline{v}(x,t)}{\partial x^2}, \qquad x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon],\ t \ge t_0, \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial \overline{u}(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial \overline{v}(x,t)}{\partial t}, \qquad x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon],\ t \ge t_0. \tag{3.17}$$

Из (3.13)–(3.17) можно заключить, что

$$\overline{u}(x,t),\ \frac{\partial \overline{u}(x,t)}{\partial x} \in C([0,1]\times[t_0,\infty)), \qquad \frac{\partial^2 \overline{u}(x,t)}{\partial x^2},\ \frac{\partial \overline{u}(x,t)}{\partial t} \in C((0,1)\times[t_0,\infty)).$$

Тем самым лемма доказана.

Из леммы 3 следует, что решение $\overline{u}(x,t),\ 0 \le x \le 1,\ t \ge t_0$, задачи (3.1)–(3.4) является классическим, а согласно теореме единственности, приведенной в [6, гл. 3, § 1, п. 6, с 193], оно единственно.

Теперь введем функцию $\overline{U}(x,t)$, определенную формулой

$$\overline{U}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & 0 \le x \le 1, \quad 0 \le t \le t_0, \\ \overline{u}(x,t), & 0 \le x \le 1, \quad t > t_0. \end{cases} \tag{3.18}$$

где $u(x,t)$ — решение задачи (1.1)–(1.4), а $\overline{u}(x,t)$ — решение задачи (3.1)–(3.4).

В силу теоремы 1 и леммы 3 решение $\overline{U}(x,t),\ 0 \le x \le 1,\ t \ge 0$, комбинированной задачи является классическим, а также

$$\overline{U}(x,t),\ \frac{\partial \overline{U}(x,t)}{\partial x} \in C([0,1]\times[0,\infty)), \qquad \frac{\partial^2 \overline{U}(x,t)}{\partial x^2},\ \frac{\partial \overline{U}(x,t)}{\partial t} \in C((0,1)\times[0,\infty)). \tag{3.19}$$

Ввиду (3.19), с учетом теоремы единственности, сформулированной в [6, гл. 3, § 1, п. 6, с. 193], это решение будет единственно.

Пусть

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x}, & 0 \le t \le t_0, \\ \dfrac{\partial \overline{u}(0,t)}{\partial x}, & t > t_0, \end{cases} \tag{3.20}$$

где $u(x,t)$ — решение задачи (1.1)–(1.4), а $\overline{u}(x,t)$ — решение задачи (3.1)–(3.4).

Из теоремы 1 и леммы 3 следует, что $g(t) \in C[0,\infty)$.

4. Постановка первой краевой задачи для уравнения теплопроводности на полосе $[0,1]\times[0,\infty)$

Решение этой задачи обозначим через $U(x,t), \quad 0 \le x \le 1, \quad t \ge 0$, оно будет удовлетворять системе

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \tag{4.1}$$

$$U(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \tag{4.2}$$

$$U(0,t) = 0, \quad t \ge 0, \tag{4.3}$$

$$U(1,t) = q(t), \qquad t \geq 0, \tag{4.4}$$

где

$$q(t) = \begin{cases} q_1(t), & 0 \leq t \leq t_0, \\ q_1(t_0), & t > t_0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Из (4.1)–(4.5) следует, что решение $U(x,t)$ этой задачи на множестве $[0,1] \times [0,t_0]$ будет совпадать с решением $u(x,t)$ задачи (1.1)–(1.4). Кроме того, для любого $\overline{t} > t_0$ функция $q(t)$ будет удовлетворять условиям (1.5) на отрезке $[0,\overline{t}]$.

Таким образом, из теоремы 1, примененной к задаче (4.1)–(4.5), следует, что решение $U(x,t)$ этой задачи будет классическим, удовлетворяющим условию

$$U(x,t), \ \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \in C([0,1] \times [0,\infty)), \qquad \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}, \ \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} \in C((0,1) \times [0,\infty)).$$

5. Постановка задачи, обратной к задаче (4.1)–(4.5)

Предположим, что в системе (4.1)–(4.5) функция $q(t)$, определенная формулами (4.4), (4.5), не известна, а вместо нее дана функция $g(t)$, заданная формулой (3.20).

Требуется, используя функцию $g(t)$, определить функцию $q(t)$ из системы (4.1)–(4.3) и

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = g(t), \quad t \geq 0. \tag{5.1}$$

Теперь сформулируем некоторые свойства продолженной задачи, которые будут использованы в дальнейшем при доказательстве теоремы единственности решения обратной задачи (1.1)–(1.3), (2.1), (2.2).

Лемма 4. *Пусть* $\overline{U}(x,t)$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t < \infty$, *— решение комбинированной задачи, определенное формулой* (3.18), *а* $U(x,t)$, $0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$, *— решение задачи* (4.1)–(4.4). *Тогда для любых значений* $x \in [0,1]$ *и* $t \geq 0$

$$U(x,t) = \overline{U}(x,t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку из (1.1)–(1.4) и (3.1)–(3.4) вытекает, что $\overline{U}(x,t)$ удовлетворяет уравнению (4.1) на полосе $(0,1) \times (0,\infty)$, начальному условию (4.2) и граничным условиям (4.3) и (4.4), то оно является одним из решений задачи (4.1)–(4.4).

Из соотношений (3.19) следует классичность и единственность этого решения.

Таким образом, для любых значений $0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$ $U(x,t) = \overline{U}(x,t)$.

Тем самым лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть обратная граничная задача* (1.1)–(1.3), (2.1), (2.2) *имеет неединственное решение. Тогда существует функция* $q_0(t) \neq 0$, *удовлетворяющая условиям* (1.5) *и такая, что при подстановке ее в граничное условие* (1.4) *прямой задачи* (1.1)–(1.4) *решение* $\overline{u}(x,t)$, $0 \leq x \leq 1$, $t \geq t_0$, *соответствующей задачи* (3.1)–(3.4) *определяется формулой*

$$\overline{u}(x,t) = 0 \quad \textit{при} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq t_0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что существуют два различных решения $q_{1,1}(t)$ и $q_{1,2}(t)$ обратной граничной задачи (1.1)–(1.3), (2.1), (2.2), удовлетворяющие условию (1.5). Тогда при подстановке их в условие (1.4) прямой задачи (1.1)–(1.4) получим два решения этой задачи — $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, удовлетворяющие условиям (2.1) и (2.2), т. е.

$$u_1(x,t_0) = u_2(x,t_0), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x}, \quad 0 \le t \le t_0. \tag{5.3}$$

Теперь введем новую функцию

$$q_0(t) = q_{1,1}(t) - q_{1,2}(t), \quad 0 \le t \le t_0, \tag{5.4}$$

которая отлична от нуля, т. е.

$$q_0(t) \ne 0. \tag{5.5}$$

При подстановке этой функции в граничное условие (1.4) задачи (1.1)–(1.4) получим решение $u_0(x,t),\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le t_0$, этой задачи, которое ввиду (5.2)–(5.4) будет удовлетворять условиям

$$u_0(x,t_0) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \le x \le 1, \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial u_0(0,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad 0 \le t \le t_0. \tag{5.7}$$

Из (3.1)–(3.4), (5.4)–(5.7) следует, что продолжение этой функции на полосу $[0,1] \times [t_0,\infty)$ будет удовлетворять системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u}_0(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \overline{u}_0(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t \ge t_0, \\ \overline{u}_0(x,t_0) &= 0, \qquad 0 \le x \le 1, \\ \overline{u}_0(0,t) &= \overline{u}_0(1,t) = 0, \quad t \ge t_0. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Очевидно, что $\overline{u}_0(x,t) \equiv 0$ — одно из решений задачи (5.8), а ввиду его классичности и согласно теореме единственности, приведенной в [6, гл. 3, § 1, п. 6, с. 193], это решение единственно, т. е. $\overline{u}_0(x,t) \equiv 0$ на $[0,1] \times [t_0,\infty)$.

Тем самым лемма доказана.

Из решения $\overline{U}(x,t),\ 0 \le x \le 1,\ t \ge 0$, приведенного в формуле (3.18), получаем решение комбинированной задачи

$$\overline{U}_0(x,t) = \begin{cases} u_0(x,t), & 0 \le x \le 1, \quad 0 \le t \le t_0, \\ \overline{u}_0(x,t), & 0 \le x \le 1, \quad t \ge t_0, \end{cases}$$

где $u_0(x,t)$ — решение задачи (1.1)–(1.4), определенное функцией $q_0(t) = u_0(1,t),\ 0 \le t \le t_0$, и удовлетворяющее соотношениям (5.4), (5.5) и (5.7), а $\overline{u}_0(x,t),\ 0 \le x \le 1,\ t \ge 0,$ — решение продолженной задачи, заданное системой (5.8).

Таким образом, из леммы 5 выводим:

$$\overline{U}_0(x,t) = \begin{cases} u_0(x,t), & 0 \le x \le 1, \quad 0 \le t \le t_0, \\ 0, & 0 \le x \le 1, \quad t \ge t_0. \end{cases} \tag{5.9}$$

Теперь перейдем к задаче (4.1)–(4.4), определенной на полосе $[0,1] \times [0,\infty)$.

Из леммы 4 вытекает, что для любых значений $x \in [0,1]$ и $t \ge 0$ выполняется равенство

$$U_0(x,t) = \overline{U}_0(x,t), \tag{5.10}$$

поэтому из (5.9) и (5.10) следует, что

$$U_0(x,t) = \begin{cases} u_0(x,t), & 0 \le x \le 1, \quad 0 \le t \le t_0, \\ 0, & 0 \le x \le 1, \quad t \ge t_0. \end{cases} \tag{5.11}$$

Из (5.11) и леммы 5 имеем $g_0(t) = \dfrac{\partial U_0(0,t)}{\partial x} = 0,\ t \ge 0.$

6. Доказательство единственности решения обратной задачи (1.1)–(1.3), (2.1), (2.2)

Для доказательства теоремы единственности рассмотрим продолжение по времени обратной задачи (1.1)–(1.3), (2.1), (2.2), которая определяется формулами (4.1)–(4.3), (5.1).

Поскольку решение прямой задачи $U_0(x,t)$ является классическим, а также определяется формулой (5.11), то к нему применимо преобразование Фурье по t (см. [2, гл. 5, § 5, с. 105]):

$$\hat{U}_0(x,\tau)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty U_0(x,t)\,e^{-i\tau t}dt,\quad 0\le x\le 1,\quad -\infty<\tau<\infty. \tag{6.1}$$

Для удобства функцию $\hat{U}_0(x,\tau)$ обозначим через $w(x,\tau)$, $0\le x\le 1$, $\tau\in(-\infty,\infty)$; она будет определяться системой

$$\frac{d^2w(x,\tau)}{dx^2}=i\tau w(x,\tau),\quad x\in(0,1),\quad \tau\in(-\infty,\infty), \tag{6.2}$$

где i — мнимая единица,

$$w(0,\tau)=0,\quad -\infty<\tau<\infty, \tag{6.3}$$

$$w'_x(0,\tau)=0,\quad -\infty<\tau<\infty. \tag{6.4}$$

Чтобы свести задачу (6.2)–(6.4) к краевой задаче для системы дифференциальных уравнений первого порядка, сделаем замену

$$w(x,\tau)=y_1(x)+iz_1(x),\quad 0<x<1, \tag{6.5}$$

$$w'_x(x,\tau)=y_2(x)+iz_2(x),\quad 0<x<1. \tag{6.6}$$

Так как τ фиксирована, то для краткости мы ее опускаем в выражениях, стоящих в правых частях равенств (6.5) и (6.6).

Используя (6.5) и (6.6), придем к системе

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1(x)}{dx}&=y_2(x), && 0\le x\le 1,\\
\frac{dy_2(x)}{dx}&=-\tau z_1(x), && 0\le x\le 1,\\
\frac{dz_1(x)}{dx}&=z_2(x), && 0\le x\le 1,\\
\frac{dz_2(x)}{dx}&=\tau y_1(x), && 0\le x\le 1,
\end{aligned} \tag{6.7}$$

а из (6.5) и (6.6) выводим краевые условия для этой системы:

$$y_1(0)=y_2(0)=z_1(0)=z_2(0)=0. \tag{6.8}$$

Из теоремы 3.2, сформулированной и доказанной в [3, гл. 3, § 2, с. 82–83], следует, что для любого $x\in[0,1]$

$$y_1(x)=y_2(x)=z_1(x)=z_2(x)=0. \tag{6.9}$$

Для доказательства единственности решения системы (6.7), (6.8), приведенного в формуле (6.9), покажем, что определитель Вронского $W(\tau)$ для этой системы отличен от нуля для любого $\tau\ne 0$.

Из (6.7) имеем, что для любого $\tau \in (-\infty, \infty)$

$$W(\tau) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \tau & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \tau \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \tau^2 \neq 0 \quad \text{при} \quad \tau \neq 0. \tag{6.10}$$

Из (6.10) следует единственность тривиального решения системы (6.7), (6.8).

Таким образом, для любых $x \in [0, 1]$ и $\tau \neq 0$ имеем $w(x, \tau) = 0$ а $\omega(x, 0) = 0$ продолжим по непрерывности.

Так как преобразование Фурье (см. (6.1)) определяет изометричное отображение $L_2[0, \infty)$ в $L_2(-\infty, \infty)$, то, применяя к функции $w(x, \tau)$ обратное преобразование Фурье, имеем, что для любых $x \in [0, 1]$ и $t \geq 0$

$$U_0(x, t) = 0. \tag{6.11}$$

Из (6.11) следует, что

$$q_0(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, t_0]. \tag{6.12}$$

Равенство (6.12) противоречит условию (5.5) и, в частности, предположению в лемме 5 о неединственности решения обратной задачи (1.1)–(1.3), (2.1), (2.2).

Из леммы 5 и формулы (6.12) вытекает

Теорема 2. *Обратная граничная задача* (1.1)–(1.3), (2.1), (2.2) *в классе классических решений прямой задачи* (1.1)–(1.4), *имеет не более одного решения, удовлетворяющего условию* (1.5).

Заключение

В реальном эксперименте время протекания процесса длится от $[0, t_0]$, но, как известно, возникают проблемы с обоснованием единственности решения обратной граничной задачи теплопроводности. Поэтому рассмотрение процесса на полупрямой $[t_0, \infty)$ является полезным расширением соответствующей задачи, обеспечивающей требуемую точность при ее решении. В данной статье предлагается новая методика, заключающаяся в продолжении обратной граничной задачи на бесконечный временной промежуток. Такой подход позволяет доказать единственность обратной граничной задачи без предположения о выполнении уравнения теплопроводности на замкнутом прямоугольнике $[0, 1] \times [0, T]$, но в то же время данная работа не является обобщением основных результатов исследований [4; 5], поскольку в ней предполагается известным температурное поле при $t = t_0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.** Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена. М.: Наука, 1988. 288 с.
2. **Tanana V.P., Sidikova A.V.** Optimal methods for ill-posed problems with applications to heat conduction. Berlin, Boston: De Gruyter, 2018. 130 p. doi: 10.1515/9783110577211-fm
3. **Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.** Дифференциальные уравнения. Москва: Наука, 1985. 231 с.
4. **Ландис Е.М.** Некоторые вопросы качественной теории эллиптических и параболических уравнений // Успехи мат. наук. 1959. Т. 2, № 1. С. 21–85.
5. **Кабанихин С.И.** Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. 458 с.
6. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.

Поступила 10.10.2023
После доработки 14.11.2023
Принята к публикации 20.11.2023

Танана Виталий Павлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
начальник отдела
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск
e-mail: tananavp@susu.ru

REFERENCES

1. Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Rumyantsev S.V. *Extreme methods for solving ill-posed problems and their applications to inverse heat transfer problems*, NY: Begell House, 1995, 306 p. ISBN: 1-56700-038-X . Original Russian text published in Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Rumyantsev S.V., *Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnykh zadach i ikh prilozheniya k obratnym zadacham teploobmena*, Moscow, Nauka publ., 1988, 288 p.
2. Tanana V.P., Sidikova A.I. *Optimal methods for ill-posed problems with applications to heat conduction*, Berlin, Boston: De Gruyter, 2018, 130 p. doi: 10.1515/9783110577211-fm
3. Tikhonov A.N., Vasilyeva A.B., Sveshnikov A.G. *Differential equations*, Berlin, Springer, 1985, 238 p. ISBN: 9780387130026. Original Russian text published in Tikhonov A.N., Vasilyeva A.B., Sveshnikov A.G., *Differentsial'nye uravneniya*, Moscow, Nauka Publ., 1985, 231 p.
4. Landis E.M. Some questions in the qualitative theory of elliptic and parabolic equations. *Amer. Math. Soc. Transl., Series 2*, 1962, vol. 20, p. 173–238. doi: 10.1090/trans2/020
5. Kabanikhin S.I. *Inverse and ill-posed problems*, Berlin, Boston: De Gruyter, 2011. doi: 10.1515/9783110224016 . Original Russian text published in Kabanikhin S.I., *Obratnye i nekorrektnye zadachi*, Novosibirsk, Sibirskoe Nauchnoe Izd., 2009, 458 p. ISBN: 5-98365-003-3 .
6. Tikhonov A.N., Samarsky A.A. *Equations of mathematical physics*, NY, Dover Publ., 1990. ISBN: 978-0486664224 . Original Russian text published in Tikhonov A.N., Samarsky A.A., *Uravneniya matematicheskoi fiziki*, Moscow, Nauka Publ., 1977. 736 p.

Received October 10, 2023
Revised November 14, 2023
Accepted November 20, 2023

Vitalii Pavlovich Tanana, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., South Ural State University, Chelyabinsk, 454080 Russia, e-mail: tananavp@susu.ru .

Cite this article as: V. P. Tanana. On the uniqueness of the solution to the inverse boundary value problem for the heat equation on a finite time interval. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 1, pp. 223–236 .