ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 1 2024

УДК 519.6

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ ПОИСКА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ[1]

Е. В. Антипина, С. А. Мустафина, А. Ф. Антипин

В статье рассматриваются задачи оптимального управления с терминальными ограничениями и со свободным правым концом траектории. Каждая из задач аппроксимируется конечномерной задачей. Управление, на которое наложено ограничение, определяется в классе кусочно-постоянных функций. Для поиска приближенного решения задач сформулированы численные алгоритмы. В основу итерационных алгоритмов положен метод дифференциальной эволюции. Особенностью предложенного подхода является независимость найденного решения от выбора начального приближения. Приведены результаты численных экспериментов по решению задач оптимального управления. Для каждой задачи рассчитаны субоптимальное управление и соответствующая ему траектория процесса. Проведено сравнение полученных результатов с решениями, найденными с помощью градиентных методов. В результате сравнения продемонстрирована эффективность применения разработанных эволюционных алгоритмов для решения задач оптимального управления.

Ключевые слова: задача оптимального управления, дифференциальная эволюция, терминальные ограничения, эволюционные вычисления.

E. V. Antipina, S. A. Mustafina, A. F. Antipin. Evolutionary algorithms for finding approximate solutions to optimal control problems.

Optimal control problems with terminal constraints and with a free right end of the trajectory are considered. Each of the problems is approximated by a finite-dimensional problem. The control is subject to a constraint and is defined in the class of piecewise constant functions. Numerical algorithms are formulated to find approximate solutions to the problems. The iterative algorithms are based on the differential evolution method. A feature of the proposed approach is that the solution found is independent of the choice of the initial approximation. The results of numerical experiments on solving optimal control problems are presented. For each problem, a suboptimal control and the corresponding trajectory of the process are calculated. The results obtained are compared with solutions found by gradient methods. The comparison proves the effectiveness of using the developed evolutionary algorithms for solving optimal control problems.

Keywords: optimal control problem, differential evolution, terminal constraints, evolutionary calculations. =

MSC: 49M25

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-1-21-31

Введение

При решении сложных практических задач оптимального управления часто бывает достаточно получить приближенное значение управляющего параметра. Это связано с ограниченностью времени для определения управляющего воздействия на управляемый процесс с целью достижения показателей заданного уровня в режиме реального времени. Высокая размерность и нелинейность задач, а также наличие фазовых ограничений создают трудности для получения аналитического решения задачи. Поэтому возникает необходимость в разработке численных методов построения оптимального управления, позволяющих за небольшое время найти приближенное решение задачи.

В настоящее время для решения оптимизационных задач широко применяются методы эволюционного поиска [1;2]. Эволюционные методы не используют в процессе поиска решения ни необходимые, ни достаточные условия оптимальности. С помощью операций улучшения

[1]Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FZWU-2023-0002).

управления, повторяемых в итерационной процедуре, эволюционные методы позволяют прийти к решению, которое может отличаться от оптимального, но при этом является приемлемым с практической точки зрения [3].

К числу методов эволюционного поиска относится метод дифференциальной эволюции. Итерационная работа метода заключается в смене поколений векторов — возможных решений задачи, которые оптимизируются посредством применения операторов мутации, скрещивания и отбора [4;5]. Данный метод имеет меньшее количество настраиваемых параметров, в отличие от других эволюционных методов, таких как генетические алгоритмы, метод искусственных иммунных систем и др., что облегчает его программную реализацию и применение для решения практических задач [6; 7].

Метод дифференциальной эволюции является прямым и не зависит от начального приближения решения задачи. Во-первых, отсутствие чувствительности к начальному приближению достигается за счет того, что на каждой итерации оптимизируется не одно лишь возможное решение; здесь одновременно рассматривается их совокупность, что позволяет увеличить область поиска. Во-вторых, важным механизмом, который препятствует попаданию решения в точку локального экстремума, является оператор мутации.

Большое значение на практике имеют задачи оптимального управления, содержащие ограничения как на управление, так и на фазовые переменные. Исходя из этого цель данного исследования заключается в разработке численных алгоритмов поиска приближенного решения задач оптимального управления с ограничениями на параметр управления, содержащих терминальные ограничения, а также со свободным правым концом траектории на основе метода дифференциальной эволюции.

1. Постановка задачи

Пусть управляемый процесс описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)) \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x^0, \tag{1.2}$$

где $t \in [t_0, T]$ — время, $x(t) \in R^n$ — вектор фазовых переменных, $u(t) \in R^m$ — вектор управляющих функций, $f(t, x(t), u(t))$ — непрерывная вместе со своими частными производными вектор-функция.

Компонентами вектор-функции $u(t)$ являются функции $u_j(t)$, $j = \overline{1, m}$, на значения которых наложены ограничения

$$\alpha_j(t) \leq u_j(t) \leq \beta_j(t), \quad j = \overline{1, m}, \quad t \in [t_0, T]. \tag{1.3}$$

Пусть критерий оптимальности определен как функция конечного состояния системы

$$J(u) = g_0(x(T)). \tag{1.4}$$

Задача оптимального управления со свободным правым концом траектории заключается в поиске вектор-функции $u(t)$, которая удовлетворяет ограничениям (1.3) и доставляет минимум критерию оптимальности (1.4).

Задача оптимального управления с терминальными ограничениями содержит краевые условия в конце процесса управления ($t = T$):

$$g_j(x(T)) = 0, \quad j = \overline{1, p}, \tag{1.5}$$

где $g_j(x(T))$ — непрерывно-дифференцируемые функции по всем аргументам.

Для построения аппроксимирующей задачи на интервале $[t_0, T]$ введем сетку дискретизации с шагом $h = (T - t_0)/N$ и узлами $t_0, t_1, \ldots, t_N$ такими, что $t_0 < t_1 < \ldots < t_N$, $t_N = T$, в которых будем искать управляющие функции $u_j(t)$, $j = \overline{1, m}$. Для получения промежуточных значений управляющих функций используем кусочно-постоянную аппроксимацию

$$u_j(t) = u_j(t_k) = u_{jk}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Ограничения (1.3) примут вид

$$\alpha_{jk} \le u_{jk} \le \beta_{jk}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{0, N-1}, \tag{1.6}$$

где $\alpha_{jk} = \alpha_j(t_k)$, $\beta_{jk} = \beta_j(t_k)$.

Конечномерная задача, аппроксимирующая задачу (1.1)–(1.4), заключается в поиске вектора управления $u(t)$, состоящего из определенных выше кусочно-постоянных функций $u_j(t)$, $j = \overline{1, m}$, при котором с учетом ограничений (1.6) критерий оптимальности

$$J(u) = g_0(x(t_N)) \tag{1.7}$$

достигает наименьшего значения.

Краевые условия (1.5) преобразуются к виду

$$g_j(x(t_N)) = 0, \quad j = \overline{1, p}. \tag{1.8}$$

Тогда конечномерная задача оптимального управления с терминальными ограничениями состоит в определении кусочно-постоянного вектора управления

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t))^T,$$

приводящего с учетом ограничений (1.6) процесс в точку фазового пространства, в которой выполнено условие (1.8) и функционал (1.7) принимает наименьшее значение.

Дифференциальные уравнения (1.1), описывающие управляемый процесс, приближенно заменим разностными, например с помощью численного метода Рунге — Кутты четвертого порядка

$$\begin{aligned}
x(t_{i+1}) &= x(t_i) + h(K_{1i} + 2K_{2i} + 2K_{3i} + K_{4i})/6, \\
K_{1i} &= f(t_i, x_i, u_i), \\
K_{2i} &= f(t_i + h/2, x_i + K_{1i}h/2, u_i), \\
K_{3i} &= f(t_i + h/2, x_i + K_{2i}h/2, u_i), \\
K_{4i} &= f(t_i + h, x_i + K_{3i}, u_i).
\end{aligned} \tag{1.9}$$

2. Алгоритм поиска приближенного решения задачи оптимального управления со свободным правым концом траектории

Сформулируем пошаговый алгоритм решения задачи оптимального управления с ограничением на управление на основе метода дифференциальной эволюции. Работа метода строится на имитации эволюционных процессов, которым подвергаются особи, образующие популяцию [8; 9]. Каждой особи ставится в соответствие значение функции приспособленности, которой является критерий оптимальности (1.7). Задаче на поиск минимума наиболее приспособленной особи соответствует наименьшее значение критерия оптимальности (1.7). Путем применения математических операторов отбора, скрещивания и мутации осуществляются изменение и ротация популяции, в результате чего в новое поколение переходят наиболее приспособленные особи. Итеративная процедура смены популяций продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие окончания работы алгоритма.

В качестве особи рассмотрим параметр управления

$$U = \begin{pmatrix} u_{10} & u_{11} & \dots & u_{1\,N-1} \\ u_{20} & u_{21} & \dots & u_{2\,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m0} & u_{m1} & \dots & u_{m\,N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix},$$

где $u_{jk} = u_j(t_k)$, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{0, N-1}$. Тогда популяцией является набор из P особей $U^l = (u_1^l, u_2^l, \dots, u_m^l)^T$, где l — номер особи в популяции ($l = \overline{0, P}$).

А л г о р и т м поиска приближенного решения задачи оптимального управления (1.1)–(1.4) состоит из следующих шагов.

Ш а г 1. Задать параметры метода дифференциальной эволюции: параметр скрещивания $ps \in [0, 1]$, параметр мутации $pm \in [0.5, 1]$ [7], параметры завершения вычислений d, $\varepsilon > 0$. Установить счетчик итераций $s = 1$.

Ш а г 2. Заполнить начальную популяцию случайными числами из области допустимых значений управления:

$$u_{jk}^l = \alpha_{jk} + q_{jk}(\beta_{jk} - \alpha_{jk}),$$

где $q_{jk} \in [0, 1]$ — случайное число, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{0, N-1}$, $l = \overline{1, P}$.

Ш а г 3. Вычислить значение функции приспособленности (1.7) для каждой особи U^l ($l = \overline{1, P}$), используя разностную схему (1.9).

Ш а г 4. Номеру особи-мишени $mish$ присвоить значение 1.

Ш а г 5. Найти в популяции особь U^* с наилучшим значением функции приспособленности.

Ш а г 6. Выбрать случайным образом две особи U^{num1}, U^{num2}, $U^{num1} \neq U^{num2}$, которые не совпадают ни с особью-мишенью U^{mish}, ни с наиболее приспособленной особью U^*. Применить оператор мутации, в результате создать новую особь

$$U^{mut} := U^* + pm(U^{num1} - U^{num2}).$$

Ш а г 7. Подвергнуть процедуре скрещивания особь, полученную в результате мутации U^{mut}, и особь-мишень U^{mish}. Сформировать новую пробную особь U^{prob} по правилу:

$$U_{jk}^{prob} = \begin{cases} u_{jk}^{mut}, & w_{jk} \leqslant ps, \\ u_{jk}^{mish}, & w_{jk} > ps, \end{cases}$$

где $w_{jk} \in [0, 1]$ — случайное число, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{0, N-1}$.

Ш а г 8. Вычислить значение функции приспособленности для пробной особи U^{prob}.

Ш а г 9. Обновить популяцию. Если $J(U^{prob}) < J(U^{mish})$, то в новую популяцию вместо вектора-мишени поместить пробный вектор, т.е. $U^{mish} := U^{prob}$. Иначе вектор-мишень U^{mish} остается в популяции.

Ш а г 10. Если $mish < P$, то увеличить значение $mish$ на 1 и перейти к шагу 5, иначе перейти к шагу 11.

Ш а г 11. Проверить условие окончания работы алгоритма дифференциальной эволюции. Вычислить расстояние ρ_{ij} между элементами текущей $U^i(s)$ и предыдущей $U^j(s-1)$ популяций ($i, j = \overline{0, P}$), а также изменение функций приспособленности Δ_{ij} ($s \geq 2$):

$$\rho_{ij} = \rho(U^i(s), U^j(s-1)) = \|U^i(s) - U^j(s-1)\|,$$

$$\Delta_{ij} = \Delta(U^i(s), U^j(s-1)) = |J(U^i(s)) - J(U^j(s-1))|, \quad i, j = \overline{0, P}.$$

Если на протяжении d поколений выполнены условия

$$\rho_{ij} < \varepsilon, \Delta_{ij} < \varepsilon, \tag{2.1}$$

т. е. происходит незначительное изменение популяции и функций приспособленности, то остановить поиск решения и выбрать из последней популяции особь U^* с наилучшим значением функции приспособленности, которая будет приближенным решением задачи оптимального управления.

Если условия (2.1) не выполняются, то увеличить счетчик итераций s на 1 и перейти к шагу 4. $\square$

3. Алгоритм поиска приближенного решения задачи оптимального управления с терминальными условиями и ограничениями на управление

Рассмотрим способ решения задачи оптимального управления (1.1)–(1.5) на основе метода штрафных функций и дифференциальной эволюции.

Для перехода от задачи с терминальными ограничениями к задаче без ограничений исследуем вспомогательный функционал:

$$I(u) = J(u) + R(u, z^k) \to \min,$$

где $R(u, z^k) = \dfrac{z^k}{2} \sum\limits_{j=1}^{p} (g_j(x(T)))^2$ — штрафной функционал; z^k — параметр штрафа, вычисляемый на k-й итерации. Если ограничения (1.5) нарушены и $z^k \to \infty$ при $k \to \infty$, то $R(u, z^k) \to \infty$ при $k \to \infty$.

Опишем пошаговую работу алгоритма поиска приближенного решения задачи оптимального управления с терминальными условиями и ограничениями на управление.

Шаг 1. Задать параметры метода штрафов: начальное значение параметра штрафа z^0, параметр увеличения штрафа $b > 1$, счетчик количества итераций $k = 1$, параметр завершения поиска решения $\varepsilon_1 > 0$. Задать параметры метода дифференциальной эволюции.

Шаг 2 — Шаг 11. Совпадают с шагами алгоритма дифференциальной эволюции, описанного в разд. 3.

Шаг 12. Проверить условие окончания работы алгоритма. Если $R(U^*, z^k) > \varepsilon_1$, то увеличить значение штрафа: $z^{k+1} = b \cdot z^k$, $k = k + 1$, — и перейти к шагу 4. Если $R(U^*, z^k) \le \varepsilon_1$, то остановить работу алгоритма. Приближенным решением задачи оптимального управления с терминальными ограничениями будет наиболее приспособленная особь U^* из последней популяции. $\square$

Программная реализация построенных алгоритмов выполнена на языке визуального программирования Delphi для проведения численных экспериментов.

4. Вычислительный эксперимент

4.1. Решение задачи оптимизации химического реактора

Управляемый процесс описывается системой дифференциальных уравнений [10]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(k_1(u) + k_2(u) + k_3(u))x_1, \\ \dot{x}_2 &= k_1(u)x_1 - k_4(u)x_2, \\ \dot{x}_3 &= k_4(u)x_2 - k_5(u)x_3 \end{aligned} \tag{4.1}$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0, \tag{4.2}$$

на интервале $[0, T]$.

Система дифференциальных уравнений (4.1) описывает реакцию трех веществ, концентрации которых обозначены через $x_i(t)$ и являются фазовыми переменными. Интенсивность химических превращений зависит от температуры $u(t)$, которая является управлением. Значения кинетических констант рассчитываются по формуле

$$k_j(u) = C_j \exp\left(\frac{E_j}{R}\left(\frac{1}{658} - \frac{1}{u}\right)\right), \quad j = \overline{1,5},$$

где $C_1 = 1.02$; $C_2 = 0.93$; $C_3 = 0.386$; $C_4 = 3.28$; $C_5 = 0.084$; $E_1 = 16000$; $E_2 = 14000$; $E_3 = 15000$; $E_4 = 10000$; $E_5 = 15000$; $R = 1.9865$ [10].

На управление наложено ограничение

$$473 \leq u(t) \leq 823, \quad t \in [0, T]. \tag{4.3}$$

Необходимо найти управление $u(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющее ограничениям (4.3) и доставляющее максимум функционалу

$$J(u) = x_3(T), \tag{4.4}$$

который выражает максимальный выход целевого продукта реакции.

Основная причина вычислительных трудностей, возникающих при решении задачи оптимального управления (4.1)–(4.4), связана с экспоненциальной зависимостью k_j от u. Поэтому для решения данной задачи применен разработанный эволюционный алгоритм.

Приближенное решение задачи оптимального управления получено для $T = 1$ с помощью эволюционного алгоритма со следующими параметрами: $ps = 0.8$, $pm = 0.7$, $P = 500$, $d = 5$, $\varepsilon = 10^{-4}$. Для численного решения системы дифференциальных уравнений (4.1) с начальными условиями (4.2) применен метод Рунге — Кутты четвертого порядка.

На рис. 1 приведены результаты решения задачи (4.1)–(4.4). Наибольшее значение целевого функционала составляет $J(u) = 0.4376$.

В работе [11] получено решение задачи (4.1)–(4.4) с помощью метода проекции градиента, при этом наибольшее значение критерия оптимальности составило 0.435. То есть вычисленное с помощью эволюционного алгоритма наибольшее значение критерия оптимальности совпадает со значением, рассчитанным с помощью метода проекции градиента, за исключением последнего знака. Однако, учитывая несовершенство вычислительной техники тех лет и возможные ошибки округлений, для надежного сравнения эффективности алгоритмов необходим дополнительный вычислительный эксперимент в целях обеспечения более точного измерения эффективности метода проекции градиента.

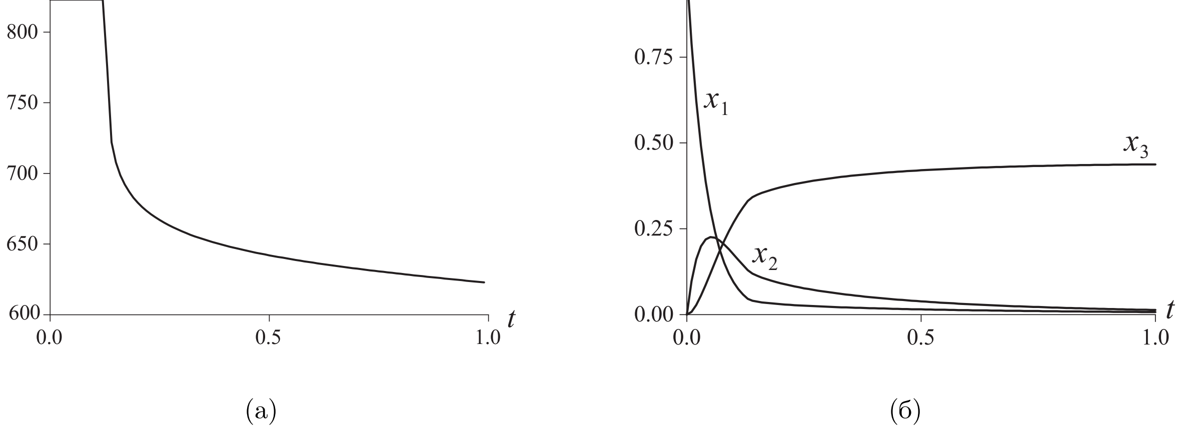


Рис. 1. Решение задачи оптимизации химического реактора: (а) график субоптимального управления; (б) график фазовых координат.

4.2. Решение задачи оптимального управления с разными начальными приближениями

Рассмотрим управляемый процесс, который описывается на интервале $[0,T]$ системой дифференциальных уравнений [12]

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2,\\ \dot{x}_2 &= u - \sin(x_1)\end{aligned} \tag{4.5}$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = 5, \quad x_2(0) = 0. \tag{4.6}$$

Область допустимых значений управления задается неравенством

$$-1 \le u(t) \le 1, \quad t \in [0,T]. \tag{4.7}$$

Требуется определить управление $u(t)$, при котором с учетом ограничений (4.7) целевой функционал

$$J(u) = x_1^2(T) + x_2^2(T) \tag{4.8}$$

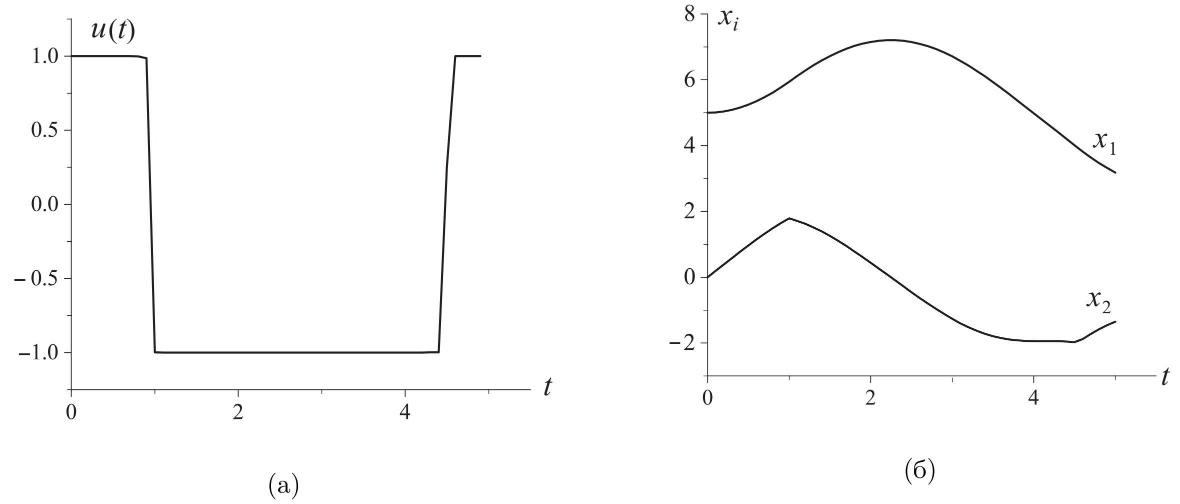
достигает наименьшего значения.

Сформулированная задача решена для $T = 5$. Эволюционный алгоритм применен со следующими параметрами: $ps = 0.8$, $pm = 0.7$, $P = 500$, $d = 5$, $\varepsilon = 10^{-4}$. Рассчитанное приближенное решение задачи (4.5)–(4.8) показано на рис. 2. Наименьшее значение критерия оптимальности (4.8) составляет $J(u) = 11.868$.

Решение задачи (4.5)–(4.8) получено также в работе [12] с помощью метода условного градиента. При начальном приближении $u(t) = 0$ получены наименьшее значение функционала (4.8), равное 11.87, и следующая структура оптимального управления:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 0.98],\\ -1, & t \in (0.98, 4.55],\\ 1, & t \in (4.55, 5]. \end{cases}$$

В работе [12] также отмечено, что при начальном приближении $u(t) = 1$ метод условного градиента остановился в некотором локальном экстремуме $J(u) = 21.82$. Поэтому для исследования эффективности эволюционного алгоритма проведен численный эксперимент по



(а) (б)

Рис. 2. Решение задачи оптимального управления (4.5)–(4.8): а) график субоптимального управления; б) график фазовых координат.

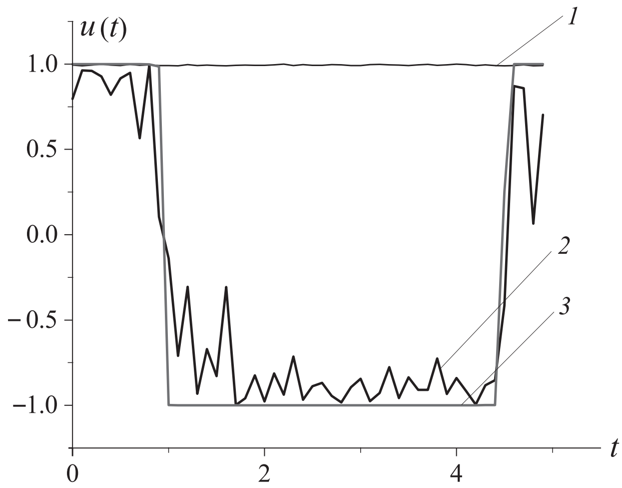


Рис. 3. Итеративное изменение субоптимального управления: *1* — начальное приближение; *2* — приближение после 200 итераций; *3* — приближение после 1000 итераций.

решению задачи оптимального управления с начальным приближением $u(t) = 1$. Для этого начальная популяция заполнялась на втором шаге алгоритма случайными числами не из диапазона, задаваемого неравенством (4.7), а из отрезка $[0.99, 1]$. На рис. 3 кривая 1 является начальным приближением решения задачи и представляет собой наиболее приспособленную особь U^* из начальной популяции. Для данной начальной популяции применен алгоритм с теми же параметрами, что и для первого случая. В ходе итерационного поиска решения получена та же самая структура оптимального управления (см. рис. 3), что и при случайном начальном приближении задачи, задаваемом из диапазона (4.7). Наименьшее значение целевого функционала также определяется как $J(u) = 11.868$.

Приведенный пример показывает, что в отличие от градиентного метода, "застрявшего" в локальном экстремуме, эволюционный алгоритм позволяет преодолеть попадание в локальный экстремум и независимо от начального приближения найти приближенное решение оптимизационной задачи.

4.3. Решение задачи оптимизации химического реактора при наличии терминальных ограничений

Пусть в задаче (4.1)–(4.4) имеется ограничение на значение концентрации x_2 промежуточного вещества в конце реакции:

$$x_2(T) = 0.0437. \tag{4.9}$$

Требуется найти управление $u(t)$ для процесса, описываемого системой дифференциальных уравнений (4.1) с начальными условиями (4.2), при котором с учетом ограничения (4.3) и терминального ограничения (4.9) функционал (4.4) достигает максимального значения.

Для решения сформулированной задачи для $T = 1$ применен алгоритм на основе метода штрафов и метода дифференциальной эволюции со следующими параметрами: $ps = 0.8$, $pm = 0.7$, $P = 500$, $d = 7$, $\varepsilon = \varepsilon_1 = 10^{-5}$, $z^0 = 1$, $b = 15$.

Полученное приближенное решение задачи (4.1)–(4.5), (4.9) представлено на рис. 4.

В табл. 1 приведены значения целевого функционала (4.4) и ограничения (4.9), вычисленные с помощью эволюционного алгоритма и посредством метода проекции градиента [10].

Относительная погрешность отклонения ограничения (4.9) от значения $x_2(T)$, вычисленного с помощью эволюционного алгоритма, составляет 0.013%; для метода проекции градиента погрешность равна 0.007%. Однако наибольшее значение целевого функционала (4.4) превышает его значение, полученное на основе метода проекции градиента.

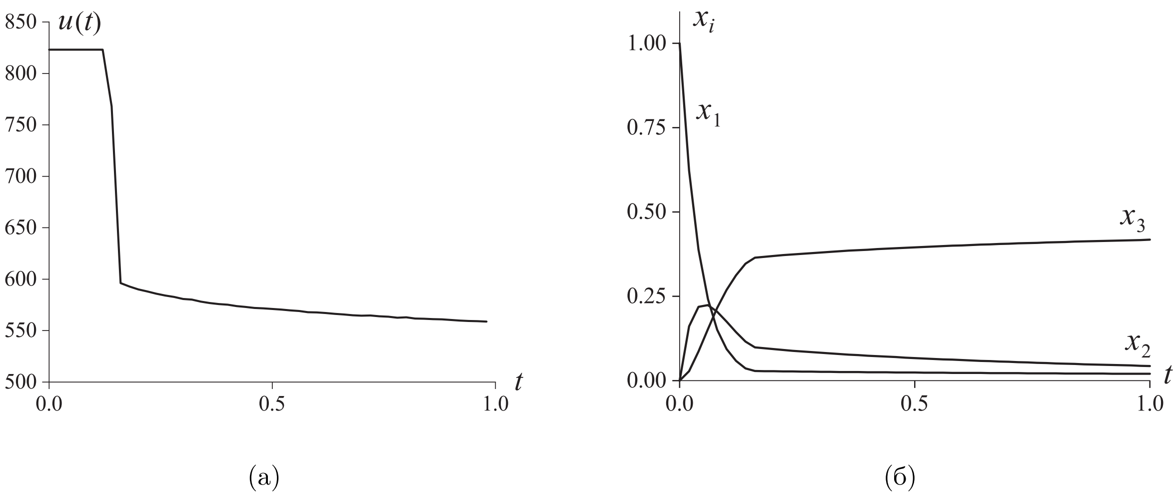


Рис. 4. Решение задачи оптимизации химического реактора с терминальными ограничениями: (а) график субоптимального управления; (б) график фазовых координат

Т а б л и ц а 1

Результаты решения задачи оптимального управления (4.1)–(4.4), (4.9)

Метод решения задачи	$J_{\max}(u)$	$x_2(T)$
Метод проекции градиента	0.35679	0.043697
Метод штрафов+дифференциальная эволюция	0.41532	0.043693

Поэтому можно сделать вывод, что для рассматриваемых задач оптимального управления эволюционные алгоритмы позволяют найти лучшие по сравнению с градиентными методами решения, что свидетельствует о корректной работе разработанных алгоритмов.

Заключение

Таким образом, сформулированные эволюционные алгоритмы можно применять для поиска субоптимального управления как для задач со свободным правым концом траектории, так и для задач с терминальными ограничениями. Разработанные алгоритмы легко реализуемы на практике и применимы для решения задач оптимального управления, в которых отсутствуют такие требования к свойствам целевого функционала, как дифференцируемость, непрерывность и др. Преимущество предложенного подхода состоит в том, что его можно применять для получения субоптимального управления при неизвестном начальном приближении, которое обычно задается исследователем исходя из смысла поставленной задачи.

Предложенные численные алгоритмы реализованы в виде программного средства для решения задач оптимального управления с возможностью настройки их параметров. Получено численное решение задач оптимального управления при наличии ограничений, накладываемых на параметр управления, с терминальными ограничениями и без них. Проведено сравнение найденных приближенных решений задач с решениями, рассчитанными с помощью градиентных методов. В результате сравнения продемонстрирована эффективность применения разработанных эволюционных алгоритмов для решения задач оптимального управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Xue B., Yao X.** A survey on evolutionary computation approaches to feature selection // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. 2016. No. 20. P. 606–626. doi: 10.1109/TEVC.2015.2504420

2. **Mohamed A.W., Mohamed A.K.** Adaptive guided differential evolution algorithm with novel mutation for numerical optimization //Int. J. Machine Learning and Cybernetics. 2019. Vol. 10, no. 2. P. 253–277. doi: 10.1007/s10845-017-1294-6
3. **Пантелеев А.В., Метлицкая Д.В.** Применение генетических алгоритмов с бинарным и вещественным кодированием для приближенного синтеза субоптимального управления детерминированными системами // Автоматика и телемеханика. 2011. № 11. С. 117–129.
4. **Губин П.Ю., Обоскалов В.П.** Применение метода дифференциальной эволюции в задаче планирования ремонтов генерирующего оборудования // Изв. РАН. Энергетика. 2021. № 2. С. 50–64. doi: 10.31857/S0002331021020096
5. **Еремеев А.В. Тюнин Н.Н.** Алгоритм дифференциальной эволюции для оптимизации направленности фазированных антенных решеток // Мат. структуры и моделирование. 2022. № 3. С. 57–68. doi: 10.24147/2222-8772.2022.3.57-68
6. **Ковалевич А.А., Якимов А.И., Албкеират Д.М.** Исследование стохастических алгоритмов оптимизации для применения в имитационном моделировании систем // Информ. технологии. 2011. № 8. С. 55–60.
7. **Storn R., Price K.** Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces // J. Global Optimi. 1997. No. 11. P. 341–359. doi: 10.1023/A:1008202821328
8. **Карпенко А.П.** Эволюционные операторы популяционных алгоритмов глобальной оптимизации // Математика и мат. моделирование. 2018. № 1. С. 59–89. doi: 10.24108/mathm.0118.0000103
9. **Mohamed A.W.** A novel differential evolution algorithm for solving constrained engineering optimization problems // J. Intel. Manufact. 2018. No. 29. P. 659–692. doi: 10.1007/s10845-017-1294-6
10. **Федоренко Р.П.** Приближенные методы решения задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.
11. **Розенброк Х., Сторн С.** Вычислительные методы для инженеров-химиков. М.: Наука, 1973. 444 с.
12. **Тятюшкин А.И.** Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем. Новосибирск: Наука, 1992. 193 с.

Поступила 5.08.2023
После доработки 26.09.2023
Принята к публикации 7.10.2023

Антипина Евгения Викторовна
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Уфимский университет науки и технологий
г. Уфа
e-mail: stepashinaev@ya.ru

Мустафина Светлана Анатольевна
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой мат. моделирования,
проректор по развитию филиальной сети
Уфимский университет науки и технологий
г. Уфа
e-mail: mustafina_sa@mail.ru

Антипин Андрей Федорович
канд. техн. наук, доцент
доцент кафедры прикладной
информатики и программирования
Стерлитамакский филиал
Уфимского университета науки и технологий
г. Стерлитамак
e-mail: andrejantipin@ya.ru

REFERENCES

1. Xue B., Zhang M., Browne W.N., Yao X. A survey on evolutionary computation approaches to feature selection. *IEEE Trans. Evolut. Comput.*, 2016, no. 20, pp. 606–626. doi: 10.1109/TEVC.2015.2504420
2. Mohamed A.W., Mohamed A.K. Adaptive guided differential evolution algorithm with novel mutation for numerical optimization. *Int. J. Machine Learning and Cybernetics*, 2019, vol. 10, no. 2, pp. 253–277. doi: 10.1007/s13042-017-0711-7
3. Panteleev A.V., Metlitskaya D.V. An application of genetic algorithms with binary and real coding for approximate synthesis of suboptimal control in deterministic systems. *Autom. Remote Control*, 2011, Vol. 72, no. 11, pp. 2328–2338. doi: 10.1134/S0005117911110075
4. Gubin P.Y., Oboskalov V.P. Differential evolution method for generation maintenance scheduling. *Izvestiya RAN. Energetika*, 2021, no. 2, pp. 50–64 (in Russian). doi: 10.31857/S0002331021020096
5. Eremeev A.V., Tyunin N.N. Differential evolution for directivity optimization of short-wave phased antenna arrays. *Matematicheskie struktury i modelirovanie*, 2022, no. 3, pp. 57–68 (in Russian). doi: 10.24147/2222-8772.2022.3.57-68
6. Kovalevich A.A., Yakimov A.I., Albkeirat D.M. Research of optimization stochastic algorithms for application in simulations of systems. *Informatsionnye tekhnologii*, 2011, no. 8, pp. 55–60 (in Russian).
7. Storn R., Price K. Differential evolution — a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *J. Global Optim.*, 1997, no. 11, pp. 341–359. doi: 10.1023/A:1008202821328
8. Karpenko A.P. Evolutionary operators for global optimization population-based algorithms. Experience of systematization. *Matematika i matematicheskoe modelirovanie*, 2018, no. 1, pp. 59–89 (in Russian). doi: 10.24108/mathm.0118.0000103
9. Mohamed A.W. A novel differential evolution algorithm for solving constrained engineering optimization problems. *J. Intel. Manufact.*, 2018, no. 29, pp. 659–692. doi: 10.1007/s10845-017-1294-6
10. Fedorenko R.P. *Priblizhennyye metody resheniya zadach optimal'nogo upravleniya* [Approximate methods for solving optimal control problems], Moscow, Nauka Publ., 1978, 488 p.
11. Rosenbrock H.H., Storey C. *Computational techniques for chemical engineers*, Oxford, Pergamon, 1966. Translated to Russian under the title *Vychislitel'nyye metody dlya inzhenerov-khimikov*, Moscow, Nauka Publ., 1968, 444 p.
12. Tyatyushkin A.I. *Chislennyye metody i programmnyye sredstva optimizatsii upravlyayemykh sistem* [Numerical methods and software for optimization of controllable systems], Novosibirsk, Nauka Publ., 1992, 193 p.

Received August 5, 2023
Revised September 26, 2023
Accepted October 7, 2023

Funding Agency: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (code FZWU-2023-0002).

Evgenia Viktorovna Antipina, Cand. Phys.-Math. Sci., Ufa University of Science and Technology, Ufa, 450076 Russia, e-mail: stepashinaev@ya.ru

Svetlana Anatolyevna Mustafina, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Ufa University of Science and Technology, Ufa, 450076 Russia, e-mail: mustafina_sa@mail.ru

Andrey Fedorovich Antipin, Cand. Techn. Sci., Sterlitamak Branch of Ufa University of Science and Technology, Sterlitamak, 453103 Russia, e-mail: andrejantipin@ya.ru

Cite this article as: E. V. Antipina, S. A. Mustafina, A. F. Antipin. Evolutionary algorithms for finding approximate solutions to optimal control problems. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 1, pp. 21–31 .