ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 1 2024

УДК 512.54

# О ГРУППАХ С ФРОБЕНИУСО-ЭНГЕЛЕВЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ[1]

**А. И. Созутов**

Найден ряд свойств периодических и смешанных групп с *фробениусо-энгелевыми* элементами (леммы разд. 2 и теорема 1). Полученные результаты используются для описания смешанных и периодических групп с конечными элементами, насыщенных конечными группами Фробениуса. Доказано, что бинарно конечная группа, насыщенная конечными группами Фробениуса, является группой Фробениуса с локально конечным дополнением (теорема 2). В теореме 3 установлено, что в насыщенной конечными группами Фробениуса примитивно бинарно конечной группе $G$ без инволюций характеристическая подгруппа $\Omega_1(G)$, порожденная всеми элементами простых порядков из $G$, является периодической группой Фробениуса с ядром $F$ и локально циклическим дополнением $H$. При этом любая максимальная периодическая подгруппа $T$ группы $G$ является группой Фробениуса с ядром $F$ и дополнением $T\cap N_G(H)$. Приведен ряд примеров периодических не локально конечных и смешанных групп, удовлетворяющих теореме 3.

Ключевые слова: группы Фробениуса, конечные, энгелевые, фробениусовые, фробениусо-энгелевы элементы, насыщенность.

**A. I. Sozutov. On groups with Frobenius–Engel elements.**

A number of properties of periodic and mixed groups with Frobenius–Engel elements are found (Lemmas in Sect. 2 and Theorem 1). The results obtained are used to describe mixed and periodic groups with finite elements saturated with finite Frobenius groups. It is proved that a binary finite group saturated with finite Frobenius groups is a Frobenius group with locally finite complement (Theorem 2). Theorem 3 establishes that in a saturated Frobenius group of a primitive binary finite group $G$ without involutions the characteristic subgroup $\Omega_1(G)$ generated by all elements of prime orders from $G$ is a periodic Frobenius group with kernel $F$ and locally cyclic complement $H$. Moreover, any maximal periodic subgroup $T$ of $G$ is a Frobenius group with kernel $F$ and complement $T\cap N_G(H)$. A number of examples of periodic non-locally finite and mixed groups satisfying Theorem 3 are given.

Keywords: Frobenius groups, finite elements, Engel elements, Frobenius elements, Frobenius–Engel elements, saturation.

**MSC:** 20E25

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2024-30-1-213-222

## Введение

Элемент $a$ группы $G$ называется *энгелевым* [1, с. 54], если для любого элемента $b\in G$ существует такое зависящее от него натуральное число $n=n(b)$, что выполняется равенство $[\ldots[[b,a],a],\ldots,a]=[b,{}_n a]=1$. Элемент $a$ группы $G$ назовем *фробениусо-энгелевым*, если любые два элемента из $a^G$ порождают либо нильпотентную подгруппу, либо конечную группу Фробениуса. Неединичный элемент $a$ группы $G$ будем называть по типу подгрупп $L_g=\langle a,a^g\rangle$, где $g\in G\setminus N_G(\langle a\rangle)$: называем элемент $a$ *конечным*, если подгруппы $L_g$ конечны; *конечным фробениусовым*, если подгруппы $L_g$ — конечные группы Фробениуса; *конечным фробениусо-абелевым*, если каждая из подгрупп $L_g$ конечна и либо группа Фробениуса, либо абелева; *конечным фробениусо-энгелевым*, если каждая из подгрупп $L_g$ конечна и либо группа Фробениуса, либо нильпотентна. Иногда используем в терминах дополнительное слово “*почти*”. Напомним, что выражение “почти для всех” означает “для всех, кроме, быть может, конечного числа”. Так, например, элемент $a$ группы $G$ *почти фробениусо-абелев* [2, с. 125], если почти

[1]Исследования поддержаны Российским научным фондом, проект № 19-71-10017.

для любого элемента $a^g$, где $g \in G$, подгруппа $L_g = \langle a, a^g \rangle$ является или абелевой, или группой Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle a \rangle$. Заметим, что фробениусов, или энгелев элемент — частные случаи фробениусо-энгелева элемента.

Неединичные элементы $a, b$ группы $G$ удовлетворяют условию $(a, b)$-конечности, если все подгруппы вида $\langle a, b^g \rangle$ $(g \in G)$ конечны. Полупрямое произведение $G = F \leftthreetimes H$ мы называем *группой Фробениуса с дополнением* $H$ *и ядром* $F$, если $H \cap H^g = 1$ для любого элемента $g \in G \setminus H$ и $F = G \setminus \bigcup_{g \in G} g^{-1} H^{\#} g$.

В работе найден ряд свойств периодических и смешанных групп с фробениусо-энгелевыми элементами. Получена следующая теорема 1, которая применяется для изучения бинарно конечных и примитивно бинарно конечных групп, насыщенных конечными группами Фробениуса (см. [3–5]).

**Теорема 1.** *Пусть в группе $G$ без инволюций и без локально конечного радикала, насыщенной конечными группами Фробениуса, выполняется $(a, b)$-условие конечности, где $a$ и $b$ — конечные элементы различных простых порядков $p$ и $q$, элемент $a$ фробениусо-энгелев, элемент $b$ энгелев и не перестановочен с каждым элементом из $a^G$. Тогда $G = F \leftthreetimes N_G(\langle a \rangle)$ и $F \leftthreetimes \langle a \rangle$ — группа Фробениуса с дополнением $\langle a \rangle$ и периодическим ядром $F$, содержащим элемент $b$.*

Группа $G$ *насыщена группами из множества* $\mathfrak{X}$, если любая конечная подгруппа из $G$ содержится в подгруппе группы $G$, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{X}$; множество $\mathfrak{X}$ называют *насыщающим* для $G$ (см. [6]). В последние годы бурное развитие получило исследование групп, насыщенных простыми группами (см. [7–12]). Периодическая группа, в которой любые два элемента порождают конечную подгруппу, называется *бинарно конечной.* Следуя В. П. Шункову, группу, в которой любые два элемента простых порядков порождают конечную подгруппу, назовем *примитивно бинарно конечной.*

Теорема 2 дает положительный ответ на вопрос 5 из [4, Question 5].

**Теорема 2.** *Бинарно конечная группа, насыщенная конечными группами Фробениуса, является группой Фробениуса с локально конечным дополнением.*

Локально конечны ли группы из теоремы 2, нам неизвестно (см. также [13, Question 6.56 a)]). Ряд дополнительных свойств групп из теоремы можно найти в исследованиях [2; 4; 5; 14].

**Теорема 3.** *В насыщенной конечными группами Фробениуса примитивно бинарно конечной группе $G$ без инволюций характеристическая подгруппа $\Omega_1(G)$, порожденная всеми элементами простых порядков из $G$, является периодической группой Фробениуса с ядром $F$ и локально циклическим дополнением $H$. Любая максимальная периодическая подгруппа $T$ группы $G$ — это группа Фробениуса с ядром $F$ и дополнением $T \cap N_G(H)$.*

Примеры не локально конечных периодических групп и смешанных групп, удовлетворяющих условиям и заключению теоремы 3, приведены в разд. 3 работы.

## 1. Определения, используемые результаты, примеры

Группа, в которой каждый элемент простого порядка конечен, называется *слабо сопряженно бипримитивно конечной.* В произвольной группе $G$ через $\Omega_1(G)$ обозначаем характеристическую подгруппу, порожденную всеми элементами простых порядков из $G$.

Наиболее часто используемый в работе результат следует из [2, теорема 3.1] и может быть сформулирован так:

**Предложение 1.** *Если $a$ — конечный (почти) фробениусовый элемент группы $G$ порядка $|a| > 2$, то $G = F \leftthreetimes N_G(\langle a \rangle)$, $\langle a^G \rangle = F \leftthreetimes \langle a \rangle$ — группа Фробениуса с периодическим ядром $F$ и дополнением $\langle a \rangle$ и $L_f = \langle a, a^f \rangle = \langle a, f \rangle$ для любого $f \in F$ (либо $|a^G| < \infty$).*

Сформулируем еще два используемых результата из [2].

**Предложение 2** [2, теорема 4.1]. *Если $a$ — фробениусо-абелев элемент группы $G$ и $a^2 \neq 1$, то либо $\langle a^G \rangle$ — абелева группа, либо множество фробениусовых подгрупп с неинвариантным множителем $\langle a \rangle$ в группе $G$ обладает единственным максимальным по включению элементом $T$ и $\langle a^G \rangle$ — прямое произведение всех сопряженных с $T$ подгрупп группы $G$.*

**Предложение 3** [2, теорема 4.2]. *Если $a$ — почти фробениусо-абелевый элемент группы $G$ и $a^2 \neq 1$, то либо $\langle a^G \rangle$ — группа с конечными классами сопряженных элементов, либо множество фробениусовых подгрупп с неинвариантным множителем $\langle a \rangle$ в группе $G$ обладает единственным максимальным по включению элементом $T$ и $\langle a^G \rangle$ — прямое произведение всех сопряженных с $T$ подгрупп группы $G$.*

**Предложение 4** [3, теорема 1]. *Пусть периодическая группа $G$ с нетривиальным локально конечным радикалом $R$ содержит конечный не энгелев элемент $a$ простого порядка и насыщена конечными группами Фробениуса. Если $a \in R$, то $G = F \rtimes H$ — группа Фробениуса с ядром $F < R$ и дополнением $H$, где $H = N_G(\langle a \rangle)$. Если $a \notin R$, то $G = F \rtimes H$, $(G, H)$ — пара Фробениуса и $F \rtimes \langle a \rangle$ — группа Фробениуса с ядром $F > R$ и дополнением $\langle a \rangle$.*

Приведем также основные, хорошо известные, свойства конечных групп Фробениуса [2;14], наиболее часто используемые в тексте.

**Предложение 5.** *Пусть $G = F \rtimes H$ — конечная группа Фробениуса без инволюций с ядром $F$ и дополнением $H$. Тогда $F$ и $H$ — холловские, сильно изолированные подгруппы группы $G$, $F$ — нильпотентная группа, силовские $p$-подгруппы в $H$ циклические, подгруппа $\Omega_1(H)$ циклическая и $H$ — либо циклическая, либо метациклическая группа.*

**Предложение 6.** *Любая собственная подгруппа $L$ (локально) конечной группы Фробениуса $G = F \rtimes H$ содержится либо в $F$ и нильпотентна, либо — в одном из дополнений или $L$ — группа Фробениуса с ядром $L \cap F$ и дополнением $L \cap H^x$ (для некоторого $x \in G$).*

Приведем примеры смешанных и периодических не локально конечных групп, удовлетворяющих условиям лемм и теорем работы.

Необходимость дополнительных условий конечности в леммах и теоремах иллюстрируют примеры свободных произведений $G = \prod^*_{L \in \mathfrak{X}} L$, где $\mathfrak{X}$ — множество произвольных групп, насыщенных конечными группами Фробениуса, $|\mathfrak{X}| \geq 2$. Поскольку конечные подгруппы в свободных произведениях сопряжены с подгруппами сомножителей [1, с. 211], то группы $G$ насыщены конечными группами Фробениуса (в более общем смысле: свойства насыщенности сомножителей наследуются их свободным произведением).

Особую роль в доказательствах работы играют подгруппы $H$, в которых все элементы простых порядков порождают локально циклическую подгруппу $\Omega_1(H)$. Это характеристическое свойство дополнений Фробениуса, не содержащих подгрупп, изоморфных группе $SL_2(3)$. Для каждой периодической группы $H$ с локально циклической подгруппой $\Omega_1(H)$ и любого простого числа $q \notin \pi(H)$ существуют слабо сопряженно бипримитивно конечные группы Фробениуса $F \rtimes H$ с элементарным абелевым $q$-ядром $F$ и дополнением $H$ (см., например, [2, теорема 5.2], [4, Example 3]).

Если $A$ — периодическая локально циклическая группа и $\{H_j \mid j \in J,\ |J| \geq 2\}$ — множество не обязательно периодических групп, в которых $H_j \neq \Omega_1(H_j) \simeq A$, то свободное произведение $H$ (групп $H_j$) с обьединенной подгруппой $A$ [1, с. 219] также обладает свойством $\Omega_1(H) \simeq A$ и является смешанной группой. Для любого простого числа $q \notin \pi(H)$ существует смешанная группа $G = F \rtimes H$, насыщенная конечными группами Фробениуса [2, теорема 5.2]. При этом в $G$ любая максимальная периодическая $T$ является группой Фробениуса с ядром $F$ и дополнением $T \cap H$.

## 2. Некоторые свойства групп с фробениусо-энгелевыми элементами

На протяжении всего раздела $G$ — группа без инволюций и локально конечных нормальных подгрупп, насыщенная конечными группами Фробениуса, $\mathfrak{X}$ — насыщающее множество, $\mathfrak{X}(K)$ — множество всех подгрупп группы $G$, содержащих $K$ и изоморфных группам из $\mathfrak{X}$, а $\mathfrak{F}$ — множество всех конечных фробениусовых подгрупп группы $G$. Как и в работах [4; 5], для любой группы Фробениуса $L \leq G$ ее ядро обозначаем через $F_L$, а подходящее по смыслу текста дополнение — через $H_L$. Запись $K \leq H_L$ означает, что $K$ содержится в некотором дополнении $H_L$ группы $L$.

**Лемма 1.** *Локально конечная подгруппа $M$ группы $G$ может принадлежать только одному из следующих типов.*

1. *$M$ — локально нильпотентная группа.*
2. *Неабелева группа $M = A \leftthreetimes B$, где $A$ и $B$ — холловские в $M$ локально циклические группы и подгруппа $\Omega_1(M)$ является локально циклической;*
3. *$M$ — группа Фробениуса с нильпотентным ядром $F_M$ и дополнением $H_M$, причем $H_M$ — либо локально циклическая группа (и типа 1), либо группа типа 2 леммы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что любая локально конечная подгруппа в $G$, содержащая группу Фробениуса, очевидно насыщена конечными группами Фробениуса, и, значит, сама является группой Фробениуса [3, лемма 1] и имеет тип 3 леммы. Если подгруппа $M$ не содержит конечных фробениусовых подгрупп, то каждая конечная подгруппа из $M$ содержится либо в ядре некоторой подгруппы $L \in \mathfrak{X}(1)$ и $M$ — типа 1 леммы (локально нильпотентна), либо в дополнении подходящей подгруппы $L \in \mathfrak{X}(1)$. Во втором случае $M$ либо локально циклическая (и типа 1), либо типа 2 леммы. □

**Лемма 2.** *Любая конечная подгруппа $L = \langle a, a^g \rangle$, где $a$ — элемент простого порядка $p$ из $G$ и $g \in G \setminus N_G(\langle a \rangle)$, является либо $p$-группой, либо группой Фробениуса с дополнением $\langle a \rangle$, и любой конечный элемент простого порядка фробениусо-энгелевый. Любая конечная подгруппа с тривиальным центром из $G$ — группа Фробениуса.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Лемма следует из пп. 1, 3 леммы 1. □

Пусть $a$ — конечный элемент простого порядка $p$ из $G$ и $D_a = a^G$. Через $P_a$ (соответственно $F_a$) обозначим множество элементов $x$ из $D_a$, для которых $L_x = \langle a, x \rangle$ — $p$-группа (соответственно $L_x$ — группа Фробениуса). Согласно лемме 2 $D_a = P_a \cup F_a$.

**Лемма 3.** *Если множества $P_a \setminus \langle a \rangle$ и $F_a$ непусты, то $P_a$ содержит бесконечно много элементов $x$, для которых $p$-подгруппы $L_x = \langle a, x \rangle$ не абелевы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что $a$ — фробениусо-абелев элемент группы $G$. Тогда по предложению 2 либо $\langle a^G \rangle$ — абелева группа, либо множество фробениусовых подгрупп с неинвариантным множителем $\langle a \rangle$ в группе $G$ обладает единственным максимальным по включению элементом $T$ и $\langle a^G \rangle$ — прямое произведение всех сопряженных с $T$ подгрупп группы $G$. Первый случай невозможен ввиду единичности локально конечнного радикала группы $G$, а во втором случае в $G$ появляются конечные подгруппы вида $\langle a \rangle \times L$, где $L$ — конечная группа Фробениуса, что противоречит условию насыщенности.

Допустим, что $a$ — почти фробениусо-абелевый элемент группы $G$. Тогда по предложению 3 либо $\langle a^G \rangle$ — группа с конечными классами сопряженных элементов, либо множество фробениусовых подгрупп с неинвариантным множителем $\langle a \rangle$ в группе $G$ обладает единственным максимальным по включению элементом $T$ и $\langle a^G \rangle$ — прямое произведение всех сопряженных с $T$ подгрупп группы $G$. Как и выше, оба случая невозможны. Отсюда заключаем, что если множество $P_a \setminus \langle a \rangle$ в группе $G$ не пусто, то множество элементов $x \in P_a$, для которых конечная $p$-подгруппа $L_x = \langle a, a^x \rangle$ не абелева, бесконечно. □

Неединичный элемент $a$ группы $G$ с собственной подгруппой $H$ называется *почти $H$-фробениусовым*, если почти для всех элементов $a^g$, где $g \in G \setminus H$, подгруппы $L_g = \langle a, a^g \rangle$ являются группами Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle a \rangle$ [2, с. 86].

**Лемма 4.** *Если $G$ слабо сопряженно бипримитивно конечна и в $G$ есть почти $H$-фробениусовый элемент $a$, то $\Omega_1(G)$ является периодической группой Фробениуса с ядром $F$ и локально циклическим дополнением $A$ и любая максимальная периодическая подгруппа $T$ группы $G$ — это группа Фробениуса с ядром $F$ и дополнением $T \cap N_G(A)$.*

Доказательство. По теореме 3.5 из [2] либо $|a^G| < \infty$, либо $G = F \leftthreetimes N_G(\langle a \rangle)$ и $F \leftthreetimes \langle a \rangle$ — группа Фробениуса с ядром $F$ и дополнением $\langle a \rangle$. В первом случае по лемме Дицмана нормальная в $G$ подгруппа $\langle a^G \rangle$ конечна, что невозможно по условиям. Следовательно, $F \leftthreetimes \langle a \rangle$ — группа Фробениуса с ядром $F$ и дополнением $\langle a \rangle$. Покажем, что $A = \Omega_1(N_G(\langle a \rangle))$ — локально циклическая группа и $F \leftthreetimes A$ — группа Фробениуса с ядром $F$ и дополнением $A$.

Не ограничивая общности, будем считать, что элемент $a$ имеет простой порядок $p$. Ввиду конечности элемента $a$ в $G$ для любого $c \in F$ подгруппа $\langle a, a^c \rangle$ конечна, является группой Фробениуса и $\langle a, a^c \rangle = \langle a, c \rangle$. Допустим, что $L = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$ — группа Фробениуса, где $b$ — элемент простого порядка $q \neq p$ из $N_G(\langle a \rangle)$. Если $c$ — неединичный элемент из $C_F(b)$, то $\langle a, b, c \rangle$ — конечная группа. Но такая группа не вложима в конечную группу Фробениуса; противоречие. Значит, $C_F(b) = 1$ и $C_{G_1}(b) = \langle b \rangle$, где $G_1 = FL$. По предложению 1 $G_1 = F_1 \leftthreetimes \langle b \rangle$ — группа Фробениуса с ядром $F_1$, содержащим элемент $a$. По [2, теорема 5.11] $a$ содержится в бесконечной локально конечной $b$-допустимой подгруппе $M \leq F_1$, которая нильпотентна (теорема Томпсона — Хигмена). Но тогда $C_F(a) \neq 1$; противоречие.

Следовательно, $ab = ba$ для любого элемента $b$ простого порядка $q \neq p$ из $N_G(\langle a \rangle)$, $\Omega_1(N_G(\langle a \rangle)) \leq C_G(a)$ и в $N_G(\langle a \rangle)$ нет конечных фробениусовых подгрупп. Если $bc = cb$, где $c \in F^{\#}$, то $\langle a, b, c \rangle = \langle b \rangle \times \langle a, c \rangle$, что противоречит условию насыщенности. Значит, $C_F(b) = 1$ и по предложению 1 $F \leftthreetimes \langle b \rangle$ — группа Фробениуса. Отсюда следует, что $b$ — $H_1$-фробениусовый элемент, где $H_1 = N_G(\langle a \rangle)$, и $G = F_1 \leftthreetimes N_G(\langle b \rangle)$. При этом $F \leq F_1$ и ввиду симметричности $F_1 \leq F$. Отсюда $F_1 = F$ и $N_G(\langle a \rangle) = N_G(\langle b \rangle)$.

Из доказанного следует, что подгруппа $\Omega_1(H)$ абелева и $F \leftthreetimes \Omega_1(H) = \Omega_1(G)$ — периодическая группа Фробениуса. Согласно условию насыщенности в $\Omega_1(H)$ нет элементарных абелевых подгрупп ранга 2 и $\Omega_1(H)$ — локально циклическая группа. Для любого элемента $b$ простого порядка из $\Omega_1(H)$ смежный класс $bF$ совпадает с классом $b^F$. Если $y$ — произвольный элемент конечного порядка из $G \setminus F$, то некоторая его степень $y^n$ принадлежит классу $bF$ некоторого простого порядка из фактор-группы $G/F$ и в силу доказанного выше $y \in \cup_{x \in F} H^x$. Следовательно, любая периодическая подгруппа вида $G_1 = F \leftthreetimes H_1$, где $H_1 = H \cap G_1$, является группой Фробениуса с ядром $F$ и дополнением $H_1$. $\square$

**Утверждение 1.** *Если некоторая не циклическая силовская $p$-подгруппа $P$ группы $G$ конечна, то $N_G(P) = F \leftthreetimes H$ — группа Фробениуса с ядром $F$ и конечным дополнением $H$, где либо $F = P$, либо $F = P \times C$, $C = O_{p'}(F)$.*

Доказательство. По условиям утверждения $P \leq L \in \mathfrak{X}(P)$, и понятно, что $P \leq F_L$ и $L \leq N_G(P)$. Пусть $K$ — произвольная конечная подгруппа из $N_G(P)$ и $T = PK$. В соответствии с условием насыщенности $T \leq M \in \mathfrak{X}(P)$. Как и выше, $P \leq F_M$, $P$ нормальна в $M$ и $M \leq N_G(P)$. Значит, $N_G(P)$ насыщена конечными группами Фробениуса и согласно предложению 4 $N_G(P) = F \leftthreetimes H$ — это группа Фробениуса с ядром $F$ и конечным дополнением $H$. Понятно также, что либо $F = P$, либо $F = P \times C$, где $C = O_{p'}(F)$. $\square$

**Утверждение 2.** *Если $a, b$ — конечные энгелевы элементы простых порядков $p, q$ из $G$ и $p \neq q$, то подгруппы $P = \langle a^G \rangle$ и $Q = \langle b^G \rangle$ поэлементно перестановочны и либо $P \cap Q = 1$, либо подгруппа $P \cap Q \leq Z(\langle a^G, b^G \rangle)$ абелева и не имеет кручения. В централизаторе $C_G(x)$ произвольного неединичного элемента $x$ конечного порядка группы $G$ нормальные замыкания* *любых двух конечных в $C_G(x)$ элементов разных простых порядков поэлементно перестановочны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $x \in a^G$, $y \in b^G$, то $L_x = \langle x, x^y \rangle$ — (конечная) $p$-группа, $L_y = \langle y, y^x \rangle$ — (конечная) $q$-группа и, поскольку $x^{-1}y^{-1}xy \in L_x \cap L_y = 1$, $xy = yx$. Значит, подгруппы $P = \langle a^G \rangle$ и $Q = \langle b^G \rangle$ поэлементно перестановочны и подгруппа $A = P \cap Q \leq Z(\langle a^G, b^G \rangle)$ абелева. По предположению $G$ не содержит локально конечных нормальных подгрупп, отсюда либо $A = 1$ и $\langle P, Q \rangle) = P \times Q$, либо $A$ — группа без кручения.

Пусть $x$ — неединичный элемент конечного порядка из $G$. Понятно, что в его централизаторе $C_G(x)$ нет конечных фробениусовых подгрупп, поэтому согласно лемме 2 каждый конечный элемент простого порядка из $C_G(x)$ энгелев. Как и выше, заключаем, что нормальные замыкания любых двух конечных в $C_G(x)$ элементов разных простых порядков поэлементно перестановочны. □

**Утверждение 3.** *Пусть $N$ — подгруппа группы $G$ и $a \in N_G(N)$ — конечный в $G_1 = \langle a, N \rangle$ элемент простого порядка $p \notin \pi(N)$. Тогда либо $G_1 = N \times \langle a \rangle$, либо $G_1 = F \leftthreetimes N_{G_1}(\langle a \rangle)$ и $F \leftthreetimes \langle a \rangle$ — группа Фробениуса с периодическим ядром $F \leq N$ и дополнением $\langle a \rangle$. Если, дополнительно, $N$ нормальна в $G$ и элемент $a$ конечен в $G$, то $a$ — фробениусовый элемент группы $G$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $N \nleq C_G(a)$. Ввиду условий для любого $g \in N \setminus N_G(\langle a \rangle)$ подгруппа $L_g = \langle a, a^g \rangle$ конечна и $L_g = (N \cap L_g) \leftthreetimes \langle a \rangle$, где $N \cap L_g$ — $p'$-группа. Согласно лемме 2 $L_g = F_g \leftthreetimes \langle a \rangle$ — группа Фробениуса с дополнением $\langle a \rangle$. Применяя предложение 1, получаем $G_1 = F \leftthreetimes N_{G_1}(\langle a \rangle)$.

Пусть $N$ нормальна в $G$ и элемент $a$ конечен в $G$. Если второе положение утверждения 3 не верно, то в $G$ есть элементарная абелева $p$-группа $L = \langle a, a^g \rangle \neq \langle a \rangle$, $|L| = p^2$. Очевидно, что подгруппа $F$ допустима относительно $a^g$, и легко убедиться, что $C_F(a^g) = 1$ и $F \leftthreetimes \langle a^g \rangle$ — группа Фробениуса с дополнением $\langle a^g \rangle$. Это возможно только в случае $C_L(F) = \langle c \rangle \neq 1$. Но тогда для $f \in F^\#$ подгруппа $K = \langle a, f, c \rangle$ конечна и не вложима в конечную группу Фробениуса. Однако это противоречит условию насыщенности, что и доказавает утверждение. □

**Утверждение 4.** *В слабо сопряженно бипримитивно конечном нормализаторе $G_1 = N_G(F_L)$ ядра $F_L$ любой конечной фробениусовой подгруппы $L \in \mathfrak{F}$ характеристическая подгруппа $\Omega_1(G_1)$ является периодической группой Фробениуса $\Omega_1(G_1) = F_1 \leftthreetimes \langle h \rangle$ с ядром $F_1 \geq F_L$ и циклическим дополнением $\langle h \rangle \geq \Omega_1(H_L)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Группа $G_1$ содержит фробениусову подгруппу $M = F_L \leftthreetimes H_M$, ядро $F_M$ которой совпадает с $F_L$, а подгруппа $\Omega_1(H_M)$ имеет наибольший возможный порядок. Пусть $a \in H_M$ — элемент простого порядка $p$, конечный в $G_1$, $g \in G_1 \setminus N_{G_1}(\langle a \rangle)$ и $L_g = \langle a, a^g \rangle$. Подгруппа $F_L L_g$ конечна и по условию насыщенности $F_L L_g \leq K \in \mathfrak{X}(F_L)$. Ввиду предложения 6 $L_g \nleq F_K$, $L_g \nleq H_K$ и $L_g = F_g \leftthreetimes \langle a \rangle$ — группа Фробениуса с дополнением $\langle a \rangle$. По предложению 1 $G_1 = F_1 \leftthreetimes H_1$, где $H_1 = N_{G_1}(\langle a \rangle)$, и $F_1 \leftthreetimes \langle a \rangle$ — группа Фробениуса с периодическим ядром $F_1$. Если в $\Omega_1(H_M) \neq \langle a \rangle$, то в $\Omega_1(H_M)$ есть элемент $b$ простого порядка $q \neq p$ и аналогично $G_1 = F_2 \leftthreetimes H_2$, где $H_2 = N_{G_1}(\langle b \rangle)$, и $F_2 \leftthreetimes \langle b \rangle$ — группа Фробениуса с периодическим ядром $F_2$. При этом $C_{F_1}(b) = 1$ (как показано в доказательстве леммы 4) и $F_1 \leq F_2$. Аналогично $F_2 \leq F_1$ и $F_1 = F_2$. Из разложений $G_1 = F_1 \leftthreetimes H_1$ и $G_1 = F_1 \leftthreetimes H_2$ и включения $\Omega_1(H_M) \leq H_1 \cap H_2$ заключаем, что $H_1 = H_2$ и $H_1 = N_{G_1}(\Omega_1(H_M))$. Отсюда следует, что $F_1 \leftthreetimes \Omega_1(H_M)$ и $F_1 \leftthreetimes H_M$ — группы Фробениуса с общим ядром $F_1$ и дополнениями $\Omega_1(H_M)$ и $H_M$. Кроме того, подгруппа $\Omega_1(H_M) = \langle h \rangle$ циклическая (предложение 5) и, как установлено выше, фробениусова подгруппа $F_1 \leftthreetimes \langle h \rangle$ нормальна в $G_1$. Докажем, что $\langle h \rangle = \Omega_1(H_M) = \Omega_1(H_1)$.

Предположим, что $b$ — элемент простого порядка $q$ из $H_1 \setminus \Omega_1(H_M)$. В силу доказанного выше подгруппа $S = \langle a, b \rangle$ конечна и имеет порядок $pq$ (здесь $a$ — произвольный элемент простого порядка $p$ из $\Omega_1(H_M)$). Равенство $p = q$ невозможно, поскольку конечная подгруппа $F_L S$ не вложима в конечную группу Фробениуса. Значит, $q \notin \pi(F_L)$. Равенство $bc = cb$ для некоторого $c \in F_1^{\#}$ также невозможно, поскольку конечная подгруппа $\langle a, b, c\rangle$ не вложима в конечную группу Фробениуса. Следовательно, $C_{F_1}(b) = 1$ и из конечности элемента $b$ в $G_1$ вытекает, что $F_1 \leftthreetimes \langle b\rangle$ — группа Фробениуса с ядром $F_1$, дополнением $\langle b\rangle$ и $q \notin \pi(F_1)$ (предложение 1). Но тогда $F_L S$ — группа Фробениуса с дополнением $S$ и по теореме Бернсайда $ab = ba$. Ввиду произвольности $a$ из $\langle h\rangle$ подгруппа $K = \langle b, h\rangle$ циклическая и $F_L \leftthreetimes K$ — группа Фробениуса с дополнением $K$, что противоречит выбору подгрупп $M$ и $H_M$. Таким образом, $\langle h\rangle = \Omega_1(H_M) = \Omega_1(H_1)$, при этом очевидно, что $\langle h\rangle \geq \Omega_1(H_L)$, и утверждение доказано. □

**Лемма 5.** *Подгруппа* $\Omega_1(G)$ *насыщена конечными группами Фробениуса. Теоремы* 2, 3 *верны для группы* $G$ *тогда и только тогда, когда они верны для подгруппы* $\Omega_1(G)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условиям теоремы 1 для конечной подгруппы $K$ из $\Omega_1(G)$ имеем $K \leq L \in \mathfrak{X}(1)$ и либо $K \leq \Omega_1(L) \leq \Omega_1(G)$, либо $K \leq \Omega_1(L) \cdot K \leq \Omega_1(G)$, поскольку $\Omega_1(L) \in \mathfrak{X}(1)$. Следовательно, для группы $\Omega_1(G)$ выполняется условие насыщенности конечными группами Фробениуса (возможно, с другим насыщающим множеством). И если теорема верна для группы $G$, то она очевидно верна и для подгруппы $\Omega_1(G)$.

Пусть $T = \Omega_1(G)$ есть группа Фробениуса $T = F_T \leftthreetimes H_T$. В силу [2, теорема 5.3] и условия насыщенности $\Omega_1(H_L)$ — локально циклическая группа. По лемме Фраттини $G = F_T \leftthreetimes H$, где $H = N_G(H_T)$. Согласно определению подгруппы $\Omega_1(G)$ все элементы простых порядков из $H$ содержатся в $H_T = \Omega_1(H)$. Отсюда выводим, что $(G_1, H_1)$ — пара Фробениуса для любой периодической подгруппы $G_1 = F_T \leftthreetimes H_1$ и для любых $h \in H_1$, $f \in F_T$ элемент $hf$ в некоторой степени $n$ принадлежит смежному классу $aF_T$, где $a$ — элемент простого порядка из $H_T$. Отсюда $(hf)^n = at$, где $t \in F_T$, и поскольку $F_T \leftthreetimes \langle a\rangle$ — группа Фробениуса, то $at = s^{-1}as$ и $hf \in H_1^s$, где $s \in F_T$. Значит, $G_1 \setminus F_T^{\#} = \cup_{g \in G_1} H_1^g$ и $G_1 = F_T \leftthreetimes H_1$ — группа Фробениуса. □

## 3. Доказательство теорем

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Пусть $x \in a^G$, $y \in b^G$ — произвольные элементы. По условиям подгруппы (по лемме 3) $L_{xy} = \langle x, y\rangle$, $L_x = \langle y, y^x\rangle$ конечны, $L_x$ — $q$-группа, $x^{-1}y^{-1}xy$ — $q$-элемент, а $L_{xy}$ — группа Фробениуса с дополнением $\langle x\rangle$ и ядром, содержащим элементы $x^{-1}y^{-1}xy$ и $y$. Поэтому $xy, yx \in a^G$, $a^G b^G = b^G a^G = a^G$ и $Ba^G = a^G B = a^G$, где $B = \langle b^G\rangle$. Отсюда следует, что $C_B(a)$ либо единичная группа, либо имеет период $p$.

Допустим, что $1 \neq c \in C_B(a)$, $|c| = p$. Так как $af, afc \in a^G$ для любого $f \in B$, то подгруппа $L = \langle af, afc\rangle = (L \cap B) \leftthreetimes \langle af\rangle$ конечна и, очевидно, является $p$-группой. Значит, $\langle c, c^{af}\rangle = \langle c, c^f\rangle$ — конечная $p$-группа для любого $f \in B$ и $c$ — конечный энгелев элемент группы $B$. По утверждению 2 подгруппы $c^B$ и $B$ поэлементно перестановочны, что влечет $\langle c^B\rangle \leq Z(B)$. Но ввиду условий теоремы $Z(B) = 1$; противоречие.

Таким образом, $C_B(a) = 1$. По предложению [1] $B \leftthreetimes \langle a\rangle$ — группа Фробениуса с ядром $B$ и дополнением $\langle a\rangle$ и для любого $f \in B$ подгруппа $\langle a, a^f\rangle = \langle a, f\rangle$. В частности, $B$ — периодическая группа и $p \notin \pi(B)$. Если для некоторого элемента $s \in a^G \setminus \langle a\rangle$ конечная подгруппа $\langle a, s\rangle$ является $p$-группой, то в ней найдется элемент $x \in a^G$, для которого $P = \langle a, x\rangle = \langle a\rangle \times \langle x\rangle$. Ввиду доказанного выше для любого $f \in B^{\#}$ подгруппа $M = \langle af, x\rangle$ конечна, $M \geq \langle x, x^f\rangle = \langle x, f\rangle$ и $M = \langle a, x, f\rangle = (M \cap B) \leftthreetimes P$. Отсюда следует, что $M = \langle a, f, x\rangle$ и не $p$-группа и не группа Фробениуса; противоречие условиям теоремы. Значит, подгруппа $\langle a, s\rangle$ не может быть $p$-группой и согласно условиям $a$ — фробениусовый элемент группы $G$. По предложению 1 $G = F \leftthreetimes N_G(\langle a\rangle)$, $F \leftthreetimes \langle a\rangle$ — группа Фробениуса с периодическим ядром $F$ и дополнением $\langle a\rangle$. Очевидно, что $B \leq F$ и $b \in F$.

Теорема 1 доказана.

**Лемма 6.** *Теорема* 2 *верна, когда в группе* $G$ *есть инволюции.*

Доказательство. Пусть исследуемая группа $G$ имеет 2-ранг один и $i$ — инволюция из $G$. Если в $G$ есть конечный элемент $a$ четного порядка, большего двух, то по [4, теорема 1] $G = F \leftthreetimes C_G(i)$, где $i$ — инволюция из $\langle a\rangle$, $F$ — периодическая абелева группа, инвертируемая инволюцией $i$, и для любой периодической подгруппы $T \leq C_G(i)$ произведение $F \leftthreetimes T$ является группой Фробениуса с ядром $F$ и дополнением $T$. И в этом случае теорема 2 верна. Если в $G$ нет элемента конечного четного порядка, большего 2, то $i$ инвертирует каждый элемент $b$ из $G$ нечетного порядка. В частности, любая подгруппа, порожденная парой элементов нечетных порядков, допустима относительно $i$, является абелевой подгруппой нечетного порядка и $G = F \leftthreetimes \langle i\rangle$ — группа Фробениуса с периодическим абелевым ядром $F$ и дополнением $\langle i\rangle$. И теорема 2 верна для групп 2-ранга один.

Пусть 2-ранг $G$ больше либо равен двум. Тогда по [4, теорема 3] $G = F \leftthreetimes H$, где $F$ — периодическая группа, $\Omega_1(H)$ — локально циклическая группа без инволюций, и $\Omega_1(G) = F \leftthreetimes \Omega_1(H)$ — группа Фробениуса с ядром $F$ и дополнением $\Omega_1(H)$. Легко убедиться, что теорема 2 верна и в этом случае (лемма 5).

**Лемма 7.** *Теоремы* 2, 3 *верны, если* $a^G \cap C_G(a) \subseteq \langle a\rangle$ *для некоторого элемента* $a$ *простого порядка* $p$ *из* $G$, *в частности когда* $G$ *— группа* $p$*-ранга* 1 *для некоторого* $p \in \pi(G)$.

Доказательство. В случае $G = N_G(\langle a\rangle)$ теорема 2 следует из предложения 4. Пусть $G \neq N_G(\langle a\rangle) = H$. Тогда для любого $g \in G \setminus H$ подгруппа $L_g = \langle a, a^g\rangle$ конечна, $|\mathrm{Syl}_p(L_g)| > 2$ и $a \notin O_p(L_g)$. По условиям $L_g \leq M \in \mathfrak{X}(L_g)$ в силу предложения 6 $L_g = F_g \leftthreetimes \langle a\rangle$ — группа Фробениуса с ядром $F_g$ и дополнением $\langle a\rangle$. По предложению 1 $G = F \leftthreetimes H$, где $F = \cup_{g\in G\setminus H} F_g$ и $G = F \leftthreetimes \langle a\rangle$ — периодическая группа Фробениуса с ядром $F$ и дополнением $\langle a\rangle$. Следовательно, для любого элемента $b$ конечного порядка из $H$ подгруппа $L = \langle a, b\rangle$ конечна и ввиду условий леммы $\langle a\rangle$ — единственная подгруппа порядка $p$ в $H$.

Допустим, что в $H$ есть элемент $b$ простого порядка $q \neq p$ не перестановочный с $a$, т. е. $L = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$ — группа Фробениуса. Если $c$ — неединичный элемент из $C_F(b)$, то $\langle a, b, c\rangle$ — конечная группа, не вложимая в группу Фробениуса; противоречие. Значит, $C_F(b) = 1$ и $C_{G_1}(b) = \langle b\rangle$, где $G_1 = FL$. Применяя предложение 1, заключаем, что $G_1 = F_1 \leftthreetimes \langle b\rangle$ — группа Фробениуса с ядром $F_1$, содержащим элемент $a$. По [2, теорема 5.11] $a$ содержится в бесконечной локально конечной $b$-допустимой подгруппе $M \leq F_1$, которая в силу теорем Томпсона и Хигмена нильпотентна. Но тогда $C_F(a) \neq 1$; противоречие.

Таким образом, $ab = ba$ для любого элемента $b$ простого порядка $q \neq p$ из $H$, $\Omega_1(H) \leq C_G(a)$ и в $H$ нет конечных фробениусовых подгрупп. Как и выше $C_F(b) = 1$ и $N_G(\langle b\rangle) \leq H$. Действительно, если $bf = fb$ для $f \in F^{\#}$, то $(ab)^f = a^f b$ и $M = \langle a, f, b\rangle = \langle b\rangle \times L$, где $L = \langle a, f\rangle = \langle a, a^f\rangle$ — конечная группа Фробениуса. Однако $M$ не может быть подгруппой конечной группы Фробениуса вопреки условию насыщенности. Из $C_F(b) = 1$ следует, что для любого $f \in F^{\#}$ конечная подгруппа $L = \langle b, b^f\rangle$ является группой Фробениуса с ядром $L \cap F$ и дополнением $\langle b\rangle$. По предложению 1 $F \leftthreetimes \langle b\rangle$ — группа Фробениуса с ядром $F$ и дополнением $\langle b\rangle$ и $\Omega_1(H) \leq N_G(\langle b\rangle)$. Отсюда выводим, что подгруппа $\Omega_1(H)$ абелева и $F \leftthreetimes \Omega_1(H) = \Omega_1(G)$ — периодическая группа Фробениуса. В силу условия насыщенности в $\Omega_1(H)$ нет элементарных абелевых подгрупп ранга 2 и $\Omega_1(H)$ — локально циклическая группа.

Согласно доказанному смежный класс $bF$ совпадает с классом $b^F$. Если $y$ — произвольный элемент конечного порядка из $G \setminus F$, то некоторая его степень $y^n$ принадлежит классу $bF$ некоторого простого порядка $q$ из фактор-группы $G/F$ и с учетом доказанного выше $y \in \cup_{x\in F} H^x$. Следовательно, любая периодическая подгруппа вида $G_1 = F \leftthreetimes H_1$, где $H_1 = H \cap G_1$, является группой Фробениуса с ядром $F$ и дополнением $H_1$. □

Доказательство теоремы 2. По леммам 6 и 7 теорема верна, когда в группе $G$ есть инволюции или $G$ — $p$-группа ранга 1 для некоторого $p \in \pi(G)$. Пусть $a$, $b$ — произвольные не перестановочные элементы различных простых порядков $p$ и $q$ из $G$. Согласно лемме 2 $a$, $b$ — фробениусо-энгелевы элементы в $G$. В силу бинарной конечности группы $G$ и условия насыщенности подгруппа $L = \langle a, b\rangle \in \mathfrak{F}$. Положим для определенности, что $b \in F_L$, тогда $H_L = \langle a\rangle$.

Пусть $c \in C_G(a)$, $|c| = p$ и $M = \langle c, b\rangle$. Если $cb = bc$, то $\langle a, b, c\rangle = \langle c\rangle \times L$, что невозможно в силу условия насыщенности. Ввиду бинарной конечности подгруппа $M$ конечна, и поскольку $bc \neq cb$, то $M$ — группа Фробениуса, и порядок элемента $cb$ равен $p$ или $q$. Подгруппа $K = \langle a, cb\rangle$ содержит элементы $b$ и $c$ и, значит, содержит фробениусовы подгруппы $L$ и $M$, а также элементарную абелеву подгруппу $\langle a, c\rangle$. Но тогда группа $M$ не может быть группой Фробениуса. Следовательно, $G$ — группа $p$-ранга 1, и по лемме 7 $G = F \leftthreetimes H$ — группа Фробениуса. По теореме 5.4 из [2] группа $H$ локально конечна.

Теорема 2 доказана. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. Также, как в доказательстве теоремы 2, устанавливается, что $\Omega_1(G)$ — периодическая группа Фробениуса с дополнением $H = \Omega_1(H)$, при этом согласно предложению 5 и условию насыщенности $H$ — локально циклическая группа. Доказательство теоремы 3 завершает лемма 5.

Отметим, что теоремы 1–3, доказанные в настоящей работе, а также утверждения 1–4, приведенные в разд. 2 , позволяют сделать следующее предположение для дальнейших исследований групп, насыщенных группами Фробениуса.

**Предположение 1.** *Теорема* 3 *справедлива для слабо сопряженно бипримитивно конечных групп.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Курош А.Г.** Теория групп. 3-е изд. Москва: Наука, 1967. 648 с.
2. **Созутов А.И.** О группах, насыщенных конечными группами Фробениуса // Мат. заметки. 2021. Т. 109, № 2. С. 264–275. doi: 10.4213/mzm12763
3. **Попов А.М., Созутов А.И., Шунков В.П.** Группы с системами фробениусовых подгрупп. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2004. 211 с.
4. **Durakov B.E., Sozutov A.I.** On periodic groups saturated with finite Frobenius groups // Bulletin of Irkutsk State University. Ser. Mathematics. Vol. 35. P. 73–86. doi: 10.26516/1997-7670.2021.35.73
5. **Дураков Б.Е., Созутов А.И.** О группах с инволюциями, насыщенных конечными группами Фробениуса // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 6. С. 1256–1265. doi: 10.33048/smzh.2022.63.607
6. **Шлепкин А.К.** О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми группами // Мат. тр. 1998. Т. 1, № 1. С. 129–138.
7. **Маслова Н.В, Шлёпкин А. А.** О группах Шункова, насыщенных почти простыми группами // Алгебра и логика. 2023. Т. 62, № 1. С. 93–101. doi: 10.33048/alglog.2023.62.106
8. **Кухарев А.В., Шлепкин А.А.** Локально конечные группы, насыщенные прямым произведением двух конечных групп диэдра // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2023. Т. 44. С. 71–81. doi: 10.26516/1997-7670.2023.44.71
9. **Шлепкин А.А., Сабодах И.В.** О двух свойствах группы Шункова // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2021. Т. 35. С. 103–119. doi: 10.26516/1997-7670.2021.35.103
10. **Лыткина Д.В., Мазуров В.Д.** О периодических группах, насыщенных конечными простыми симплектическими группами размерности 6 над полями нечетных характеристик // Сиб. мат. журн. 2022. Т 63. № 6. С. 1308–1312. doi: 10.33048/smzh.2022.63.611
11. **Го В. Б., Лыткина Д. В., Мазуров В. Д.** О периодических группах, насыщенных конечными простыми группами $L4(q)$ // Алгебра и логика. 2021. Т 60. № 6. С. 549–556. doi: 10.33048/alglog.2021.60.602
12. **Лыткина Д.В., Мазуров В.Д.** Локальная конечность периодической группы, насыщенной конечными простыми ортогональными группами нечетной размерности // Сиб. мат. журн. 2021. Т 62. № 3. С. 572–578. doi: 10.33048/smzh.2021.62.309
13. *The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory,* 20*th ed.*, eds. V.D. Mazurov, E.I. Khukhro, Novosibirsk: Inst. Math. SO RAN Publ., 2022, 269 p. URL: https://kourovka-notebook.org/ .
14. **Старостин А.И.** О группах Фробениуса // Укр. мат. журн. 1971. Т. 23 № 5. С. 629–639.

Поступила 18.10.2023
После доработки 1.02.2024
Принята к публикации 5.02.2024

Созутов Анатолий Ильич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Сибирский федеральный университет
г. Красноярск
e-mail: sozutov_ai@mail.ru

**REFERENCES**

1. Kurosh A.G. *The theory of groups*. Transl. from the 2nd Russian ed., NY: Chelsea Publishing Co., 1960, vol. 1: 272 p., ISBN: 978-0828401074 , vol. 2: 308 p. ISBN: 978-0821834770 . Original Russian text (3rd ed.) published in Kurosh A.G. *Teoriya grupp*, Moscow: Nauka Publ., 1967, 648 p.
2. Popov A.M., Sozutov A.I., Shunkov V.P. *Gruppy s sistemami frobeniusovykh podgrupp* [Groups with systems of Frobenius subgroups], Krasnoyarsk, Izdat. Poligraf. Tsentr Krasnoyarsk. State Tekh. Univ., 2004, 211 p. ISBN: 5-7636-0654-X .
3. Sozutov A.I. Groups saturated with finite Frobenius groups. *Math. Notes*, 2021, vol. 109, no. 2, pp. 270–279. doi: 10.1134/S0001434621010314
4. Durakov B.E., Sozutov A.I. On periodic groups saturated with finite Frobenius groups. *Izvestiya Irkutsk. Gos. Univ. Ser. Matematika*, 2021, vol. 35, pp. 73–86. doi: 10.26516/1997-7670.2021.35.73
5. Durakov B.E., Sozutov A.I. On groups with involutions saturated by finite Frobenius groups. *Siberian Math. J.*, 2022, vol. 63, no. 6, pp. 1075–1082. doi: 10.1134/S0037446622060076
6. Shlepkin A.K. On certain torsion groups saturated with finite simple groups. *Siberian Adv. Math.*, 1999, vol. 9, no. 2, pp. 100–108.
7. Maslova N.V., Shlepkin A.A. Shunkov groups saturated by almost prime groups. *Algebra i Logika*, 2023, vol. 62, no. 1, pp. 93–101 (in Russian). doi: 10.33048/alglog.2023.62.106
8. Kukharev A.V., Shlepkin A.A. Locally finite groups saturated with direct product of two finite dihedral groups. *Izvestiya Irkutsk. Gos. Univ. Ser. Matematika*, 2023, vol. 44, pp. 71–81 (in Russian). doi: 10.26516/1997-7670.2023.44.71
9. Shlepkin A.A., Sabodakh I.V. Two properties of Shunkov group. *Izvestiya Irkutsk. Gos. Univ. Ser. Matematika*, 2021, vol. 35, pp. 103–119 (in Russian). doi: 10.26516/1997-7670.2021.35.103
10. Lytkina D.V., Mazurov V.D. Periodic groups saturated with finite simple symplectic groups of dimension 6 over fields of odd characteristics. *Siberian Math. J.*, 2022, vol. 63, no. 6, pp. 1117–1120. doi: 10.1134/S0037446622060118
11. Guo W., Lytkina D.V., Mazurov V.D. Periodic groups saturated with finite simple groups $L_4(q)$. *Algebra and Logic*, 2022, vol. 60, no. 6, pp. 360–365. doi: 10.1007/s10469-022-09662-2
12. Lytkina D.V., Mazurov V.D. Locally finite periodic groups saturated with finite simple orthogonal groups of odd dimension. *Siberian Math. J.*, 2021, vol. 62, no. 3, pp. 462–467. doi: 10.1134/S0037446621030095
13. *The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory,* 20*th ed.*, eds. V.D. Mazurov, E.I. Khukhro, Novosibirsk: Inst. Math. SO RAN Publ., 2022, 269 p. Available at: https://kourovka-notebook.org/ .
14. Starostin A.I. On Frobenius groups. *Ukr. Math. J.*, 1971, vol. 23, no. 5, pp. 518–526. doi: 10.1007/BF01091650

Received October 18, 2023
Revised February 1, 2024
Accepted February 5, 2024

**Funding Agency:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 19-71-10017).

*Anatoly Ilich Sozutov,* Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: sozutov_ai@mail.ru .

Cite this article as: A. I. Sozutov. On groups with Frobenius–Engel elements. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 1, pp. 213–222 .