ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 1 2024

УДК 517.983.23

О ПРОИЗВЕДЕНИИ ФУНКЦИЙ ОТ ОПЕРАТОРА

М. А. Рекант

В банаховом пространстве заданы линейный плотно определенный оператор A и некоторая замкнутая область $\overline{G}$, лежащая в его регулярном множестве и содержащая неположительную вещественную полуось. Предполагается известной степенная оценка нормы резольвенты этого оператора в данной области G. В предположении замкнутости операторов e^{uA} при $u > 0$, заданных степенными операторными рядами, вводятся и изучаются два класса функций этих операторов, построенных на базе интегральной формулы Коши по соответствующим скалярным аналитическим в дополнении G функциям, модули которых имеют показательную оценку в дополнении G. Если оператор A удовлетворяет наложенным в статье ограничениям, то классы функций от A являются расширениями соответствующих классов операторных функций, изучаемых совместно Л. Ф. Коркиной и автором ранее. Установлено мультипликативное свойство исследуемых в статье функций от оператора. Рассмотрен вопрос об их обратимости.

Ключевые слова: функции от оператора, операторная экспонента, мультипликативное свойство.

M. A. Rekant. On the product of operator functions.

In a Banach space, a linear densely defined operator A and some closed domain $\overline{G}$ lying in the regular set of A and containing the nonpositive real semiaxis are given. A power estimate for the norm of the resolvent of A in the domain G is assumed to be known. Under the assumption that the operators e^{uA} defined by power operator series are closed for $u > 0$, two classes of functions of this operator are introduced and studied. The construction of these classes is based on the integral Cauchy formula with corresponding scalar functions analytic in the complement of G and such that their modules have an exponential estimate in the complement of G. If the operator A satisfies certain constraints, then the introduced classes of functions of A are extensions of the corresponding classes of operator functions, which we studied earlier jointly with L. F. Korkina. The multiplicative property of the operator functions is established, and the question of their invertibility is considered.

Keywords: functions of an operator, operator exponent, multiplicative property.

MSC: 47A05

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-1-203-212

Введение

Пусть X — комплексное банахово пространство, A — действующий в нем плотно определенный линейный оператор. Различными способами (при соответствующих предположениях) строятся и изучаются классы функций оператора A. Эти функции применяются при решении конкретных математических задач. Основополагающее значение в создании теории функционального исчисления операторов имеют работы [1–3]. Фундаментальные труды [4–7] внесли большой вклад в развитие теории дробных степеней операторов. В [4–6] содержатся приложения этой теории. Публикации [8; 9] посвящены конкретным задачам с использованием операторных функций. Нами перечислена лишь малая часть источников, где рассматриваются такие функции. Один из способов их построения связан с соответствующими аналитическими в некоторой области скалярными функциями и интегральной формулой Коши (см., например, [1; 4–6]). При этом норма резольвенты оператора и модули скалярных функций имеют степенной порядок роста на бесконечности. В русле исследований такого рода операторных функций лежат и наши, в соавторстве с Л. Ф. Коркиной, работы (см., например, [10]). В данной статье аналогичным способом вводятся и изучаются два новых класса операторных функций, соответствующих скалярным аналитическим функциям, модули которых могут расти на бесконечности быстрее степенных, но не быстрее показательных. Для этого используются свойства операторных экспонент, рассмотренные, например, в [11]. На эти классы операторных функций распространяется мультипликативное свойство.

1. Основные обозначения и предположения

Пусть кривая $\mathcal{L} = \mathcal{L}(p, q)$ $(p > 0,\ q > 0)$ лежит в комплексной плоскости (λ) и задана уравнением

$$\beta^2 = 2p\alpha \ln \frac{\alpha}{q} \quad (\alpha = \operatorname{Re}\lambda,\ \beta = \operatorname{Im}\lambda,\ \alpha \geq q), \tag{1.1}$$

$G = G(p, q)$ — область с границей $\mathcal{L}$, содержащая 0; обход $\mathcal{L}$ задается так, что область G остается справа; $\overline{G}$ (замыкание G) лежит в регулярном множестве $\rho(A)$ оператора A. Предполагается известной оценка нормы резольвенты $R(\lambda) = R_A(\lambda) = (A - \lambda E)^{-1}$ (E — единичный оператор в X) оператора A в $\overline{G}$: при некоторых $\gamma \leq 1$, $C_0 > 0$, и всех $\lambda \in \overline{G}$

$$\|R(\lambda)\| \leq \frac{C_0}{(|\lambda| + 1)^\gamma}. \tag{1.2}$$

Если B — оператор, действующий в X, то оператор e^B можно определить формулой

$$e^B x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n x}{n!} \tag{1.3}$$

для тех $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D(B^n)$, для которых ряд справа сходится. В частности, $e^{tA} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^n A^n}{n!}$. С другой стороны, при $t > 0$ можно рассмотреть операторы

$$(e^{-tA})_I = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{L}} e^{-t\lambda} R(\lambda)\, d\lambda$$

(см. [10; 11]). Интеграл здесь сходится абсолютно к непрерывному на X оператору.

Пусть $\mathcal{F}_0$ — множество функций, аналитических в $\mathbb{C} \setminus G$, для каждой из которых найдутся такие числа $\sigma \in \mathbb{R}$ и $C > 0$, что при всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus G$ справедливо неравенство $|f(\lambda)| \leq C|\lambda|^\sigma$. При этом для таких чисел $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, для которых

$$\sigma - n < \gamma - 1, \tag{1.4}$$

рассмотрим операторные функции

$$f(A, n) = -\frac{1}{2\pi i} A^n \int\limits_{\mathcal{L}} f(\lambda) \lambda^{-n} R(\lambda)\, d\lambda, \tag{1.5}$$

$$\widetilde{f}(A, n) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{L}} f(\lambda) \lambda^{-n} R(\lambda)\, d\lambda\ A^n \tag{1.6}$$

(условие (1.4) обеспечивает абсолютную сходимость интеграла). Заметим, что в [10] на оператор накладывались менее жесткие ограничения, чем в данной работе, что вызвано необходимостью использования свойств операторных функций e^{uA} и $(e^{-uA})_I$, установленных в [11]. Так же, как и в отношении функции $(e^{-uA})_I$ оператора A в [11], устанавливается, что если A удовлетворяет наложенным в статье ограничениям, то оба определения функций $f(A, n)$ и $\widetilde{f}(A, n)$, введенных формулами (1.5), (1.6) и ранее в [10], при выполнении (1.4) эквивалентны.

Пусть $\overline{n} = \overline{n}(f)$ $(f \in \mathcal{F}_0)$ — наименьшее из чисел $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, удовлетворяющих (1.4). Согласно [10] оператор $f(A, n)$ замкнут и не зависит от $n \geq \overline{n}$, оператор $\widetilde{f}(A, n)$ имеет замыкание, не зависящее от $n \geq \overline{n}$, и при таких n $\widetilde{f}(A, n) \subset f(A, n)$. Следуя [10], полагаем $f(A) = f(A, n)$, $\widetilde{f}(A) = \overline{\widetilde{f}(A, n)}$ $(n \geq \overline{n})$.

Для функции $\varphi \in \mathcal{F}_0$, заданной формулой (которая, в частности, может содержать произведение нескольких функций), введем обозначение: $(\varphi(\lambda))(A) = \varphi(A)$.

Пусть при $t \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(t) = \big\{ f\colon f(\lambda)e^{-t\lambda} \in \mathcal{F}_0 \big\}.$$

Заметим, что $\mathcal{F}(0) = \mathcal{F}_0$, при $s < t \quad \mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ и для $f \in \mathcal{F}(s) \quad \overline{n}(f(\lambda)e^{-t\lambda}) = 0$.

Пусть $s > 0,\ f \in \mathcal{F}(s),\ n \geq \overline{n}(f(\lambda)e^{-s\lambda})$. Положим

$$f(A,s,n) = e^{sA}A^n(f(\lambda)\lambda^{-n}e^{-s\lambda})(A), \quad \widetilde{f}(A,s,n) = (f(\lambda)\lambda^{-n}e^{-s\lambda})(A)A^n e^{sA}.$$

Как уже отмечалось, $f(A,s,n)$ не зависит от $n \geq \overline{n}\ (f(\lambda)e^{-\lambda s})$. При таких n считаем, что $f(A,s) = f(A,s,n)$.

В работе исследуются некоторые свойства этих операторных функций и функций $f(A)$ и $\widetilde{f}(A)$, из них получаемых в дальнейшем.

2. Результаты работы

Утверждение 1. *Пусть операторы e^{uA} $(u > 0)$ замкнуты. Тогда при любых $s,t > 0$ $(n \in \mathbb{N})$*

$$A^n e^{sA} = e^{sA}A^n, \tag{2.1}$$

$$e^{sA}e^{tA} = e^{(s+t)A}, \tag{2.2}$$

$$e^{sA}(e^{-tA})_I = \begin{cases} e^{(s-t)A}, & s > t, \\ \big(e^{-(t-s)A}\big)_I, & s \leq t. \end{cases} \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В [11, следствие 3] установлено, что в условиях утверждения операторы e^{uA} $(u > 0)$ обратимы и

$$(e^{uA})^{-1} = (e^{-uA})_I,$$

т. е. имеет место второе из равенств (2.3) при $t = s$. Там же (утверждение 4) оно было установлено при $s < t$ (без предположения замкнутости операторов e^{uA} при $u > 0$). Соотношения (2.1), (2.2) и первое из соотношений (2.3) получаются с помощью перехода к обратным операторам и с учетом теоремы 3 из [10], утверждения 4 из [11], а также непрерывности операторов A^{-1} и $(e^{-uA})_I$ при $u > 0$:

$$(e^{-uA})_I A^{-n} = (e^{-s\lambda})(A)(\lambda^{-n})(A) = (\lambda^{-n}e^{-s\lambda})(A),$$

$$(e^{-tA})_I(e^{-sA})_I = (e^{-(t+s)A})_I, \quad e^{tA}(e^{-sA})_I = (e^{-(s-t)A})_I, \quad s > t.$$

Утверждение доказано. □

Утверждение 2. *Пусть при некотором $s > 0$ оператор e^{sA} — плотно определенный и операторы e^{uA} при $u > 0$ замкнуты. Тогда при всех $u > 0$ операторы e^{uA} плотно определены.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольно $u > 0$ и такое $n \in \mathbb{N}$, что $ns > u$. Так как оператор e^{sA} замкнут, то он обратим и $(e^{sA})^{-1} = (e^{-sA})_I$ — непрерывный оператор на X, т. е. 0-регулярная точка оператора e^{sA}. Поэтому ([6, с. 30]) оператор $(e^{sA})^n$ также плотно определен и замкнут и согласно (2.2) равен e^{nsA}. Поскольку $\mathcal{D}(e^{uA}) \supset \mathcal{D}(e^{nsA})$ (см. [11, утверждение 2]), то $\overline{\mathcal{D}(e^{uA})} = X$.

Утверждение доказано. □

Следствие 1. *В условиях утверждения 2 при всех $n \in \mathbb{N},\ u > 0$ операторы $A^n e^{uA}$ плотно определены.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следствие выводим из включения $\mathcal{D}(A^n e^{uA}) \supset \mathcal{D}(e^{2uA})$, справедливого при $u > 0,\ n \in \mathbb{N}$ (используются равенство (2.1) и [11, утверждение 2]). $\square$

Лемма. *Пусть $f \in \mathcal{F}_0$, причем оператор $f(A)$ непрерывен на $X,\ t > 0$. Тогда*

$$f(A)e^{tA} \subset e^{tA} f(A). \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливы соотношения

$$f(A)e^{tA} = f(A)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tA)^n}{n!} \subset \sum_{n=0}^{\infty} f(A)\frac{(tA)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}f(A)A^n$$

(включение вытекает из непрерывности $f(A)$). Как доказано в теоремах $1, 3$ из [10], $f(A)A^n \subset A^n f(A)$ $(n \in \mathbb{N})$. Поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}f(A)A^n \subset \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n A^n}{n!}f(A) = e^{tA}f(A),$$

и устанавливается (2.4).

Лемма доказана. $\square$

Утверждение 3. *Пусть $0 \le s < t,\ f \in \mathcal{F}(s),\ m_2 > m_1 \ge \overline{n}(f(\lambda)e^{-s\lambda}),\ n_2 > n_1 \ge 0$. Тогда*

$$\widetilde{f}(A,t,n_2) \subset \widetilde{f}(A,t,n_1) \subset \widetilde{f}(A,s,m_2) \subset \widetilde{f}(A,s,m_1). \tag{2.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеют место соотношения

$$\widetilde{f}(A,t,n_2) = \big(f(\lambda)\lambda^{-n_2}e^{-t\lambda}\big)(A)A^{n_2}e^{tA}$$

$$= \big(f(\lambda)\lambda^{-n_1}e^{-t\lambda}\big)(A)A^{-(n_2-n_1)}A^{n_2}e^{tA} \subset \big(f(\lambda)\lambda^{-n_1}e^{-t\lambda}\big)(A)A^{n_1}e^{tA} = \widetilde{f}(A,t,n_1),$$

т. е. выполнено первое из включений (2.5).

Заменяя n_1 на 0, а n_2 на n_1, получаем

$$\widetilde{f}(A,t,n_1) \subset \widetilde{f}(A,t,0) = \big(f(\lambda)e^{-t\lambda}\big)(A)e^{tA} = \big(f(\lambda)\lambda^{-m_2}e^{-s\lambda}\big)(A)\big(\lambda^{m_2}e^{-(t-s)}\big)(A)e^{tA}$$

$$= \big(f(\lambda)\lambda^{-m_2}e^{-s\lambda}\big)(A)A^{m_2}\big(e^{-(t-s)A}\big)_I e^{tA} \subset \big(f(\lambda)\lambda^{-m_2}e^{-s\lambda}\big)(A)A^{m_2}e^{sA} = \widetilde{f}(A,s,m_2)$$

(последнее включение имеет место по утверждению 4 из [11]), т. е. справедливо второе из включений (2.5).

Наконец, последнее включение в (2.5) устанавливается так же, как и первое.

Утверждение доказано. $\square$

В дальнейшем предполагаем замкнутость операторов e^{uA} при $u > 0$ и их плотную определенность.

Утверждение 4. *Пусть $0 \le s < t,\ f \in \mathcal{F}(s)$. Тогда $f(A,t) = f(A,s)$ и $f(A,s)$ — замкнутый оператор.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $n \ge \overline{n}(f(\lambda)e^{-\lambda s})$ $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ имеют место соотношения

$$f(A,t) = e^{tA}\big(f(\lambda)e^{-t\lambda}\big)(A) = e^{tA}\big(\lambda^n e^{-(t-s)\lambda}\big)(A)\big(f(\lambda)\lambda^{-n}e^{-s\lambda}\big)(A)$$

$$= e^{tA}A^n\big(e^{-(t-s)A}\big)_I\big(f(\lambda)\lambda^{-n}e^{-s\lambda}\big)(A)$$

$$= A^n e^{tA}\big(e^{-(t-s)A}\big)_I\big(f(\lambda)\lambda^{-n}e^{-s\lambda}\big)(A) = A^n e^{sA}\big(f(\lambda)\lambda^{-n}e^{-s\lambda}\big)(A)$$

$$= e^{sA}A^n\big(f(\lambda)\lambda^{-n}e^{-s\lambda}\big)(A) = f(A,s).$$

Здесь использованы равенства (2.1), (2.3), $(\lambda^n)(A) = A^n$ (через A^n обозначена в обычном смысле понимаемая целая степень оператора A) и непрерывность операторов $(\lambda^n e^{-(t-s)\lambda})(A)$, $(f(\lambda)\lambda^{-n}e^{-s\lambda})(A)$.

Оператор $f(A,s) = f(A,t)$ замкнут как произведение замкнутого оператора e^{tA} на непрерывный.

Утверждение доказано. □

Пусть $s \geq 0,\ f \in \mathcal{F}(s)$. Положим

$$f(A) = f(A,s). \tag{2.6}$$

З а м е ч а н и е 1. Поскольку для $s \geq 0,\ f \in \mathcal{F}(s),\ n \geq \overline{n}(f(\lambda)e^{-s\lambda})$ верно включение $\widetilde{f}(A,s,n) \subset f(A)$, то оператор $\widetilde{f}(A,s,n)$ имеет замыкание и $\overline{\widetilde{f}(A,s,n)} \subset f(A)$.

Утверждение 5. *Пусть* $0 \leq s < t,\ f \in \mathcal{F}(s),\ m \geq \overline{n}(f(\lambda)e^{-s\lambda}),\ n \geq 0\ (m,\, n \in \mathbb{N}\cup\{0\})$. *Тогда*

$$\overline{\widetilde{f}(A,t,n)} = \overline{\widetilde{f}(A,s,m)}. \tag{2.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предыдущего утверждения достаточно установить, что

$$\widetilde{f}(A,s,m) \subset \overline{\widetilde{f}(A,t,n)}. \tag{2.8}$$

Возьмем произвольно $x \in \mathcal{D}\big(\widetilde{f}(A,s,m)\big)$ и пусть $w = A^m e^{sA}x$. $\overline{\mathcal{D}(A^{n-m}e^{(t-s)A})} = X$, поэтому найдется такая последовательность $\{w_k\} \subset \mathcal{D}(A^{n-m}e^{(t-s)A})$, что $w_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} w$. Положим $x_k = (e^{-sA})_I A^{-m}w_k$. Тогда $x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (e^{-sA})_I A^{-m}w = x$. При этом

$$A^m e^{sA}x_k = w_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} w = A^m e^{sA}x. \tag{2.9}$$

Так как $\{w_k\} \subset \mathcal{D}(A^{n-m}e^{(t-s)A})$, то $\{x_k\} \subset \mathcal{D}(A^n e^{tA}) = \mathcal{D}\big(\widetilde{f}(A,t,n)\big)$. По утверждению 4 $\widetilde{f}(A,t,n)x_k = \widetilde{f}(A,s,m)x_k$. Далее, из непрерывности оператора $(f(\lambda)\lambda^{-m}e^{-s\lambda})(A)$ и из (2.9) получаем

$$\widetilde{f}(A,s,m)x_k = \big(f(\lambda)\lambda^{-m}e^{-s\lambda}\big)(A)A^m e^{sA}x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \big(f(\lambda)\lambda^{-m}e^{-s\lambda}\big)A^m e^{sA}x = \widetilde{f}(A,s,m)x.$$

Итак,

$$\{x_k\} \subset \mathcal{D}\big(\widetilde{f}(A,t,n)\big), \quad x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x, \quad \widetilde{f}(A,t,n)x_k \longrightarrow \widetilde{f}(A,s,m)x.$$

Поэтому $x \in \mathcal{D}\big(\overline{\widetilde{f}(A,t,n)}\big)$ и $\overline{\widetilde{f}(A,t,n)}x = \widetilde{f}(A,s,m)x$, откуда следует (2.8), а значит, и (2.7).

Утверждение доказано. □

З а м е ч а н и е 2. При $s = t \geq 0,\ f \in \mathcal{F}(s),\ \overline{n}(f(\lambda)e^{-s\lambda}) \leq m < n\ (m,\, n \in \mathbb{N})$ имеет место (2.7).

Д о к а з а т е л ь с т в о замечания полностью аналогично доказательству утверждения 5.

Формула (2.7) позволяет определить оператор $\widetilde{f}(A)$ формулой

$$\widetilde{f}(A) = \overline{\widetilde{f}(A,s,m)} \tag{2.10}$$

для $f \in \mathcal{F}(s),\ m \geq \overline{n}(f(\lambda)e^{-s\lambda})$.

Утверждение 6. *Пусть* $f(\lambda) = \lambda^k e^{s\lambda}\ (s > 0,\ k \in \mathbb{Z})$. *Тогда*

$$f(A) = \widetilde{f}(A) = e^{sA}A^k. \tag{2.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\overline{n} = \overline{n}(f(\lambda)\lambda^{-s\lambda})$, т. е. $\overline{n} = \overline{n}(\lambda^k)$. Выводим соотношения

$$f(A) = f(A, s, \overline{n}) = e^{sA}A^{\overline{n}}\big(f(\lambda)\lambda^{-\overline{n}}e^{-s\lambda}\big)(A) = e^{sA}A^{\overline{n}}\big(\lambda^{k-\overline{n}}\big)(A) = e^{sA}A^{\overline{n}}A^{k-\overline{n}} = e^{sA}A^k.$$

Здесь учтено, что оператор e^{sA} замкнут и что для любого целого n $(\lambda^n)(A) = A^n$. Итак, имеет место равенство $f(A) = A^k e^{sA}$.

Установим второе из равенств (2.11).

Оператор $e^{sA}A^k$ замкнут как обратный к непрерывному $A^{-k}(e^{-sA})_I$. Кроме того,

$$\widetilde{f}(A, s, \overline{n}) = \big(f(\lambda)\lambda^{-\overline{n}}e^{-s\lambda}\big)(A)A^{\overline{n}(s)}e^{sA} = (\lambda^{k-\overline{n}})(A)A^{\overline{n}}e^{sA} = A^{k-\overline{n}}A^{\overline{n}}e^{sA} \subset A^k e^{sA} = e^{sA}A^k,$$

а потому $\widetilde{f}(A) \subset e^{sA}A^k$.

Требуется доказать, что

$$\overline{A^{k-\overline{n}}A^{\overline{n}}e^{sA}} \supset e^{sA}A^k. \tag{2.12}$$

Пусть $x \in \mathcal{D}(e^{sA}A^k)$. Положим $w = e^{sA}A^k x$. Оператор $A^{\overline{n}-k}$ плотно определен. Найдем такую последовательность $\{w_m\} \subset \mathcal{D}(A^{\overline{n}-k})$, что $w_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} w$. Положим $x_m = A^{-k}(e^{-sA})_I w_m$. Тогда $x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} A^{-k}(e^{-sA})_I w = x$. При этом в случае $k \geq 0$

$$\begin{aligned} A^{k-\overline{n}}A^{\overline{n}}e^{sA}x_m &= A^{k-\overline{n}}A^{\overline{n}}e^{sA}A^{-k}(e^{-sA})_I w_m = A^{k-\overline{n}}A^{\overline{n}}e^{sA}(e^{-sA})_I A^{-k}w_m \\ &= A^{k-\overline{n}}A^{\overline{n}}A^{-k}w_m = A^{k-\overline{n}}A^{\overline{n}-k}w_m = w_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} w = e^{sA}A^k x, \end{aligned}$$

а в случае $k < 0$

$$\begin{aligned} A^{k-\overline{n}}A^{\overline{n}}e^{sA}x_m &= A^{k-\overline{n}}A^{\overline{n}}e^{sA}A^{-k}(e^{-sA})_I w_m = A^{k-\overline{n}}A^{\overline{n}}A^{-k}e^{sA}(e^{-sA})_I w_m \\ &= A^{k-\overline{n}}A^{\overline{n}-k}w_m = w_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} w = e^{sA}A^k x. \end{aligned}$$

В результате получим, что $x \in \mathcal{D}\big(\overline{A^{k-\overline{n}}A^{\overline{n}}e^{sA}}\big)$, $\overline{A^{k-\overline{n}}A^{\overline{n}}e^{sA}}x = e^{sA}A^k x$, и, следовательно, справедливо включение (2.12), а значит, и второе из равенств (2.11).

Утверждение доказано. □

Из утверждения вытекает, что в его условиях функциональные определения (2.6) и (2.10) операторной экспоненты эквивалентны ее определению в виде суммы степенного операторного ряда (1.3).

Утверждение 7. *Пусть при некоторых s, $t \geq 0$ $f \in \mathcal{F}(s)$, $g \in \mathcal{F}(t)$. Тогда справедливы соотношения*

$$f(A)g(A) \subset (fg)(A), \tag{2.13}$$

$$\overline{\widetilde{f}(A)\widetilde{g}(A)} \supset (\widetilde{fg})(A). \tag{2.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При достаточно больших m, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\begin{aligned} f(A)g(A) &= A^m e^{sA}\big(f(\lambda)\lambda^{-m}e^{-s\lambda}\big)(A)A^n e^{tA}\big(g(\lambda)\lambda^{-n}e^{-t\lambda}\big)(A) \\ &\subset A^m e^{sA}A^n e^{tA}\big(f(\lambda)\lambda^{-m}e^{-s\lambda}\big)(A)\big(g(\lambda)\lambda^{-n}e^{-t\lambda}\big)(A) \\ &= A^{m+n}e^{(s+t)A}\big(f(\lambda)g(\lambda)\lambda^{-(m+n)}e^{-(s+t)\lambda}\big)(A) = (fg)(A). \end{aligned}$$

Здесь использованы непрерывность операторов $\big(f(\lambda)\lambda^{-m}e^{-s\lambda}\big)(A)$, $\big(g(\lambda)\lambda^{-n}e^{-t\lambda}\big)(A)$, утверждения 1 и 3 из [10] и лемма. В итоге справедливо (2.13).

Аналогично

$$\widetilde{f}(A)\widetilde{g}(A) \supset \widetilde{f}(A, s, m)\widetilde{g}(A, t, n) = \big(f(\lambda)\lambda^{-m}e^{-s\lambda}\big)(A)A^m e^{sA}\big(g(\lambda)\lambda^{-n}e^{-t\lambda}\big)(A)A^n e^{tA}$$

$$\supset \big(f(\lambda)\lambda^{-m}e^{-t\lambda}\big)(A)\big(g(\lambda)\lambda^{-n}e^{-t\lambda}\big)(A)A^m e^{sA}A^n e^{tA}$$
$$= \big(f(\lambda)g(\lambda)\lambda^{-(m+n)}e^{-(s+t)\lambda}\big)(A)A^{m+n}e^{(s+t)A} = (\widetilde{fg})(A, s+t, m+n),$$

откуда следует (с учетом (2.10)), что включение (2.14) справедливо.

Утверждение доказано. □

Утверждение 8. *Пусть $f \in \mathcal{F}_0$, причем оператор $f(A)$ непрерывен, $g \in \mathcal{F}(t)$. Тогда*

$$g(A)f(A) = (fg)(A), \tag{2.15}$$

$$\overline{f(A)\widetilde{g}(A)} = (\widetilde{fg})(A). \tag{2.16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольно такое число $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, что $n \geq \overline{n}(f)$, $n \geq \overline{n}(g(\lambda)e^{-t\lambda})$. Учитывая непрерывность $f(A)$, выводим

$$g(A)f(A) = A^n e^{tA}\big(g(\lambda)\lambda^{-n}e^{-t\lambda}\big)(A)f(A) = A^n e^{tA}f(A)\big(g(\lambda)\lambda^{-n}e^{-t\lambda}\big)(A)$$
$$= A^n e^{tA}A^n\big(f(\lambda)\lambda^{-n}\big)(A)\big(g(\lambda)\lambda^{-n}e^{-t\lambda}\big)(A) = A^{2n}e^{tA}\big(f(\lambda)g(\lambda)\lambda^{-2n}e^{-t\lambda}\big)(A) = (fg)(A),$$

т. е. выполнено (2.15).

Докажем (2.16). По предыдущему утверждению имеет место (2.14). Поэтому для доказательства (2.16) нужно установить (из-за замкнутости оператора $(\widetilde{fg})(A)$), что

$$f(A)\widetilde{g}(A) \subset (\widetilde{fg})(A). \tag{2.17}$$

Возьмем произвольно $x \in \mathcal{D}(\widetilde{g}(A))$, $m \geq \overline{n}(f)$, $n \geq \overline{n}(g(\lambda)e^{-\lambda t})$. В силу равенства

$$\overline{\widetilde{g}(A, t, 2n)} = \widetilde{g}(A)$$

найдется такая последовательность $\{x_k\} \subset \mathcal{D}(\widetilde{g}(A, t, 2n)) = \mathcal{D}(A^{2n}e^{tA})$, что

$$x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x, \quad \widetilde{g}(A, t, 2n)x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{g}(A)x. \tag{2.18}$$

Заметим, что $\{x_k\} \subset \mathcal{D}((\widetilde{fg})(A, t, 2n)) = \mathcal{D}(A^{2n}e^{tA})$. Поскольку по утверждению 3 $\widetilde{g}(A, t, n)x_k = \widetilde{g}(A, t, 2n)x_k$, а также

$$(\widetilde{fg})(A, t, 2n)x_k = \big(f(\lambda)g(\lambda)\lambda^{-2n}e^{-t\lambda}\big)A^{2n}e^{tA}x_k = (f(\lambda)\lambda^{-n})(A)\big(g(\lambda)\lambda^{-n}e^{-t\lambda}\big)(A)A^{2n}e^{tA}x_k$$
$$= (f(\lambda)\lambda^{-n})(A)A^n\big(g(\lambda)\lambda^{-n}e^{-t\lambda}\big)(A)A^n e^{tA}x_k = \widetilde{f}(A, 0, n)\widetilde{g}(A, t, n)x_k = f(A)\widetilde{g}(A, t, 2n)x_k,$$

то с учетом (2.18) и непрерывности $f(A)$

$$(\widetilde{fg})(A)x_k = (\widetilde{fg})(A, t, 2n)x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(A)\widetilde{g}(A)x.$$

Итак,

$$\{x_k\} \subset \mathcal{D}\big((\widetilde{fg})(A)\big), \quad x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x, \quad (\widetilde{fg})(A)x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(A)\widetilde{g}(A)x.$$

Поэтому $x \in \mathcal{D}((\widetilde{fg})(A))$ и $(\widetilde{fg})(A)x = f(A)g(A)x$, т. е. выполнено (2.17), а потому и (2.16).

Утверждение доказано. □

Утверждение 9. *Пусть $f \in \mathcal{F}(s)$, $1/f \in \mathcal{F}(t)$ при некоторых s, $t \geq 0$. Тогда*

$$\Big(\frac{1}{f}\Big)(A)f(A) = E\big|_{\mathcal{D}(f(A))}, \tag{2.19}$$

$$\Big(\frac{1}{\widetilde{f}}\Big)(A)\widetilde{f}(A) = E\big|_{\mathcal{D}(\widetilde{f}(A))}. \tag{2.20}$$

Доказательство. Пусть $u > \max\{s,t\}$, $x \in \mathcal{D}(f(A))$. В этом случае

$$\Big(\frac{1}{f(\lambda)}e^{-\lambda u}\Big)(A)f(A)x = e^{uA}\Big(\frac{1}{f(\lambda)}e^{-\lambda u}\Big)(A)(f(\lambda)e^{-\lambda u})(A)x$$

$$= e^{uA}\Big(\frac{1}{f(\lambda)}e^{-\lambda u}f(\lambda)e^{-u\lambda}\Big)(A)x = e^{uA}e^{-2uA}\Big)_I x = (e^{-uA})_I x.$$

Но $(e^{-uA})_I x \in \mathcal{D}(e^{uA})$ и $\dfrac{1}{f(A)}f(A)x = e^{uA}(e^{-uA})_I x = x$, т. е. (2.19) имеет место.

Возьмем теперь произвольно $x \in \mathcal{D}(\widetilde{f}(A))$. $\widetilde{f}(A) = \overline{\widetilde{f}(A,2u,0)}$, поэтому найдем (это возможно) такую последовательность $\{x_k\} \subset \mathcal{D}(\widetilde{f}(A,2u,0)) = \mathcal{D}(e^{2uA})$, что

$$x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x, \quad \widetilde{f}(A,2u,0)x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{f}(A)x.$$

Поскольку, кроме того,

$$\Big(\widetilde{\frac{1}{f}}\Big)(A,u,0)\widetilde{f}(A,u,0)x_k = \Big(\frac{1}{f(\lambda)}f(\lambda)\Big)(A,2u,0)x_k = E\big|_{\mathcal{D}(e^{2uA})}x_k = x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x,$$

то $\widetilde{f}(A)x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{f}(A)x$, $(\widetilde{1/f})(A)\widetilde{f}(A)x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$, т. е. в силу замкнутости оператора $(\widetilde{1/f})(A)$ $\widetilde{f}(A)x \in \mathcal{D}\big((\widetilde{1/f})(A)\big)$ и $(\widetilde{1/f})(A)\widetilde{f}(A)x = x$, а потому справедливо соотношение (2.20).

Утверждение доказано. □

Следствие 2. *Пусть при некоторых $s,t \ge 0$ $f \in \mathcal{F}(s)$, $1/f \in \mathcal{F}(t)$. Тогда операторы $f(A)$ и $\widetilde{f}(A)$ обратимы и*

$$(f(A))^{-1} = \Big(\frac{1}{f}\Big)(A), \quad \big(\widetilde{f}(A)\big)^{-1} = \Big(\frac{1}{\widetilde{f}}\Big)(A).$$

Замечание 3. Утверждения 6–8 при $s = t = 0$ имеются в [10].

Пример. Пусть оператор A, действующий в пространстве $X = L_r[2q,+\infty)$ $(1 \le r < \infty$, q участвует в задании (1.1) кривой $\mathcal{L} = \mathcal{L}(p,q))$, определяется формулой

$$(Ax)(v) = vx(v)$$

для таких $x \in X$, для которых $vx \in X$. Этот оператор плотно определен в X ($\mathcal{D}(A)$ содержит финитные непрерывные функции, заданные на $[2q,+\infty)$), и его резольвента вычисляется по формуле

$$R(\lambda)x(v) = \frac{x(v)}{v-\lambda} \quad (\lambda \in \mathbb{C} \setminus [2q,+\infty)).$$

При этом

$$\|R(\lambda)x\| \le \max_{v\ge 2q}\frac{1}{|v-\lambda|}\|x\| = \frac{1}{\min\limits_{v\ge 2q}|v-\lambda|}\|x\|.$$

Пусть $\lambda \in \overline{G}$. Для $v \ge 2q$, если $\operatorname{Re}\lambda \ge 2q$, то $|v-\lambda| \ge |\operatorname{Im}\lambda| \ge 2\sqrt{pq\ln 2} = C_1$, а если $\operatorname{Re}\lambda \le 2q$, то $\min\limits_{v\ge 2q}|v-\lambda| = |2q-\lambda| \ge C_2 > 0$ (C_2 — расстояние от точки $2q$ до $\overline{G} \not\ni 2q$), и, взяв $C = \min\{C_1,C_2\}$ $(C>0)$, получаем, что при всех $\lambda \in \overline{G}$

$$\|R(\lambda)\| \le \frac{1}{\min\limits_{v\ge 2q}|v-\lambda|} \le \frac{1}{C} = C_0 < +\infty$$

(γ из (1.2) здесь равно 0).

Если $f \in \mathcal{F}_0,\ |f(\lambda)| \leq |\lambda|^\sigma,\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus G(p,q),\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ \sigma - n < \gamma - 1$, то

$$f(A)x(v) = A^n(f(\lambda)\lambda^{-n})(A)x(v) = A^n\Big(-\frac{1}{2\pi i}\Big)\int\limits_{\mathcal{L}} f(\lambda)R(\lambda)\,d\lambda\ x(v)$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}A^n\int\limits_{\mathcal{L}}\frac{f(\lambda)\lambda^{-n}}{\lambda - v}x(v)\,d\lambda = A^n f(v)v^{-n}x(v) = f(v)x(v)$$

для тех $x \in X$, для которых $fx \in X$.

При $t > 0$

$$e^{tA}x(v) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n A^n x(v)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n v^n x(v)}{n!} = e^{tv}x(v)$$

для тех $x \in X$, для которых $e^{tv}x(v) \in X$.

Отметим, что оператор e^{Ax} плотно определен по тем же причинам, что и A, и замкнут, так как обратный к нему оператор $(e^{tA})^{-1}y(v) = e^{-tv}y(v)$ непрерывен на X.

Пусть $f \in \mathcal{F}(s)$ и $t > s$. Тогда $(e^{-t\lambda}f(\lambda)) \in \mathcal{F}_0$ и

$$(f(A)x)(v) = (f(A,t,0)x)(v) = e^{tA}\big((e^{-t\lambda}f(\lambda))(A)\big)x(v)$$

$$= e^{tA}e^{-tv}f(v)x(v) = e^{tv}e^{-tv}f(v)x(v) = f(v)x(v).$$

Установим, что $\widetilde{f}(A) = f(A)$. Действительно, финитные на $\mathcal{L}$ функции, равные

$$x_R(v) = \begin{cases} x(v), & 2q \leq v \leq R, \\ 0, & v > R, \end{cases} \quad (R > 2q)$$

принадлежат $\mathcal{D}(\widetilde{f}(A,t,0)) = \mathcal{D}(e^{tA})$ и при достаточно большом $R > 0$ с произвольной точностью приближают в X элемент $x \in \mathcal{D}(f(A))$, а функции $\widetilde{f}(A)x_R(v) = \widetilde{f}(A,t,0)x_R(v) = f(A,t,0)x_R(v) = f(A)x_R(v) = f(v)x_R(v)$ — функцию $f(A)x(v) = f(v)x(v)$.

В дальнейшем мы предполагаем изучить аналогичные классы операторных функций без предположения об ограниченности оператора A^{-1}.

Выражаем глубокую благодарность Л. Ф. Коркиной за полезные обсуждения результатов работы и высказанные ею ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Данфорд Н., Шварц Дж.Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: Из-во иностр. лит., 1962. 896 с.
2. **Люстерник Л.А., Соболев С.Л.** Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 519 с.
3. **Рудин У.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 449 с.
4. **Balakrishnan A.V.** Fractional powers of closed operators and semigroups generated by them // Pacific J. Math. Soc. 1960. Vol. 3. P. 419–437. doi: 10.2140/pjm.1960.10.419
5. **Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.** Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966. 499 с.
6. **Крейн С.Г.** Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 494 с.
7. **Komatsu H.** Fractional powers of operators. Interpolation spaces. // Pacific J. Math. 1967. Vol. 21, no 1. P. 89–111. doi: 10.2140/pjm.1967.21.89
8. **Костин В.А., Костин Д.В., Костин А.В.** Операторные косинус-функции и граничные задачи // Докл. АН. 2019. Т. 486, № 5. С. 531–536. doi: 10.31857/S0869-56524865531-536
9. **Абдуллаев О.Х.** Нелокальная задача с интегральным условием склеивания для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с дробной производной Капуто // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 3. С. 350–357. doi: 10.31857/S0374064123030056

10. **Коркина Л.Ф., Рекант М.А.** Свойства отображений скалярных функций в операторные линейного замкнутого оператора // Тр. Института математики и механики УрО РАН, 2015. Т. 21, № 1. С. 153–165.
11. **Коркина Л.Ф., Рекант М.А.** О произведении операторных экспонент // Тр. Института математики и механики УрО РАН, 2022. Т. 28, № 1. С. 156–163. doi: 10.21538/0134-4889-2022-28-1-156-163 .

Поступила 4.09.2023
После доработки 7.11.2023
Принята к публикации 13.11.2023

Рекант Марк Александрович
канд. физ.-мат. наук, доцент
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: M.A.Rekant@urfu.ru

REFERENCES

1. Dunfrod N., Schwartz J. *Linear operators: General theory*, New York, London, Interscience publishers, 1958. ISBN: 9780470226056. Translated to Russian under the title *Lineinye operatory: Obshchaya teoriya*, Moscow, Inostr. Liter. publ., 1962, 895 p.
2. Lusternik L.A., Sobolev V.J. *Elements of functional analysis*, International monographs on advanced mathematics and physics, Delhi, Hindustan Publishing Corp., 1974, 360 p. ISBN: 0470556501. Original Russian text published in Lyusternik L.A., Sobolev V.I. *Elementy funktsional'nogo analiza*, Moscow, Nauka Publ., 1965, 520 p.
3. Rudin W. Functional Analysis. N.-Y., McGraw–Hill, 1973, 397 p. ISBN: 9780070542259. Translated to Russian under the title *Funktsional'nyi analiz*, Moscow, Mir Publ., 1975, 449 p.
4. Balakrishnan A.V. Fractional powers of closed operators and semigroups generated by them. *Pacific J. Math. Soc.*, 1960, vol. 3, pp. 419–437. doi: 10.2140/pjm.1960.10.419
5. Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P., Pustyl'nik E.I., Sobolevskii P.E. *Integral operators in spaces of summable functions*. Netherlands, Springer, 1976, 536 p. ISBN: 978-94-010-1544-8. Original Russian text published in Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P., Pustyl'nik E.I., Sobolevskii P.E. *Integral'nye operatory v prostranstvakh summiruemykh funktsii*, Moscow, Nauka Publ., 1966, 499 p.
6. Krein S. *Linear differential equations in Banach space*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 29. Providence, Amer. Math. Soc., 1972, 390 p. ISBN: 978-1-4704-1628-7. Original Russian text published in Krein S.G., *Lineinye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve*, Moscow, Nauka Publ., 1967, 494 p.
7. Komabsu H. Fractional powers of operators. II. Interpolation spaces. *Pacific J. Math.*, 1967, vol. 21, no. 1, pp. 89–111. doi: 10.2140/pjm.1967.21.89
8. Kostin V.A., Kostin D.V., Kostin A.V. Operator cosine functions and boundary value problems. *Doklady Math.*, 2019, vol. 99, no. 3, pp. 303–307. doi: 10.1134/S1064562419030177
9. Abdullaev O.Kh. A nonlocal problem with an integral matching condition for a loaded parabolic-hyperbolic equation with a fractional Caputo derivative. *Diff. Equ.*, 2023, vol. 59, no. 3, pp. 351–358. doi: 10.1134/S0012266123030059
10. Korkina L.F., Rekant M.A. Properties of mappings of scalar functions to operator functions of a linear closed operator. *Tr. Inst. Math. Mekh. UrO RAN*, 2015, vol. 21, no. 1, pp. 153–165 (in Russian).
11. Korkina L.F., Rekant M.A. On the product of operator exponentials. *Tr. Inst. Math. Mekh. UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 1, pp. 156–163 (in Russian). doi:10.21538/0134-4889-2022-28-1-156-163

Received September 4, 2023
Revised November 7, 2023
Accepted November 13, 2023

Mark Aleksandrovich Rekant, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: M.A.Rekant@urfu.ru .

Cite this article as: M. A. Rekant. On the product of operator functions. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 1, pp. 203–212 .