ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 1 2024

УДК 512.55

О ПУЧКОВОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ PQ-БЭРОВСКОГО ПОЛУКОЛЬЦА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Н. С. Протасов, В. В. Чермных

В статье получено функциональное (пучковое) представление pq-бэровского полукольца с инволюцией ($*$-полукольца). Для $*$-полукольца вводятся понятия центрального и центрального первичного идеалов. Множество $\operatorname{Sp} S$ всех центральных первичных идеалов pq-бэровского $*$-полукольца с топологией Зарисского становится нульмерным компактным хаусдорфовым пространством. На $\operatorname{Sp} S$ как на базисном пространстве строится пучок $*$-полуколец $(\mathbb{L}(S), \operatorname{Sp} S)$. Доказано, что произвольное pq-бэровское $*$-полукольцо $*$-изоморфно $*$-полукольцу всех глобальных сечений пучка $\mathbb{L}(S)$. Сформулированы открытые вопросы.

Ключевые слова: полукольцо с инволюцией, pq-бэровское $*$-полукольцо, пучковое представление.

N. S. Protasov, V. V. Chermnykh. On the sheaf representation of a pq-Baer $*$-semiring with involution.

In the paper, a functional (sheaf) representation of a pq-Baer $*$-semiring with involution is obtained. For a $*$-semiring, the notions of central and central prime ideals are introduced. The set $\operatorname{Sp} S$ of all central prime ideals of a pq-Baer $*$-semiring with the Zariski topology becomes a zero-dimensional compact Hausdorff space. The sheaf $(\mathbb{L}(S), \operatorname{Sp} S)$ of $*$-semirings is constructed on $\operatorname{Sp} S$ as a basis space. It is proved that an arbitrary pq-Baer $*$-semiring is $*$-isomorphic to the $*$-semiring of all global sections of the sheaf $\mathbb{L}(S)$. Open questions are formulated.

Keywords: semiring with involution, pq-Baer $*$-semiring, sheaf representation.

MSC: 16Y60

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-1-190-202

Введение

В данной статье мы рассматриваем полукольца с единицей. Основной задачей нашего исследования является получение функционального (пучкового) представления полукольца с инволюцией.

Отметим некоторые результаты о представлениях колец с инволюцией ($*$-колец) сечениями пучков, связанные с темой нашей работы. В 1977 г. в кандидатской диссертации К. Салавовой [1] появилось представление произвольного $*$-кольца, являющееся аналогом пирсовского представления кольца с единицей [2]. Активно использовал пирсовские пучки при изучении $*$-колец Д. В. Тюкавкин; в частности, им предложено обобщение конструкции пирсовских цепей для $*$-колец [3]. В 2014 г. пирсовское представление $*$-полуколец получил Р. В. Марков [4]. В нашей работе мы получаем и используем другую пучковую конструкцию, а именно пучок $*$-полуколец, близкий к пучку колец И. Ламбека [5]; полукольцевое обобщение ламбековсого пучка было рассмотрено в [6]. В отличие от пирсовского представления не любое полукольцо, а значит и не любое $*$-полукольцо, допускает изоморфное ламбековское представление. По этой причине нами исследуются $*$-полукольца, близкие к бэровским.

Элемент $*$-кольца называется проекцией, если $e^2 = e = e^*$. Следуя И. Капланскому [7], кольцо ($*$-кольцо) R мы называем *бэровским* кольцом (бэровским $*$-кольцом), если правый аннулятор каждого непустого подмножества из R порожден как правый идеал идемпотентом (проекцией). Изучение бэровских колец уходит своими корнями в функциональные анализ; именно Капланский ввел бэровские кольца для абстрагирования различных свойств алгебр фон Неймана, колец ограниченных операторов гильбертова пространства и регулярных $*$-колец с полной решеткой главных идеалов [7].

Тесно связаны с кольцами Бэра риккартовы кольца. Кольцо R называется правым (левым) *риккартовым*, если аннулятор любого элемента из R порождается как правый (левый) идеал идемпотентом. Известно, что регулярные кольца являются правыми (левыми) риккартовыми кольцами.

В [8] У. Кларком определено квазибэровское кольцо как кольцо, в котором правый аннулятор произвольного главного правого идеала порождается как правый идеал идемпотентом. Наконец, отметим, что Биркенмайер, Ким и Парк в [9] ввели в рассмотрение pq-бэровское кольцо (*principally quasi-Baer ring*). Кольцо R называется *правым pq-бэровским*, если правый аннулятор главного правого идеала порождается как двусторонний идеал идемпотентом. Класс левых pq-бэровских колец не содержится в классе правых риккартовых колец, а класс pq-бэровских колец содержит все бирегулярные кольца, все квазибэровские кольца и все абелевы (т. е. кольца, в которых каждый идемпотент является центральным) риккартовы кольца.

Указанные выше определения колец допускают переносы на полукольца либо дословные, либо с отдельными, связанными со спецификой аддитивной операции, нюансами. Некоторые представители класса квазибэровских полуколец изучались одним из авторов данной публикации [10; 11]. Если в определениях колец (полуколец), близких к бэровским, идемпотент, порождающий аннулятор, заменить на проекцию, имеют место естественные переносы понятий на кольца (полукольца) с инволюцией.

В нашей статье основным объектом изучения является pq-бэровское $*$-полукольцо. Конструируется пучок Ламбека для pq-бэровского $*$-полукольца, получено следующее представление.

Теорема 1. *Произвольное pq-бэровское $*$-полукольцо S $*$-изоморфно $*$-полукольцу всех глобальных сечений пучка* $(\mathbb{L}(S), \operatorname{Sp} S)$.

1. Первоначальные понятия

Следуя Дж. Голану [12], под *полукольцом* мы понимаем алгебраическую структуру $\langle S, +, \cdot\rangle$, если $\langle S, +\rangle$ — коммутативная полугруппа, $\langle S, \cdot\rangle$ — полугруппа, операция умножения дистрибутивна относительно сложения с обеих сторон. В статье мы рассматриваем полукольца с аддитивным нулем 0, причем $0s = 0 = s0$ для любого $s \in S$, и единицей 1.

Пусть $e \in S$. Элемент $e^\perp$ называется *дополнением к e*, если $e + e^\perp = 1$ и $ee^\perp = e^\perp e = 0$. Как e, так и $e^\perp$ являются мультипликативными идемпотентами. Известно, что любой элемент полукольца имеет не более одного дополнения. Множество всех центральных дополняемых идемпотентов полукольца S обозначается через BS. Если положить $e \oplus f = ef^\perp + e^\perp f$, то $\langle BS, \oplus, \cdot\rangle$ становится булевым кольцом. А если положить $e \vee f = ef^\perp + f = e^\perp f + e$ и $e \wedge f = ef$, то получим булеву решетку $\langle BS, \vee, \wedge\rangle$.

О п р е д е л е н и е 1. Полукольцо S называется *$*$-полукольцом* (или *полукольцом с инволюцией*), если существует антиавтоморфизм $* : a \mapsto a^*$ полукольца S:

$$a^{**} = a,\ (a+b)^* = a^* + b^*,\ (ab)^* = b^* a^*.$$

Далее S — произвольное $*$-полукольцо.

О п р е д е л е н и е 2. Дополняемый идемпотент $e \in S$ называется *проекцией*, если $e = e^*$; множество всех проекций $*$-полукольца S обозначим через $\tilde{S}$.

Элемент $a \in S$ называется *самосопряженным*, если $a^* = a$. Элементы a, b называются *ортогональными*, если $ab = ba = 0$.

Следующими простыми свойствами будем пользоваться в дальнейшем без дополнительных ссылок.

Проекциями являются 0 *и* 1. Действительно, $0 = 0^{**} = (0^* + 0)^* = 0 + 0^* = 0^*$ и $1 = 1^{**} = (1^* \cdot 1)^* = 1^* \cdot 1^{**} = 1^*$.

Произведение самосопряженных элементов $a, b \in S$ является самосопряженным элементом в точности тогда, когда $ab = ba$. Действительно, из самосопряженности ab следует $ab = (ab)^* = b^*a^* = ba$; если a и b перестановочны, то $ab = ba = b^*a^* = (ab)^*$.

Если e — проекция, то $e^\perp$ — проекция. Действительно, из $1 = e + e^\perp$ и $0 = ee^\perp = e^\perp e$ вытекает, что $1 = e + (e^\perp)^*$ и $0 = (e^\perp)^* e = e(e^\perp)^*$. Из единственности дополнения к дополняемому идемпотенту следует $(e^\perp)^* = e^\perp$.

Если e, f — ортогональные проекции, то $e + f$ — проекция. Непосредственно проверяется, что $e+f$ является самосопряженным идемпотентом. Покажем, что идемпотент $e+f$ дополняем. Заметим, что $e^\perp f = e^\perp f + ef = (e^\perp + e) f = f$ (и аналогично $fe^\perp = f$), поэтому $(e+f) + e^\perp f^\perp = e + e^\perp f + e^\perp f^\perp = e + e^\perp(f + f^\perp) = 1$. Очевидно, $(e+f) \cdot e^\perp f^\perp = 0$, значит, $e+f$ — дополняемый элемент.

П р и м е р ы. 1. Любое кольцо с инволюцией является $*$-полукольцом.

2. Любое коммутативное полукольцо будет $*$-полукольцом с тождественной инволюцией.

3. Полное полукольцо матриц есть $*$-полукольцом с транспонированием в качестве инволюции.

4. Пусть B — конечная булева алгебра, τ — произвольная перестановка атомов второго порядка (т. е. τ раскладывается в произведение независимых транспозиций). Для любого ненулевого $a \in B$ имеем $a = e_1 + \ldots + e_k$ для однозначно определенных атомов e_i, тогда положим $a^* = \tau(e_1) + \ldots + \tau(e_k)$. Стандартно проверяется, что $*$ — инволюция на B. Более того, любая инволюция $*$ на B задается некоторой перестановкой атомов, поскольку каждый атом переводит в атом. Действительно, пусть $a^* = b \neq a$ для некоторого атома a. Если b не является атомом, то $e = eb$ для некоторого атома e. Тогда $e^* = e^*b^* = e^*a$, и поскольку a атом, то $e^* = 0$ либо $e^* = a$. Получаем $e = 0$ либо $b = e$ — противоречия в обоих случаях.

Пусть $\tilde{S}$ — множество всех проекций $*$-полукольца S, тогда для $e, f \in \tilde{S}$ положим $e \leq f$, если $e = ef$. Заметим, что $e \leq f$ равносильно условию $e = fe$. Действительно, $e = ef \Leftrightarrow e = e^* = (ef)^* = f^*e^* = fe$.

Лемма 1. *Пусть $e, f \in \tilde{S}$. Тогда равносильны следующие условия*:

1) $e \leq f$;

2) $eS \subseteq fS$;

3) $Se \subseteq Sf$.

Следовательно, $e = f \Leftrightarrow eS = fS \Leftrightarrow Se = Sf$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) $\Leftrightarrow$ 2). В силу определений $e \leq f \Leftrightarrow e = fe \Leftrightarrow eS \subseteq fS$. Аналогично с помощью равенства $e = ef$, доказывается 1) $\Leftrightarrow$ 3). $\square$

Предложение 1. *Справедливы утверждения*:

1) *отношение $\leq$ есть отношение порядка на множестве $\tilde{S}$*;

2) *если e, f — центральные проекции, то $e \vee f = ef^\perp + f = e^\perp f + e$ и $e \wedge f = ef$ — центральные проекции, являющиеся точными верхней и нижней гранями относительно порядка $\leq$*;

3) *пусть e, f — проекции и $e \leq f$, тогда $e^\perp f = fe^\perp$ — проекция, ортогональная к e и $e^\perp f \leq f$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Следует из леммы 1.

2) Пусть e, f — центральные проекции, тогда $e, f \in BS$. Известно, что множество BS всех центральных дополняемых идемпотентов является булевой решеткой с точными верхними гранями $e \vee f = ef^\perp + f = e^\perp f + e$ и точными нижними гранями $e \wedge f = ef$. Отсюда выводим, что $(e \vee f)^* = e \vee f$ и $(e \wedge f)^* = e \wedge f$.

3) Из $e = ef = fe$ получаем $fe^\perp + e = fe^\perp + fe = f(e^\perp + e) = f$, откуда $e^\perp fe^\perp = e^\perp f$. Такие же рассуждения приводят к $e^\perp f + e = f$, что влечет $e^\perp fe^\perp = fe^\perp$. Таким образом, $fe^\perp = e^\perp f$.

Из перестановочности идемпотентов следует $(e^\perp f)^2 = e^\perp f$ и $(e^\perp f)^* = f^*(e^\perp)^* = fe^\perp = e^\perp f$. Показали, что $e \le f$ — проекция. Непосредственно проверяется, что элемент $e^\perp f^\perp + e$ является дополнением к идемпотенту $e^\perp f$. Очевидно, что $e^\perp f \cdot e = 0$ и $e^\perp f \le f$. □

Таким образом, указанные выше свойства и предложение 1 позволяют сделать вывод: для произвольного $*$-полукольца S возникают упорядоченное множество $\tilde{S}$ всех проекций из S и две булевы решетки — всех центральных дополняемых идемпотентов BS и всех центральных проекций B^*S соответственно. Порядок в них задается обычным образом, $e \le f \Leftrightarrow ef = e$, и $B^*S = BS \cap \tilde{S}$.

2. pq-Бэровские $*$-полукольца

О п р е д е л е н и е 3. Центральный дополняемый самосопряженный идемпотент называется *центральной проекцией*; элемент e $*$-полукольца S называется *центральным покрытием элемента* $a \in S$, если $ae = a$ и e — наименьшая центральная проекция с таким свойством. Центральное покрытие элемента $a \in S$ будем обозначать через $c(a)$.

Правый (левый) аннулятор множества $A \subseteq S$ будем обозначать через $\mathrm{ann}_r(A)$ $(\mathrm{ann}_l(A))$.

Непосредственно из определений вытекает, что если элемент a имеет центральное покрытие, то a^* также имеет центральное покрытие, и $c(a) = c(a^*)$.

О п р е д е л е н и е 4. Полукольцо с инволюцией S называется *pq-бэровским* $*$-полукольцом (*principally quasi-Baer* $*$-semiring), если для любого $a \in S$ найдется такая проекция $e \in S$, что $\mathrm{ann}_r(aS) = eS$.

Лемма 2. *Если проекция e удовлетворяет условию $eS = \mathrm{ann}_r(aS)$ для некоторого $a \in S$, то проекция e является центральной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть проекция e удовлетворяет условию утверждения. Тогда для любого $s \in S$ выполняется $ase = 0$, поэтому $se \in \mathrm{ann}_r(aS)$. Следовательно, $se = et$ для некоторого $t \in S$. Получаем $ese = e^2t = et = se$. Таким же образом выводим $es^*e = s^*e$. Имеем $ese = (es^*e)^* = (s^*e)^* = es$, значит, $se = es$. □

Важным является свойство, по которому каждый элемент *pq*-бэровского $*$-полукольца обладает центральным покрытием. Кроме того, устраняется асимметрия в определении *pq*-бэровсти $*$-полукольца.

Предложение 2. *Пусть S — pq-бэровское $*$-полукольцо. Тогда справедливы утверждения*

1) *любой $a \in S$ имеет центральное покрытие*;
2) $\mathrm{ann}_r(aS) = \mathrm{ann}_r(c(a)S) = \mathrm{ann}_l(Sa) = \mathrm{ann}_l(Sc(a)) = c(a)^\perp S = Sc(a)^\perp$;
3) $aSb = 0 \Leftrightarrow bSa = 0 \Leftrightarrow c(a)b = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $a \in S$. Тогда $\mathrm{ann}_r(aS) = fS$ для некоторой проекции $f \in S$. Положим $e = f^\perp$. В этом случае $af = 0$, откуда $a = a(f + f^\perp) = ae$. В силу леммы 2 проекция f является центральной, поэтому e — центральная проекция. Докажем, что e — наименьшая проекция со свойством $a = ae$. Рассмотрим такую центральную проекцию g, что $a = ag$. Тогда $ag^\perp = 0$, $g^\perp \in \mathrm{ann}_r(aS)$, вследствие чего $g^\perp = fs$ для некоторого $s \in S$. Отсюда получаем $fg^\perp = fs = g^\perp$, т. е. $g^\perp \le f$. Следовательно, $g \ge f^\perp = e$, и $e = c(a)$.

2) Из доказательства п. 1) вытекает, что если $c(a) = e$, то $\mathrm{ann}_r(aS) = e^\perp S$. Поскольку $c(e) = e$, то $\mathrm{ann}_r(eS) = e^\perp S$, значит, $\mathrm{ann}_r(aS) = \mathrm{ann}_r(eS) = e^\perp S$. Из центральности e следует $e^\perp S = Se^\perp$ и $\mathrm{ann}_l(Sa) = \mathrm{ann}_l(Se) = Se^\perp$.

3) По п. 2) $aSb = 0$ влечет $b \in \mathrm{ann}_r(c(a)S) = \mathrm{ann}_r(aS) = \mathrm{ann}_l(Sa)$, поэтому $bSa = 0$ и $c(a)b = 0$. Также очевидны обратные импликации. □

Лемма 3. *Пусть S — pq-бэровское $*$-полукольцо. Тогда для любых $a, b \in S$ справедливы утверждения*

1) $c(a+b) \leq c(a) \vee c(b)$;

2) $c(ab) \leq c(a) \wedge c(b)$.

Доказательство. 1) Согласно п. 1) предложения 2 и п. 2) предложения 1 имеем $(a+b)(c(a)\vee c(b)) = ac(a)(c(a)\vee c(b)) + bc(b)(c(a)\vee c(b)) = ac(a) + bc(b) = a+b$. Отсюда следует $c(a+b) \leq (c(a) \vee c(b))$.

2) Поскольку $c(a) \wedge c(b) = c(a)c(b)$, то $ab(c(a)\wedge c(b)) = ac(a)bc(b) = ab$, откуда получаем $c(ab) \leq c(a) \wedge c(b)$. □

Определение 5. Идеал A $*$-полукольца назовем *центральным*, если $a \in A$ влечет $c(a) \in A$. Центральный собственный идеал P назовем *первичным центральным идеалом*, если для любых центральных идеалов A, B из $AB \subseteq P$ следует $A \subseteq P$ или $B \subseteq P$.

Лемма 4. *В $*$-полукольце S справедливы утверждения*

1) *если A — центральный идеал из S, то $a \in A \Leftrightarrow c(a) \in A$*;

2) *произвольный центральный идеал порождается некоторым множеством центральных проекций*;

3) *если $e \in S$ — центральная проекция, то eS — центральный идеал*;

4) *если P — первичный центральный идеал, e — центральная проекция, то либо $e \in P$, либо $e^{\perp} \in P$.*

Доказательство. 1) Если $c(a) \in A$, то $a = ac(a) \in A$; обратное верно по определению центрального идеала.

2) Следует из п. 1).

3) Пусть e — центральная проекция, $a \in eS$, тогда $a = ea$. По определению центрального покрытия $c(a) \leq e$, поэтому $ec(a) = c(a)$ и $c(a) \in eS$. Значит, eS — центральный идеал.

4) По п. 3) eS и $e^{\perp}S$ — центральные идеалы. Поскольку их произведение есть нулевой идеал, то либо $eS \subseteq P$, либо $e^{\perp}S \subseteq P$, т. е. либо $e \in P$, либо $e^{\perp} \in P$. □

Лемма 5. *В pq-бэровском $*$-полукольце S справедливы утверждения*

1) *произвольная сумма центральных идеалов из S есть центральный идеал*;

2) *произвольное конечное произведение центральных идеалов из S является центральным идеалом.*

Доказательство. 1) Пусть A, B — центральные идеалы из S, $a \in A, b \in B$. Тогда $c(a) \in A, c(b) \in B$ и $c(a) \vee c(b) = c(a)c(b)^{\perp} + c(b) \in A + B$. По лемме 3 $c(a+b) \leq c(a) \vee c(b)$, поэтому

$$c(a+b) = c(a+b)(c(a) \vee c(b)) \in A + B.$$

Показали, что $A+B$ является центральным идеалом. По индукции сумма конечного числа центральных идеалов будет центральным идеалом. Пусть $R_i, i \in I,$ — центральные идеалы и пусть $R = \sum_{i\in I} R_i$. Произвольный элемент $r \in R$ имеет вид $r = r_1 + \ldots + r_k$ для некоторых представителей r_i слагаемых R_i. Поскольку $R_1 + \ldots + R_k$ — центральный идеал, то $c(r) \in R_1 + \ldots + R_k \subseteq R$. Таким образом, R — центральный идеал.

2) Пусть A, B — центральные идеалы из S, $r = a_1b_1 + \ldots + a_kb_k$ — произвольный элемент идеала AB. Отметим, что если $e_1, \ldots, e_k$ — центральные проекции, лежащие в произвольном идеале R, то $e_1 \vee \ldots \vee e_k \in R$. Действительно, $e_1 \vee e_2 = e_1^{\perp}e_2 + e_1$ — центральная проекция по п. 2) предложения 1 и лежит в R, а далее — применение индукции. Согласно лемме 3

$$c(r) \leq (c(a_1) \wedge c(b_1)) \vee \ldots \vee (c(a_k) \wedge c(b_k)) = (c(a_1)c(b_1)) \vee \ldots \vee (c(a_k)c(b_k)).$$

Поскольку $c(a_i)c(b_i) \in AB$, то $c(r) \in AB$, следовательно, AB — центральный идеал. По индукции получаем, что конечное произведение центральных идеалов из S является центральным идеалом. □

Лемма 6. *Пусть S — pq-бэровское $*$-полукольцо. Тогда справедливы утверждения*
1) *для любого* $e \in BS$ $c(e) = e$;
2) $BS = B^*S$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $e \in BS$ и $\mathrm{ann}_r(eS) = fS$ для некоторой центральной проекции f. Тогда $e^\perp \in fS$, поэтому $e^\perp \le f$. С другой стороны, $ef = 0$, отсюда $e^\perp f = f$ и $f \le e^\perp$. Следовательно, $e^\perp = f$ и e — центральная проекция. В силу определения покрытия элемента $c(e) = e$.

2) Следует из п. 1). □

О п р е д е л е н и е 6. Подмножество T pq-бэровского $*$-полукольца S назовем *c-системой*, если
1) $0 \notin T$;
2) $1 \in T$;
3) $a \in T \Rightarrow c(a) \in T$;
4) $a, b \in T \Rightarrow ab \in T$.

Предложение 3. *Пусть T — c-система, J — центральный идеал, $J \cap T = \varnothing$. Тогда найдется первичный центральный идеал, содержащий J и не пересекающийся с T.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко проверить, что объединение линейно упорядоченных по включению центральных идеалов есть центральный идеал. Поэтому по лемме Цорна существует идеал P, максимальный среди центральных, содержащих J и не пересекающихся с T. Покажем, что P — первичный центральный идеал. Пусть A, B — центральные идеалы, $A \nsubseteq P$ и $B \nsubseteq P$. Согласно лемме 5 $A + J$ и $B + J$ являются центральными идеалами, причем оба пересекаются с T. Пусть $u = a + r$ и $v = b + s$ — элементы из T для подходящих $a \in A$, $b \in B$, $r, s \in P$. Если предположить, что $AB \subseteq P$, то $uv = (a + r)(b + s) = ab + as + rb + rs \in P$, хотя $uv \in T$. Полученное противоречие показывает, что $AB \nsubseteq P$ и P — первичный центральный идеал. □

Следствие 1. *В pq-бэровском $*$-полукольце S для любой центральной проекции $e \in S$, отличной от* 0 *и* 1, *найдутся первичный центральный идеал, не содержащий e, и первичный центральный идеал, содержащий e; пересечение всех первичных центральных идеалов является нулевым идеалом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 6 имеем $c(e) = e$, поэтому справедливость первого случая вытекает из предложения 3, если рассмотреть c-систему $\{e, 1\}$ и не пересекающийся с ними нулевой идеал. Для второго случая надо рассмотреть c-систему $\{1\}$ и центральный идеал eS. Из доказанного следует, что никакая центральная проекция, отличная от нуля (а по лемме 4 и никакой ненулевой элемент), не лежит в пересечении всех первичных центральных идеалов. □

Предложение 4. *Пусть S — pq-бэровское $*$-полукольцо. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если P — центральный идеал из S, то P — первичный центральный идеал в точности тогда, когда $P \cap BS$ — максимальный идеал булевой алгебры BS*;

2) *если M — максимальный идеал BS, то MS — минимальный первичный центральный идеал $*$-полукольца S; кроме того, MS не содержит строго никакого первичного идеала из S*;

3) *множество всех первичных центральных идеалов $*$-полукольца S является антицепью.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть P — первичный центральный идеал. Понятно, что $P \cap BS$ — собственный идеал булевой алгебры BS. Предположим, что $P \cap BS$ строго лежит в максимальном идеале $M \subseteq BS$. Тогда найдется $e \in M \setminus (P \cap BS)$. В силу первичности из $e \notin P$ следует $e^\perp \in P$, а значит, $e^\perp \in M$; противоречие, поэтому $P \cap BS$ — максимальный идеал BS. Обратно, пусть $P \cap BS$ — максимальный идеал в BS. Покажем, что P — первичный центральный идеал полукольца S. Пусть A, B — такие центральные идеалы, что $AB \subseteq P$. Если $A \nsubseteq P$ и $B \nsubseteq P$, то найдутся элементы $a \in A \setminus P$ и $b \in B \setminus P$. Тогда $c(a) \in A \setminus P$ и $c(b) \in B \setminus P$ по лемме 4, следовательно, $c(a)c(b) \in AB \subseteq P$ и, соответственно, $c(a)c(b) \in P \cap BS$. Идеал $P \cap BS$ максимальный, поэтому $c(a) \in P \cap BS$ или $c(b) \in P \cap BS$, что означает $c(a) \in P$ или $c(b) \in P$. Противоречие показывает, что $A \subseteq P$ или $B \subseteq P$ и P — первичный центральный идеал.

2) Пусть M — максимальный идеал булевой алгебры BS. Покажем, что MS является собственным идеалом в S. Действительно, если $MS = S$, то $1 = e_1a_1 + \ldots + e_ka_k$ для некоторых $e_i \in M$ и $a_i \in S$. Положим $e = e_1 \vee \ldots \vee e_k \in M$. Тогда $e_i \leq e$ и $e_i = ee_i$ для любого $i = 1, \ldots, k$. Отсюда $1 = e_1a_1 + \ldots + e_ka_k = ee_1a_1 + \ldots + ee_ka_k = e \in M$; противоречие. Покажем, что MS — центральный идеал. Пусть $b \in MS$ и $b = f_1b_1 + \ldots + f_nb_n$ для некоторых $f_i \in M$ и $b_i \in S$. По лемме 3 и лемме 6

$$c(b) \leq c(f_1b_1) \vee \ldots \vee c(f_nb_n) \leq c(f_1) \vee \ldots \vee c(f_n) = f_1 \vee \ldots \vee f_n \in M,$$

поэтому $c(b) = c(b)(f_1 \vee \ldots \vee f_n) \in M \subseteq MS$. Таким образом, MS — центральный идеал. Поскольку $BS \setminus M$ является c-системой $*$-полукольца S, то существует первичный центральный идеал P, не пересекающийся с $BS \setminus M$. Каждая центральная проекция из P лежит в M, отсюда по п. 2) леммы 4 $P \subseteq MS$. Согласно п. 1) $P \cap BS$ — максимальный идеал в BS, поэтому $P \cap BS$ обязан совпадать с M. Это влечет $MS \subseteq P$, откуда $P = MS$. Наконец, если N — минимальный первичный идеал полукольца S и $N \subseteq MS$, то для любого $e \in M$ выполняется $e^\perp \notin M$, следовательно, $e^\perp \notin N$ и $e \in N$ в силу первичности N и центральности e. Получаем $M \subseteq N$, отсюда $MS = N$.

3) По лемме 4, п. 2) центральные идеалы порождаются множествами центральных проекций. Если P, Q — первичные центральные идеалы и $P \subseteq Q$, то найдется центральная проекция $e \in Q \setminus P$. Тогда $e^\perp \in P$, поэтому $e, e^\perp \in Q$; противоречие. □

Обозначим через $\operatorname{Sp} S$ множество всех первичных центральных идеалов $*$-полукольца S. Покажем, что в случае pq-бэровского $*$-полукольца S на $\operatorname{Sp} S$ можно ввести топологию Зарисского.

Пусть S — pq-бэровское $*$-полукольцо. Положим

$$D(A) = \{P \in \operatorname{Sp} S : P \nsupseteq A\}$$

для произвольного центрального идеала A. Если $A = eS$ для центральной проекции $e \in S$, то $D(A)$ будем обозначать через $D(e)$.

Лемма 7. *Пусть S — pq-бэровское $*$-полукольцо. Тогда справедливы утверждения*
1) $D(A) \cap D(B) = D(AB)$;
2) $\cup_i D(A_i) = D(\sum_i A_i)$;
3) $D(0) = \varnothing$;
4) $D(S) = \operatorname{Sp} S$.

Доказательство. 1) По лемме 5 произведение конечного числа центральных идеалов является центральным идеалом, поэтому

$$P \in D(A) \cap D(B) \Leftrightarrow P \nsupseteq A \text{ и } P \nsupseteq B \Leftrightarrow AB \nsubseteq P \Leftrightarrow P \in D(AB).$$

2) По лемме 5 сумма центральных идеалов является центральным идеалом, отсюда

$$P \in \cup_{i \in I} D(A_i) \Leftrightarrow (\exists j \in I) P \in D(A_j) \Leftrightarrow (\exists j \in I) P \nsupseteq A_j \Leftrightarrow P \nsupseteq \sum_{i \in I} A_i \Leftrightarrow P \in D(\sum_{i \in I} A_i);$$

Пункты 3) и 4) очевидны. □

Напомним, что T_1-пространство называется *нульмерным*, если оно обладает базисом из открыто-замкнутых множеств; хаусдорфово компактное пространство называется *компактом.*

Предложение 5. *Множество* $\operatorname{Sp} S$ *всех первичных центральных идеалов pq-бэровского* $*$*-полукольца* S *образует топологическое пространство, являющееся нульмерным компактом.*

Доказательство. В силу леммы 7 $\operatorname{Sp} S$ становится топологическим пространством с открытыми множествами вида $D(A)$ для произвольного центрального идеала A. Для каждого центрального идеала A по лемме 4 $a \in A$ в точности тогда, когда $c(a) \in A$, поэтому $D(A) = \cup\{D(c(a)) : a \in A\}$. Следовательно, открытые множества $D(e) = D(eS)$, e — центральная проекция из S, образуют базис пространства $\operatorname{Sp} S$. В действительности этот базис состоит из открыто-замкнутых множеств, так как стандартно проверяется, что $\operatorname{Sp} S \setminus D(e) = D(e^{\perp})$.

Пусть P, Q — различные первичные центральные идеалы из S. Согласно п. 3) предложения 4 P и Q не сравнимы, поэтому найдется такая центральная проекция e, что $e \in P \setminus Q$ и $e^{\perp} \in Q \setminus P$. Тогда $Q \in D(e)$, $P \in D(e^{\perp})$ и $D(e) \cap D(e^{\perp}) = \varnothing$, следовательно, $\operatorname{Sp} S$ хаусдорфово.

Покажем, что $\operatorname{Sp} S$ компактно. Пусть $\cup D(A_i) = \operatorname{Sp} S$, в этом случае $A = \sum A_i$ — центральный идеал по лемме 5. Если предположить, что A — собственный идеал, то, рассматривая c-систему $\{1\}$, получаем, что найдется первичный центральный идеал P, содержащий A (предложение 3). Но тогда $P \notin D(A) = \operatorname{Sp} S$; противоречие. Следовательно, $\sum A_i = S$ и $a_1 + \ldots + a_k = 1$, $a_1 \in A_1, \ldots, a_k \in A_k$, для некоторых слагаемых из суммы $\sum A_i$. Получаем

$$\operatorname{Sp} S = D(S) = D(A_1 + \ldots + A_k) = D(A_1) \cup \ldots \cup D(A_k).$$

Из произвольного покрытия $\cup D(A_i) = \operatorname{Sp} S$ выбрали конечное подпокрытие, поэтому $\operatorname{Sp} S$ компактно. □

Лемма 8. *Пусть* B *— булева алгебра,* $e_1, \ldots, e_k \in B$ *удовлетворяют условию* $e_1 \vee \ldots \vee e_k = 1$. *Тогда найдутся такие попарно ортогональные* $f_1, \ldots, f_k \in B$, *что* $f_1 \vee \ldots \vee f_k = 1$ *и* $f_i \le e_i$.

Доказательство. Положим

$$f_1 = e_1,\ f_2 = e_2 \wedge e_1^{\perp}, \quad f_i = e_i \wedge e_1^{\perp} \wedge \ldots \wedge e_{i-1}^{\perp} = e_i \wedge (e_1 \vee \ldots \vee e_{i-1})^{\perp}.$$

Отсюда $f_1 \vee f_2 = e_1 \vee (e_2 \wedge e_1^{\perp}) = (e_1 \vee e_2) \wedge (e_1 \vee e_1^{\perp}) = e_1 \vee e_2$. По индукции следует

$$f_1 \vee \ldots \vee f_k = e_1 \vee \ldots \vee e_k = 1.$$

По способу задания элемента f_i имеем $f_i \le e_i$. Наконец, для $1 < i < j$ получаем

$$f_i \wedge f_j = (e_i \wedge e_1^{\perp} \wedge \ldots \wedge e_{i-1}^{\perp}) \wedge (e_j \wedge e_1^{\perp} \wedge \ldots \wedge e_i^{\perp} \wedge \ldots \wedge e_{j-1}^{\perp}) \le e_i \wedge e_i^{\perp} = 0.$$

Ортогональность f_1 остальным f_i очевидна. □

Непосредственно из леммы 8 вытекает

Предложение 6. *Пусть* S *— pq-бэровское* $*$*-полукольцо,* $e_1, \ldots, e_k$ *— такие центральные проекции, что* $D(e_1) \cup \ldots \cup D(e_k) = \operatorname{Sp} S$. *Тогда найдутся такие центральные проекции* $f_1, \ldots, f_k \in B^*S$, *что*

$$D(f_1) \cup \ldots \cup D(f_k) = \operatorname{Sp} S, \quad D(f_i) \subseteq D(e_i), \quad D(f_i) \cap D(f_j) = \varnothing$$

для любых $i \ne j$.

3. Пучковое представление $*$-полукольца

Дадим сейчас определение пучка $*$-полуколец, которое является естественной адаптацией известного понятия пучка универсальных алгебр. Отметим, что инволюцию в определении мы понимаем как унарную операцию.

О п р е д е л е н и е 7. Тройка (Π, π, X) называется *пучком $*$-полуколец*, если выполняются следующие условия:

1) Π, X — топологические пространства;
2) $\pi : \Pi \to X$ — локальный гомеоморфизм;
3) для любого $x \in X$ $\Pi_x = \pi^{-1}(x)$ — $*$-полукольцо;
4) сложение, умножение и инверсия в каждом Π_x являются непрерывными операциями;
5) отображения, сопоставляющие каждому $x \in X$ нуль и единицу из Π_x, непрерывны.

С ключевым понятиями пучковых представлений можно познакомиться в многочисленной литературе (см., например, [6; 13]). Укажем стандартные понятия и основные свойства, используемые в нашей статье. Пространства Π и X, указанные в определении, называются *накрывающим* и *базисным* соответственно, $*$-полукольца Π_x называются *слоями пучка.* Непрерывное отображение $f : X \to \Pi$, определенное на всем базисном пространстве и такое, что $f(x) \in \Pi_x$ для любого $x \in X$, называется *глобальным сечением.* Множество $\Gamma = \Gamma(\Pi)$ всех глобальных сечений пучка Π с поточечно определенными операциями становится $*$-полукольцом. Под *пучковым представлением* понимается гомоморфизм алгебры R в алгебру глобальных сечений некоторого пучка; наиболее интересны изоморфные представления.

Важным является следующее свойство пучков: *множество всех точек базисного пространства X, в которых совпадают два сечения, открыто в X.*

Пучковое представление называется *факторным*, если его ограничение на каждый слой пучка (который также называется *факторным*) является эпиморфизмом; другими словами, представление факторное, если через каждую точку накрывающего пространства проходит хотя бы одно глобальное сечение. В нашей статье мы рассматриваем только факторные представления.

Для построения факторных пучков мы используем общие идеи, рассмотренные впервые Дэйви для представлений универсальных алгебр. Именно, пусть A — алгебра, $\{\sim_x\}$ — система конгруэнций на A, индексированных точками топологического пространства X. Тогда система $\{\sim_x\}$, $x \in X$, называется *открытой системой конгруэнций*, если для любой пары элементов $a, b \in A$ множество $U_{a,b} = \{x \in X : a \sim_x b\}$ является открытым в пространстве X. Справедливо следующее утверждение, сильно упрощающее построение факторных пучков.

Лемма A [14, Lemma 2.1]. *Если X — топологическое пространство, $\{\sim_x\}$, $x \in X$, — открытая система конгруэнций на алгебре A, то $(\dot\bigcup_{x\in X} A/\sim_x, X)$ — факторный пучок алгебр с такой же сигнатурой, что и у A.*

Пусть сейчас S — pq-бэровское $*$-полукольцо, $P \in \operatorname{Sp} S$. Для любых $a, b \in S$ положим

$$a \equiv b \,(\operatorname{mod} \lambda_P) \Leftrightarrow ae = be \text{ для некоторого } e \in B^*S \setminus P.$$

Лемма 9. *На произвольном pq-бэровском $*$-полукольце S отношение λ_P является конгруэнцией для любого $P \in \operatorname{Sp} S$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, отношение λ_P рефлексивно и симметрично. Пусть $a \equiv b \,(\operatorname{mod} \lambda_P)$ и $b \equiv c \,(\operatorname{mod} \lambda_P)$. Это означает, что $ae = be$ и $bf = cf$ для некоторых центральных проекций $e, f \notin P$. Тогда $aef = bef = cef$, ef — центральная проекция, не лежащая в P, следовательно, $a \equiv c \,(\operatorname{mod} \lambda_P)$ и λ_P — отношение эквивалентности. Покажем, что λ_P стабильно относительно операций. Пусть $a \equiv b \,(\operatorname{mod} \lambda_P)$ и $c \equiv d \,(\operatorname{mod} \lambda_P)$, т. е. $ae = be$ и $cf = df$ для некоторых центральных проекций $e, f \notin P$. Стандартно получаем, что $(a + c)ef = (b + d)ef$, откуда следует $a + c \equiv b + d \,(\operatorname{mod} \lambda_P)$. Таким же образом устанавливается $ac \equiv bd \,(\operatorname{mod} \lambda_P)$. Наконец, если $a \equiv b \,(\operatorname{mod} \lambda_P)$, то из $ae = be$ вытекает $a^*e = b^*e$, поэтому $a^* \equiv b^* \,(\operatorname{mod} \lambda_P)$. $\square$

Лемма 10. *Система* $\{\lambda_P : P \in \operatorname{Sp} S\}$ *на pq-бэровском* $*$*-полукольце* S *является открытой системой конгруэнций.*

Доказательство. Пусть P — произвольная точка из $U_{a,b} = \{Q \in \operatorname{Sp} S : a \equiv b(\operatorname{mod} \lambda_Q)\}$. Тогда $ae = be$ для некоторой центральной проекции $e \notin P$. Выводим, $P \in D(e)$, и для любой точки $Q \in D(e)$ справедливо $a \equiv b\,(\operatorname{mod} \lambda_Q)$. Следовательно, $D(e) \subseteq U_{a,b}$. Получили, что произвольная точка множества $U_{a,b}$ содержит свою некоторую открытую окрестность, лежащую в $U_{a,b}$, поэтому множество $U_{a,b}$ открыто в $\operatorname{Sp} S$. □

Доказанные леммы 9 и 10 и лемма A позволяют для произвольного pq-бэровского $*$-полукольца S построить пучок $*$-полуколец

$$(\mathbb{L}(S), \operatorname{Sp} S), \text{ где } \mathbb{L} = \mathbb{L}(S) = \dot{\cup} S/\lambda_P,\ P \in \operatorname{Sp} S.$$

Пусть S, T — $*$-полукольца, тогда полукольцевой гомоморфизм $\varphi : S \to T$ называется *$*$-гомоморфизмом*, если $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$ для любого элемента $a \in S$.

Через $\hat{}\colon S \to \Gamma(\mathbb{L})$ обозначим *$*$-гомоморфизм Гельфанда* — отображение, которое каждому элементу $a \in S$ сопоставляет глобальное сечение $\hat{a}$, где $\hat{a}(P)$ — класс элемента $a \in S$ в фактор-$*$-полукольце S/λ_P.

Доказательство теоремы 1. Покажем, что $*$-гомоморфизм Гельфанда является искомым $*$-изоморфизмом.

Пусть $\hat{a} = \hat{b}$ на $\operatorname{Sp} S$. Тогда для любого $P \in \operatorname{Sp} S$ найдется такая центральная проекция $e_P \in B^*S \setminus P$, что $ae_P = be_P$. Получаем покрытие $\cup\{D(e_P) : P \in \operatorname{Sp} S\}$ базисного пространства $\operatorname{Sp} S$. Из того, что $\sum e_P S$ — центральный идеал и $D(\sum e_P S) = \operatorname{Sp} S$, следует $\sum e_P S = S$. Для некоторых представителей $e_1, \ldots, e_k$ множества $\{e_P : P \in \operatorname{Sp} S\}$ и некоторых $s_1, \ldots, s_k \in S$ выполняется $e_1 s_1 + \ldots + e_k s_k = 1$. Поскольку $ae_i s_i = be_i s_i$ для всех $i = 1, \ldots, k$, то, просуммировав по всем i, получаем $a = b$. Доказали инъективность $*$-гомоморфизма Гельфанда.

Пусть $\sigma \in \Gamma(\mathbb{L})$ — произвольное глобальное сечение. В каждой точке P базисного пространства сечение σ совпадает с глобальным сечением $\hat{r}_P$ для некоторого элемента $r_P \in S$. По свойствам пучка сечения σ и $\hat{r}_P$ совпадают на некоторой открытой, а в силу нульмерности $\operatorname{Sp} S$ — и на некоторой базисной открыто-замкнутой окрестности $D(e_P)$ точки P для подходящей центральной проекции e_P. Тогда множества $D(e_P)$, $P \in \operatorname{Sp} S$, покрывают базисное пространство, поэтому в силу его компактности можно выбрать конечное подпокрытие. Получаем множество таких центральных проекций $e_1, \ldots, e_k$, что $D(e_1) \cup \ldots \cup D(e_k) = \operatorname{Sp} S$. С учетом предложения 6 множества $D(e_1), \ldots, D(e_k)$ будем считать попарно непересекающимися. Из элементов r_P выберем $r_1, \ldots, r_k$, соответствующие центральным проекциям $e_1, \ldots, e_k$. Таким образом, имеем $\sigma = \hat{r}_i$ на $D(e_i)$ для всех $i = 1, \ldots, e_k$. Из $\operatorname{Sp} S = D(e_1) \cup \ldots \cup D(e_k) = D(e_1 S + \ldots + e_k S)$ следует $e_1 s_1 + \ldots + e_k s_k = 1$ для подходящих $s_i \in S$. Положим $r = r_1 e_1 s_1 + \ldots + r_k e_k s_k$. Пусть P — произвольная точка базисного пространства $\operatorname{Sp} S$, ясно, что она лежит в $D(e_j)$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, k\}$. Для произвольного индекса i выполняется $r_i e_i e_j = r_j e_i e_j$, поскольку e_i и e_j ортогональны для различных индексов. Тогда

$$\begin{aligned} re_j &= r_1 e_1 e_j s_1 + \ldots + r_k e_k e_j s_k \\ &= r_j e_1 e_j s_1 + \ldots + r_j e_k e_j s_k \\ &= r_j e_j (e_1 s_1 + \ldots + e_k s_k) = r_j e_j. \end{aligned}$$

Получили $\hat{r}(P) = \hat{r}_j(P)$. Но так как $\hat{r}_j(P) = \sigma(P)$, то $\hat{r} = \sigma$ во всех точках базисного пространства $\operatorname{Sp} S$. Таким образом, $*$-гомоморфизм Гельфанда является эпиморфизмом, следовательно, S $*$-изоморфно $\Gamma(\mathbb{L})$. □

Заключение

Основной результат нашей статьи (теорема 1) обобщает теорему А. Хайрнара и Б. Н. Вафаре [15, Theorem 6.7] о представлении pq-бэровского $*$-кольца. Нам известно еще несколько работ по близкой тематике. Кратко обсудим две следующие статьи и сформулируем возникающие вопросы.

1) В [16] Биркенмайер, Ким и Парк рассматривают ламбековский пучок квазибэровского кольца R с полным множеством триангулирующих идемпотентов (определения см. в статье). Наличие таких идемпотентов — очень сильное условие, оно позволяет разложить квазибэровское кольцо в конечную прямую сумму простых колец, являющихся слоями ламбековского пучка для кольца R над минимальными первичными идеалами. Это немедленно влечет, что R полупервично. Тогда в силу теоремы К. Хофмана [13, Theorem 1.17.] R имеет изоморфное ламбековское пучковое представление на первичном спектре $\operatorname{Spec} R$, что указано в доказательстве основного результата [16, Theorem 3.12.]. В статье используется пучковая техника для характеризации квазибэровского кольца с полным множеством триангулирующих идемпотентов, но нет нового функционального представления (по этой причине название статьи неточно отражает содержание). Возникают следующие вопросы: i) Можно ли получить изоморфное пучковое представление квазибэровского кольца, вероятно, с некоторыми, более слабыми, дополнительными условиями, чем рассматриваемые в статье [16]? ii) Будет ли верен полукольцевой аналог главного результата статьи? Отметим, что не каждое полупервичное полукольцо имеет изоморфное ламбековское представление. iii) Более общий вопрос заключается в том, какие кольца и полукольца с инволюцией будут иметь изоморфные ламбековские представления? В частности, вопрос относится к алгебрам, указанными во введении данной статьи.

2) Любое изоморфное факторное пучковое представление — подпрямое произведение, но при этом пучковые представления и подпрямые произведения имеют существенные различия. В связи с этим замечанием интересны результаты статьи [17]. Основным объектом являются определенные авторами обобщенно квазибэровское и обобщенно pq-бэровское $*$-кольца. Во введении анонсируются пучковые представления рассматриваемых колец (Proposition 4.12, Theorem 4.13), однако получены только разложения $*$-колец в подпрямое произведение их ламбековских слоев. Возникает вопрос: будут ли ламбековские представления указанных $*$-колец и представления их $*$-полукольцевых аналогов изоморфными?

3) Для каких полуколец с инволюцией будут совпадать ламбековское и пирсовское представления?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Салавова К.** Кольца с инволюцией: дис. ...канд. физ.-матем. наук / МГУ имени М.В. Ломоносова. Москва, 1978.
2. **Pierce R.S.** Modules over commutative regular rings // Mem. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 70. P. 1–112. doi: 10.1090/memo/0070
3. **Тюкавкин Д.В.** Аналог пирсовских пучков для колец с инволюцией // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38, № 5 (233). С. 209–210. doi: 10.1070/RM1983v038n05ABEH003520
4. **Марков Р.В.** Пирсовское представление полуколец с инволюцией // Изв. вузов. Математика. 2014. № 4. С. 18–24. doi: 10.3103/S1066369X14040033
5. **Lambek J.** On representation of modules by sheaves of factor modules // Can. Math. Bull. 1971. Vol. 14, no. 3. P. 359–368. doi: 10.4153/CMB-1971-065-1
6. **Чермных В.В.** Функциональные представления полуколец // Фундамент. и прикл. математика. 2012. Т. 17, № 3. С. 111–227. doi: 10.1007/s10958-012-1062-2
7. **Kaplansky I.** Rings of operators. NY; Amsterdam: W.A.Benjamin, Inc, 1968. ISBN: 9780805352085
8. **Clark W.E.** Twisted matrix units semigroup algebras // Duke Math. J. 1967. Vol. 34, no. 3. P. 417–423. doi: 10.1215/S0012-7094-67-03446-1
9. **Birkenmeier G.F., Kim J.Y., Park J.K.** Principally quasi-Baer rings // Comm. Algebra. 2001. Vol. 29, no. 2. P. 639–660. doi: 10.1081/AGB-100001530
10. **Марков Р.В., Чермных В.В.** Полукольца, близкие к регулярным, и их пирсовские слои // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 213–221.

11. **Бабенко М.В., Чермных В.В.** Пирсовские слои полуколец косых многочленов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 4. С. 48–60. doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-4-48-60
12. **Golan J.S.** Semirings and their applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ.1999. XII, 382 p. doi: 10.1007/978-94-015-9333-5
13. **Hofmann K.H.** Representations of algebras by continuous sections // Bulletin American Math. Soc. 1972. Vol. 78, no. 3. P. 291–374. doi: 10.1090/s0002-9904-1972-12899-4
14. **Davey B.A.** Sheaf spaces and sheaves of universal algebras // Math. Z. 1973. Vol. 134, no. 4. P. 275–290. doi: 10.1007/BF01214692
15. **Khairnar A., Waphare B.N.** A sheaf representation of principally quasi-Baer $*$-Rings // Algebras and Representation Theory. 2019. Vol. 22, no. 1. P. 79–97. doi: 10.1007/s10468-017-9758-0
16. **Birkenmeier G.F., Kim J.Y., Park J.K.** A sheaf representation of quasi-Baer rings // J. Pure Appl. Algebra. 2000. Vol. 146, no. 3. P. 209–223. doi: 10.1016/S0022-4049(99)00164-4
17. **Ahmadi M., Golestani N., Moussavi A.** Generalized quasi-Baer $*$-rings and Banach $*$-algebras // Communications in Algebra. 2020. Vol. 48, no. 5. P. 2207–2247. doi:10.1080/00927872.2019.1710841

Поступила 27.10.2023
После доработки 21.11.2023
Принята к публикации 4.12.2023

Протасов Никита Сергеевич
аспирант
Сыктывкарский государственный университет
имени Питирима Сорокина
г. Сыктывкар
e-mail: protasovnekit@gmail.com

Чермных Василий Владимирович
д-р. физ.-мат. наук
главный науч. сотрудник
Сыктывкарский государственный университет
имени Питирима Сорокина
г. Сыктывкар
e-mail: vv146@mail.ru

REFERENCES

1. Salavova K. *Kol'tsa s involutsiey* [Rings with involution]. Dissertation Cand. Sci. (Phys.–Math.), Moscow, 1978 (in Russian).
2. Pierce R.S. Modules over commutative regular rings. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1967, vol. 70, pp. 1–112. doi: 10.1090/memo/0070
3. Tyukavkin D.V. An analogue of Pierce sheaves for rings with involution. *Russian Math. Surveys*, 1983, vol. 38, no. 5, pp. 164–165. doi: 10.1070/RM1983v038n05ABEH003520
4. Markov R.V. Pierce sheaf for semirings with involution. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2014, vol. 58, no. 4, pp. 14–19. doi: 10.3103/S1066369X14040033
5. Lambek J. On representation of modules by sheaves of factor modules. *Can. Math. Bull.*, 1971, vol. 14, no. 3, pp. 359–368. doi: 10.4153/CMB-1971-065-1
6. Chermnykh V.V. Functional representations of semirings. *J. Math. Sci.*, 2012, vol. 187, no. 2, pp. 187–267. doi: 10.1007/s10958-012-1062-2
7. Kaplansky I. *Rings of operators.* NY, Amsterdam: W.A.Benjamin, Inc., 1968, 151 p. ISBN: 9780805352085
8. Clark W.E. Twisted matrix units semigroup algebras. *Duke Math. J.*, 1967, vol. 34, no. 3, pp. 417–423. doi: 10.1215/S0012-7094-67-03446-1
9. Birkenmeier G.F., Kim J.Y., Park J.K. Principally quasi-Baer rings. *Comm. Algebra*, 2001, vol. 29, no. 2, pp. 639–660. doi: 10.1081/AGB-100001530

10. Markov R.V., Chermnykh V.V. Semirings close to regular and their Pierce stalks. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2015, vol. 21, no. 3, pp. 213–221 (in Russian).
11. Babenko M.V., Chermnykh V.V. Pierce stalks of semirings of skew polynomials. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 4, pp. 48–60 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-4-48-60
12. Golan J.S. *Semirings and their applications.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. 382 p. doi: 10.1007/978-94-015-9333-5
13. Hofmann K.H. Representations of algebras by continuous sections *Bulletin American Math. Soc.*, 1972, vol. 78, no. 3, pp. 291–374. doi: 10.1090/s0002-9904-1972-12899-4
14. Davey B.A. Sheaf spaces and sheaves of universal algebras. *Math. Z.*, 1973, vol. 134, no. 4, pp. 275–290. doi: 10.1007/BF01214692
15. Khairnar A., Waphare B.N. A sheaf representation of principally quasi-Baer $*$-rings. *Algebras and Representation Theory*, 2019, vol. 22, no. 1, pp. 79–97. doi: 10.1007/s10468-017-9758-0
16. Birkenmeier G.F., Kim J.Y., Park J.K. A sheaf representation of quasi-Baer rings. *J.Pure Appl. Algebra*, 2000, vol. 146, no. 3, pp. 209–223. doi: 10.1016/S0022-4049(99)00164-4
17. Ahmadi M., Golestani N., Moussavi A. Generalized quasi-Baer $*$-rings and Banach $*$-algebras. *Comm. Algebra*, 2020, vol. 48, no. 5, pp. 2207–2247. doi: 10.1080/00927872.2019.1710841

Received October 27, 2023
Revised November 21, 2023
Accepted December 4, 2023

Nikita Sergeevich Protasov, doctoral student, Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, Syktyvkar, 167001 Russia, e-mail: protasovnekit@gmail.com .

Vasiliy Vladimirovich Chermnykh, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, Syktyvkar, 167001 Russia, e-mail: vv146@mail.ru .

Cite this article as: N. S. Protasov, V. V. Chermnykh. On the sheaf representation of a pq-Baer $*$-semiring with involution. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 1, pp. 190–202 .