ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 1 2024

УДК 517.5

# РАЦИОНАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР ФЕЙЕРА НА ОТРЕЗКЕ И АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ СО СТЕПЕННОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ[1]

**П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба**

Исследуются рациональные аппроксимации непрерывных функций и функций со степенной особенностью на отрезке посредством интегральных операторов типа Фейера. Получены оценки сверху приближений непрерывных функций на отрезке, выраженные через модуль непрерывности и зависящие от положения точки на отрезке. Изучены рациональные аппроксимации на отрезке $[-1,\ 1]$ функции $(1-x)^\gamma, \gamma \in (0,\ 1)$. Найдены оценки сверху равномерных приближений посредством соответствующей мажоранты, асимптотическое выражение при $n \to \infty$ этой мажоранты. В случае фиксированного количества полюсов аппроксимирующей функции установлены оптимальные значения параметров, при которых обеспечивается наибольшая скорость убывания мажоранты равномерных приближений. Следствием полученных результатов являются асимптотические оценки приближений некоторых индивидуальных функций суммами Фейера полиномиальных рядов Фурье — Чебышёва.

Ключевые слова: рациональные аппроксимации, интегральный оператор Фейера, поточечные и равномерные оценки приближений, модуль непрерывности, функция со степенной особенностью, асимптотические оценки.

**P. G. Potseiko, E. A. Rovba. A Fejér rational integral operator on a closed interval and approximation of functions with a power-law singularity.**

Rational approximations of continuous functions and functions with a power-law singularity on a closed interval are studied by means of integral Fejér-type operators. Upper estimates of approximations of continuous functions on a closed interval are derived; the estimates are expressed in terms of the modulus of continuity and depend on the position of a point in the interval. Rational approximations of the function $(1-x)^\gamma$, $\gamma \in (0,1)$, on the interval $[-1,1]$ are studied. Upper estimates of uniform approximations in terms of the corresponding majorant and an asymptotic expression as $n \to \infty$ of this majorant are found. In the case of a fixed number of poles of the approximating function, optimal values of the parameters are obtained, for which the majorant of the uniform approximations decreases at the highest rate. A consequence of the results obtained is asymptotic estimates of approximations of some specific functions by Fejér sums of polynomial Fourier–Chebyshev series.

Keywords: rational approximations, Fejér integral operator, pointwise and uniform estimates of approximations, modulus of continuity, function with a power-law singularity, asymptotic estimates.

**MSC:** 32E30, 41A20

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2024-30-1-170-189

## Введение

Метод приближений периодических функций средними арифметическими полиномиальных рядов Фурье ведет свою историю с работ Л. Фейера [1], А. Лебега [2], С. Н. Бернштейна [3], И. И. Привалова [4], С. М. Никольского [5], А. Зигмунда [6]. К настоящему времени полиномиальные суммы Фейера достаточно хорошо изучены и нашли широкое применение при решении аппроксимационных задач [7–10].

В 1956 г. М. М. Джрбашян [11] ввел рациональные ряды Фурье, обобщающие классические тригонометрические ряды. Одним из основных результатов этой работы было компактное представление ядра Дирихле рациональных рядов Фурье. Основываясь на этом представлении, В. Н. Русак [12; 13] построил рациональные интегральные операторы типа Фейера на вещественной оси, восходящие своими корнями к классическим методам суммирования тригонометрических рядов Фурье, и исследовал их аппроксимационные свойства [14]. Отметим

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований “Конвергенция 2020”, № 20162269 (Республика Беларусь).

работу А. А. Китбаляна [15], в которой также было построено рациональное обобщение классического ядра Фейера на единичной окружности несколько иным методом, без ссылок на работы В. Н. Русака.

В 1996 г. Е. А. Ровба [16] ввел рациональные интегральные операторы Фейера на отрезке $[-1,\ 1]$. Пусть задана последовательность чисел $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$, где $\alpha_k$ — либо действительные и $|\alpha_k| < 1,\ k = 1, 2, \ldots, n$, либо — попарно комплексно-сопряженные. Тогда для $f \in C[-1,\ 1]$ рациональный интегральный оператор Фейера имеет вид (см. [16]):

$$\sigma_n(f,\ x) = \frac{1}{2\pi\lambda_n(u)} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\cos v) \frac{\sin^2 \lambda_n(v,\ u)}{\sin^2 \dfrac{v-u}{2}}\, dv, \quad x = \cos u, x \in [-1,\ 1], \tag{0.1}$$

где

$$\lambda_n(v,\ u) = \frac{1}{2} \int\limits_{u}^{v} \lambda_n(y)\, dy, \quad \lambda_n(y) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 - 2|\alpha_k| \cos(y - \arg\alpha_k) + |\alpha_k|^2}. \tag{0.2}$$

Образом оператора $\sigma_n$ являются рациональные функции порядка не выше $n$ (под порядком рациональной функции понимается наибольшая степень полиномов, находящихся в числителе и знаменателе) вида

$$\frac{p_n(x)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1 - a_k x)}, \quad p_n \in \mathbb{P}_n, \quad a_k = a_k(\alpha_k) \in [0,\ 1), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

причем $\sigma_n(1,\ x) \equiv 1$. В частности, если положить все $\alpha_k = 0,\ k = 1, 2, \ldots, n$, то $\sigma_n(f,\ x)$ представляет собой суммы Фейера полиномиального ряда Фурье — Чебышёва. Из (0.1) вытекает, что оператор $\sigma_n(\cdot,\ \cdot)$ положительный. Вместе с этим в [16] исследованы приближения рациональным интегральным оператором Фейера функций $f \in MH^{(\gamma)}[-1,\ 1]$, $\gamma \in (0,\ 1]$. Впоследствии [17; 18] были найдены функциональные классы на отрезке $[-1,\ 1]$, отражающие особенности рациональной аппроксимации интегральными операторами Фейера.

Как известно, функция $(1-x)^s$ играет в теории приближений такую же роль, что и $|x|^s$. В 1937 г. С. Н. Бернштейн [19] установил асимптотическую оценку наилучших полиномиальных приближений функции $(1-x)^s$ на отрезке $[-1,\ 1]$. Эти исследования были продолжены в трудах И. И. Ибрагимова [20], С. М. Никольского [21] и других известных математиков. А. Р. Редди [22] вывел двусторонние оценки равномерных приближений функции $(1-x)^{1/2}$ на отрезке $[0,\ 1]$ рациональными функциями порядка не выше $n$ с действительными неотрицательными коэффициентами. Р. А. Бундшух [23] улучшил результат работы А. Р. Редди, получив точный порядок равномерных рациональных приближений в двусторонней оценке [22]. А. МакД. Мерсер [24] обобщил предыдущий результат на случай функции $(1-x)^s,\ s \in (0,\ 1)$. Позднее эта тематика нашла свое отражения в трудах [25; 26]. В работах [27; 28] на основе факта, что функция $(1-x)^\gamma,\ \gamma \in (0,\ +\infty)\backslash\mathbb{N}$, может быть представлена функцией Маркова, найдены двусторонние оценки ее равномерных приближений рациональными функциями. В [29] установлена асимптотическая оценка равномерных рациональных приближений на отрезке $[-1,\ 1]$ функции $(1-x)^\gamma,\ \gamma \in (0,\ +\infty)\backslash\mathbb{N}$, рациональным интегральным оператором Фурье — Чебышёва с ограничениями на количество геометрически различных полюсов, введенным в [30]. В [31; 32] аналогичная задача при $\gamma \in (0,\ 1)$ была решена с использованием соответственно сумм Абеля — Пуассона и сумм Фейера рациональных интегральных операторов Фурье — Чебышёва с ограничениями на количество геометрически различных полюсов. Отметим работу В. Р. Мисюка [33], в которой установлены порядки наилучших полиномиальных приближений функции $f_\alpha(z) = (1-z)^\alpha$ в пространстве Бергмана.

Цель настоящей работы — дальнейшее исследование свойств рационального интегрального оператора Фейера (0.1) при решении аппроксимационных задач. Представляет интерес получение оценки приближений функций $f \in C[-1,\ 1]$ и изучение приближения конкретной функции $f_\gamma(x) = (1-x)^\gamma$, $\gamma \in (0,\ 1)$, оператором Фейера.

## 1. Оценки приближений рациональными функциями Фейера для непрерывных на отрезке функций

Установим порядок приближений функций $f \in C[-1,\ 1]$ функциями Фейера (0.1) в терминах модулей непрерывности и достаточные условия, которым должен удовлетворять набор параметров $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, для равномерной сходимости последовательности функций Фейера

**Теорема 1.** *Для всякой функции* $f \in C[-1,\ 1]$ *справедливо неравенство*

$$|f(x) - \sigma_n(f,\ x)| \le \omega_f\Big(\frac{\sqrt{1-x^2}\ln\lambda_n(\arccos x)}{\lambda_n(\arccos x)}\Big) + 3\omega_f\Big(\frac{|x|}{\lambda_n(\arccos x)}\Big), \quad x \in [-1,\ 1], \tag{1.1}$$

*где* $\omega_f$ *— модуль непрерывности функции* $f$ *на отрезке* $[-1,\ 1]$.

Доказательство. Учитывая точность оператора $\sigma_n(\cdot,\ \cdot)$ для единицы, получим

$$f(x) - \sigma_n(f,\ x) = \frac{1}{2\pi\lambda_n(u)}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[f(\cos u) - f(\cos v)]K_n(u,\ v)\,dv,$$

где

$$K_n(u,\ v) = \frac{\sin^2\lambda_n(v,\ u)}{\sin^2\dfrac{v-u}{2}}, \quad x = \cos u. \tag{1.2}$$

Для дальнейших рассуждений воспользуемся методом А. Ф. Тимана [34, с. 269]. Заметив, что

$$|f(\cos u) - f(\cos v)| \le \omega_f(\sin u\sin(v-u)) + 2\omega_f\Big(|\cos u|\sin^2\frac{v-u}{2}\Big),$$

находим

$$|f(x) - \sigma_n(f,\ x)| \le \frac{1}{2\pi\lambda_n(u)}\Bigg[\int\limits_{-\pi}^{\pi}\omega_f(\sin u\sin(v-u))K_n(u,\ v)\,dv$$

$$+ 2\int\limits_{-\pi}^{\pi}\omega_f\Big(|\cos u|\sin^2\frac{v-u}{2}\Big)K_n(u,\ v)\,dv\Bigg]$$

$$\le \frac{1}{2\pi\lambda_n(u)}\Bigg[\omega_f\Big(\frac{\sin u\ln\lambda_n(u)}{\lambda_n(u)}\Big)\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{\sin(v-u)\lambda_n(u)}{\ln\lambda_n(u)} + 1\Big)K_n(u,\ v)\,dv$$

$$+ 2\omega_f\Big(\frac{|\cos u|}{\lambda_n(u)}\Big)\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\lambda_n(u)\sin^2\frac{v-u}{2} + 1\Big)K_n(u,\ v)\,dv\Bigg].$$

Отсюда

$$|f(x) - \sigma_n(f,\ x)| \le \omega_f\Big(\frac{\sin u\ln\lambda_n(u)}{\lambda_n(u)}\Big)[J_1 + 1] + 2\omega_f\Big(\frac{|\cos u|}{\lambda_n(u)}\Big)[J_2 + 1], \tag{1.3}$$

где

$$J_1 = \frac{1}{2\pi \ln \lambda_n(u)} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(v-u) \frac{\sin^2 \lambda_n(v,\ u)}{\sin^2 \dfrac{v-u}{2}}\, dv, \quad J_2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \lambda_n(v,\ u)\, dv.$$

Найдем значения интегралов $J_1$ и $J_2$. Так, выполнив в интеграле $J_1$ замену переменных по формулам $\zeta = \mathrm{e}^{iv}$, $\xi = \mathrm{e}^{iu}$, получим

$$J_1 = -\frac{1}{4\pi \ln \lambda_n(u)} \oint\limits_{|\zeta|=1} \frac{\zeta+\xi}{\xi\zeta^2(\zeta-\xi)} \Big[\zeta^2 \frac{\omega_n(\zeta)}{\omega_n(\xi)} - 2\xi\zeta + \xi^2 \frac{\omega_n(\xi)}{\omega_n(\zeta)}\Big]\, d\zeta,$$

где

$$\omega_n(\zeta) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\zeta - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k}\zeta}, \quad |\alpha_k| < 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.4}$$

Отметим, что для подынтегральной функции точка $\zeta = \xi$ будет устранимой особой точкой поскольку она является также нулем числителя. Для вычисления интеграла воспользуемся возможностью выведения параметра $\xi$ в комплексную плоскость [14, с. 93]. Будем полагать, что $\xi = r\mathrm{e}^{iu}$, $r \in (0,\ 1)$. Разбивая последний интеграл на три интеграла, устанавливаем, что подынтегральная функция каждого из них по отдельности будет иметь полюс при $\zeta = \xi$. Выполнив соответствующие вычисления, находим, что $J_1 = 0$. Рассуждая аналогичным образом, интеграл $J_2$ представим в виде

$$J_2 = -\frac{1}{8\pi i} \oint\limits_{|\zeta|=1} \Big[\frac{\zeta\omega_n(\zeta)}{\xi\omega_n(\xi)} - 2 + \frac{\xi\omega_n(\xi)}{\zeta\omega_n(\zeta)}\Big] \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

После соответствующих вычислений убеждаемся, что $J_2 = 1/2$. Подставив значения $J_1$ и $J_2$ в (1.3), получим (1.1).

Теорема 1 доказана.

**Следствие 1.** *Если выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (1 - |\alpha_k|) = \infty,$$

*то последовательность функций Фейера* (0.1) *сходится к* $f(x)$ *равномерно на всем отрезке* $[-1, 1]$.

Расходимость рассматриваемого в следствии ряда является необходимым и достаточным условием замкнутости системы функций $\{(1 + a_n x)^{-1}\}_{n=0}^{+\infty}$ в $C[-1,\ 1]$ (см. [35, с. 294]).

Заметим, что и здесь, и везде в дальнейшем для каждого индекса $n$ может выбираться соответствующий набор параметров $A$. Однако мы не будем указывать эту зависимость, так как все приведенные оценки равномерны относительно $\alpha_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Положив в теореме 1 значения параметров $\alpha_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, получаем, что соотношение (1.1) представляет собой оценку приближений функции $f \in C[-1,\ 1]$ суммами Фейера $\sigma_n^{(0)}(f,\ x)$ полиномиального ряда Фурье — Чебышёва. В этом случае из теоремы 1 выводим

**Следствие 2.** *Для всякой функции* $f \in C[-1,\ 1]$ *справедливо неравенство*

$$|f(x) - \sigma_n^{(0)}(f,\ x)| \le \omega_f\Big(\frac{\sqrt{1-x^2}\ln(n+1)}{n+1}\Big) + 3\omega_f\Big(\frac{|x|}{n+1}\Big), \quad x \in [-1,\ 1],$$

*где* $\omega_f$ *— модуль непрерывности функции* $f$ *на отрезке* $[-1,\ 1]$.

## 2. Приближения функции $(1-x)^\gamma, \gamma \in (0,\ 1)$, рациональным интегральным оператором Фейера

Для $\gamma \in (0,\ 1)$ введем в рассмотрение функцию $f_\gamma(x) = (1-x)^\gamma$. Обозначим

$$\varepsilon_n(x,\ f_\gamma,\ A) = f_\gamma(x) - \sigma_n(f_\gamma,\ x), \quad x \in [-1,\ 1],$$

$$\varepsilon_n(f_\gamma,\ A) = \|f_\gamma(x) - \sigma_n(f_\gamma,\ x)\|_{C[-1,\ 1]}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В дальнейшем будем считать, что параметры аппроксимирующей функции (0.1) выбраны следующим образом: $\alpha_k \in [0,\ 1),\ \theta_k = 0,\ k = 1, 2, \ldots, n$. При этом из (0.2) находим

$$\lambda_n(v,\ u) = \frac{1}{2}\int\limits_u^v \lambda_n(y)\,dy, \quad \lambda_n(y) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1-\alpha_k^2}{1-2\alpha_k\cos y + \alpha_k^2},\ x = \cos u. \tag{2.1}$$

**Теорема 2.** *Для приближений функции $f_\gamma(x)$ на отрезке $[-1,\ 1]$ рациональным интегральным оператором Фейера (0.1) имеют место*

1) *интегральное представление*:

$$\varepsilon_n(x,\ f_\gamma,\ A) =$$
$$= -\frac{2^{1-\gamma}\sin\pi\gamma}{\pi\lambda_n(u)}\int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}\sqrt{1-2t\omega_n(t)M_{n+1}(x)+t^2\omega_n^2(t)}}{1-2t\cos u+t^2}\cos\psi_n(x,\ t)\,dt, \tag{2.2}$$

*где $\omega_n(t)$ из (1.4),*

$$\psi_n(x,\ t) = \arg\frac{\xi}{1-t\xi} + \arg\frac{1-\xi\omega_n(\xi)t\omega_n(t)}{1-t\xi},$$

$$M_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\xi\omega_n(\xi) + \overline{\xi\omega_n(\xi)}\right), \quad \xi = \mathrm{e}^{iu},\ x = \cos u,$$

*— рациональная функция Чебышёва — Маркова порядка $n+1$;*

2) *оценка поточечных приближений*:

$$|\varepsilon_n(x,\ f_\gamma,\ A)| \le \frac{2^{1-\gamma}\sin\pi\gamma}{\pi\lambda_n(u)}\int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}\sqrt{1-2t\omega_n(t)M_{n+1}(x)+t^2\omega_n^2(t)}}{1-2t\cos u+t^2}\,dt; \tag{2.3}$$

3) *оценка равномерных приближений*:

$$\varepsilon_n(f_\gamma,\ A) \le \varepsilon_n^*(f_\gamma,\ A), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.4}$$

*где*

$$\varepsilon_n^*(f_\gamma,\ A) = \frac{2^{1-\gamma}\sin\pi\gamma}{\pi}[I_1+I_2+I_3], \tag{2.5}$$

$$I_1 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^n \frac{1+\alpha_k}{1-\alpha_k}}\int\limits_{\alpha_n}^1 (1-t)^{2\gamma-1}t^{-\gamma}\frac{1-t\omega_n(t)}{1-t}\,dt,$$

$$I_2 = 2\sum_{j=1}^{n-1}\int\limits_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} \frac{(1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}(1+t\omega_n(t))}{(1-t)^2\sum\limits_{k=0}^j\frac{1+\alpha_k}{1-\alpha_k} + (1+t)^2\sum\limits_{k=j+1}^n\frac{1-\alpha_k}{1+\alpha_k}}\,dt,$$

$$I_3 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^n \frac{1-\alpha_k}{1+\alpha_k}}\int\limits_0^{\alpha_1}\frac{(1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}(1+t\omega_n(t))}{(1+t)^2}\,dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользовавшись точностью оператора (0.1) на константах, запишем

$$\varepsilon_n(f_\gamma,\ x,\ A) = \frac{1}{2\pi\lambda_n(u)}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[(1-\cos u)^\gamma-(1-\cos v)^\gamma]K_n(u,\ v)\,dv,\quad x\in[-1,\ 1],\ x=\cos u, \tag{2.6}$$

где $K_n(u,\ v)$ — из (1.2), $\lambda_n(v,\ u)$ — из (2.1). Известно [16], что для выражения $K_n(u,\ v)$ имеет место представление

$$K_n(u,\ v) = \frac{\zeta^2\omega_n(\zeta)/\omega_n(\xi)-2\zeta\xi+\xi^2\omega_n(\xi)/\omega_n(\zeta)}{(\zeta-\xi)^2},\quad \xi=\mathrm{e}^{iu},\quad \zeta=\mathrm{e}^{iv}.$$

В интеграле (2.6) выполним замену переменных по формулам $\xi=\mathrm{e}^{iu},\ \zeta=\mathrm{e}^{iv}$. Тогда

$$\varepsilon_n(x,\ f_\gamma,\ A) = \frac{(-1)^\gamma}{2^{\gamma+1}\xi^\gamma\pi\lambda_n(u)i}$$

$$\times\oint\limits_{|\zeta|=1}\frac{(1-\xi)^{2\gamma}-(1-\zeta)^{2\gamma}\xi^\gamma\zeta^{-\gamma}}{(\zeta-\xi)^2\zeta}\left[\zeta^2\frac{\omega_n(\zeta)}{\omega_n(\xi)}-2\zeta\xi+\xi^2\frac{\omega_n(\xi)}{\omega_n(\zeta)}\right]d\zeta,\quad x=\cos u.$$

Отметим, что для подынтегральной функции интеграла справа значение $\zeta=\xi$ будет устранимой особой точкой, поскольку является нулем не меньшего порядка также и числителя. Воспользовавшись возможностью выведения параметра $\xi$ в комплексную плоскость [14, с. 93], положим, что $\xi=r\mathrm{e}^{iu},\ r\in(0,\ 1)$. Разобьем последний интеграл на три интеграла так, что

$$\varepsilon_n(x,\ f_\gamma,\ A) = \frac{(-1)^\gamma}{2^{\gamma+1}\xi^\gamma\pi\lambda_n(u)i}\left[\overline{\omega_n(\xi)}I_1-2\xi I_2+\xi^2\omega_n(\xi)I_3\right]; \tag{2.7}$$

здесь

$$I_1=\oint\limits_{|\zeta|=1}\frac{(1-\xi)^{2\gamma}\zeta-(1-\zeta)^{2\gamma}\xi^\gamma\zeta^{1-\gamma}}{(\zeta-\xi)^2}\omega_n(\zeta)\,d\zeta,$$

$$I_2=\oint\limits_{|\zeta|=1}\frac{(1-\xi)^{2\gamma}-(1-\zeta)^{2\gamma}\xi^\gamma\zeta^{-\gamma}}{(\zeta-\xi)^2}\,d\zeta,\quad I_3=\oint\limits_{|\zeta|=1}\frac{(1-\xi)^{2\gamma}\zeta^\gamma-(1-\zeta)^{2\gamma}\xi^\gamma}{(\zeta-\xi)^2\zeta^{1+\gamma}}\overline{\omega_n(\zeta)}\,d\zeta.$$

Нетрудно показать, что для подынтегральных функций каждого из интегралов $I_1, I_2$ и $I_3$, значение $\zeta=\xi$ является простым полюсом. Кроме этого отметим, что подынтегральные функции указанных интегралов имеют точки ветвления при $\zeta=0$, $\zeta=1$ и $\zeta=\infty$. Исследуем каждый из трех интегралов по отдельности. Так, для интеграла $I_1$ его подынтегральная функция

$$\varphi_1(\zeta,\ \xi)=\zeta\frac{(1-\xi)^{2\gamma}-g_\gamma(\zeta)\xi^\gamma}{(\zeta-\xi)^2}\omega_n(\zeta),\quad g_\gamma(\zeta)=(1-\zeta)^{2\gamma}\zeta^{-\gamma},$$

при фиксированном значении переменной $\xi$ в области, ограниченной контуром

$$\Gamma=C_1\cup C\cup C_2^-\cup C_\delta^-,$$

где $C=\left\{\zeta:\zeta=\mathrm{e}^{iv},\ 0\le v\le2\pi\right\}$, $C_\delta=\left\{\zeta:\zeta=\delta\mathrm{e}^{iv},\ 0\le v\le2\pi\right\}$, $C_1$ и $C_2$ — соответственно верхний и нижний берега разреза по действительной оси от точки $\zeta=0$ до точки $\zeta=1$ распадается на регулярные ветви, определяемые условием $g_\gamma(\mathrm{e}^{i\pi/3})=\mathrm{e}^{i2\pi k\gamma}$, $k\in\mathbb{Z}$. Выбрав ту ветвь, для которой выполняется условие $g_\gamma^*(\mathrm{e}^{i\pi/3})=1$, применим основную теорему о вычетах. Тогда

$$\int\limits_{C_1}\varphi_1(t,\ \xi)\,dt+I_1+\int\limits_{C_2^-}\varphi_1(\mathrm{e}^{2i\pi}t,\ \xi)\,dt+\int\limits_{C_\delta^-}\varphi_1(\zeta,\ \xi)\,d\zeta=r_1,$$

где $r_1 = 2\pi i \operatorname*{Res}_{\zeta=\xi} \varphi_1(\zeta,\ \xi) = 2\pi i\gamma\omega_n(\xi)(1-\xi)^{2\gamma-1}(1+\xi)$.

Рассмотрим отдельно интеграл по контуру $C_\delta^-$. Выполнив замену переменного интегрирования по формуле $\zeta = \delta \mathrm{e}^{i\varphi}$ и учитывая, что $\gamma \in (0,\ 1)$, имеем

$$\int\limits_{C_\delta^-} \varphi_1(\zeta,\ \xi)\, d\zeta = -\int\limits_0^{2\pi} \frac{(1-\xi)^{2\gamma}\delta\mathrm{e}^{i\varphi} - (1-\delta\mathrm{e}^{i\varphi})^{2\gamma}\xi^\gamma(\delta\mathrm{e}^{i\varphi})^{1-\gamma}}{(\delta\mathrm{e}^{i\varphi}-\xi)^2}\omega_n(\delta\mathrm{e}^{i\varphi})i\delta\mathrm{e}^{i\varphi}\, d\varphi \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

При этом при $\delta \to 0$ приходим к равенству

$$\int\limits_0^1 \frac{(1-\xi)^{2\gamma} - (1-t)^{2\gamma}\xi^\gamma t^{-\gamma}}{(t-\xi)^2} t\omega_n(t)dt + I_1 + \int\limits_1^0 \frac{(1-\xi)^{2\gamma} - (1-t)^{2\gamma}\xi^\gamma (t\mathrm{e}^{2i\pi})^{-\gamma}}{(t-\xi)^2} t\omega_n(t)dt = r_1.$$

Отсюда нетрудно получить, что

$$I_1 = \xi^\gamma(1-\mathrm{e}^{-2\pi i\gamma})\int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}}{(t-\xi)^2} t\omega_n(t)dt + r_1. \tag{2.8}$$

Займемся исследованием интеграла $I_3$. Рассмотрим область ограниченную контуром $\Gamma$, контуром $C_R = \{\zeta : |\zeta| = R\}$ достаточно большого радиуса $R$, который огибает точку $\zeta = \infty$ против часовой стрелки, и верхним и нижним берегами разреза по действительной оси от точки $\zeta = 1$ до $\zeta = R$. Внутри этой области функция $g_\gamma(\zeta)$ также допускает выделение регулярных ветвей. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, зафиксировав $\xi$, выделим ее регулярную ветвь так, что подынтегральная функция третьего интеграла

$$\varphi_3(\zeta,\ \xi) = \frac{(1-\xi)^{2\gamma} - g_\gamma^*(\zeta)\xi^\gamma}{(\zeta-\xi)^2}\overline{\zeta\omega_n(\zeta)}$$

является регулярной в рассматриваемой области. Применив интегральную теорему Коши, будем иметь

$$\begin{gathered} -I_3 + \int\limits_1^R \frac{(1-\xi)^{2\gamma} - (1-t)^{2\gamma}\xi^\gamma t^{-\gamma}}{(t-\xi)^2 t}\omega_n^{-1}(t)\, dt + \int\limits_{C_R} \frac{(1-\xi)^{2\gamma} - (1-\zeta)^{2\gamma}\xi^\gamma\zeta^{-\gamma}}{(\zeta-\xi)^2}\overline{\zeta\omega_n(\zeta)}\, d\zeta \\ + \int\limits_R^1 \frac{(1-\xi)^{2\gamma} - ((1-t)\mathrm{e}^{-2i\pi})^{2\gamma}\xi^\gamma(t\mathrm{e}^{-2i\pi})^{-\gamma}}{(t-\xi)^2 t}\omega_n^{-1}(t)\, dt = 0. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Исследуем интеграл по окружности $C_R$. С этой целью проведем замену переменного по формуле $\zeta = R\mathrm{e}^{i\varphi}$. Тогда

$$\int\limits_{C_R} \varphi_3(\zeta,\ \xi)\, d\zeta = \frac{i}{R^{2-\gamma}}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(1/R^\gamma)(1-\xi)^{2\gamma} - (1/R - \mathrm{e}^{i\varphi})^{2\gamma}\xi^\gamma\mathrm{e}^{-i\gamma\varphi}}{(\mathrm{e}^{i\varphi}-\xi/R)^2}\prod_{k=1}^n \frac{1/R - \alpha_k\mathrm{e}^{i\varphi}}{\mathrm{e}^{i\varphi}-\alpha_k/R}\, d\varphi.$$

Если $R \to \infty$, то

$$\int\limits_{C_R} \varphi_3(\zeta,\ \xi)\, d\zeta \sim \frac{(-1)^n 2i\xi^\gamma \sin\pi\gamma}{R^{2-\gamma}(2-\gamma)}\prod_{k=1}^n \alpha_k.$$

Поскольку $2-\gamma > 0$, то заключаем, что при $R \to \infty$ интеграл по окружности $C_R$ стремится к нулю. При этом из (2.9) получим

$$I_3 = \xi^\gamma(1-\mathrm{e}^{-2i\pi\gamma})\int\limits_1^\infty \frac{(1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}}{(t-\xi)^2 t}\prod_{k=1}^n \frac{1-\alpha_k t}{t-\alpha_k}\, dt.$$

Выполнив в интеграле замену переменного по формуле $t \mapsto 1/t$, окончательно будем иметь

$$I_3 = \xi^{\gamma}(1-\mathrm{e}^{-2i\pi\gamma})\int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}}{(1-t\xi)^2} t\omega_n(t)\,dt. \tag{2.10}$$

Займемся интегралом $I_2$. Его преобразуем способами, которые были применены в отношении интегралов $I_1$ и $I_3$. В результате, с одной стороны,

$$I_2 = \xi^{\gamma}(1-\mathrm{e}^{-2\pi i\gamma})\int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}}{(t-\xi)^2}\,dt + \frac{r_1}{\xi\omega_n(\xi)},$$

где $r_1$ — величина, определенная при вычислении интеграла $I_1$. С другой стороны,

$$I_2 = \xi^{\gamma}(1-\mathrm{e}^{-2i\pi\gamma})\int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}}{(1-t\xi)^2}\,dt.$$

Два последних интегральных представления приводят к выражению

$$I_2 = \xi^{\gamma}(1-\mathrm{e}^{-2i\pi\gamma})\int\limits_0^1 (1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}\left[\frac{1}{(1-t\xi)^2}+\frac{1}{(t-\xi)^2}\right]dt + \frac{r_1}{\xi\omega_n(\xi)}. \tag{2.11}$$

Из (2.7) с учетом (2.8), (2.10), и (2.11) получим

$$\varepsilon_n(x,\ f_\gamma,\ A) = -\frac{\sin\pi\gamma}{2^{\gamma}\pi\lambda_n(u)}\int\limits_0^1 (1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}\left[\frac{\xi(1-\xi\omega_n(\xi)t\omega_n(t))}{(1-t\xi)^2}+\frac{\xi(1-\overline{\xi\omega_n(\xi)}t\omega_n(t))}{(t-\xi)^2}\right]dt.$$

Выражения в квадратных скобках под знаком интеграла взаимно комплексно-сопряженные. Следовательно, их сумма является действительнозначной и представляет собой косинус некоторого угла, умноженный на модуль этих выражений. Поскольку

$$\left|\frac{\xi(1-\xi\omega_n(\xi)t\omega_n(t))}{(1-t\xi)^2}\right| = \frac{\sqrt{1-2t\omega_n(t)\cos\arg(\xi\omega_n(\xi))+t^2\omega_n^2(t)}}{1-2t\cos u+t^2},$$

а $\cos\arg(\xi\omega_n(\xi)) = \dfrac{1}{2}(\xi\omega_n(\xi)+\overline{\xi\omega_n(\xi)})$ — рациональная функция Чебышёва — Маркова [14] порядка $n+1$, то выполнив соответствующие преобразования, придем к (2.2).

Из интегрального представления (2.2) легко получается оценка (2.3).

Докажем оценку (2.4). С этой целью исследуем поведение функции переменного $x$

$$\mu_n(x) = \lambda_n(\arccos x)(1-2tx+t^2), \quad \lambda_n(\arccos x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1-\alpha_k^2}{1-2\alpha_k x+\alpha_k^2},$$

при фиксированном значении величины $t$. Так как

$$\mu_n^{'}(x) = 2\sum_{k=0}^{n}\frac{(1-\alpha_k^2)(\alpha_k-t)(1-\alpha_k t)}{(1-2\alpha_k x+\alpha_k^2)^2},$$

мы заключаем, что если $t\in[0,\ \alpha_1]$, то функция $\mu_n(x)$ возрастает на отрезке $[-1,\ 1]$ и, значит, достигает своего минимального значения при $x=-1$ :

$$\mu_n(-1) = (1+t)^2\sum_{k=0}^{n}\frac{1-\alpha_k}{1+\alpha_k}, \quad t\in[0,\ \alpha_1].$$

В то же время если $t \in [\alpha_n,\ 1]$, то функция $\mu_n(x)$ убывает на отрезке $[-1,\ 1]$ и минимальное ее значение будет уже при $x = 1$ вычисляться как $\mu_n(1) = (1-t)^2 \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1+\alpha_k}{1-\alpha_k}, \quad t \in [\alpha_n,\ 1]$. Если $t \in [\alpha_1,\ \alpha_n]$, то в этом случае оценим интеграл следующим образом:

$$\frac{1}{\lambda_n(u)} \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_n} \frac{(1-t)^{2\gamma} t^{-\gamma} \sqrt{1 - 2t\omega_n(t) M_{n+1}(x) + t^2 \omega_n^2(t)}}{1 - 2t\cos u + t^2}\, dt \le \sum_{j=1}^{n-1} \int\limits_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} \frac{(1-t)^{2\gamma} t^{-\gamma}}{\mu_n(x)} (1 + t\omega_n(t))\, dt.$$

Учитывая, что, с одной стороны,

$$\mu_n(x) \ge (1 - 2tx + t^2) \sum_{k=0}^{j} \frac{1-\alpha_k^2}{1 - 2\alpha_k x + \alpha_k^2} \ge (1-t)^2 \sum_{k=0}^{j} \frac{1+\alpha_k}{1-\alpha_k}, \quad t \in (\alpha_j,\ \alpha_{j+1}),$$

а, с другой стороны,

$$\mu_n(x) \ge (1 - 2tx + t^2) \sum_{k=j+1}^{n} \frac{1-\alpha_k^2}{1 - 2\alpha_k x + \alpha_k^2} \ge (1+t)^2 \sum_{k=j+1}^{n} \frac{1-\alpha_k}{1+\alpha_k}, \quad t \in (\alpha_j,\ \alpha_{j+1}),$$

заключаем, что

$$\mu_n(x) \ge \frac{1}{2} \left( (1-t)^2 \sum_{k=0}^{j} \frac{1+\alpha_k}{1-\alpha_k} + (1+t)^2 \sum_{k=j+1}^{n} \frac{1-\alpha_k}{1+\alpha_k} \right), \quad t \in (\alpha_j,\ \alpha_{j+1}),$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\lambda_n(u)} \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_n} \frac{(1-t)^{2\gamma} t^{-\gamma} \sqrt{1 - 2t\omega_n(t) M_{n+1}(x) + t^2 \omega_n^2(t)}}{1 - 2t\cos u + t^2}\, dt$$

$$\le 2 \sum_{j=1}^{n-1} \int\limits_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} \frac{(1-t)^{2\gamma} t^{-\gamma} (1 + t\omega_n(t))}{(1-t)^2 \sum\limits_{k=0}^{j} \frac{1+\alpha_k}{1-\alpha_k} + (1+t)^2 \sum\limits_{k=j+1}^{n} \frac{1-\alpha_k}{1+\alpha_k}}\, dt.$$

Разбивая интеграл справа в (2.3) на $n+1$ интегралов по интервалам $[0, \alpha_1]$, $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, и $[\alpha_n, 1]$ и воспользовавшись оценкой сверху величины $\mu_n(x)$ на каждом из них, придем к оценке (2.4).

Теорема 2 доказана.

В теореме 2 положим значения параметров $\alpha_k = 0,\ k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда $\varepsilon_n(x,\ f_\gamma,\ O) = \varepsilon_n^{(0)}(x,\ f_\gamma)$ и $\varepsilon_n(f_\gamma,\ O) = \varepsilon_n^{(0)}(f_\gamma)$ представляют собой соответственно поточечные и равномерные приближения функции $f_\gamma(x)$ на отрезке $[-1,\ 1]$ суммами Фейера полиномиального ряда Фурье — Чебышёва. Тогда из теоремы 2 получаем

**Следствие 3.** *Для приближений функции $f_\gamma(x)$ на отрезке $[-1,\ 1]$ суммами Фейера полиномиального ряда Фурье — Чебышёва имеют место*

1) *интегральное представление*:

$$\varepsilon_n^{(0)}(x,\ f_\gamma) = -\frac{2^{1-\gamma} \sin \pi\gamma}{\pi(n+1)}$$

$$\times \int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma} t^{-\gamma} (t^{n+3} T_n(x) - 2t^{n+2} T_{n+1}(x) + t^{n+1} T_{n+2}(x) - t^2 x + 2t - x)}{(1 - 2tx + t^2)^2}\, dt, \quad x \in [-1,\ 1],$$

*где* $T_n(\cdot)$ *— многочлены Чебышёва первого рода*;

2) *интегральное представление равномерных приближений*:

$$\varepsilon_n^{(0)}(f_\gamma) = \frac{2^{1-\gamma}\sin\pi\gamma}{\pi(n+1)} \int\limits_0^1 (1-t)^{2\gamma-1} t^{-\gamma} \frac{1-t^{n+1}}{1-t}\, dt, \quad \gamma \in (0,\ 1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

## 3. Асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений

Исследуем асимптотическое поведение при $n \to \infty$ величины (2.5). С этой целью в выражениях $I_1$, $I_2$ и $I_3$ выполним замену переменного по формуле $t = (1-y)/(1+y)$, $dt = -2dy/(1+y)^2$. Тогда

$$\varepsilon_n^*(f_\gamma,\ A) = \frac{2^\gamma \sin\pi\gamma}{\pi}[I_1 + I_2 + I_3], \quad \gamma \in (0,\ 1), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

где

$$I_1 = \frac{1}{\varphi_n(A)} \int\limits_0^{\beta_n} \frac{y^{2\gamma-1}}{(1-y^2)^\gamma} \frac{1-\chi_{n+1}(y)}{y}\, dy,$$

$$I_2 = 2\sum_{j=1}^{n-1} \int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{y^{2\gamma}(1+\chi_{n+1}(y))}{(1-y^2)^\gamma[\varphi_j(A)y^2 + \psi_{n-j}(A)]}\, dy, \quad I_3 = \frac{1}{\psi_n(A)} \int\limits_{\beta_1}^1 \frac{y^{2\gamma}(1+\chi_{n+1}(y))}{(1-y^2)^\gamma}\, dy,$$

$$\varphi_n(A) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\beta_k}, \quad \psi_n(A) = \sum_{k=0}^n \beta_k, \quad \beta_k = \frac{1-\alpha_k}{1+\alpha_k}, \quad \chi_{n+1}(y) = \frac{1-y}{1+y}\prod_{k=1}^n \frac{\beta_k - y}{\beta_k + y}.$$

Будем полагать, что параметры $\beta_k,\ k = 1,\ 2, \ldots, n$, упорядочены следующим образом:

$$0 < \beta_n \le \beta_{n-1} \le \ldots \le \beta_1 \le \beta_0 = 1.$$

Более того, для каждого значения $n$ может выбираться соответствующий набор параметров $\{\beta_1,\ \beta_2, \ldots, \beta_n\}$. То есть, вообще говоря, $\beta_k = \beta_k(n),\ k = 1,\ 2, \ldots, n$. В связи с этим будем полагать выполненными условия

$$\text{A)} \quad \varphi_n(A) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\beta_k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \qquad \text{B)} \quad \psi_n(A) = \sum_{k=0}^n \beta_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Условия A) и B) не противоречивы. Нетрудно привести пример последовательностей, удовлетворяющих обоим условиям одновременно.

**Теорема 3.** *При* $n \to \infty$ *справедливы асимптотические равенства*

$$\varepsilon_n^*(f_\gamma,\ A) \sim \frac{2^\gamma\sin\pi\gamma}{\pi} \begin{cases} \dfrac{2^{1-2\gamma}\Gamma(2\gamma)}{(1-2\gamma)[\varphi_n(A)]^{2\gamma}} + \Phi_n^{(\gamma)}(A), & \gamma \in (0,\ 1/2), \\ \dfrac{\ln\varphi_n(A)}{\varphi_n(A)} + \Phi_n^{(1/2)}(A), & \gamma = 1/2, \\ \dfrac{1}{\varphi_n(A)}\displaystyle\int_0^{\beta_n} \frac{y^{2\gamma-2}}{(1-y^2)^\gamma}\, dy + \Phi_n^{(\gamma)}(A), & \gamma \in (1/2,\ 1), \end{cases} \tag{3.2}$$

*где*

$$\Phi_n^{(\gamma)}(A) = 2\sum_{j=1}^{n-1} \int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{y^{2\gamma}\, dy}{(1-y^2)^\gamma[\varphi_j(A)y^2 + \psi_{n-j}(A)]} + \frac{1}{\psi_n(A)} \int\limits_{\beta_1}^1 \frac{y^{2\gamma}}{(1-y^2)^\gamma}\, dy, \quad \gamma \in (0,\ 1),$$

$\Gamma(s)$ *— гамма-функция Эйлера.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Исследуем каждый из интегралов, входящих в выражение (3.1), по отдельности. Изучим их асимптотическое поведение при $n \to \infty$. Так, интеграл $I_1$ представим в виде

$$I_1 = \frac{1}{\varphi_n(A)}\Big(\int\limits_0^{\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{\beta_n}\Big)\frac{y^{2\gamma-1}}{(1-y^2)^{\gamma}}\frac{1-\mathrm{e}^{S(y)}}{y}\,dy, \quad S(y) = \sum_{k=0}^{n}\ln\frac{\beta_k - y}{\beta_k + y},$$

где $\varepsilon$ — некоторая достаточно малая величина такая, что $\varepsilon \in (0,\ \beta_n]$. Пусть $\gamma \in (0,\ 1/2]$. Второй интеграл справа существует, следовательно,

$$I_1 = \frac{1}{\varphi_n(A)}\int\limits_0^{\varepsilon}\frac{y^{2\gamma-1}}{(1-y^2)^{\gamma}}\frac{1-\mathrm{e}^{S(y)}}{y}\,dy + O\Big(\frac{1}{\varphi_n(A)}\Big), \quad n \to \infty.$$

Очевидно, что асимптотическое поведение интеграла $I_1$ определяется в сколь угодно малой окрестности нуля переменного интегрирования. Раскладывая функцию $S(y)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $y = 0$, получим

$$I_1 = \frac{1}{\varphi_n(A)}\int\limits_0^{\varepsilon} y^{2\gamma-1}\frac{1-\mathrm{e}^{-2y\varphi_n(A)}}{y}\,dy + O\Big(\frac{1}{\varphi_n(A)}\Big), \quad n \to \infty.$$

Выполнив в последнем интеграле замену переменного по формуле $2y\varphi_n(A) \mapsto y$, придем к выражению

$$I_1 = \frac{2^{1-2\gamma}}{[\varphi_n(A)]^{2\gamma}}\int\limits_0^{2\varepsilon\varphi_n(A)} y^{2\gamma-1}\frac{1-\mathrm{e}^{-y}}{y}\,dy + O\Big(\frac{1}{\varphi_n(A)}\Big), \quad n \to \infty. \tag{3.3}$$

Для исследования асимптотического поведения интеграла справа воспользуемся методами, изложенными в [36, с. 375]. Рассмотрим интеграл

$$J(p) = \int\limits_0^{p} y^{2\gamma-1}\frac{1-\mathrm{e}^{-y}}{y}\,dy, \quad \gamma \in (0,\ 1/2].$$

Установим его асимптотическое поведение при $p \to \infty$. Продифференцируем интеграл $J(p)$ по параметру $p$. Имеем

$$\frac{\partial J(p)}{\partial p} = \frac{1-\mathrm{e}^{-p}}{p^{2-2\gamma}} \sim \frac{1}{p^{2-2\gamma}}, \quad p \to \infty.$$

Чтобы вернуться к первоначальному интегралу в последнем выражении выполним интегрирование по параметру $p$. Тогда

$$J(p) \sim \begin{cases} c_1(\gamma) - \dfrac{1}{(1-2\gamma)p^{1-2\gamma}}, & \gamma \in (0,\ 1/2), \\ \ln p, \ \ \gamma = 1/2, & p \to \infty, \end{cases} \tag{3.4}$$

где $c_1(\gamma)$ — некоторая величина, не зависящая от $p$. Очевидно, что

$$c_1(\gamma) = \int\limits_0^{+\infty} y^{2\gamma-1}\frac{1-\mathrm{e}^{-y}}{y}\,dy = \frac{\Gamma(2\gamma)}{1-2\gamma}, \quad \gamma \in (0,\ 1/2).$$

Из (3.3) с учетом асимптотических равенств (3.4) при $p = 2\varepsilon\varphi_n(A)$ находим

$$I_1 \sim \begin{cases} \dfrac{2^{1-2\gamma}\Gamma(2\gamma)}{(1-2\gamma)[\varphi_n(A)]^{2\gamma}}, & \gamma \in (0,\ 1/2), \\[2mm] \dfrac{\ln\varphi_n(A)}{\varphi_n(A)}, & \gamma = 1/2. \end{cases} \tag{3.5}$$

Пусть теперь $\gamma \in (1/2,\ 1)$. В этом случае

$$I_1 = \frac{1}{\varphi_n(A)} \int\limits_0^{\beta_n} \frac{y^{2\gamma-2}}{(1-y^2)^\gamma}\,dy - \frac{1}{\varphi_n(A)} \int\limits_0^{\beta_n} \frac{y^{2\gamma-2}\chi_{n+1}(y)}{(1-y^2)^\gamma}\,dy, \quad \gamma \in (1/2,\ 1).$$

Первый интеграл существует. Применив для исследования второго интеграла те же методы нахождения асимптотик, что и при $\gamma \in (0,\ 1/2]$, получим

$$I_1 = \frac{1}{\varphi_n(A)} \int\limits_0^{\beta_n} \frac{y^{2\gamma-2}}{(1-y^2)^\gamma}\,dy + O\left(\frac{\Gamma(2\gamma-1)}{2^{2\gamma-1}[\varphi_n(A)]^{2\gamma}}\right), \quad \gamma \in (1/2,\ 1), \quad n \to \infty. \tag{3.6}$$

Из (3.5) и (3.6) приходим к асимптотическим равенствам

$$I_1 \sim \begin{cases} \dfrac{2^{1-2\gamma}\Gamma(2\gamma)}{(1-2\gamma)[\varphi_n(A)]^{2\gamma}}, \quad \gamma \in (0,\ 1/2), \\ \dfrac{\ln \varphi_n(A)}{\varphi_n(A)}, \quad \gamma = 1/2, \\ \dfrac{1}{\varphi_n(A)} \displaystyle\int_0^{\beta_n} \frac{y^{2\gamma-2}}{(1-y^2)^\gamma}\,dy, \quad \gamma \in (1/2,\ 1). \end{cases} \tag{3.7}$$

где $\varphi_n(A)$ определено в формулировке теоремы 3.

Изучим выражение $I_2$ (см. (3.1)). Представим его в виде

$$I_2 = 2\sum_{j=1}^{n-1} \int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{y^{2\gamma}\,dy}{(1-y^2)^\gamma[\varphi_j(A)y^2 + \psi_{n-j}(A)]} + 2\sum_{j=1}^{n-1} \int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{y^{2\gamma}\chi_{n+1}(y)\,dy}{(1-y^2)^\gamma[\varphi_j(A)y^2 + \psi_{n-j}(A)]}. \tag{3.8}$$

Интегралы в первой сумме справа существуют при $\beta_k \in (0,\ 1]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Для второй суммы, очевидно, справедлива оценка

$$\sum_{j=1}^{n-1} \int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{y^{2\gamma}\chi_{n+1}(y)\,dy}{(1-y^2)^\gamma[\varphi_j(A)y^2 + \psi_{n-j}(A)]}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n-1} \max_{y\in[\beta_{j+1},\ \beta_j]} |\chi_{n+1}(y)| \int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{y^{2\gamma}\,dy}{(1-y^2)^\gamma[\varphi_j(A)y^2 + \psi_{n-j}(A)]}.$$

Поскольку $(1-t)/(1+t) \leq \mathrm{e}^{-2t}$, $t \geq 0$, то

$$|\chi_{n+1}(y)| \leq \frac{1-\beta_n}{1+\beta_n} \prod_{k=1}^{j} \frac{\beta_k - \beta_n}{\beta_k + \beta_n} \prod_{k=j+1}^{n} \frac{\beta_j - \beta_k}{\beta_j + \beta_k} \leq \mathrm{e}^{-2[\beta_n\varphi_j(A) + \frac{1}{\beta_j}\psi_{n-j}(A)]}, \quad y \in [\beta_{j+1},\ \beta_j].$$

В силу условий A) и B) при изменении индекса $j$ от 1 до $n-1$ в степени экспоненты либо первое, либо второе слагаемое будет стремиться к бесконечности и, значит, для любого набора параметров $\beta_k \in (0,\ 1]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, заключаем, что $\max_{y\in[\beta_{j+1},\ \beta_j]}|\chi_n(y)|$ стремится к нулю. При этом из (3.8) для любого $\gamma \in (0,\ 1)$ следует справедливость асимптотического равенства

$$I_2 \sim 2\sum_{j=1}^{n-1} \int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{y^{2\gamma}\,dy}{(1-y^2)^\gamma[\varphi_j(A)y^2 + \psi_{n-j}(A)]}, \quad n \to \infty. \tag{3.9}$$

Наконец, изучим асимптотическое поведение интеграла $I_3$ (см. (3.1)). Рассуждая аналогичным образом, как в случае с интегралом $I_2$, находим, что

$$I_3 \sim \frac{1}{\psi_n(A)} \int\limits_{\beta_1}^{1} \frac{y^{2\gamma}}{(1-y^2)^{\gamma}}\, dy, \quad \gamma \in (0,\ 1), \quad n \to \infty. \tag{3.10}$$

Для того чтобы прийти к асимптотическому равенству (3.2), достаточно подставить в (3.1) асимптотические равенства (3.7), (3.9) и (3.10).

Доказательство теоремы 3 завершено.

Положив в теореме 3 значение параметров $\beta_k = 1,\ k = 1, 2, \ldots, n$, можно убедиться, что величина $\varepsilon_n^*(f_\gamma,\ O) = \varepsilon_n^{(0)}(f_\gamma)$ представляет собой асимптотическую оценку равномерных приближений функции $(1-x)^\gamma$, $\gamma \in (0,\ 1)$, суммами Фейера полиномиальных рядов Фурье — Чебышёва. Отсюда получаем

**Следствие 4.** *Для равномерных приближений функции $f_\gamma(x)$ суммами Фейера полиномиального ряда Фурье — Чебышёва при $n \to \infty$ имеют место асимптотические равенства*

$$\varepsilon_n^{(0)}(f_\gamma) \sim \frac{2^\gamma \sin \pi\gamma}{\pi} \begin{cases} \dfrac{2^{1-2\gamma}\Gamma(2\gamma)}{(1-2\gamma)(n+1)^{2\gamma}}, & \gamma \in (0,\ 1/2), \\ \dfrac{\ln(n+1)}{n+1}, & \gamma = 1/2, \\ \dfrac{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\gamma-1/2)}{2\sqrt{\pi}(n+1)}, & \gamma \in (1/2,\ 1), \end{cases}$$

*где $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера.*

Обратим внимание, что в отличие от результатов, полученных в теореме 3, в следствии 4 содержится именно асимптотическая оценка равномерных приближений, а не мажоранты. Это объясняется тем обстоятельством, что в полиномиальном случае максимум приближений $\varepsilon_n^{(0)}(f_\gamma,\ x)$ достигается при $x = 1$.

## 4. Асимптотическая оценка мажоранты в случае ограничений на количество геометрически различных полюсов

Пусть $q$ — произвольное натуральное число. $A_q$ есть множество параметров таких, что среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ровно $q$ различных и кратность каждого параметра равна $m$, $n = mq, n > q$. Таким образом, будем вести речь об аппроксимации рациональными функциями с $q$ геометрически различными полюсами в расширенной комплексной плоскости и простым полюсом в бесконечно удаленной точке. В этом случае из (3.2) получим

$$\varepsilon_{n,\ q}^*(f_\gamma,\ A_q) \sim \frac{2^\gamma \sin \pi\gamma}{\pi} \begin{cases} \dfrac{2^{1-2\gamma}\Gamma(2\gamma)}{(1-2\gamma)\left(\varphi_{n,\ q}(A_q)\right)^{2\gamma}} + \Phi_n^{(\gamma)}(A_q), & \gamma \in (0,\ 1/2), \\ \dfrac{\ln \varphi_{n,\ q}(A_q)}{\varphi_{n,\ q}(A_q)} + \Phi_n^{(\frac{1}{2})}(A_q), & \gamma = 1/2, \\ \dfrac{1}{\varphi_{n,\ q}(A_q)} \displaystyle\int_0^{\beta_q} \frac{y^{2\gamma-2}}{(1-y^2)^\gamma}\, dy + \Phi_n^{(\gamma)}(A_q), & \gamma \in (1/2,\ 1); \end{cases} \tag{4.1}$$

здесь

$$\varphi_{n,\ q}(A_q) = 1 + m \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{\beta_k};$$

$$\Phi_n^{(\gamma)}(A_q) = 2\sum_{j=1}^{q-1}\int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{y^{2\gamma}\,dy}{(1-y^2)^\gamma\Big(\Big(1+m\sum\limits_{k=1}^{j}\dfrac{1}{\beta_k}\Big)y^2+\Big(m\sum\limits_{k=j+1}^{q}\beta_k\Big)\Big)}$$

$$+\frac{1}{\Big(1+m\sum\limits_{k=1}^{q}\beta_k\Big)}\int\limits_{\beta_1}^{1}\frac{y^{2\gamma}}{(1-y^2)^\gamma}\,dy, \quad \gamma\in(0,\ 1);$$

$\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера. Исследуем асимптотические выражения величин из соотношений (4.1). Очевидно, что при постоянных значениях параметров $\beta_k,\ k=1,2,\ldots,q$, порядок указанных соотношений не отличается от полиномиального. Будем полагать, что параметры $\beta_k=\beta_k(n)\to 0,\ \beta_{k+1}=o(\beta_k),\ k=1,2,\ldots,q$, при $n\to\infty$. Нетрудно показать, что в этом случае соотношения в (4.1) примут вид

$$\varepsilon^*_{n,\ q}(f_\gamma,\ A_q)\sim\frac{2^\gamma\sin\pi\gamma}{\pi m}\begin{cases}\dfrac{2^{1-2\gamma}\Gamma(2\gamma)m^{1-2\gamma}\beta_q^{2\gamma}}{1-2\gamma}+\dfrac{2}{1-2\gamma}\sum\limits_{j=1}^{q-1}\dfrac{\beta_j}{\beta_{j+1}^{1-2\gamma}}+\dfrac{c_1(\gamma)}{\beta_1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\gamma\in(0,\ 1/2),\\ \beta_q\ln m+2\sum\limits_{j=1}^{q-1}\beta_j\ln\dfrac{\beta_j}{\beta_{j+1}}+\dfrac{1}{\beta_1}, \qquad \gamma=1/2,\\ \dfrac{\beta_q^{2\gamma}}{2\gamma-1}+\dfrac{2}{2\gamma-1}\sum\limits_{j=1}^{q-1}\beta_j^{2\gamma}+\dfrac{c_1(\gamma)}{\beta_1}, \quad \gamma\in(1/2,\ 1),\end{cases} \tag{4.2}$$

где

$$c_1(\gamma)=\int\limits_0^1\frac{y^{2\gamma}}{(1-y^2)^\gamma}\,dy=\frac{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\gamma+1/2)}{\sqrt{\pi}},$$

$\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера.

Представляет интерес минимизировать правые части соотношений в (4.2) посредством выбора оптимального для этой задачи набора параметров $\beta_k,\ k=1,2,\ldots,q$. Другими словами, найти наилучшую мажоранту равномерных приближений функции $f_\gamma(x)$ рациональным интегральным оператором Фейера (0.1) с фиксированным количеством геометрически различных полюсов. Положим

$$\varepsilon_{n,\ q}(f_\gamma)=\inf_{A_q}\varepsilon_{n,\ q}(f_\gamma,\ A_q), \quad \varepsilon^*_{n,\ q}(f_\gamma)=\inf_{A_q}\varepsilon^*_{n,\ q}(f_\gamma,\ A_q),$$

где $\varepsilon_{n,\ q}(f_\gamma,\ A_q)$ — равномерные приближения функции $f_\gamma(x)$ на отрезке $[-1,\ 1]$ рациональным интегральным оператором Фейера (0.1), имеющим $q$ геометрически различных полюсов в расширенной комплексной плоскости. Отметим очевидное неравенство, следующее из (2.4):

$$\varepsilon_{n,\ q}(f_\gamma)\le\varepsilon^*_{n,\ q}(f_\gamma), \quad n\in\mathbb{N}.$$

При каждом фиксированном $\gamma\in(0,\ 1)$ асимптотические соотношения в (4.2) представляют собой функции переменных $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_q)$, непрерывные в каждой точке $q$-мерного куба $[\delta,1]^q$, где $\delta=\delta(n)>0$ — некоторая величина, зависящая от $n$ и при любом $n$ ограничивающая множество параметров $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_q)$ слева. Согласно теореме Вейерштрасса правые части указанных равенств имеют строгий минимум при некотором $\beta^*=(\beta_1^*,\ \beta_2^*,\ldots,\beta_q^*)$. Причем поскольку $\beta_k=1,\ k=1,2,\ldots,q$, соответствует полиномиальному случаю, а при $\beta_k(n)\to 0,\ n\to\infty$, с достаточно большой скоростью асимптотические соотношения в (4.2) неограниченно растут, то можно предположить, что $\beta^*$ — внутренняя точка куба $[\delta, 1]^q$. Для того чтобы найти оптимальный набор $\beta^*$ для соответствующего асимптотического соотношения в (4.2), приходим к задаче на экстремум

$$\varepsilon^*_{n,\ q}(f_\gamma,\ A_q) \underset{A_q}{\longrightarrow} \inf.$$

В следующей теореме устанавливается асимптотическое выражение наилучшей мажоранты равномерных приближений в зависимости от значений параметра $\gamma$. Приводим эту теорему без доказательства, поскольку оно в точности содержится в [32].

**Теорема 4.** *При любом $\gamma \in (0,\ 1)$ и натуральном $q \in (0,\ n)$ для мажоранты равномерных приближений при $n \to \infty$ справедливы асимптотические равенства*

$$\varepsilon^*_{n,\ q}(f_\gamma) \sim \frac{2^\gamma \sin \pi\gamma}{\pi} \frac{1+2\gamma}{2\gamma} q \begin{cases} \dfrac{\mu(\gamma,\ q)}{n^{1-\frac{(1-2\gamma)^q}{1+2\gamma}}}, & \gamma \in (0,\ 1/2), \\ \dfrac{\sqrt{1+\ln_q n}}{n}, & \gamma = 1/2, \\ \dfrac{\mu_1(\gamma,\ q)}{n}, & \gamma \in (1/2,\ 1); \end{cases} \tag{4.3}$$

*здесь*

$$\mu(\gamma,\ q) = \left( \frac{2^{(1-2\gamma)^q} (2\gamma)^{(1-2\gamma)^{q-1}} [c_1(\gamma)]^{2\gamma} [\Gamma(2\gamma)]^{(1-2\gamma)^{q-1}}}{(1-2\gamma)^{\frac{1-(1-2\gamma)^q}{2\gamma}} q^{(1-2\gamma)^q}} \right)^{\frac{1}{1+2\gamma}};$$

$$\mu_1(\gamma,\ q) = \frac{2\gamma}{1+2\gamma} \inf_{A_q} \left( \frac{\beta_q^{2\gamma}}{2\gamma-1} + \frac{1}{2(2\gamma-1)} \sum_{j=1}^{q-1} \beta_j^{2\gamma} + \frac{c_1(\gamma)}{\beta_1} \right);$$

$$\ln_q n = \underbrace{\ln(1+\ln(1+\ldots \ln n))}_{q\ \text{раз}};$$

*$c_1(\gamma)$ определена в (4.2); $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера.*

В теореме 4 положим значение параметра $q = 1$. Другими словами, аппроксимирующая рациональная функция имеет один полюс в расширенной комплексной плоскости. При этом получаем

**Следствие 5.** *При любом $\gamma \in (0,\ 1)$ для мажоранты равномерных приближений при $n \to \infty$ справедливы асимптотические равенства*

$$\varepsilon^*_{n,\ 1}(f_\gamma) \sim \frac{2^\gamma \sin \pi\gamma}{\pi} \begin{cases} \dfrac{(1+2\gamma) 2^{\frac{1-2\gamma}{1+2\gamma}} [c_1(\gamma)]^{\frac{2\gamma}{1+2\gamma}} [\Gamma(2\gamma)]^{\frac{1}{1+2\gamma}}}{(2\gamma)^{\frac{2\gamma}{1+2\gamma}} (1-2\gamma)^{\frac{1}{1+2\gamma}}} \dfrac{1}{n^{\frac{4\gamma}{1+2\gamma}}}, & \gamma \in (0,\ 1/2), \\ \dfrac{2\sqrt{\ln n}}{n}, & \gamma = 1/2, \\ [c_1(\gamma)]^{\frac{2\gamma}{1+2\gamma}} \left( \dfrac{2\gamma}{2\gamma-1} \right)^{\frac{1}{1+2\gamma}} \dfrac{1}{n}, & \gamma \in (1/2,\ 1). \end{cases}$$

З а м е ч а н и е. Сравнивая результаты теоремы 4 и следствия 4, приходим к выводу, что при $\gamma \in (0,\ 1/2]$ специальным выбором набора параметров $\beta_k,\ k = 1, 2, \ldots, q$, возможно добиться большей скорости равномерных приближений рациональным интегральным оператором Фейера в сравнении с соответствующим полиномиальным аналогом. Этот вывод справедлив даже в случае одного геометрически различного полюса. Иначе говоря, рациональные функции Фейера отражают специфику рациональной аппроксимации непрерывных функций со степенными особенностями. В случае же $\gamma \in (1/2,\ 1)$ ситуация иная. Из (4.3) следует, что изучаемый метод рациональной аппроксимации не позволяет увеличить скорость убывания мажоранты равномерных приближений, а лишь минимизирует константу.

Известно [19, с. 96], что наилучшие равномерные полиномиальные приближения рассматриваемой функции обладают следующим свойством:

$$E_{2n}(|x|^{2\gamma}, [-1,\ 1]) = \frac{1}{2^\gamma} E_n((1-x)^\gamma, [-1,\ 1]).$$

Используя соответствующие рассуждения в нашем случае, из (4.3) получим

**Следствие 6.** *Для мажоранты равномерных приближений функции* $|x|^s$, $s \in (0,\ 2)$, *на отрезке* $[-1,\ 1]$ *рациональным интегральным оператором Фейера при* $n \to \infty$ *справедливы асимптотические равенства*

$$\varepsilon^*_{2n,\ 2q}(|x|^s) \sim \frac{1}{\pi} \sin\frac{\pi s}{2} \begin{cases} \dfrac{\mu_2(s,\ q)}{n^{1-\frac{(1-s)^q}{1+s}}}, & s \in (0,\ 1), \\ \dfrac{2q\sqrt{1+\ln_q n}}{n}, & s = 1, \\ \dfrac{\mu_3(s,\ q)}{n}, & s \in (1,\ 2), \end{cases}$$

*где*

$$\mu_2(s,\ q) = \frac{(1+s)2^{\frac{(1-s)^q}{1+s}}[c_2(s)]^{\frac{s}{1+s}}[\Gamma(s)]^{\frac{(1-s)^{q-1}}{1+s}} q^{1-\frac{(1-s)^q}{1+s}}}{s^{1-\frac{(1-s)^{q-1}}{1+s}}(1-s)^{\frac{1-(1-s)^q}{s(1+s)}}}, \quad c_2(s) = \frac{\Gamma\Big(1-\dfrac{s}{2}\Big)\Gamma\Big(\dfrac{s}{2}+\dfrac{1}{2}\Big)}{\sqrt{\pi}},$$

$$\mu_3(s,\ q) = \frac{s}{1+s} \inf_{A_q} \left( \frac{\beta_q^s}{s-1} + \frac{1}{2(s-1)} \sum_{j=1}^{q-1} \beta_j^s + \frac{c_2(s)}{\beta_1} \right),$$

$\Gamma(\cdot)$ — *гамма-функция Эйлера.*

В частности,

$$\varepsilon^*_{2n,\ 2}(|x|^s) \sim \frac{1+s}{\pi} \sin\frac{\pi s}{2} \begin{cases} \left(\dfrac{2^{1-s}[c_2(s)]^s\Gamma(s)}{s^s(1-s)}\right)^{\frac{1}{1+s}} \dfrac{1}{n^{\frac{2s}{1+s}}}, & s \in (0,\ 1), \\ \dfrac{\sqrt{\ln n}}{n}, & s = 1, \\ \dfrac{\mu_3(s,\ 1)}{n}, & s \in (1,\ 2). \end{cases}$$

Аналогичный по порядку результат содержится в [37]. Он получен приближениями функции $|x|^s$, $s \in (0,\ 2)$, на отрезке $[-1,\ 1]$ суммами Фейера рядов Фурье по одной системе ортогональных рациональных функций Чебышёва — Маркова с двумя геометрически различными полюсами.

## Заключение

Изучены аппроксимационные свойства рационального интегрального оператора Фейера на отрезке $[-1,\ 1]$. Получены оценки сверху равномерных приближений непрерывных на отрезке функций последовательностями изучаемых операторов в терминах модулей непрерывности.

Исследованы приближения функции $(1-x)^\gamma,\ \gamma \in (0,\ 1)$. Установлены интегральное представление приближений, оценки поточечных и равномерных приближений, найдена асимптотическая оценка мажоранты соответствующих приближений. Следствием полученных результатов являются асимптотические оценки равномерных приближений исследуемой функции суммами Фейера полиномиальных рядов Фурье — Чебышёва. Рассмотрен случай фиксированного количества полюсов аппроксимирующей функции. При этом определены значения параметров, с которыми равномерные рациональные приближения функции $(1-x)^\gamma,\ \gamma \in (0,\ 1)$, оператором Фейера имеют большую скорость стремления к нулю в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Fejér L.** Untersuchungen über Fouriersche Reihen // Mathematische Annalen. 1904. Vol. 58. P. 51–69.
2. **Lebesgue H.** Sur les intégrales singuliéres // Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série. 1909. T. 1. P. 25–117.
3. **Bernstein S.** Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomés de degré donné. Bruxelles : Hayez, imprimeur des academies royales, 1912. 104 p.
4. **Приваловъ И.И.** О приближенiи суммами Fejer'a функцiй удовлетворяющихъ условiю Lipschitz'a // Мат. сб. 1918. Т. 30, № 4. С. 521–526.
5. **Никольский С.М.** Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1940. Т. 4, № 6. С. 501–508.
6. **Zygmund A.** On the degree of approximation of functions by Fejér means // Bull. Amer. Soc. 1945. Vol. 51, iss. 4. P. 274–278.
7. **Новиков О. А., Ровенская О.Г.** Приближение классов интегралов Пуассона суммами Фейера // Донбасский гос. пед. ун-т. Компьютерные исследования и моделирование. 2015. Т. 7, № 4. С. 813–819.
8. **Ефимов А.В.** О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1958. Т. 22, № 1. С. 81–116.
9. **Лебедь Г.К., Авдеенко А.А.** О приближении периодических функций суммами Фейера // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1971. Т. 35, № 1. С. 83–92.
10. **Савчук В.В.** Приближения средними Фейера функций класса Дирихле // Мат. заметки. 2007. Т. 81, № 5. С. 744–750.
11. **Джрбашян М.М.** К теории рядов Фурье по рациональным функциям // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. 1956. Т. 9, № 7. С. 1–27.
12. **Русак В.Н.** О приближении рациональными дробями // Докл. АН БССР. 1964. Т. 8, № 7. С. 432–435.
13. **Русак В.Н.** О приближении рациональными функциями на вещественной оси // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. 1974. № 1. С. 22–28.
14. **Русак В.Н.** Рациональные функции как аппарат приближения. Мн. : Изд-во БГУ, 1979. 179 с.
15. **Китбалян А.А.** Об одном обощении ядра Фейера // Докл. АН Арм. ССР. 1979. Т. 69, № 1. С. 8–14.
16. **Ровба Е.А.** Рациональные интегральные операторы на отрезке // Вестн. БГУ. 1996. Т. 1, № 1. С. 34–39.
17. **Ровба Е.А.** О приближении рациональными операторами Фейера и Джексона функций ограниченной вариации // Докл. Национал. академии наук Беларуси. 1998. Т. 42, № 4. С. 13–17.
18. **Смотрицкий К.А.** О приближении выпуклых функций рациональными интегральными операторами на отрезке // Вестн. БГУ. 2005. Т. 1, № 3. С. 64–70.
19. **Бернштейн С.Н.** Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. Ч. 1. М.; Л. : Главная редакция общетехнической литературы, 1937. 203 с.
20. **Ибрагимов И.И.** Об асимптотическом значении наилучшего приближения функций, имеющих вещественную особую точку // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1946. Т. 10, № 5. С. 429–460.
21. **Никольский С.М.** О наилучшем приближении многочленами в среднем функции $|a-x|^s$ // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1947. Т. 11, № 2. С. 139–180.
22. **Reddy A.R.** A Note on rational approximation to $(1-x)^{1/2}$ // J. Approx. Theory. 1979. Vol. 25, iss. 1. P. 31–33. doi: 10.1016/0021-9045(79)90030-3

23. **Bundschuh P.A.** Remark on Reddy's paper on the rational approximation of $(1-x)^{1/2}$ // J. Approx. Theory. 1981. Vol. 32, iss. 3. P. 167–169. doi: 10.1016/0021-9045(81)90113-1
24. **McD. Mercer A.** A note on rational approximation to $(1-x)^{\alpha}$ // J. Approx. Theory. 1983. Vol. 38, iss. 1. P. 101–103. doi: 10.1016/0021-9045(83)90146-6
25. **Reddy A.R.** A note on rational approximation to $(1-x)^{\sigma}$ // J. Approx. Theory. 1987. Vol. 49, iss. 4. P. 404–407. doi: 10.1016/0021-9045(87)90078-5
26. **Alzer H.** On rational approximation of $(1-x)^{\sigma}$ // Archiv der Mathematik. 1996. Vol. 67, iss. 2. P. 134–137. doi: 10.1007/BF01268927
27. **Andersson J.-E.** Best Rational Approximation to Markov Functions // J. Approx. Theory. 1994. Vol. 76, iss. 1. P. 219–232. doi: 10.1006/jath.1994.1015
28. **Пекарский А.А.** Наилучшие равномерные рациональные приближения функций Маркова // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7, № 2. С. 121–132.
29. **Patseika P.G., Rouba Y.A., Smatrytski K.A.** On one rational integral operator of Fourier–Chebyshev type and approximation of Markov functions // J. of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2020. Vol. 2. P. 6–27. doi: 10.33581/2520-6508-2020-2-6-27
30. **Ровба Е.А.** Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации // Докл. Национал. академии наук Беларуси. 1979. Т. 23, № 11. С. 968–971.
31. **Поцейко П.Г., Ровба Е.А.** О рациональных суммах Абеля— Пуассона на отрезке и аппроксимациях функций Маркова // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2021. Т. 3. С. 6–24. doi: 10.33581/2520-6508-2021-3-6-24
32. **Поцейко П.Г., Ровба Е.А.** О рациональных аппроксимациях функции Маркова на отрезке суммами Фейера с фиксированным количеством полюсов // Тр. института математики. 2022. Т. 30, № 1–2. С. 57–77.
33. **Мисюк В.Р.** Об наилучшем приближении степенной функции в пространстве Бергмана // Тр. Математического центра имени Н. И. Лобачевского / Казанское мат. об-во. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: Материалы Тринадцатой междунар. Казанской летней науч. шк.-конф. Казань : Изд-во Казан. мат. об-ва, Изд-во Академии наук РТ, 2017. Т. 54 С. 257–259.
34. **Тиман А.Ф.** Теория приближений функций действительного переменного. М. : ГИФМЛ, 1960. 624 с.
35. **Ахиезер Н.И.** Лекции по теории аппроксимации. М. : Наука, 1965. 408 с.
36. **Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.** Лекции по теории функций комплексного переменного. М. : Наука, Гл. ред. Физ-мат. лит-ры, 1989. 480 с.
37. **Поцейко П.Г., Ровба Е.А.** Суммы Фейера рационального ряда Фурье — Чебышёва и аппроксимации функции $|x|^s$ // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2019. № 3. С. 18–34. doi: 10.33581/2520-6508-2019-3-18-34


Поступила 15.05.2023
После доработки 18.12.2023
Принята к публикации 25.12.2023

Поцейко Павел Геннадьевич
канд. физ.-мат. наук
доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
г. Гродно (Республика Беларусь)
e-mail: pahamatby@gmail.com

Ровба Евгений Алексеевич
д-р. физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой фундаментальной и прикладной математики
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
г. Гродно (Республика Беларусь)
e-mail: rovba.ea@gmail.com

**REFERENCES**


1. Fejér L. Untersuchungen über Fouriersche Reihen. *Math. Ann.*, 1904, vol. 58, pp. 51–69. doi: 10.1007/BF01447779
2. Lebesgue H. Sur les intégrales singuliéres. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série*, 1909, vol. 1, pp. 25–117.
3. Bernstein S. Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomés de degré donné. Bruxelles : Hayez, imprimeur des academies royales, 1912. 104 p.
4. Privalov I.I. On approximation of functions satisfying Lipschitz condition by Fejér sums. *Math. Sb.*, 1918, vol. 30, no. 4, pp. 521–526 (in Russian).
5. Nikol'skii S.M. On asymptotic behaviour of remainder in approximation of functions satisfying Lipschitz condition by Fejér sums. *Izvestiya Akad. Nauk SSSR, Ser. Matem.*, 1940, vol. 4, no. 6, pp. 501–508 (in Russian).
6. Zygmund A. On the degree of approximation of functions by Fejér means. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1945, vol. 51, no. 4, pp. 274–278. doi: 10.1090/S0002-9904-1945-08332-3
7. Novikov O.A., Rovenskaya O.G. Approximation of classes of Poisson integrals by Fejér sums. *Computer Research and Modeling*, 2015, vol. 7, no. 4, pp. 813–819. doi: 10.20537/2076-7633-2015-7-4-813-819
8. Efimov A. V. On approximation of some classes of continious functions by Fourier sums and Fejér sums. *Izvestiya Akad. Nauk SSSR, Ser. Matem.*, 1958, vol. 22, no. 1, pp. 81–116 (in Russian).
9. Lebed' G.K., Avdeenko A.A. Approximation of periodic functions by Fejér sums. *Math. USSR-Izv.*, 1971, vol. 5, no. 1, pp. 86–96. doi: 10.1070/IM1971v005n01ABEH001014
10. Savchuk V.V. Approximation of functions of Dirichlet class by Fejér means. *Math. Notes*, 2007, vol. 81, no. 5, pp. 665–670. doi: 10.1134/S0001434607050124
11. Dzhrbash'an M.M. To the theory of Fourier series in rational functions. *Izvestiya Akad. Nauk Armyan. SSR. Ser. Fiz.-Mat.*, 1956, vol. 9, no. 7, pp. 1–27 (in Russian).
12. Rusak V.N. On approximation by rational fractions. *Dokl. Akad Nauk BSSR*, 1964, vol. 8, no. 7, pp. 432–435 (in Russian).
13. Rusak V.N. On approximation by rational functions on the real line. *Izvestiya Akad. Nauk BSSR, Ser. Fiz.-Mat.*, 1974, no. 1, pp. 22–28 (in Russian).
14. Rusak V. N. *Ratsional'nye funktsii kak apparat priblizheniya* [Rational functions as approximation apparatus], Minsk, Belarus State Univ. Publ., 1979, 179 p.
15. Kitbalyan A.A. On a generalization of the Fejér kernel. *Dokl. Akad. Nauk Arm. SSR*, 1979, vol. 69, pp. 8–14 (in Russian).
16. Rovba E.A. Rational integral operators on a segment. *Vestnik Beloruss. Gos. Univ.*, 1996, vol. 1, no. 1, pp. 34–39 (in Russian).
17. Rovba E.A. On the approximation of functions of bounded variation by Fejér and Jackson rational operators. *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi*, 1998, vol. 42, no. 4, pp. 13–17 (in Russian).
18. Smotritskii K.A. On approximation of convex functions by rational integral operators on a segment. *Vestnik Beloruss. Gos. Univ.*, 2005, vol. 1, no. 3, pp. 64–70 (in Russian).
19. Bernstein S. N. *Ekstremal'nye svoistva polinomov i nailuchshee priblizhenie nepreryvnykh funktsii odnoi veshchestvennoi peremennoi* [Extremal properties of polynomials and the best approximation of continuous functions of one real variable], Part 1, Moscow–Leningrad, Ob'edinennoe Nauch. Tekh. Izd. Narod. Komiss. Tyazheloi Promyshl. SSSR, 1937, 203 p.
20. Ibragimov I.I. On asymptotic value of best approximations of functions having real singular point. *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Matem.*, 1946, vol. 10, no. 5, pp. 429–460 (in Russian).
21. Nikol'skii S.M. On the best approximation in the mean to the function $|a-x|^s$ by polynomials. *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Matem.*, 1947, vol. 11, no. 2, pp. 139–180 (in Russian).
22. Reddy A.R. A note on rational approximation to $(1-x)^{1/2}$. *J. Approx. Theory*, 1979, vol. 25, no. 1, pp. 31–33. doi: 10.1016/0021-9045(79)90030-3
23. Bundschuh P.A. Remark on Reddy's paper on the rational approximation of $(1-x)^{1/2}$. *J. Approx. Theory*, 1981, vol. 32, no. 3, pp. 167–169. doi: 10.1016/0021-9045(81)90113-1
24. McD. Mercer A. A note on rational approximation to $(1-x)^{\alpha}$ *J. Approx. Theory*, 1983, vol. 38, no. 1, pp. 101–103. doi: 10.1016/0021-9045(83)90146-6
25. Reddy A.R. A note on rational approximation to $(1-x)^{\sigma}$. *J. Approx. Theory*, 1987, vol. 49, no. 4, pp. 404–407. doi: 10.1016/0021-9045(87)90078-5
26. Alzer H. On rational approximation of $(1-x)^{\sigma}$. *Archiv Math.*, 1996, vol. 67, no. 2, pp. 134–137. doi: 10.1007/BF01268927

27. Andersson J.-E. Best rational approximation to Markov functions *J. Approx. Theory*, 1994, vol. 76, no. 2, pp. 219–232. doi: 10.1006/jath.1994.1015
28. Pekarskii A.A. Best uniform rational approximations to Markov functions. *St. Petersburg Math. J.*, 1996, vol. 7, no. 2, pp. 277–285.
29. Patseika P.G., Rouba Y.A., Smatrytski K.A. On one rational integral operator of Fourier–Chebyshev type and approximation of Markov functions *J. Belarusian State Univ. Math. Inform.*, 2020, vol. 2, pp. 6–27. doi: 10.33581/2520-6508-2020-2-6-27
30. Rovba E.A. One direct method in the rational approximation. *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi*, 1979, vol. 23, no. 11, pp. 968–971 (in Russian).
31. Patseika P.G., Rouba Y.A. On rational Abel–Poisson means on a segment and approximations of Markov functions. *Zhurnal Beloruss. Gos. Univ. Matem. Inform.*, 2021, vol. 3, pp. 6–24 (in Russian). doi: 10.33581/2520-6508-2021-3-6-24
32. Potseiko P.G., Rovba E.A. On rational approximations of Markov function on a segment by Fejér sums with fixed number of poles. *Trudy Inst. Mat.*, 2022, vol. 30, no. 1–2, pp. 63–83 (in Russian).
33. Misyuk V.R. On the best approximation of power function in Bergman space. In: Proc. 13th Int. Conf. Kazan Summer Scientific School-Conf. “Function theory, its applications and related questions”. Kazan: Kazan Math. Soc. publ., Acad. Sci. Resp. Tatarstan publ., 2017, vol. 54, pp. 257–259 (in Russian).
34. Timan A.F. *Theory of approximation of functions of a real variable*, Oxford, Pergamon Press, 1963, 631 p. doi: 10.1016/C2013-0-05307-8 Original Russian text was published in Timan A.F., *Teoriya priblizheniya funktsii deistvitel'nogo peremennogo*, Moscow, Gos. Izd-vo Fiz. Mat. Lit., 1960, 624 p.
35. Akhiezer N.I. *Lektsii po teorii approksimatsii* [Lectures on the Theory of Approximation], Moscow, Nauka Publ., 1965, 409 p.
36. Sidorov Yu. V., Fedoryuk M. V., Shabunin M. I. *Lektsii po teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* [Lections on complex variable functions theory], Moscow, Nauka Publ., Glav. Red. Fiz. Mat. Lit., 1989, 480 p.
37. Patseika P.G., Rouba Y.A. Fejér means of rational Fourier–Chebyshev series and approximation of function $|x|^s$. *Zhurnal Beloruss. Gos. Univ. Matem. Inform.*, 2019, vol. 3, pp. 18–34 (in Russian). doi: 10.33581/2520-6508-2019-3-18-34

Received May 15, 2023
Revised December 18, 2023
Accepted December 25, 2023

**Funding Agency:** This work was supported by the National Program for Scientific Research of the Republic of Belarus “Convergence 2020” (project no. 20162269).

*Pavel G. Potseiko*, Ph.D., Faculty of Mathematics and Informatics Yanka Kupala State University of Grodno (Belarus) Ozheshko St., 22, 230023, Grodno, Belarus; e-mail: pahamatby@gmail.com .

*Yevgeniy A. Rovba*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Faculty of Mathematics and Informatics Yanka Kupala State University of Grodno (Belarus) Ozheshko St., 22, 230023, Grodno, Belarus; e-mail: rovba.ea@gmail.com .

Cite this article as: P. G. Potseiko, E. A. Rovba. A Fejér rational integral operator on a closed interval and approximation of functions with a power-law singularity. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 1, pp. 170–189 .