ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 1 2024

УДК 512.75

КРУЧЕНИЕ РЕЙДЕМЕЙСТЕРА ДЛЯ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ НА $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$[1]

В. М. Поляков

Рассматриваются векторные расслоения ранга 2 с тривиальным общим слоем на проективной прямой над $\mathbb{Z}$. Для таких расслоений строится новый инвариант — кручение Рейдемейстера, аналог классического кручения Рейдемейстера из топологии. Для векторных расслоений ранга 2 с тривиальным общим слоем и подскоками высоты 1, т. е. для таких, которые в слое над $\mathbb{Q}$ изоморфны $\mathcal{O}^2$, а над каждой замкнутой точкой $Spec(\mathbb{Z})$ изоморфны $\mathcal{O}^2$ или $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)$, вычисляется этот инвариант и показывается, что он вместе с дискриминантом расслоения полностью определяют такое расслоение.

Ключевые слова: векторное расслоение, арифметическая поверхность, проективная прямая, кручение.

V. M. Polyakov. Reidemeister torsion for vector bundles on $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$.

We consider vector bundles of rank 2 with a trivial generic fiber on the projective line over $\mathbb{Z}$. For such bundles, a new invariant is constructed — the Reidemeister torsion, which is an analog of the classical Reidemeister torsion from topology. For vector bundles of rank 2 with a trivial generic fiber and jumps of height 1, that is, for the bundles that are isomorphic to $\mathcal{O}^2$ in the fiber over $\mathbb{Q}$ and are isomorphic to $\mathcal{O}^2$ or $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)$ over each closed point $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, we calculate this invariant and show that it, together with the discriminant of the bundle, completely determines such a bundle.

Keywords: vector bundle, arithmetic surface, projective line, torsion.

MSC: 14G40

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-1-156-169

Введение

В работе мы будем придерживаться стандартных обозначений:

$$\mathbb{P}^1_{\mathrm{A}} = \mathrm{Proj}\ A[t_0, t_1], \quad \deg\, t_0 = \deg\, t_1 = 1.$$

В обозначениях структурного пучка $\mathcal{O}_X$ и $\mathcal{O}_X(n)$ будем опускать X и писать просто $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}(n)$. Как обычно, U_i — дополнение к нулям t_i, $U_{01} = U_0 \cap U_1$, $x = t_1/t_0$, $y = t_0/t_1$; кроме того, $\mathcal{O}(U_0) = A[x], \mathcal{O}(U_1) = A[y], \mathcal{O}(U_{01}) = A[x, y]/(xy - 1)$.

Мы будем работать с векторными расслоениями на проективной прямой над кольцом $\mathbb{Z}$. В случае, когда проективная прямая определена над полем, хорошо известно, как устроены все векторные расслоения. Имеется классическая теорема Гротендика, которая говорит о том, что каждое такое расслоение изоморфно сумме линейных расслоений (а каждое линейное расслоение имеет вид $\mathcal{O}(n)$). Однако в случае расслоений над схемой $\mathbb{P}^1_{\mathrm{A}}$, где A — коммутативное кольцо, дела обстоят гораздо сложнее, а именно существуют расслоения, которые не раскладываются в прямую сумму линейных. Впервые это явление было подробно описано в статье [1]; в частности, там было доказано: а) если A — кольцо Крулля размерности, большей 0, то на $\mathbb{P}^1_{\mathrm{A}}$ существуют неразложимые расслоения произвольного конечного ранга, б) этот результат верен и для случая, когда A — нетерово кольцо со связным спектром. В [2] было установлено, что для расслоений над $\mathbb{P}^1_{\mathrm{A}}$, где A — локальное, всегда существует фильтрация, все факторы которой линейны. Необходимо отметить работу Ханны [3], где было показано, что для расслоений над $\mathbb{P}^1_{\mathrm{A}}$, где A — дедекиндово, существует фильтрация, для которой все факторы —

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (грант на создание и развитие МЦМУ им. Леонарда Эйлера , соглашение № 075-15-2022-289).

либо линейные расслоения, либо расслоения ранга 2. Там же было доказано, что в случае евклидового A всякое векторное расслоение на $\mathbb{P}^1_{\mathrm{A}}$ допускает фильтрацию только с линейными факторами.

В данной работе будут изучаться одни из самых простых неразложимых расслоений на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$, а именно векторные расслоения ранга 2, с простыми подскоками и тривиальным общим слоем, т. е. такие, которые над общим слоем $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ изоморфны $\mathcal{O}^2$, а над слоями, соответствующими некоторому конечному набору точек $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, изоморфны $\mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(1)$. Детально эти расслоения изучались в работах [4; 5]; в первой из них была получена полная классификация таких расслоений.

Пусть $V(\nu,\alpha)=\operatorname{Coker}(\phi:\mathcal{O}(-2)^2\to\mathcal{O}(-1)^4)$, где $\nu,\alpha\in\mathbb{Z}$, а стрелка ϕ задается матрицей

$$\phi=\begin{pmatrix} t_1 & 0\\ \alpha t_0 & t_1\\ \nu t_0 & 0\\ 0 & t_0\end{pmatrix}.$$

Приведем формулировку теоремы классификации расслоений с тривиальным общим слоем и простыми подскоками.

Теорема 1 (Смирнов [4], Theorem 18.18). 1. *Если* $\nu\neq 0$ *и* $\gcd(\nu,\alpha)=1$, *то* $\mathcal{O}$*-модуль* $V(\nu,\alpha)$ *является расслоением. Если, кроме того,* $\nu\neq\pm1$, *то* $V(\nu,\alpha)$ *— расслоение с простыми подскоками. Подскоки находятся в точности в делителях* ν. *Если* E *— векторное расслоение с простыми подскоками на* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$, *то* E *изоморфно расслоению вида* $V(\nu,\alpha)$.

2. *Пусть* $E_1=V(\nu_1,\alpha_1), E_2=V(\nu_2,\alpha_2)$, *где* $\gcd(\nu_1,\alpha_1)=1,\gcd(\nu_2,\alpha_2)=1,\nu_1\neq0,\nu_2\neq0$. *Расслоения* E_1 *и* E_2 *изоморфны тогда и только тогда, когда идеал* (ν_1) *равен идеалу* (ν_2) *и существует* $\lambda\in\mathbb{Z}$ *такое, что* $\alpha_1\equiv\pm\alpha_2\lambda^2 \pmod{\nu_1}$.

Пусть E — некоторое расслоение ранга 2 с простыми подскоками и тривиальным общим слоем на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$. Тогда, как видно из классификации, E имеет вид $V(\nu,\alpha)$ и задается параметрами $\nu,\alpha\in\mathbb{Z}$.

Про первый параметр в этой классификации известно все, в частности, что он связан с когомологиями подкрутки E: $H^1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}},E(-1))\simeq\mathbb{Z}/(\nu)$. Далее будем обозначать через ν положительный представитель идеала (ν) и называть его *дискриминантом расслоения.*

Однако никакой инвариантной интерпретации второго параметра не было представлено. В данной работе мы определим для изучаемых расслоений новый инвариант — кручение Рейдемейстера расслоения и покажем, что он как раз совпадает со вторым параметром из классификации и определен по модулю ν с точностью до умножения на $\pm$ квадраты.

Идея искать интерпретацию второго параметра на основе классификации изучаемых расслоений в виде некоторого кручения интуитивно возникла из следующего наблюдения. Пусть $p,q\in\mathbb{Z}$, $\gcd(p,q)=1$, и рассмотрим линзовое пространство $L(p,q)$ — фактор сферы S^3 по $\mathbb{Z}/p$-действию: $(z_1,z_2)\mapsto(e^{2\pi i/p}z_1,e^{2\pi iq/p}z_2)$. Важное наблюдение состоит в том, что классификация линзовых пространств с точностью до гомотопической эквивалентности полностью совпадает с нашей классификацией векторных расслоений с простыми подскоками: $L(p_1,q_1)$ гомотопически эквивалентно $L(p_2,q_2)$ тогда и только тогда, когда $p_1=\pm p_2$ и $q_1\equiv\pm q_2\lambda^2 \pmod{p_1}$ для некоторого $\lambda\in\mathbb{Z}$. Первый параметр p в $L(p,q)$, как и у наших расслоений, имеет (ко)гомологическую природу: $\pi_1(L(p,q))\simeq H_1(L(p,q),\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}/p$. Про второй же параметр известно, что он определяется более тонким инвариантом, а именно кручением Рейдемейстера.

Одним из первых построенных негомотопических инвариантов многообразий является кручение Рейдемейстера, оно было определено Рейдемейстером в работе [6], где была дана комбинаторная классификация трехмерных линзовых пространств.

Для полноты картины кратко опишем эту конструкцию для конечного CW-комплекса X. Пусть $X=\bigcup_{k=0}^n\bigcup_j e_j^k$, где e_j^k — k-мерная клетка, и пусть $\widetilde{X}=\bigcup_{k=0}^n\bigcup_{g\in\pi_1(X)}\bigcup_j g\tilde{e}_j^k$ есть поднятие клеточной структуры X на его универсальное накрытие $\widetilde{X}$. Тогда на соответствующем клеточном цепном комплексе $C_\bullet^{CW}(\widetilde{X})$ мы имеем естественное $\pi_1(X)$-действие. Теперь возьмем некоторое коммутативное кольцо A с фиксированным морфизмом $f : \mathbb{Z}[\pi_1(X)] \longrightarrow A$ и с тем свойством, что комплекс $C_k(X,f) := C_\bullet^{CW}(\widetilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_1(X)]} A$ ациклический. Тогда кручением Рейдемейстера будет кручение комплекса $C_k(X,f)$ с фиксированными естественными A-базисами его членов (базисы будут состоять из элементов $e_j^k \otimes 1_A$): $\tau(X,f) = \tau(C_k(X,f))$, которое мы определим в следующем разделе. Отметим, что в случае двучленного комплекса кручением будет просто определитель его ненулевой стрелки, поэтому в общем случае можно считать, что кручение комплекса — это некоторое обобщение определителя. Более подробное описание и построение конструкции кручения можно найти в [7, §2.1; 8, §7].

Оказывается, что кручение линзовых пространств выражается следующим образом:

$$\tau(L(p,q)) = (1-t^r)^{-1}(1-t)^{-1},$$

где $qr \equiv 1 \pmod p$, а $t \in \mathbb{C}$ — образ фиксированного корня p-й степени из единицы ζ при некотором морфизме колец $\mathbb{Z}[\zeta] = \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/p] \longrightarrow \mathbb{C}$. Таким образом, видно, что первый параметр в $L(p,q)$ определяется кручением. Соответствующие вычисления можно найти в [7, § 2.1]. На данный момент остается неизвестным, почему классификации таких столь разных по природе объектов совпадают, и какая может быть между ними связь.

1. Кручение комплекса свободных модулей

Для начала мы определим кручение ациклического комплекса модулей, следуя [7, §1.1]. Базовые факты мы будем приводить без доказательств, но со ссылками, где их можно найти. Пусть A — коммутативное кольцо, и пусть имеется ациклический комплекс $\mathcal{C}$ свободных A-модулей конечного ранга: $\mathcal{C}\,:\ \ 0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_0} C_0 \longrightarrow 0$. Зафиксируем в каждом A-модуле C_i базис $\mathbf{c}_i$. Поскольку комплекс $\mathcal{C}$ ацикличен, то существует $\Gamma : C_i \to C_{i+1}$ — цепная гомотопия тождественного морфизма и нуля: $\partial\Gamma + \Gamma\partial = \mathbf{1}_{\mathcal{C}}$. Положим $C_{\text{even}} = \oplus C_{2i},\ C_{\text{odd}} = \oplus C_{2i+1}$ и рассмотрим отображение

$$\partial + \Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma & \partial & 0 & \cdots \\ 0 & \Gamma & \partial & \cdots \\ 0 & 0 & \Gamma & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} : C_{\text{even}} \longrightarrow C_{\text{odd}}.$$

Известно, что данное отображение является изоморфизмом (см. [9, Sect. 3]).

Предложение 1. $\det(\partial+\Gamma) \in A^\times$ *не зависит от выбора гомотопии* Γ.

Д о к а з а т е л ь с т в о этого факта можно найти в [9, Sect. 3]. □

Пусть G — некоторая группа, которая действует справа на множестве базисов C_i для каждого i. Возьмем $g \in G$, тогда пусть $\mathbf{c}_i g = \mathbf{c}'_i$ и $\mathbf{c}_i = \mathbf{c}'_i(\mathbf{c}_i/\mathbf{c}'_i)$, где $(\mathbf{c}_i/\mathbf{c}'_i)$ — матрица перехода. Обозначим $[\mathbf{c}_i/\mathbf{c}'_i] = \det(\mathbf{c}_i/\mathbf{c}'_i)$, $\mathrm{Fr}(C_i)$ — множество всех базисов C_i и рассмотрим подгруппу $A^\times$, порожденную следующим множеством:

$$\Big\{\prod_{i=0}^{n}[\mathbf{c}_i g/\mathbf{c}_i]^{(-1)^i} \mid g \in G,\ \mathbf{c}_i \in \mathrm{Fr}(C_i),\ i = 0,\dots,n\Big\}.$$

Получившуюся подгруппу обозначим как $\det(G)$. Также введем обозначение $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_i)_{i=0}^n$ — упорядоченное множество фиксированных базисов всех C_i.

О п р е д е л е н и е 1. Будем называть кручением комплекса $\mathcal{C}$ с фиксированными базисами $\mathbf{c}$ следующую величину:

$$\tau(\mathcal{C},\mathbf{c}) := \det(\partial + \Gamma : C_{\text{even}} \longrightarrow C_{\text{odd}}) \in A^\times.$$

Обозначим G-орбиту множества базисов $\mathbf{c}$ как $\mathbf{c}_G$.

О п р е д е л е н и е 2. Кручением комплекса $\mathcal{C}$ с фиксированными классами G-эквивалентности базисов $\mathbf{c}$ будем называть величину

$$\tau(\mathcal{C}, \mathbf{c}_G) := \tau(\mathcal{C}, \mathbf{c}) \in A^\times / \det(G).$$

Определение корректно, поскольку после некоторой проверки видно, что при замене базисов C_i кручение будет меняться следующим образом (см. [7, § 1.1]):

$$\tau(\mathcal{C}, \mathbf{c}') = \tau(\mathcal{C}, \mathbf{c}) \prod_{i=0}^{n} [\mathbf{c}_i'/\mathbf{c}_i]^{(-1)^i}.$$

З а м е ч а н и е 1. Кручение комплекса также можно вычислять другим способом, не используя гомотопии. Этот способ состоит в том, что мы находим выделенные базисы последовательно в каждом C_i и берем альтернированное произведение определителей матриц перехода от этих новых базисов к изначальным. В некоторых ситуациях удобнее пользоваться данным методом. Достаточно подробно процедура описана в [7, § 1.1].

Оказывается, что кручения обладают свойством мультипликативности и верен следующий базовый факт.

Теорема 2. *Пусть имеется короткая точная последовательность ациклических комплексов свободных A-модулей с фиксированными базисами $\mathbf{c}_i$ для $i = 1, 2, 3$:*

$$0 \longrightarrow (\mathcal{C}_1, \mathbf{c}_1) \xrightarrow{f} (\mathcal{C}_2, \mathbf{c}_2) \xrightarrow{g} (\mathcal{C}_3, \mathbf{c}_3) \longrightarrow 0.$$

Предположим, что $\mathbf{c}_2 = f(\mathbf{c}_1) \cup \mathbf{c}_3'$, $g(\mathbf{c}_3') = \mathbf{c}_3$. Тогда

$$\tau(\mathcal{C}_2, \mathbf{c}_2) = \pm\tau(\mathcal{C}_1, \mathbf{c}_1)\tau(\mathcal{C}_3, \mathbf{c}_3).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о этого факта можно найти в [8, Theorem 3.1]. □

В дальнейшем нам также понадобится следующая тривиальная лемма.

Лемма 1. *Пусть имеется короткая точная последовательность ациклических комплексов свободных A-модулей с фиксированными базисами $\mathbf{c}_i$ и действием групп G_i на множестве базисов модулей комплекса $\mathcal{C}_i$ для $i = 1, 2, 3$:*

$$0 \longrightarrow (\mathcal{C}_1, \mathbf{c}_1) \xrightarrow{f} (\mathcal{C}_2, \mathbf{c}_2) \xrightarrow{g} (\mathcal{C}_3, \mathbf{c}_3) \longrightarrow 0.$$

Как и в предыдущей теореме, предположим, что $\mathbf{c}_2 = f(\mathbf{c}_1) \cup \mathbf{c}_3'$, $g(\mathbf{c}_3') = \mathbf{c}_3$. Пусть $\det(G_3) = (\pm 1)$, $\det(G_1) = \det(G_2) \subset A^\times$, а также $-1 \in \det(G_2)$. Тогда

$$\tau(\mathcal{C}_2, \mathbf{c}_{2G_2}) = \tau(\mathcal{C}_1, \mathbf{c}_{1G_1})\tau(\mathcal{C}_3, \mathbf{c}_{3G_3}) \subset A^\times / \det(G_2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По предыдущей теореме имеем $\tau(\mathcal{C}_2, \mathbf{c}_2) = \pm\tau(\mathcal{C}_1, \mathbf{c}_1)\tau(\mathcal{C}_3, \mathbf{c}_3)$ в $A^\times$. При замене базисов свободных модулей в каждом комплексе с помощью групп G_i левая и правая части этого равенства изменятся на элемент из $\det(G_2)$, а поэтому данное равенство верно для G_i-орбит наборов базисов $\mathbf{c}_i$ в $A^\times / \det(G_2)$. □

2. Кручение Рейдемейстера расслоений на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ ранга 2 с тривиальным общим слоем

Для простоты мы будем работать на схеме $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$, однако все рассуждения можно провести и на $\mathbb{P}^1_{\mathrm{A}}$, где A — область главных идеалов. Итак, пусть на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ задан локально свободный $\mathcal{O}$-модуль E ранга 2 с тривиальным общим слоем и подскоками высоты не больше n, т. е. такой, что $E|_{\mathbb{Q}} \simeq \mathcal{O}^2$ и $E|_{\mathbb{F}_p} \simeq \mathcal{O}(-m_p) \oplus \mathcal{O}(m_p)$ для конечного набора точек $(p) \in \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, где $0 < m_p \leq n$. С помощью спектральной последовательности Бейлинсона расслоение E можно задать в виде коядра некоторой стрелки (см. [10, §1]):

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{2n}(-1-n) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}^{2n+2}(-n) \xrightarrow{\psi} E \longrightarrow 0. \tag{2.1}$$

Также известно, что $H^1(E(n-2)) \simeq \mathbb{Z}/\nu$ для некоторого $\nu \in \mathbb{Z}$.

Предложение 2. *Пусть E — расслоение на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ ранга 2 с тривиальным общим слоем и подскоками высоты n. Предположим, что $H^1(E(n-2)) \simeq \mathbb{Z}/\nu$ для некоторого $\nu \in \mathbb{Z}$, тогда $E|_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}} \simeq \mathcal{O}(-n) \oplus \mathcal{O}(n)$.*

Доказательство. Для начала рассмотрим случай $\nu = p^r$. Как было отмечено в [3], из доказательства основной теоремы статьи Хоррокса [2] следует, что $E|_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p}}$ можно задать матрицей склейки

$$\sigma = \begin{pmatrix} y^n & f(x,y) \\ 0 & x^n \end{pmatrix},$$

где $f = a_{-n+1}y^{n-1} + \ldots + a_{-1}y + a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$. Вычисления H^1 по Чеху показывают, что

$$H^1(E|_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p}}) \simeq \mathbb{Z}/(a_{-n+1}, \ldots, a_{n-1}),$$

при этом, по предположению, имеем $H^1(E|_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p}}) \simeq \mathbb{Z}/p^r$, отсюда $p^r \mid a_i$ для всех i. Следовательно, $E|_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/p^r}} \simeq \mathcal{O}(-n) \oplus \mathcal{O}(n)$.

Общий случай получается склеиванием изоморфизмов $E|_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/p_i^{r_i}}} \simeq \mathcal{O}(-n) \oplus \mathcal{O}(n)$ для всех i (поскольку $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/p_i^{r_i}}$ дизъюнктно покрывают $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}$). □

Лемма 2. *Пусть E и F два расслоения на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$. Предположим, что имеются две короткие точные последовательности*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{2n}(-1-n) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}^{2n+2}(-n) \xrightarrow{\psi} E \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{2n}(-1-n) \xrightarrow{\varphi'} \mathcal{O}^{2n+2}(-n) \xrightarrow{\psi'} F \longrightarrow 0.$$

Пусть также имеется морфизм $\gamma : E \longrightarrow F$, тогда он поднимается единственным образом до следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}^{2n}(-1-n) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dashed, "\beta"] & \mathcal{O}^{2n+2}(-n) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, dashed, "\alpha"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}^{2n}(-1-n) \arrow[r, "\varphi'"] & \mathcal{O}^{2n+2}(-n) \arrow[r, "\psi'"] & F \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Иначе говоря, найдутся единственные стрелки α и β, делающие диаграмму коммутативной. Более того, если γ — изоморфизм, то он поднимается до изоморфизма соответствующих коротких точных последовательностей, т. е. $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O}^{2n+2}(-n))$ и $\beta \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O}^{2n}(-1-n))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим к первой короткой точной последовательности функтор $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}^{2n+2}(-n), -)$, получим следующую длинную точную последовательность:

$$0 \to \mathrm{End}(\mathcal{O}^{2n+2}(-n)) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{O}^{2n+2}(-n), F) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}^{2n+2}(-n), \mathcal{O}^{2n}(-1-n)) = 0.$$

Откуда получаем $\mathrm{End}(\mathcal{O}^{2n+2}(-n)) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{O}^{2n+2}(-n), F)$, и, значит, существует единственная стрелка α, которая делает коммутативным квадрат

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}^{2n+2}(-n) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, dashed, "\alpha"] & E \arrow[d, "\gamma"] \\
\mathcal{O}^{2n+2}(-n) \arrow[r, "\psi'"] & F.
\end{tikzcd}$$

Предположим теперь, что γ является изоморфизмом. Тем же способом построим стрелку α' в обратную сторону, которая делает аналогичный квадрат со стрелкой γ^{-1} вместо γ коммутативным. Итак, имеем

$$\psi'\alpha = \gamma\psi, \ \gamma^{-1}\psi' = \psi\alpha'.$$

Откуда мы получаем $\psi = \psi\alpha'\alpha$. Стрелка $\alpha'\alpha - id$ в композиции с ψ дает нулевой морфизм, но поскольку имеется изоморфизм $\mathrm{End}(\mathcal{O}^{2n+2}(-n)) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{O}^{2n+2}(-n), E)$, то такая стрелка единственна, и она является сама нулевым морфизмом. Таким образом, α является изоморфизмом.

Для того чтобы построить стрелку $\beta : \mathcal{O}^{2n}(-1-n) \to \mathcal{O}^{2n}(-1-n)$, делающую коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}^{2n}(-1-n) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dashed, "\beta"] & \mathcal{O}^{2n+2}(-n) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\alpha"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}^{2n}(-1-n) \arrow[r, "\varphi'"] & \mathcal{O}^{2n+2}(-n) \arrow[r, "\psi'"] & F \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

достаточно воспользоваться стандартной конструкцией из теории категорий и сузить стрелку α на ядра стрелок ψ и ψ'. В случае, когда γ является изоморфизмом, стрелка β тоже будет изоморфизмом — этот факт вытекает, например, из 5-леммы (см. [11, Proposition 1.1, p. 5]). $\square$

Мы хотим определить кручение Рейдемейстера не только для самого расслоения E, но и для любой его подкрутки $E(m)$. Для этого сначала тензорно домножим на $\mathcal{O}(m)$ точную последовательность (2.1). После этого рассмотрим сужение получившейся последовательности на слой над $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}/\nu)$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{2n}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}}(m-1-n) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}^{2n+2}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}}(m-n) \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}}(m-n) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}}(m+n) \longrightarrow 0. \tag{2.2}$$

Возьмем от этой последовательности длинную когомологическую последовательность:

$$\mathcal{C} : 0 \to H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, \mathcal{O}^{2n}(m-1-n)) \xrightarrow{\varphi} H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, \mathcal{O}^{2n+2}(m-n)) \xrightarrow{\psi} H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, \mathcal{O}(m-n) \oplus \mathcal{O}(m+n))$$

$$\to H^1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, \mathcal{O}^{2n}(m-1-n)) \xrightarrow{\varphi} H^1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, \mathcal{O}^{2n+2}(m-n)) \xrightarrow{\psi} H^1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, \mathcal{O}(m-n) \oplus \mathcal{O}(m+n)) \to 0.$$

Каждый $\mathbb{Z}/\nu$-модуль в этом ацикличном комплексе свободен, поэтому, после того как мы зададим группу G, действующую на базисах каждого из $\mathbb{Z}/\nu$-модулей, мы сможем посчитать кручение комплекса.

Группа G выбирается наиболее естественным образом, а именно мы будем считать, что на базисах каждого $\mathbb{Z}/\nu$-модуля из последовательности $\mathcal{C}$ действуют сужения с $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}$ автоморфизмов соответствующего $\mathcal{O}$-модуля.

Таким образом, $\det(G) \simeq \langle \pm 1 \rangle \times \det(\mathrm{Aut}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}}(E(m))|_{H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, E(m)) \times H^1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, E(m))}) \subset (\mathbb{Z}/\nu)^\times$.

О п р е д е л е н и е 3. Кручением Рейдемейстера расслоения ранга 2 с тривиальным общим слоем E мы будем называть кручение комплекса $\mathcal{C}$ с фиксированными базисами **c** (с помощью задания в виде матриц стрелок φ, ψ) с действием на этих базисах группы G:

$$\tau(E(m)) := \tau(\mathcal{C}, \mathbf{c}_G) \in (\mathbb{Z}/\nu)^\times / \det(G).$$

Определение корректно, поскольку по лемме 2 для вычисления кручения Рейдемейстера достаточно найти произвольные подходящие φ и ψ, т. е. делающие последовательность (2.2) точной; от их выбора ничего зависеть не будет.

Предложение 3. *Пусть E и F — два локально свободных $\mathcal{O}$-модуля на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ с тривиальным общим слоем. Если $\tau(E) \neq \tau(F)$, то E не изоморфен F.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $E \simeq F$. По лемме 2 и в ее же обозначениях имеем $\varphi' = \alpha\varphi\beta^{-1}$ и $\psi' = \gamma\psi\alpha^{-1}$. Поэтому две соответствующие длинные точные последовательности из определения кручения для расслоений E и F задаются одними и теми же стрелками с точностью до замен базисов, индуцированных глобальными автоморфизмами. Тогда кручения этих комплексов будут отличаться на элемент из $\det(G)$, но по этой подгруппе мы факторизуем, поэтому кручения Рейдемейстера совпадут. □

3. Кручение Рейдемейстера расслоений с простыми подскоками

Пусть теперь снова E локально свободный $\mathcal{O}$-модуль ранга 2 на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ с простыми подскоками и тривиальным общим слоем. Сначала мы более подробно проделаем все шаги указанные выше для нашего конкретного случая, после чего явно посчитаем кручение.

3.1. Построение

Первым шагом мы берем короткую точную последовательность из теоремы Бейлинсона:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^2(-2) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}^4(-1) \xrightarrow{\psi} E \longrightarrow 0.$$

Теперь сделаем редукцию по модулю ν, а именно умножим каждый $\mathcal{O}$-модуль в нашей последовательности на $\mathbb{Z}/\nu$, получим короткую точную последовательность $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}}$-модулей над $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}$, т. е. над тем куском исходной схемы $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$, над которым E изоморфно $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^2_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}}(-2) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}^4_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}}(-1) \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}}(1) \longrightarrow 0. \tag{3.1}$$

Далее напишем длинную точную последовательность когомологий от последовательности (3.1) и получаем ациклический комплекс $\mathcal{E}$ свободных $\mathbb{Z}/\nu$-модулей:

$$\mathcal{E} : 0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)) \xrightarrow{\partial} H^1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, \mathcal{O}^2(-2)) \longrightarrow 0. \tag{3.2}$$

В качестве группы, действующей на множестве базисов, мы берем

$$G = \mathrm{Aut}(E)|_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}} \times \mathrm{Aut}(\mathcal{O}^2_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}}(-2))|_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}}$$

с естественным действием на глобальных сечениях и когомологиях.

Таким образом, кручением Рейдемейстера расслоения E с тривиальным общим слоем и простыми подскоками будет кручение комплекса $\tau(\mathcal{E}) \in (\mathbb{Z}/\nu)^\times / \det(G)$. В нашем случае кручение вычисляется особенно просто, а именно оно будет совпадать с определителем $\det(\partial)$. Далее мы также посчитаем кручение Рейдемейстера от подкрутки расслоения E, и уже в этих случаях комплексы будут состоять из большего количества членов, что значительно усложнит вычисления, однако окажется, что конечный результат не будет зависеть от подкрутки.

Теперь перейдем к вычислению кручения Рейдемейстера конкретного расслоения. Зафиксируем $E = V(\nu, \alpha)$. Первым делом нужно узнать, как меняется кручение при замене базисов в когомологиях.

3.2. Вычисление $\det(G)$

Пусть $[h_1, h_2]$ и $[g_1, g_2]$ — стандартные базисы двух копий $\mathcal{O}^2$. Положим: $\left[h_1 t_0^{-1} t_1^{-1},\ h_2 t_0^{-1} t_1^{-1}\right]$ — базис $H^1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, \mathcal{O}^2(-2))$, $[g_2 t_0, g_2 t_1]$ – базис $H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1))$.

На второй член нашей короткой точной последовательности (3.2) группа G действует как $\mathrm{Aut}(\mathcal{O}^2_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}}(-2))|_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}} \simeq \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/\nu),\ \det(g) = \pm 1\}$, а на первый — как $\mathrm{Aut}(E)|_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}}$, действие которой мы сейчас вычислим.

Все вычисления достаточно проводить на U_0. Зафиксируем базисы E на U_0 и U_1: это $[e_1, e_2]$ и $[f_1, f_2]$ соответственно, связанные матрицей склейки

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha y & \nu \\ \gamma & \delta x \end{pmatrix},$$

где $\alpha\delta - \nu\gamma = 1$, $[e_1, e_2]\sigma = [f_1, f_2]$. Возьмем $\chi \in \mathrm{Aut}(E)$ и рассмотрим его на U_0 на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$, где он задается некоторой матрицей $\chi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, где $a_1 a_4 - a_2 a_3 = \pm 1$, $a_i \in \mathbb{Z}[x]$. Известно, как можно устроить изоморфизм $E \otimes \mathbb{Z}/\nu \simeq \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)$; на U_0 он будет задаваться так:

$$[t_0^{-1} l_1, t_0 l_2] = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ -\gamma x & \alpha \end{pmatrix} [e_1, e_2]$$

(см. [4, Sect. 18.3.5.3]). Тогда вычисления показывают, что

$$\chi(t_0^{-1} g_1) = t_0^{-1} g_1 a_1 + t_0 g_2(-\alpha\gamma x a_1 + \alpha^2 a_2 + \alpha\gamma x a_4), \quad \chi(t_0 g_2) = t_0^{-1} g_1 \delta^2 a_3 + t_0 g_2 (a_4 - a_3 \gamma\delta).$$

Откуда $a_3 \equiv 0 \pmod{\nu}$, а следовательно $a_1 a_4 = \pm 1 \pmod{\nu}$, и классы a_1 и a_4, рассмотренные по модулю ν, являются элементами $(\mathbb{Z}/\nu)^{\times}$. Таким образом, χ индуцирует на $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)$ автоморфизм, который задается матрицей $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_2' & a_4 \end{pmatrix}$, где $a_1 a_4 = \pm 1$, $a_1, a_4 \in (\mathbb{Z}/\nu)^{\times}$, а a_2' — некоторый элемент $\mathbb{Z}[x]$, который не влияет на определитель.

На глобальных сечениях расслоения $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)$ на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}$ этот автоморфизм будет задаваться матрицей $\chi = \begin{pmatrix} a_4 & 0 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix}$, $\det(\chi) = a_4^2, a_4 \in (\mathbb{Z}/\nu)^{\times}$.

В итоге мы получаем $\det(G) \simeq \pm\left((\mathbb{Z}/\nu)^{\times}\right)^2$, где возведение в степень 2 означает подгруппу квадратов.

3.3. Матрица ψ

Теперь узнаем, как выглядит матрица ψ. Для этого воспользуемся вычислениями матрицы склейки и тривиализации на специальных слоях из [4, Sect. 18.3.5.1]. Стрелка $\mathcal{O}^4(-1) \longrightarrow E$ задается на U_0 следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \\ \delta \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto e_1; \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto e_2; \qquad \begin{pmatrix} x \\ \alpha \\ \nu \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto 0; \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto 0.$$

Следовательно, на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}$ на U_0 она задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 1 & -\delta x & \gamma x & \delta x^2 \end{pmatrix}.$$

Теперь воспользуемся изоморфизмом $E \otimes \mathbb{Z}/\nu \simeq \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)$ из предыдущего раздела и получим, что наша стрелка глобально определяется следующей матрицей:

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha t_0^2 & -t_0 t_1 & 0 & t_1^2 \end{pmatrix}.$$

3.4. Вычисление кручения

Теперь у нас есть практически все, чтобы вычислить кручение. Необходимо только узнать, как выглядит стрелка ∂. Вычислим граничный гомоморфизм стандартным способом, для этого выпишем короткую точную последовательность комплексов Чеха:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(U_0, \mathcal{O}^2(-2)) \times \Gamma(U_1, \mathcal{O}^2(-2)) \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, "\varphi\times\varphi"] & \Gamma(U_{01}, \mathcal{O}^2(-2)) \arrow[d, "\varphi"] \\
\Gamma(U_0, \mathcal{O}^4(-1)) \times \Gamma(U_1, \mathcal{O}^4(-1)) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "\psi\times\psi"] & \Gamma(U_{01}, \mathcal{O}^4(-1)) \arrow[d, "\psi"] \\
\Gamma(U_0, \mathcal{O}(-1) + \mathcal{O}(1)) \times \Gamma(U_1, \mathcal{O}(-1) + \mathcal{O}(1)) \arrow[r, "\delta_0"] & \Gamma(U_{01}, \mathcal{O}(-1) + \mathcal{O}(1)).
\end{tikzcd}$$

Пусть (l_1, l_2, l_3, l_4) — стандартный базис $\mathcal{O}^4$. Зафиксируем на $\Gamma(U_{01}, \mathcal{O}^2(-2))$ базис

$$\left[h_1 t_0^{-2}, h_1 t_0^{-1} t_1^{-1}, h_1 t_1^{-2}, h_2 t_0^{-2}, h_2 t_0^{-1} t_1^{-1}, h_2 t_1^{-2}\right].$$

Базису $[g_2 t_0, g_2 t_1]$ $\mathbb{Z}/\nu$-модуля $H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1))$ соответствует базис $\ker \delta_0$:

$$[[t_0 g_2, y t_1 g_2], [t_0 x g_2, t_1 g_2]].$$

Вычислим граничное отображение на этих базисных элементах:

$$\partial(g_2 t_0) = \varphi^{-1} \delta_1 (\psi \times \psi)^{-1} ([t_0 g_2, y t_1 g_2]) = \varphi^{-1} \delta_1 (\left[t_0^{-1} \alpha^{-1} l_1, y t_1^{-1} l_4\right])$$
$$= \varphi^{-1}(\left[t_0^{-1} \alpha^{-1} l_1 - y t_1^{-1} l_4\right]) = \alpha^{-1} t_0^{-1} t_1^{-1} h_1 - t_1^{-2} h_2,$$
$$\partial(g_2 t_1) = \varphi^{-1} \delta_1 (\psi \times \psi)^{-1} ([t_0 x g_2, t_1 g_2]) = \varphi^{-1} \delta_1 (\left[-t_0^{-1} l_2, t_1^{-1} l_4\right])$$
$$= \varphi^{-1}(\left[-t_0^{-1} l_2 - t_1^{-1} l_4\right]) = -t_0^{-1} t_1^{-1} h_2.$$

Элемент $t_1^{-2} h_2$ лежит в образе δ_2, и, значит, он обнуляется в $H^1(\mathcal{O}^2(-2))$. Поэтому

$$\partial = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и, следовательно, $\tau(E) = \det(\partial) = -\alpha^{-1}$, т. е. класс кручения совпадает с классом α в $(\mathbb{Z}/\nu)^\times / \pm \left((\mathbb{Z}/\nu)^\times\right)^2$.

Сформулируем полученный результат в качестве предложения.

Предложение 4. *Пусть имеется расслоение $E = V(\nu, \alpha)$ ранга 2 с простыми подскоками и тривиальным общим слоем на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$. Тогда*

$$\tau(E) = \alpha \in (\mathbb{Z}/\nu)^\times / \pm \left((\mathbb{Z}/\nu)^\times\right)^2.$$

Теперь мы можем переформулировать теорему об изоморфизме двух расслоений с простыми подскоками с помощью кручений в более компактной и инвариантной форме.

Теорема 3. *Два расслоения ранга 2 на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ с простыми подскоками и тривиальным общим слоем E и F с дискриминантами ν и μ соответственно изоморфны тогда и только тогда, когда их дискриминанты равны: $\nu = \mu$, и совпадают их кручения Рейдемейстера: $\tau(E) = \tau(F)$.*

4. Кручение Рейдемейстера расслоения $E(n)$

Можно не ограничиваться одним лишь кручением расслоения E, а посчитать кручения Рейдемейстера и от его подкруток. Оказывается, что кручение Рейдемейстера не зависит от подкрутки расслоения и верна следующая теорема.

Теорема 4. *Для расслоения $E = V(\nu,\alpha)$ и любого $n \in \mathbb{Z}$ верно, что $\tau(E(n)) = \alpha$.*

Доказательство. Случай $n = 0$ уже был рассмотрен выше. Докажем, что кручение равно α при $n \geq 2$ по индукции. В качестве базы индукции будет выступать случай $n = 2$.

Кручение $E(2)$. Итак, имеется короткая точная последовательность расслоений на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^2 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}^4(1) \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(3) \longrightarrow 0.$$

Для начала для наших $\mathbb{Z}/\nu$-модулей $H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, \mathcal{O}^2)$, $H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, \mathcal{O}^4(1))$ и $H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(3))$ зафиксируем базисы:

$$[h_1, h_2], \quad [t_0 l_1, \dots t_0 l_4, t_1 l_1, \dots, t_1 l_4] \quad \text{и} \quad [t_0 g_1, t_1 g_1, t_0^3 g_2, t_0^2 t_1 g_2, t_0 t_1^2, g_2, t_1^3 g_2]$$

соответственно, где $[h_1, h_2]$ и $[g_1, g_2]$ — стандартные базисы двух копий $\mathcal{O}^2$, а $[l_1, l_2, l_3, l_4]$ — стандартный базис $\mathcal{O}^4$.

Как и ранее, $\det(G) \simeq \pm\left((\mathbb{Z}/\nu)^\times\right)^2$, поскольку на $H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(3))$ действуют автоморфизмы с матрицами вида

$$\chi = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & a_4 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & a_4 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}$$

с определителем $\det(\chi) = a_1^2 a_4^4 = a_4^2 \in (\mathbb{Z}/\nu)^\times$, а на $H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, \mathcal{O}^2)$ и $H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, \mathcal{O}^4(1))$ — некоторые матрицы с определителем ± 1.

Для вычисления кручения Рейдемейстера необходимо найти в явном виде гомотопию Γ :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, \mathcal{O}^2) \arrow[r, "\varphi"] & H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, \mathcal{O}^4(1)) \arrow[r, "\psi"] \arrow[dl, "\Gamma_1"] \arrow[d, "\mathbf{1}"] & H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(3)) \arrow[r] \arrow[dl, "\Gamma_0"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, \mathcal{O}^2) \arrow[r, "\varphi"] & H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, \mathcal{O}^4(1)) \arrow[r, "\psi"] & H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(3)) \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

где

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующее уравнение на Γ :

$$\varphi\Gamma_1 + \Gamma_0\psi = \mathbf{1}.$$

Решая получившуюся систему линейных уравнений (из 64 неизвестных и уравнений), находим гомотопию:

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наконец, у нас есть все, чтобы вычислить кручение:

$$\det(\varphi + \Gamma_0) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\alpha & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \alpha^{-1}.$$

Итак, мы получили $\tau(E(2)) = \alpha \in (\mathbb{Z}/\nu)^\times / \pm \left((\mathbb{Z}/\nu)^\times\right)^2$.

Кручение $E(n)$ **при** $n \geq 2$**.** Теперь докажем, что $\tau(E(n)) = \alpha$, считая, что это верно для $E(n-1)$ при $n > 2$. Выпишем комплекс $\mathbb{Z}/\nu$-модулей, у которого мы ищем кручение:

$$\mathcal{E}_n :\ 0 \to H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, \mathcal{O}^2(n-2)) \xrightarrow{\varphi_n} H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, \mathcal{O}^4(n-1)) \xrightarrow{\psi_n} H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, \mathcal{O}(n-1) \oplus \mathcal{O}(n+1)) \to 0$$

и зафиксируем в этих $\mathbb{Z}/\nu$-модулях следующие базисы:

$$\left[t_0^{n-2}h_1, t_0^{n-2}h_2, t_0^{n-3}t_1h_1, t_0^{n-3}t_1h_2, \ldots, t_1^{n-2}h_1, t_1^{n-2}h_2\right],$$

$$\left[t_0^{n-1}l_1, t_0^{n-1}l_2, t_0^{n-1}l_3, t_0^{n-1}l_4, \ldots t_1^{n-1}l_1, t_1^{n-1}l_2, t_1^{n-1}l_3, t_1^{n-1}l_4\right],$$

$$\left[t_0^{n-1}g_1, t_0^{n-2}t_1g_1, \ldots, t_1^{n-1}g_1, t_0^{n+1}g_2, \ldots, t_1^{n+1}g_2\right]$$

соответственно.

Как и в предыдущих случаях имеем $\det(G_n) \simeq \pm\left((\mathbb{Z}/\nu)^\times\right)^2$, поскольку на $H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, \mathcal{O}(n-1) \oplus \mathcal{O}(n+1))$ действуют автоморфизмы с матрицами вида

$$\chi = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & a_4 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & \ddots & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix},$$

где на диагонали n раз подряд стоит a_1 и $n+2$ раза стоит a_4 и $a_1a_4 = \pm 1$. Определитель этой матрицы задается как $\det(\chi) = a_1^n a_4^{n+2} = a_4^2 \in (\mathbb{Z}/\nu)^\times$. На оставшихся членах комплекса действуют некоторые матрицы с определителем ± 1.

Выпишем такой же комплекс для случая подкрутки на $n-1$:

$$\mathcal{E}_{n-1}:\ 0 \to H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, \mathcal{O}^2(n-3)) \xrightarrow{\varphi_{n-1}} H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, \mathcal{O}^4(n-2)) \xrightarrow{\psi_{n-1}} H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/\nu}, \mathcal{O}(n-2)\oplus\mathcal{O}(n)) \to 0$$

и зафиксируем аналогичным образом базисы его членов. Тогда можно рассмотреть вложение (в категории цепных комплексов и цепных отображений над $\mathbb{Z}/\nu$) $\mathcal{E}_{n-1} \overset{\cdot t_0}{\hookrightarrow} \mathcal{E}_n$, заданное умножением на t_0 в каждом члене комплекса. В таком случае члены факторкомплекса

$$\widetilde{\mathcal{E}_n} : 0 \to A_n \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_n} B_n \xrightarrow{\widetilde{\psi}_n} C_n \to 0$$

будут иметь базисы $\left[t_1^{n-2}h_1, t_1^{n-2}h_2\right]$, $\left[t_1^{n-1}l_1, t_1^{n-1}l_2, t_1^{n-1}l_3, t_1^{n-1}l_4\right]$, $\left[t_1^{n-1}g_1, t_1^{n+1}g_2\right]$ соответственно. В этих базисах стрелки комплекса $\widetilde{\mathcal{E}}_n$ будут определяться матрицами

$$\widetilde{\varphi}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\psi}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим естественное индуцированное действие группы G_n на факторкомплексе, обозначим соответствующую группу $\widetilde{G}_n$. Как и ранее, на базисах первых двух членах комплекса действуют матрицы с определителем ± 1, а на базисах последнего члена комплекса будут действовать матрицы вида $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ * & a_4 \end{pmatrix}$, где $a_1 a_4 = \pm 1$. Таким образом, $\det(\widetilde{G}_n) = (\pm 1)$. Тривиально проверяется, что кручение факторкомплекса с данными стрелками равно единице: $\tau(\widetilde{\mathcal{E}}_n, \widetilde{\mathbf{c}}_n) = 1 \in (\mathbb{Z}/\nu)^\times/(\pm 1)$. Теперь заметим, что для короткой точной последовательности комплексов $0 \longrightarrow \mathcal{E}_{n-1} \xrightarrow{\cdot t_0} \mathcal{E}_n \longrightarrow \widetilde{\mathcal{E}}_n \longrightarrow 0$ все условия леммы 1 о мультипликативности кручения очевидным образом выполняются, поэтому мы можем воспользоваться ей и получить $\tau(\mathcal{E}_n, \mathbf{c}_n) = \tau(\mathcal{E}_{n-1}, \mathbf{c}_{n-1}) = \alpha$, что и требовалось.

Оставшиеся случаи. Итак, мы доказали теорему для случаев $n = 0$ и $n \geq 2$. Отдельно проверяются случаи $n = 1, -1, -2, -3$ той же техникой, что и выше. Случай $n \leq -3$ доказывается абсолютно аналогичной индукцией с базой $n = -3$, комплексы там будут состоять не из глобальных сечений, а только из первых когомологий соответствующих расслоений. Точно так же строится вложение комплексов $\mathcal{E}_{-n+1} \hookrightarrow \mathcal{E}_{-n}$, только теперь вместо отображения умножения на t_0 берется умножение на t_0^{-1}. Стрелки $\widetilde{\varphi}_n, \widetilde{\psi}_n$ факторкомплекса будут задаваться теми же матрицами, что и в случае $n > 2$. Конечный результат снова получается применением леммы 1. Вычисления и подробности мы опускаем.

Теорема полностью доказана.

Заключение

В работе мы построили новый инвариант расслоения, причем он принимает именно те значения, которые нам хотелось получить изначально. Отправной точкой в построении было замечание о том, что классификация наших расслоений совпадает с классификацией линзовых пространств. Интересно было бы узнать, откуда берется эта загадочная связь таких настолько разных объектов.

Отметим также, что кручение Рейдемейстера не зависит от подкрутки расслоений с простыми подскоками. Доказать это получается только прямыми вычислениями. Хотелось бы найти более идейное доказательство данного факта. Для этого, возможно, потребуется найти более инвариантное определение кручения, не использующее спектральную последовательность Бейлинсона.

Перспективным представляется вычисление аналитического кручения нашего расслоения, продолженного на компактификацию по Аракелову проективной прямой $\widehat{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}}$. Мы полагаем, что аналитическое кручение совпадет с построенным в работе кручением Рейдемейстера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Roberts L.** Indecomposable vector bundles on the projective line // Canad. J. Math. 1972. Vol. 24, no. 1. P. 149–154. doi:10.4153/CJM-1972-013-9
2. **Horrocks G.** Projective modules over an extension of a local ring // Proc. London Math. Soc. 1964. Vol. s3-14, no. 4. P. 714–718. doi: 10.1112/plms/s3-14.4.714
3. **Hanna Ch.C.** Subbundles of vector bundles on the projective line // J. Algebra. 1978. Vol. 52, no. 2. P. 322–327. doi: 10.1016/0021-8693(78)90242-9
4. **Smirnov A.L.** On filtrations of vector bundles over $P^1_{\mathbb{Z}}$ // Arithmetic and Geometry. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2015. P. 436–457. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; vol. 420).
5. **Смирнов А.Л.** Векторные расслоения на $P^1_{\mathbb{Z}}$ с простыми подскоками // Записки науч. семинара ПОМИ. 2016. Vol. 452. P. 202–217.
6. **Reidemeister K.** Homotopieringe und Linsenräume // Abh. Math. Sem. Hamburg. 1935. Vol. 11. P. 102–109. doi: 10.1007/BF02940717
7. **Nicolaescu L.I.** Notes on the Reidemeister torsion. 2002. 259 p. Available at: https://www3.nd.edu/ lnicolae/Torsion.pdf.
8. **Milnor J.** Whitehead torsion // Bull. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 72, no. 3. P. 358–426.
9. **Ranicki A.** The algebraic theory of torsion I. Foundations // Algebraic and Geometric Topology / eds. A. Ranicki, N. Levitt, F. Quinn. 1985. Springer; Berlin; Heidelberg, 1985. (Ser. Lecture Notes Math.; vol. 1126). doi: 10.1007/BFB0074445
10. **Поляков В.М.** Конечность числа классов векторных расслоений на $P^1_{\mathbb{Z}}$ с подскоками высоты 2 // Записки науч. семинара ПОМИ. 2022. Vol. 511. P. 137–160.
11. **Cartan H., Eilenberg S.** Homological algebra. Princeton: Princeton Univ. Press, 1956. (Princeton Mathematical Ser.; vol. 28). doi:10.1515/9781400883844

Поступила 29.11.2023
После доработки 19.12.2023
Принята к публикации 25.12.2023

Поляков Владимир Михайлович
аспирант
Санкт-Петербургское отделение математического института
имени В. А. Стеклова Российской академии наук
г. Санкт-Петербург
e-mail: polyakov@pdmi.ras.ru

REFERENCES

1. Roberts L. Indecomposable vector bundles on the projective line. *Canad. J. Math.*, 1972, vol. 24, no. 1, pp. 149–154. doi:10.4153/CJM-1972-013-9
2. Horrocks G. Projective modules over an extension of a local ring. *Proc. London Math. Soc.*, 1964, vol. s3-14, no. 4, pp. 714–718. doi: 10.1112/plms/s3-14.4.714
3. Hanna Ch.C. Subbundles of vector bundles on the projective line. *J. Algebra.*, 1978, vol. 52, no. 2, pp. 322–327. doi: 10.1016/0021-8693(78)90242-9
4. Smirnov A.L. On filtrations of vector bundles over $P^1_{\mathbb{Z}}$. *Arithmetic and Geometry*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2015, London Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 420, pp. 436–457.
5. Smirnov A.L. Vector bundles on $P^1_{\mathbb{Z}}$ with simple jumps. *Simple Jumps. J Math Sci.*, 2018, vol. 232, pp. 721–731. doi: 10.1007/s10958-018-3901-2
6. Reidemeister K. Homotopieringe und Linsenräume. *Abh. Math. Sem. Hamburg*, 1935, vol. 11, pp. 102–109. doi: 10.1007/BF02940717
7. Nicolaescu L.I. *Notes on the Reidemeister torsion*. 2002. 259 p. Available at: https://www3.nd.edu/ lnicolae/Torsion.pdf.
8. Milnor J. Whitehead torsion. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1966, vol. 72, no. 3, pp. 358–426.
9. Ranicki A. The algebraic theory of torsion I. Foundations. In: Algebraic and Geometric Topology (eds.) A. Ranicki, N. Levitt, F. Quinn, 1985, Springer, Berlin, Heidelberg, 1985, Ser. Lecture Notes Math., vol. 1126. doi: 10.1007/BFB0074445

10. Polyakov V.M. Finiteness of the number of classes of vector bundles on $P^1_{\mathbb{Z}}$ with jumps of height 2. *Zapiski Nauch. Seminara POMI*, 2022, vol. 511, pp. 137–160 (in Russian).
11. Cartan H., Eilenberg S. *Homological algebra*. Princeton: Princeton Univ. Press, 1956, Princeton Mathematical Ser., vol. 28. doi:10.1515/9781400883844

Received November 29, 2023
Revised December 19, 2023
Accepted December 25, 2023

Funding Agency: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (grant for the creation and development of the Leonhard Euler International Mathematical Institute, agreement no. 075-15-2022-289).

Vladimir Mikhailovich Polyakov, doctoral student, St. Petersburg Department of V.A.Steklov Institute of Mathematics of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, 191023 Russia,
e-mail: polyakov@pdmi.ras.ru .

Cite this article as: V. M. Polyakov. Reidemeister torsion for vector bundles on $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 1, pp. 156–169.