

УДК 514.174.2

**О ЗАДАЧЕ ПОКРЫТИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ФИГУР РАВНЫМИ
СФЕРИЧЕСКИМИ СЕГМЕНТАМИ¹****А. А. Лемперт, П. Д. Лебедев, Д. М. Нгуен**

Рассматривается задача о покрытии заданным числом элементов поверхности трехмерного множества, когда последнее — шар или шаровый сегмент, а элементы покрытия — равные сферические сегменты. Критерием оптимизации является минимизация радиуса данных сегментов. Такая постановка относится к относительно мало изученным случаям классической задачи о покрытии односвязного множества шарами, которая актуальна в связи с приложениями в области информационно-телекоммуникационных технологий и логистики. Особенность данного исследования заключается в том, что помимо традиционного евклидова расстояния между точками рассматривается также специальная метрика, характеризующая меру удаленности точек как время перемещения между ними. Предложен новый эвристический алгоритм, основанный на применении сферического аналога диаграммы Вороного и традиционной для авторов оптико-геометрической аналогии, позволяющий решать задачу покрытия неплоских поверхностей. Поскольку материал для сравнения с метрикой общего вида найти не удалось, был особо рассмотрен случай геодезического расстояния на сфере, для которого разработан алгоритм построения наилучшего покрытия посредством отыскания чебышевских центров зон Дирихле с доказательством теоремы, позволяющей оценить его эффективность. Выполнены иллюстрирующие численные расчеты.

Ключевые слова: оптимальное покрытие, неевклидово расстояние, диаграмма Вороного, оптико-геометрическая аналогия, чебышевский центр.

A. A. Lempert, P. D. Lebedev, D. M. Nguyen. On the problem of covering spherical figures with equal spherical caps.

We consider the problem of covering the surface of a three-dimensional set with a given number of elements when this set is a ball or a spherical segment and the covering elements are identical spherical caps. The optimization criterion is to minimize the radius of the spherical caps. This formulation is a relatively little-studied case of the classical circle covering problem (CCP) for a simply connected set, which is relevant in connection with applications in information and telecommunication technologies and logistics. The peculiarity of this study is that, besides the traditional Euclidean distance between points, a specific metric that characterizes the distance between points as the time of movement between them is also considered. A new heuristic algorithm is proposed, based on a spherical analog of the Voronoi diagram and the optical-geometrical analogy traditional for the authors, which allows solving the problem of covering non-planar surfaces. Since we could not find material for comparison with a general metric, the case of geodesic distance on a sphere was considered separately. For this case, we developed an algorithm for constructing the best covering based on finding the Chebyshev centers of Dirichlet zones, with a proof of the theorem that allows us to evaluate its effectiveness. Illustrative numerical calculations are performed.

Keywords: optimal covering, non-Euclidean distance, Voronoi diagram, optical-geometric analogy, Chebyshev center.

MSC: 05B40, 52C17, 35A18

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-1-142-155

Введение

Задача построения оптимальных покрытий имеет давнюю историю, а современный этап ее изучения начался в середине прошлого века в связи с развитием вычислительной техники [1–3]. Суть данной задачи заключается в размещении покрывающих объектов (как правило, одинаковых форм и размеров) таким образом, чтобы заданное множество лежало внутри их

¹Исследования А. А. Лемперт выполнены в рамках госзадания Минобрнауки России по проекту “Теоретические основы, методы и высокопроизводительные алгоритмы непрерывной и дискретной оптимизации для поддержки междисциплинарных научных исследований” (№ гос. регистрации: 121041300065-9).

объединения. С общих позиций ее можно рассматривать как задачу распределения и оптимизации ресурсов, которая имеет практическое приложение во многих областях, например, размещение спутников на геостационарной орбите для наблюдения за Землей [3], создание спутниковой навигационной системы [5; 6], расположение базовых станций сотовой связи [7; 8], космическая связь [9], логистика [10], мониторинг окружающей среды [11].

Несмотря на многолетнее активное изучение, задача эта далека от полного решения даже в плоской постановке. Доказать оптимальность покрытия возможно только в ряде отдельных случаев [12; 13], когда покрываемое множество имеет простую форму (круг, квадрат, треугольник и т. п.), а количество покрывающих элементов невелико [14; 15]. В большинстве случаев задача покрытия решается численно [16–18], а наилучшие из известных (*best-of-known*) решения размещаются на специальных ресурсах [19; 20].

Для многомерного пространства или сложных фигур (сфера, куб, конус и т. п.) задача покрытия является относительно мало изученной, все известные нам работы вышли за последние 30 лет. Исследования в основном нацелены на получение оценок минимального радиуса покрывающих сфер либо необходимого их количества при заданном радиусе [21]; в работе [22] показано существование покрытия единичной сферы в пространстве E^n 2^n конгруэнтными сферическими сегментами с радиусом, не превышающим $\arccos \sqrt{\frac{n-1}{2n}}$ в случае $4 \leq n \leq 6$. В [23] разработан способ покрытия выпуклого многогранника набором одинаковым сфер на основе метода возможных направлений в сочетании со случайным поиском; показано, что наилучшее значение радиуса достигается, когда вершины многогранника Вороного становятся центрами покрывающих шаров. Отдельным направлением исследований является установление минимального количества покрывающих шаров, радиус которых задан [24–26]. Отметим также статью [27], в которой рассмотрены задачи о многократных покрытиях и упаковках сферы в n -мерном пространстве при $n > 3$.

В подавляющем большинстве работ задача о покрытии изучается в евклидовом пространстве. Однако в приложениях возникают и другие постановки. Например, иногда требуется использовать геодезическое расстояние или рассматривать в качестве меры удаленности объектов минимально возможное время перемещения между ними [4; 28].

В настоящей статье, которая продолжает ранее выполненные нами исследования [29], рассматривается задача покрытия сферических фигур равными сферическими сегментами с использованием евклидовой и некоторых неевклидовых метрик, которые можно трактовать как минимально возможное время перемещения между точками. Под сферической фигурой мы понимаем любое односвязное множество, лежащее на сфере. Предлагаются новые эвристические алгоритмы решения указанной задачи, обосновываются некоторые их свойства, проводятся иллюстрирующие численные расчеты. Представлены два алгоритма для решения задачи о покрытии в неоднородной метрике, в которой расстояние между точками на сфере определяется как время прохождения между ними сигнала в неоднородной среде. В данной постановке задача является новой для неплоской поверхности. Третий алгоритм предназначен для частного случая, когда расстояние между точкам определено в сферической геометрии. Для него доказана теорема, позволяющая оценить эффективность его работы. Она же подтверждает, что третий алгоритм по крайней мере не ухудшает свойства покрытия, для которого применяется.

1. Постановка задачи

Пусть в метрическом пространстве X заданы поверхность $S \subset X$ — сфера или сферический сегмент, а также непрерывная функция $0 \leq f(x, y, z) \leq \beta$, определяющая мгновенную скорость движения в каждой точке $(x, y, z) \in X$. Если $f(x_i, y_i, z_i) = 0$, то точка (x_i, y_i, z_i) считается непроходимой. Минимальное время перемещения между двумя точками $a, b \in X$ определяется

из решения задачи

$$\rho(a, b) = \min_{\Gamma \in G(a, b)} \int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{f(x, y, z)}, \quad (1.1)$$

где $G(a, b)$ — множество непрерывных кривых, принадлежащих S и соединяющих точки a и b . Иначе говоря, кратчайшим путем между двумя точками мы будем считать кривую, на перемещение вдоль которой требуется наименьшее время [4].

Необходимо разместить n шаров $C_i(O_i)$ с центрами $O_i = (x_i, y_i, z_i)$ и одинаковыми радиусами R , который будем называть радиусом покрытия, чтобы поверхность S принадлежала объединению шаров и указанный радиус был минимальным. Тогда задача примет вид

$$R \rightarrow \min, \quad (1.2)$$

$$\forall p \in S, \exists i: \rho(O_i, p) \leq R, \quad (1.3)$$

$$O_i \in S, i = \overline{1, n}, \quad (1.4)$$

Целевая функция (1.2) минимизирует радиус покрытия. Условие (1.3) гарантирует, что любая точка поверхности S принадлежит по крайней мере одному покрывающему шару, а условие (1.4) означает, что все центры шаров располагаются на поверхности S .

2. О методе решения задач

При решении задачи (1.1)–(1.4) применяется традиционный для наших исследований подход [4; 29; 30], основанный на аналогии между распространением световой волны в оптически неоднородной среде и поиском глобального экстремума функционала вида (1.1), которая является следствием физических законов Ферма и Гюйгенса [31]. Согласно первому из них луч света движется из начальной точки в конечную по пути, минимизирующему время движения, а в соответствии со вторым каждая точка, достигнутая волной, является новым источником сферических волн. Огибающая фронтов волн всех вторичных источников становится фронтом волны в следующий момент времени. Оптическая неоднородность среды определяется функцией плотности $\rho(x, y, z) \geq 0$, и тогда скорость движения волны обратно пропорциональна плотности. Не ограничивая общности, коэффициент пропорциональности можно положить равным единице, т. е. $f(x, y, z) = 1/\rho(x, y, z)$.

Фронт световой волны в любой момент времени представляет собой сферу в метрическом пространстве с метрикой (1.1). С другой стороны, если из углов многоугольника выпустить световые волны и найти точку, которая будет достигнута всеми волнами последней, то эта точка будет хаусдорфовым центром многоугольника [29]. Данные свойства в дальнейшем используются для отыскания покрывающего шара наименьшего радиуса. Алгоритм, описывающий распространение световых волн в однородных и неоднородных средах, более подробно представлен в [4].

Для того чтобы свести задачу о покрытии n шарами к серии задач о покрытии одним шаром, разобьем поверхность S на n областей, используя диаграмму Вороного.

2.1. Построение диаграммы Вороного

Для набора из n точек $O_i = (x_i, y_i, z_i) \in S, i = \overline{1, n}$, составляющих диаграмму Вороного, области Дирихле V_i с центрами O_i определяется следующим образом:

$$V_i = \{a \in S: \rho(a, O_i) \leq \rho(a, O_j), \forall j \neq i\}.$$

Наиболее известным алгоритмом построения классической диаграммы Вороного является алгоритм Форчуна [32]. В рамках данного исследования предлагается обобщение оптико-геометрического подхода и алгоритма построения диаграммы Вороного для множества точек, лежащих на сфере или сферическом сегменте.

Сферу с радиусом r представим в геодезических координатах

$$(\Theta) = \{(\alpha, \beta) : 0 \leq \alpha < 2\pi, -\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2\},$$

где (α, β) — долгота и широта соответственно. Тогда

$$\begin{cases} x = r \cos \beta \cos \alpha, \\ y = r \cos \beta \sin \alpha, \\ z = r \sin \beta. \end{cases}$$

Из геометрии сферы следует, что дуга $\overset{\smile}{ab}$, соединяющая точки a и b , является кривой минимальной длины $d(a, b) = \arccos(\vec{a} \cdot \vec{b})$, где $\vec{a} \cdot \vec{b}$ — скалярное произведение векторов Oa и Ob . Пусть заданы n точек $O_i, i = \overline{1, n}$, а промежутки изменения сферических координат α и β определяют поверхность S : если $0 \leq \alpha < 2\pi, -\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2$, то S — сфера, если $0 < \alpha_* \leq \alpha \leq \alpha^* < 2\pi, -\pi/2 < \beta_* \leq \beta \leq \beta^* < \pi/2$ — различные сферические сегменты.

Алгоритм 1. Построение сферической диаграммы Вороного

Шаг 1: Вводится равномерная сетка с шагом h : $S_h \subset S$.

Шаг 2: Из каждой точки $O_i \in S_h, i = \overline{1, n}$, выпускается световая волна и определяется время достижения $T_i(s)$ всех точек $s(\alpha, \beta) \in S_h$. Это позволяет найти вектор

$$T(s) = \{T_i(s), i = \overline{1, n}\}.$$

Шаг 3: Для каждой точки $s \in S_h$ определяется, возможно не единственный, номер волны, которая первой достигла данной точки, и формируется множество

$$D(s) = \{k : T_k(s) = \min_i T_i(s)\}$$

номеров таких волн.

Шаг 4: Определяются области Дирихле диаграммы Вороного V_i с центром O_i как

$$V_i = \{s \in S_h : i \in D(s)\}.$$

□

2.2. Построение покрытия областей Дирихле диаграммы Вороного

Идея алгоритма заключается в том, чтобы найти быстрее маршрут между двумя наиболее удаленными точками области Дирихле. Его середина и будет центром покрывающей окружности минимального радиуса.

Алгоритм 2 построения покрытия

Шаг 1: Случайным образом генерируются начальные координаты центров сфер $O_i \in S_h, i = \overline{1, n}$.

Шаг 2: Для множества $C = \{O_i \in S_h, i = \overline{1, n}\}$ строятся области Дирихле $V_i, i = \overline{1, n}$, диаграммы Вороного с помощью алгоритма 1.

Шаг 3: Определяются границы ∂V_i областей V_i и аппроксимируются замкнутыми ломаными с узлами в точках $v_{i,k}, k = \overline{1, m}$. Если при этом три точки или более оказываются лежащими на одной прямой, то средние точки исключаются из рассмотрения.

Шаг 4: Из каждой точки $v_{i,k}$, выпускаются световые волны. Для каждой точки $s(\alpha, \beta) \in V_i$ устанавливаются источник, выпущенная из которого волна первой достигла точки s , и время перемещения $T(\alpha, \beta)$

$$T(\alpha, \beta) = \min_{k=\overline{1, m}} T_k(\alpha, \beta),$$

где $T_k(\alpha, \beta)$ — время распространения световой волны из $v_{i,k}$ до $s(\alpha, \beta) \in V_i$.

Шаг 5: Вычисляются радиус и центр покрывающих сферических сегментов области V_i по формулам

$$R_i = \max_{s(\alpha, \beta) \in V_i} T(\alpha, \beta),$$

$$O_i^* = \arg \max_{s(\alpha, \beta) \in V_i} T(\alpha, \beta).$$

Шаги 3–5 выполняются независимо для каждой области V_i .

Шаг 6: Чтобы гарантировать полное покрытие сферическими сегментами множества S , в качестве радиуса покрывающего сегмента выбирается максимальный

$$R = \max_{i=1, \overline{n}} R_i.$$

Шаг 7: Если $\rho(O_i, O_i^*) < \delta, i = \overline{1, n}$, где δ — наперед заданный малый параметр, переходим к шагу 8, иначе полагаем $O_i := O_i^*$ и возвращаемся к шагу 2.

Шаг 8: Если найденный на текущей итерации радиус меньше предыдущего, он сохраняется в качестве решения задачи. Осуществляется переход к шагу 1 — производится новая генерация начальных положений. Завершается работа алгоритма при достижении заданного количества генераций. \square

Алгоритм 2 принадлежит семейству алгоритмов типа Ллойда и отличается от известных тем, что расстояние между точками здесь вычисляется весьма специфическим образом, а именно посредством задачи о брахистохроне, которая, в свою очередь, решается с использованием оптико-геометрической аналогии. Здесь, в отличие от [33], выбор метрики оказывает существенное влияние на решение задачи. Недостатком алгоритма является то, что он не гарантирует получения глобального решения. На каждой итерации находится локальный оптимум. Применение случайной генерации начальных координат центров позволяет говорить о нахождении наилучшего из известных решений.

2.3. Геометрические методы

Разработанные ранее программные комплексы [34] решения задач о построении оптимального покрытия множеств в трехмерном евклидовом пространстве могут применяться для решения задачи на сфере единичного радиуса в случае изотропной среды. Похожие задачи о построении оптимальных покрытий на сфере рассмотрены, например, в работе [35]. Ограничимся случаем, когда расстояние $\sigma(a, b)$ между двумя точками a и b на сфере S равно длине наименьшей дуги, соединяющей точки a и b на S . Из геометрии сферы следует, что $\sigma(a, b)$ расстояние в \mathbb{R}^3 связано соотношением

$$\sigma(a, b) = 2 \arcsin \frac{\|a - b\|}{2}. \quad (2.5)$$

Введем понятие сферического круга $O_\sigma(a, r)$ как множества точек, лежащих на сферическом расстоянии не более чем r на S от a : $O_\sigma(a, r) = \{o \in S: \sigma(o, a) \leq r\}$.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть заданы точка $a \in S$ и замкнутое множество $B \subseteq S$. Обозначим $R_\sigma(B, a) \triangleq \min\{r \geq 0: B \subseteq O_\sigma(a, r)\}$ — наименьший радиус сферического круга с центром в a , в который может быть вложен компакт B .

О п р е д е л е н и е 2. Пусть задано замкнутое множество $B \subseteq S$. Обозначим $R_\sigma(B) \triangleq \min\{R_\sigma(B, a): a \in S\}$ — наименьший возможный радиус сферического круга, в который может быть вложен компакт B .

Из сферической геометрии [36] известно, что если для множества $B \subseteq S$ выполняется оценка

$$R_\sigma(B) < \pi/2, \quad (2.6)$$

то определена точка

$$c_\sigma(B) = \|c(B)\|^{-1}c(B) \quad (2.7)$$

такая, что $R_\sigma(B, c_\sigma(B)) = R_\sigma(B)$.

Лемма 1. Пусть заданы точка $a \in S$ и замкнутое множество $B \subseteq S$. Тогда если выполняется условие (2.6) и

$$\sigma(c_\sigma(B), a) \leq \pi/2, \quad (2.8)$$

то справедлива оценка

$$R_\sigma(B, a) \geq 2 \arcsin \sqrt{\frac{\sin^2 R_\sigma(B) + (\cos R_\sigma(B) - \cos \sigma(c_\sigma(B), a))^2 + \sin^2 \sigma(c_\sigma(B), a)}{2}}. \quad (2.9)$$

Доказательство. Обозначим $b = c_\sigma(B), r = R_\sigma(B)$. Если $a = b$, то нестрогое неравенство (2.9) выполняется как равенство. Если $a \neq b$, то рассмотрим плоскость Π , проходящую через точки a, b и $\mathbf{0}$. Условие (2.8) гарантирует, что эти три точки не лежат на одной прямой, следовательно, Π определена однозначно. Введем в рассмотрение плоскость Π^* , проходящую через точки b и $\mathbf{0}$ ортогонально к плоскости Π . Обозначим $\mathcal{O}(b, r) = \{o \in S: \sigma(o, b) = r\}$ — окружность, окаймляющую сферический круг $O(b, r)$. Выделим на ней полуокружность $O_- \subset \mathcal{O}(b, r)$, которая находится по ту же сторону плоскости Π^* , что и точка a . Аналогично, выделим полуокружность $O_+ \subset \mathcal{O}(b, r)$, которая расположена по другую сторону от Π^* . Из формулы (2.7) следует, что компакт B имеет непустое пересечение с любой полуокружностью из $\mathcal{O}(b, r)$, иначе его можно было бы вложить в сферический круг меньшего, чем r , радиуса. Значит,

$$\exists o^* \in O_+ \cap B.$$

Рассмотрим $\triangle abo^*$. В нем по построению

$$\|a - o^*\| \geq \|a - a_0\|,$$

где $a_0 \in \Pi^* \cap \mathcal{O}(b, r)$ — одна из двух точек, общих для O_+ и O_- . Поэтому справедливо неравенство

$$R_\sigma(B, a) \geq \sigma(a, a_0). \quad (2.10)$$

Выберем систему координат так, чтобы ось абсцисс совпадала с прямой $\Pi \cap \Pi^*$, ось ординат лежала на плоскости Π^* , а ось аппликат — на плоскости Π . Тогда разности координат точек a и a_0 равны по модулю $|\cos R_\sigma(B) - \cos \sigma(c_\sigma(B), a)|$, $|\sin R_\sigma(B)|$ и $|\sin \sigma(c_\sigma(B), a)|$. Вычислив из них $\|a - a_0\|$ и подставив в формулу (2.5), можно записать

$$\sigma(a, a_0) = 2 \arcsin \sqrt{\frac{\sin^2 R_\sigma(B) + (\cos R_\sigma(B) - \cos \sigma(c_\sigma(B), a))^2 + \sin^2 \sigma(c_\sigma(B), a)}{2}}. \quad (2.11)$$

Из неравенства (2.10) и равенства (2.11) вытекает оценка (2.9). \square

Пусть заданы множество $M \subseteq S$ и набор из n точек $W = \{w\}_{i=1}^n \subset S$. Обозначим $H_\sigma(M, W)$ — минимальное число λ , такое, что множество M может быть вложено в объединение сферических сегментов радиуса λ с центрами в точках из W ; а $r(M)$ — чебышевский радиус компакта M в трехмерном евклидовом пространстве. Вычисление нового массива точек $\widehat{W} = \{\widehat{w}\}_{i=1}^n \subset S$ может быть реализовано с помощью геометрических процедур.

Алгоритм 3 построения покрытия

Шаг 1: Для множества W строим диаграммы Вороного $V_i, i = \overline{1, n}$, точек $w_i, i = \overline{1, n}$, в трехмерном евклидовом пространстве.

Шаг 2: Для множества M строим области Дирихле $M_i = M \cap V_i, i = \overline{1, n}$.

Шаг 3: Для каждой области M_i , $i = \overline{1, n}$, если $M_i \neq \emptyset$, находим ее чебышевский центр $c_i = c(M_i)$, а если $M_i = \emptyset$, записываем значение точки $c_i = \mathbf{0} = (0, 0, 0)$.

Шаг 4: Для каждого $i = \overline{1, n}$, если $c_i \neq \mathbf{0}$, то берем в качестве элемента нового массива точек $\widehat{w}_i = c_i$, а если $c_i = \mathbf{0}$, то берем $\widehat{w}_i = w_i$. \square

Начальный массив $W \subset S$ строится посредством стохастических процедур. Так, с помощью генератора случайных чисел, задается массив точек $B = \{b\}_{i=1}^n$, равномерно распределенных внутри куба с длиной ребра, равной 2, с центром в начале координат. А затем в качестве точек w_i , $i = \overline{1, n}$, берутся проекции элементов b_i , $i = \overline{1, n}$, массива B на сферу Θ . Единственная процедура, которую при этом надо выполнить, — это исключение из B точки $(0, 0, 0)$. Алгоритм 3 при программной реализации применяется многократно в цикле. Условием выхода является достаточно малое расстояние между точками \widehat{w}_i , w_i , $i = \overline{1, n}$.

Теорема 1. Если для областей Дирихле выполняется оценка

$$\forall i = \overline{1, n} \quad r(M_i) < 1, \quad (2.12)$$

а для наборов точек имеют место оценки

$$\forall i = \overline{1, n} \quad \|\widehat{w}_i - w_i\| \leq \sqrt{2}, \quad (2.13)$$

то справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & H_\sigma(M, W) - H_\sigma(M, \widehat{W}) \\ & \geq \max_{i=\overline{1, n}} 2 \arcsin \sqrt{\frac{\sin^2 R_\sigma(M_i) + (\cos R_\sigma(M_i) - \cos \sigma(w_i, \widehat{w}_i))^2 + \sin^2 \sigma(w_i, \widehat{w}_i)}{2}} - \max_{i=\overline{1, n}} R_\sigma(M_i). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Доказательство следует из того, что из условий (2.12) получаем $\forall i = \overline{1, n} \quad \widehat{w}_i = c_\sigma(M_i)$. Из данного факта и оценок (2.13) вытекает, что для каждого компакта M_i и точки w_i , $i = \overline{1, n}$, выполняются условия леммы 1. Поэтому можно записать оценки

$$\begin{aligned} & \forall i = \overline{1, n} \quad R_\sigma(M_i, w_i) \\ & \geq 2 \arcsin \sqrt{\frac{\sin^2 R_\sigma(M_i) + (\cos R_\sigma(M_i) - \cos \sigma(w_i, c_\sigma(M_i)))^2 + \sin^2 \sigma(w_i, c_\sigma(M_i))}{2}} \end{aligned} \quad (2.15)$$

и равенства

$$\forall i = \overline{1, n} \quad R_\sigma(M_i, \widehat{w}_i) = R_\sigma(M_i). \quad (2.16)$$

По построению областей Дирихле выполняются равенство

$$H_\sigma(M, W) = \max_{i=\overline{1, n}} R_\sigma(M_i, w_i). \quad (2.17)$$

Из (2.16) выводим неравенство

$$H_\sigma(M, \widehat{W}) \leq \max_{i=\overline{1, n}} R_\sigma(M_i). \quad (2.18)$$

Из (2.17), (2.18) можно записать

$$H_\sigma(M, W) - H_\sigma(M, \widehat{W}) \geq \max_{i=\overline{1, n}} R_\sigma(M_i, w_i) - \max_{i=\overline{1, n}} R_\sigma(M_i). \quad (2.19)$$

Если подставить в неравенство (2.19) значение (2.15), получаем оценку (2.14). \square

Теорема 1 позволяет оценивать эффективность работы алгоритма 3 для случая, когда текущий массив W состоит из центров сферических кругов, которые покрывают компакт M при достаточно малом радиусе r . Если на каждом шаге алгоритма величины $\sigma(w_i, \widehat{w}_i)$, $i = \overline{1, n}$, составляют значимую долю от r , то алгоритм существенно улучшает свойства покрытия. В общем случае теорема 1 доказывает, что алгоритм 3 при его применении к произвольному массиву точек по крайней мере не увеличивает радиус r кругов, который нужен, чтобы сферические круги с ним и центрами в элементах данного массива покрывала M .

3. Вычислительный эксперимент

Все алгоритмы реализованы на языке программирования C#, пакет Visual Studio 2022; для вычислений использовался персональный компьютер с конфигурацией Intel (R) Core(TM) i5-3337U (частота 1.8 GHz, 4 CPUs, 6 GB RAM) и операционной системой Windows 10.

Пример 1. В данном примере представлены наилучшие решения задач покрытия $n = 16$ сферическими сегментами единичной полусферы $S^+ = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ в случае, когда метрика является евклидовой, т. е. $f(x, y, z) = 1$.

Решение задачи выполнено на основе разработанного программного комплекса посредством многократного запуска с применением алгоритмов 2 и 3. Позиции центров сферического сегмента:

(0.6611, -0.6657, 0.3461), (-0.8654, 0.3683, 0.3397), (0.4099, -0.4523, 0.7921),
 (-0.9451, -0.2366, 0.2252), (0.7676, 0.0756, 0.6365), (0.9940, -0.0930, 0.0570),
 (-0.5548, -0.7814, 0.2856), (-0.5304, -0.1798, 0.8285), (0.1150, -0.9782, 0.1730),
 (0.2046, 0.5908, 0.7805), (-0.4551, 0.5686, 0.6853), (0.1971, 0.9335, 0.2996),
 (-0.4735, 0.8592, 0.1938), (0.7432, 0.6161, 0.2609), (-0.0664, -0.6724, 0.7372),
 (0.0490, 0.0935, 0.9944).

Радиус сегментов (в метрике на поверхности сферы) $R_{16} = 0,43643$. Это на 0.54% улучшает результат $\check{R}_{16} = 0.4388$, полученный в статье [37]. Всего было выполнено более 500 запусков программного комплекса, в каждом из которых начальный массив точек генерировался случайным образом, точки были равномерно распределены по всей полусфере S^+ . Числен-

Т а б л и ц а 1
**Результаты покрытий единичной сферы
 для евклидовой метрики в примере 2**

n	Алгоритм 2		Алгоритм 3	
	R_2	t_2	R_3	t_3
4	1.2322	4.62	1.1499	3.465
5	1.1071	7.65	1.1140	3.669
6	0.9569	8.67	1.0360	3.88
7	0.9005	14.69	0.9075	4.21
8	0.8485	19.06	0.8646	4.574
9	0.8061	23.13	0.8092	4.601
10	0.7406	29.04	0.7706	5.661
11	0.7254	38.72	0.7407	5.879
12	0.6783	41.57	0.6894	6.209
13	0.6661	45.95	0.6681	6.276
14	0.6279	50.40	0.6411	7.335
15	0.6100	62.29	0.6315	7.936
16	0.5900	68.10	0.6097	9.440
17	0.5660	74.92	0.5997	9.665
18	0.5515	81.48	0.5888	9.912
19	0.5380	89.55	0.5512	9.998
20	0.5247	93.35	0.5389	10.634
40	0.3703	210.95	0.3853	25.656
60	0.3107	370.41	0.3151	57.880
80	0.2640	415.29	0.2780	112.839
100	0.2355	498.04	0.2532	293.146
120	0.2162	502.11	0.2228	299.324

ный эксперимент показал, что после первых двух десятков запусков результаты практически не улучшались. Тем не менее была проведена статистическая обработка результатов эксперимента. В качестве случайной величины рассматривалось отклонение радиуса покрытия от минимального. По виду гистограммы была высказана гипотеза, что это гамма-распределение, параметры которого были определены по методу моментов и оказались равными $\theta = 0.0054$, $k = 2.4413$. Проверка гипотезы по критериям Пирсона и Колмогорова — Смирнова показала, что при уровне значимости 0.05 нет оснований отвергнуть высказанную гипотезу. Тогда математическое ожидание радиуса покрытия составит 0.44952, а дисперсия — 0.00007.

Пример 2. Требуется решить задачу покрытия сферическими сегментами единичной сферы $\Theta = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ в случае, когда метрика является евклидовой, т.е. $f(x, y, z) = 1$.

В табл. 1 приведены результаты расчетов. Здесь n — количество покрывающих сферических сегментов, R_2 и R_3 — наилучшие радиусы покрытий, t_2 и t_3 — время расчета (в секундах), для алгоритмов 2 и 3 соответственно. Число случайных генераций начальных положений — 500, величина $\delta = 10^{-15}$.

Алгоритм 3 работает намного быстрее, но несколько проигрывает в точности. В примерах 3 и 4 алгоритмы использовались совместно для сокращения времени расчетов, сначала применялся геометрический, потом волновой.

Пример 3. Рассматривается задача покрытия единичной сферы $\Theta = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Пусть плотность среды задается функцией $\rho(x, y, z) = 1 + 0.9z^2$, тогда скорость распространения волны $f(x, y, z) = 1/(1 + 0.9z^2)$.

Нетрудно заметить, что скорость распространения волны уменьшается при движении от экватора к полюсу, при этом волновые фронты имеют эллиптическую форму. Если центр покрывающего сегмента расположен на экваторе, волновой фронт есть обычный эллипс; если центр покрывающего сегмента расположен в точке полюса, то волновой фронт есть окружность; во всех остальных случаях волновой фронт — это эллипс со смещенным в сторону ближайшего полюса центром.

В табл. 2 представлены результаты расчетов для различного числа покрывающих сегмен-

Т а б л и ц а 2
Результаты покрытий единичной сферы
с неевклидовой метрикой

n	Пример 3		Пример 4	
	R	t	R	t
6	1.3689	318.37	1.1471	305.74
7	1.2843	325.22	1.1089	311.31
8	1.1995	336.02	1.0030	318.90
9	1.1083	342.52	0.9999	326.55
10	1.0522	353.21	0.9636	337.45
11	1.0366	362.27	0.9341	344.40
12	1.0062	373.95	0.8857	351.21
13	0.9527	384.67	0.8750	358.45
14	0.9266	396.80	0.8136	377.49
15	0.8864	417.26	0.7927	384.27
16	0.8572	438.42	0.7413	390.16
17	0.8258	456.13	0.7386	395.42
18	0.8073	468.22	0.7243	400.86
19	0.8069	485.57	0.7075	407.43
20	0.7941	499.76	0.6674	414.67

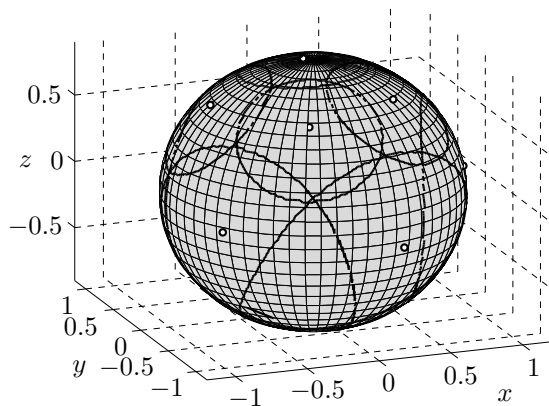


Рис. 1. Покрытие сферы набором из 12 сферических сегментов в неевклидовой метрике в примере 3.

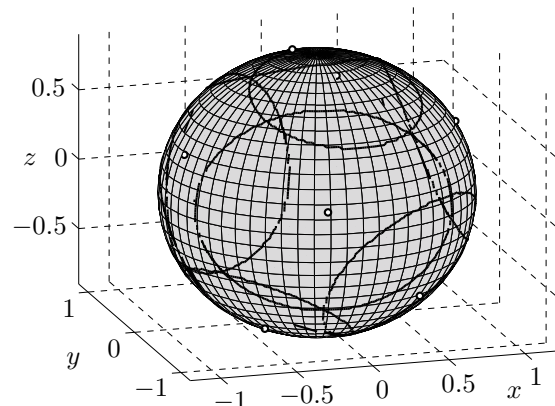


Рис. 2. Покрытие сферы набором из 12 сферических сегментов в неевклидовой метрике в примере 4.

тов. Покрытие для случая 12 элементов представлено на рис. 1.

Пример 4. Рассматривается задача покрытия единичной сферы Θ с метрикой, в которой плотность среды $\rho(x, y, z) = 1/f(x, y, z) = 1 + 0.9z$.

В данном случае волновые фронты имеют яйцевидную форму, характерную для сферически-слоистых сред, и вытянуты к “южному” полюсу. В табл. 2 представлены результаты расчетов для различного числа покрывающих сегментов. Покрытие для случая 12 элементов представлено на рис. 2.

Отметим, что при одинаковом количестве сферических сегментов наименьшие радиусы покрытий получаются для случая евклидовой метрики, поскольку из-за введения функции плотности, большей единицы, скорость движения волн уменьшается.

Для примеров с неевклидовой метрикой была проведена аналогичная примеру 1 статистическая обработка результатов эксперимента. Здесь также установлено, что отклонения радиуса от минимальных описываются гамма-распределениями, причем их параметры оказались весьма близки: $\theta_3 = 0.0176$, $k_3 = 4.508$ и $\theta_4 = 0.0185$, $k_4 = 4.255$. Проверка гипотез по критериям Пирсона и Колмогорова — Смирнова показала, что при уровне значимости 0.05 нет оснований их отвергнуть.

Заключение

Рассмотрена задача об оптимальном покрытии сфер и сферических сегментов шарами равного радиуса; минимизация последнего является при этом критерием оптимальности. Подобные постановки относительно мало изучены даже в классическом варианте, причем обычно рассматриваются покрытия плоских или объемных фигур. Проведенное в данной статье исследование, в котором предусмотрено использование специальной неевклидовой метрики, характеризующей меру удаленности точек, вообще, насколько нам известно, в своем роде является пионерским. Между тем подобные задачи имеют вполне конкретный практический смысл и возникают, в частности, в транспортной логистике, когда ключевым требованием становится максимальная скорость доставки грузов.

Разработан эвристический алгоритм, основанный на построении сферической диаграммы Вороного и оптико-геометрической аналогии [4], позволяющий находить локально-оптимальные решения рассмотренной задачи. Ввиду отсутствия в общем случае материала для сравнения был особо рассмотрен случай геодезического расстояния по сфере (геодезическая метрика). Предложен алгоритм построения наилучшего покрытия, который основан на отыскании чебышевских центров зон Дирихле, доказана теорема, позволяющая оценить эффективность его работы.

Проведены иллюстрирующие численные расчеты, которые в случае геодезической метрики показали хорошее соответствие результатов расчетов, выполненных с использованием различных подходов. Геометрические методы оказались более экономичными, а методы, основанные на оптических аналогиях, дают более точные результаты.

Дальнейшие исследования в данном направлении могут быть связаны с рассмотрением других поверхностей второго порядка: эллипсоида, конуса, гиперboloида и т. п. Также большой интерес представляет доказательство строгих математических утверждений об оптимальных способах покрытия поверхностей различного вида. Наконец, мы рассчитываем применить полученные результаты для решения прикладных задач из области безопасности и логистики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кротов В.Ф., Пиявский С.А.** Достаточные условия оптимальности в задачах об оптимальных покрытиях // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1968. №2. С. 10–17.
2. **Toth L.F.** Solid circle-packings and circle-coverings // *Studia Sci. Math. Hungar.* 1968. Vol. 3. P. 401–409.
3. **Брусов В.С., Пиявский С.А.** Вычислительный алгоритм оптимального покрытия областей плоскости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1971. Т. 11, №2. С. 304–313.
4. **Казаков А.Л., Лемперт А.А.** Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // Автоматика и телемеханика. 2011. Т. 72, № 7. С. 50–57.
5. **Можаев Г.В.** Задача о непрерывном обзоре поверхности Земли и кинематически правильные спутниковые системы // Космические исследования. 1972. Т. 10, №6. С. 833–840.
6. **Пиявский С.А.** Об оптимизации сетей // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1968. №1. С. 68–80.
7. **Зикратова И.А., Шаго Ф.Н., Гуртов А.В., Ивановская И.И.** Оптимизация зоны покрытия сети сотовой связи на основе математического программирования // Науч.-техн. вестн. информ. технологий, механики и оптики. 2015. Т. 15, №2. С. 313–321.
doi: 10.17586/2226-1494-2015-15-2-313-321
8. **Казаковцев Л.А., Гудыма М.Н., Ступина А.А., Кириллов Ю.И.** Задача выбора оптимального размещения элементов беспроводной сети // Современные проблемы науки и образования. 2013. №3. С. 85–92.
9. **Гениатулин К.А., Носов В.И.** Применение метода координационных колец при частотно-территориальном планировании системы спутниковой связи с зональным обслуживанием // Вестн. СибГУТИ. 2014. №1. С. 35–45.
10. **Бычков И.В., Казаков А.Л., Лемперт А.А. и др.** Интеллектуальная система управления развитием транспортно-логистической инфраструктурой региона // Проблемы управления. 2014. Т. 1. С. 27–35.
11. **Казаковцев Л.А., Гудыма М.Н.** Постановка задачи оптимального размещения сети датчиков мониторинга загрязнения воздуха и воды // Перспективы развития информационных технологий. 2013. №13. С. 19–24.
12. **Heppes A., Melissen H.** Covering a rectangle with equal circles // *Period. Math. Hungar.* 1977. Vol. 34. P. 65–81. doi: 10.1023/A:1004224507766
13. **Melissen J.B.M., Schuur P.C.** Covering a rectangle with six and seven circles // *Discret. Appl. Math.* 2000. Vol. 99. P. 149–156. doi: 10.1016/S0166-218X(99)00130-4
14. **Nurmela K.J.** Conjecturally optimal coverings of an equilateral triangle with up to 36 equal circles // *Experimental Math.* 2000. Vol. 9, no. 2. P. 241–250. doi: 10.1080/10586458.2000.10504649
15. **Nurmela K.J., Ostergard P.R.J.** Covering a square with up to 30 equal circles // *Helsinki University of Technology — Research Reports.* 2000. Vol. 99. P. 149–156.
16. **Conway J.H., Sloane N.J.A.** Sphere Packing. Lattices and Groups. NY: Springer, 1999. 706 p. doi: 10.1007/978-1-4757-6568-7
17. **Тахонов И.И.** О некоторых задачах покрытия плоскости кругами // Дискрет. анализ и исследование операций. 2014. Т. 21. Вып. 1. С. 84–102.
18. **Dorninger D.** Thinnest covering of the Euclidean plane with incongruent circles // *Analysis and Geometry in Metric Spaces.* 2017. Vol. 5. P. 40–46. doi: 10.1515/agms-2017-0002
19. **Specht E.** Packomania [e-resource]. URL: <http://www.packomania.com>].
20. Erich's Packing Center [e-resource]. URL: <https://erich-friedman.github.io/packing/index.html>].

21. **Joos A.** Covering the 5-dimensional unit cube by eight congruent balls // *Periodica Mathematica Hungarica* volume. 2018. Vol. 77. P. 77–82. doi: 10.1007/s10998-018-0241-4.
22. **Bondarenko A., Prymak A., Radchenko D.** Spherical coverings and X-raying convex bodies of constant width // *Canad. Math. Bull.* 2021. Vol. 65. P. 1–7.
23. **Стоян Ю.Г., Пацук В.Н.** Метод покрытия выпуклого многогранного множества минимальным количеством одинаковых шаров // *Reports of the National Acad. Sci. Ukraine.* 2009. Vol. 5. P. 41–45.
24. **Vergier-Gaugry J.L.** Covering a ball with smaller equal balls in R^n // *Discrete & Computational Geometry.* 2005. Vol. 33, no. 1. P. 143–155. doi: 10.1007/s00454-004-2916-2
25. **Dumer I.** Covering spheres with spheres // *Discrete & Computational Geometry.* 2007. Vol. 38, no. 4. P. 665–679. doi: 10.1007/s00454-007-9000-7
26. **Bezdek A., Fodor F., Vigh V., Zarnocz T.** On the multiplicity of arrangements of congruent zones on the sphere [e-resource]. 2023. 11 p. URL: <https://arxiv.org/abs/1705.02172>.
27. **Галиев Ш.И.** Многократные упаковки и покрытия сферы // *Дискрет. математика.* 1996. Т. 8. №3. С. 148–160.
28. **Kazakov A., Lempert A., Lebedev P.** Congruent circles packing and covering problems for multiconnected domains with non-euclidean metric, and their applications to logistics // *Proc. Int. Conf. Mathematical and Information Technologies (MIT-2016)* / eds. Yu. I. Shokin, H. Milosevic, D. V. Esipov. Ser. CEUR Workshop Proceedings. 2017. Vol. 1839. P. 334–343. URL: <https://ceur-ws.org/Vol-1839/MIT2016-p30.pdf>.
29. **Казаков А.Л., Лебедев П.Д.** Алгоритмы построения наилучших n -сетей в метрических пространствах // *Автоматика и телемеханика.* 2017. №7. С. 141–155.
30. **Казаков А.Л., Лемперт А.А., Бухаров Д.С.** К вопросу о сегментации логистических зон для обслуживания непрерывно распределенных потребителей // *Автоматика и телемеханика.* 2013. №6. С. 87–100.
31. **Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.** Фейнмановские лекции по физике. Том 3: Излучение. Волны. Кванты. М.: Либроком, 2013. 243 с.
32. **Fortune S.** A sweepline algorithm for Voronoi diagrams // *Algorithmica.* 1987. Vol. 2. P. 153–174. doi: 10.1007/BF01840357
33. **Shkaberina G., Verenev L., Tovbis E., Rezova N., Kazakovtsev L.** Clustering algorithm with a greedy agglomerative heuristic and special distance measures // *Algorithms.* 2022. Vol. 15, no. 6. P. 191. doi: 10.3390/a15060191
34. **Лебедев П.Д.** Программа вычисления оптимального покрытия полусферы набором сферических сегментов. Программа для ЭВМ. Регистр. номер 2015661543. Дата регистрации 29.10.2015.
35. **Арестов В.В., Бабенко А.Г.** О схеме Дельсарта оценки контактных чисел // *Тр. МИАН.* 1997. Т. 219. С. 44–73.
36. **Степанов Н.Н.** Сферическая тригонометрия. Л.; М.: ОГИЗ, 1948. 154 с.
37. **Ушаков В.Н., Лахтин А.С., Лебедев П.Д.** Оптимизация хаусдорфа расстояния между множествами в евклидовом пространстве // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2014. Т. 20, № 3. С. 291–308.

Поступила 30.10.2023

После доработки 29.12.2023

Принята к публикации 9.01.2024

Лемперт Анна Ананьевна

канд. физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник

Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН

г. Иркутск

e-mail: lempert@icc.ru

Лебедев Павел Дмитриевич

канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;

Уральский федеральный университет

г. Екатеринбург

e-mail: pleb@yandex.ru

Нгуен Дык Минь
аспирант

Иркутский национальный исследовательский технический университет, г. Иркутск
e-mail: nguenducminh.mt@gmail.com

REFERENCES

1. Krotov V.F., Piyavskii S.A. Sufficient optimality conditions in the problems of optimal coverage. *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, 1968, no. 2, pp. 10–17 (in Russian).
2. Toth L.F. Solid circle-packings and circle-coverings. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 1968, vol. 3, pp. 401–409.
3. Brusov V.S., Piyavskii S.A. A computational algorithm for optimally covering a plane region. *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1971, vol. 11, no. 2, pp. 17–27. doi: 10.1016/0041-5553(71)90161-3
4. Kazakov A.L., Lempert A.A. An approach to optimization in transport logistics. *Autom. Remote Control*, 2011, vol. 72, no. 7, pp. 1398–1404. doi: 10.1134/S0005117911070071
5. Mozhaev G.V. The problem of continuous observation of the Earth's surface and cinematically correct satellite systems. *Kosmicheskie issledovaniya*, 1972, vol. 10, no. 6, pp. 833–840 (in Russian).
6. Piyavskii S.A. On network optimization. *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, 1968, no. 1, pp. 68–80 (in Russian).
7. Zikratov I.A., Shago F.N., Gurtov A.V., Ivaninskaya I.I. Optimization of the coverage zone for a cellular network based on mathematical programming. *Nauch.-Tekh. Vestnik Inform. Tekh. Mekh. Optiki*, 2015, vol. 15, no. 2, pp. 313–321 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2015-15-2-313-321
8. Kazakovtsev L.A., Gudyma M.N., Stupina A.A., Kirillov Yu.I. Problem of optimal location of wireless network equipment. *Sovremennye Problemy Nauki i Obrazovaniya*, 2013, no. 3, pp. 85–92 (in Russian).
9. Geniatulin K.A., Nosov V.I. Using of coordinating rings method in frequency-spatial planning of mobile satellite communication system with zonal maintenance. *Vestnik Sib. Gos. Univ. Telekommun. Inform.*, 2014, no. 1, pp. 35–48 (in Russian).
10. Bychkov I.V., Kazakov A.L., Lempert A.A., Bukharov D.S., Stolbov A.B. An intelligent management system for the development of regional transport logistic infrastructure. *Autom. Remote Control*, 2016, vol. 77, no. 2, pp. 332–343. doi: 10.1134/S0005117916020090
11. Kazakovtsev L.A., Gudyma M.N. Statement of the problem of optimal placement of a network of air and water pollution monitoring sensors. *Perspektivy Razvitiya Inform. Tekh.*, 2013, no. 13, pp. 19–24 (in Russian).
12. Heppes A., Melissen H. Covering a rectangle with equal circles. *Period. Math. Hungar.*, 1997, vol. 34, no. 1–2, pp. 65–81. doi: 10.1023/A:1004224507766
13. Melissen J.B.M., Schuur P.C. Covering a rectangle with six and seven circles. *Discrete Appl. Math.*, 2000, vol. 99, no. 1–3, pp. 149–156. doi: 10.1016/S0166-218X(99)00130-4
14. Nurmela K.J. Conjecturally optimal coverings of an equilateral triangle with up to 36 equal circles. *Experimental Math.*, 2000, vol. 9, no. 2, pp. 241–250. doi: 10.1080/10586458.2000.10504649
15. Nurmela K.J., Östergård P.R.J. Covering a square with up to 30 equal circles. *Helsinki Univ. of Technology — Research Reports*, 2000, vol. 99, pp. 149–156.
16. Conway J.H., Sloane N.J.A. *Sphere packing, lattices and groups*. NY: Springer, 1999. 706 p. doi: 10.1007/978-1-4757-6568-7
17. Takhonov I.I. On some problems of covering the plane with circles. *Diskret. Anal. Issled. Oper.*, 2014, vol. 21., no. 1, pp. 84–102 (in Russian).
18. Dorninger D. Thinnest covering of the Euclidean plane with incongruent circles. *Analysis and Geometry in Metric Spaces*, 2017, vol. 5, no. 1, pp. 40–46. doi: 10.1515/agms-2017-0002
19. Specht E. *Packomania* [e-resource]. Available on: <http://www.packomania.com>.
20. *Erich's packing center* [e-resource]. Available on: <https://erich-friedman.github.io/packing/index.html>.
21. Joos A. Covering the 5-dimensional unit cube by eight congruent balls // *Periodica Mathematica Hungarica* volume. 2018. Vol. 77. P. 77–82. doi: 10.1007/s10998-018-0241-4.
22. Bondarenko A., Prymak A., Radchenko D. Spherical coverings and X-raying convex bodies of constant width. *Canad. Math. Bull.*, 2022, vol. 65, no. 4, pp. 860–866. doi: 10.4153/S0008439521001016
23. Stoyan Yu.G., Patsuk V.N. Method of covering of convex polyhedral set by minimal number of equal balls. *Reports of the National Academy of Science of Ukraine*, 2009, vol. 5, pp. 41–45.
24. Verger-Gaugry J.L. Covering a ball with smaller equal balls in R^n . *Discrete Comput. Geom.*, 2005, vol. 33, no. 1, pp. 143–155. doi: 10.1007/s00454-004-2916-2

25. Dumer I. Covering spheres with spheres. *Discrete Comput. Geom.*, 2007, vol. 38, no. 4, pp. 665–679. doi: 10.1007/s00454-007-9000-7
26. Bezdek A., Fodor F., Vigh V., Zarnocz T. On the multiplicity of arrangements of congruent zones on the sphere [e-resource]. 2023, 11 p. Available on: <https://arxiv.org/abs/1705.02172>.
27. Galiev Sh.I. Multiple packings and coverings of a sphere. *Discrete Math. Appl.*, 1996, vol. 6, no. 4, pp. 413–426. doi: 10.1515/dma.1996.6.4.413
28. Kazakov A., Lempert A., Lebedev P. Congruent circles packing and covering problems for multiconnected domains with non-euclidean metric, and their applications to logistics. In: (eds.) Yu.I. Shokin, H. Milosevic, D.V. Esipov. Proc. Int. Conf. Mathematical and Information Technologies (MIT-2016), *CEUR Workshop Proceedings*, 2017, vol. 1839, pp. 334–343. Available on: <https://ceur-ws.org/Vol-1839/MIT2016-p30.pdf>.
29. Kazakov A.L., Lebedev P.D. Algorithms for constructing optimal n -networks in metric spaces. *Autom. Remote Control*, 2017, vol. 78, no. 7, pp. 1290–1301. doi: 10.1134/S0005117917070104
30. Kazakov A.L., Lempert A.A., Bukharov D.S. On segmenting logistical zones for servicing continuously developed consumers. *Autom. Remote Control*, 2013, vol. 74, no. 6, pp. 968–977. doi: 10.1134/S0005117913060076
31. Feynman R.P., Leighton R.B., Sands M. *Feynman lectures on physics. Volume 3: quantum mechanics*. NY, Basic Books, 2011, 395 p. ISBN: 978-0465025015. Translated to Russian under the title *Feinmanovskie leksii po fizike. Tom 3: Izluhenie. Volny. Kvanty*, Moscow, Librokom, 2013, 242 p.
32. Fortune S. A sweepline algorithm for Voronoi diagrams. *Algorithmica*, 1987, no. 1–4, vol. 2, pp. 153–174. doi: 10.1007/BF01840357
33. Shkaberina G., Verenev L., Tovbis E., Rezova N., Kazakovtsev L. Clustering algorithm with a greedy agglomerative heuristic and special distance measures. *Algorithms*, 2022, vol. 15, no. 6, pp. 191. doi: 10.3390/a15060191
34. Lebedev P. *Program for calculating the optimal hemisphere coverage by a set of spherical segments*. Registered Rospatent Certificate No. 2015661543 dated 10.29.2015 (in Russian).
35. Arestov V.V., Babenko A.G. On Delsarte scheme of estimating the contact numbers. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1997, vol. 219, pp. 36–65.
36. Stepanov N.N. *Sfericheskaya trigonometriya* [Spherical trigonometry]. Leningrad, Moscow, Gos. Tekh. Izdat., 1948, 154 p.
37. Ushakov V.N., Lakhtin A.S., Lebedev P.D. Optimization of the Hausdorff distance between sets in Euclidean space. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 291, suppl. 1, pp. 222–238. doi: 10.1134/S0081543815090151

Received October 30, 2023

Revised December 29, 2023

Accepted January 9, 2024

Funding Agency: The first author was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the project “Theoretical foundations, methods, and high-performance algorithms for continuous and discrete optimization to support interdisciplinary scientific research” (state registration no. 121041300065-9).

Anna Ananievna Lempert, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033 Russia, e-mail: lempert@icc.ru .

Duc Minh Nguyen, doctoral student, Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, 664033 Russia, e-mail: nguyenducminh.mt@gmail.com .

Pavel Dmitrievich Lebedev, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: pleb@yandex.ru .

Cite this article as: A. A. Lempert, P. D. Lebedev, D. M. Nguyen. On the problem of covering spherical figures with equal spherical caps. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 1, pp. 142–155 .