ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 1 2024

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С $\mathbb{P}$-СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ ШМИДТА[1]

С. Йи, Ч. Сюй, С. Ф. Каморников

Подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-субнормальной, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G$$

такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ — простое число для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. В работе исследуется строение конечной группы G, все подгруппы Шмидта которой являются $\mathbb{P}$-субнормальными. Полученные результаты дополняют ответ на вопрос 18.30 из “*Коуровской тетради*”.

Ключевые слова: конечная группа, $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа, подгруппа Шмидта, насыщенная формация Фиттинга.

X. Yi, Zh. Xu, S. F. Kamornikov. Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal Schmidt subgroups.

A subgroup H of a group G is called $\mathbb{P}$-subnormal in G whenever either $H = G$ or there is a chain of subgroups

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G$$

such that $|H_i : H_{i-1}|$ is a prime for every $i = 1, 2, \ldots, n$. We study the structure of a finite group G all of whose Schmidt subgroups are $\mathbb{P}$-subnormal. The obtained results complement the answer to Problem 18.30 in the *Kourovka Notebook*.

Keywords: finite group, $\mathbb{P}$-subnormal subgroup, Schmidt subgroup, saturated Fitting formation.

MSC: 20D20, 20D35

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-1-100-108

Введение

В настоящем исследовании рассматриваются только конечные группы.

Подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-*субнормальной*, если она либо совпадает с группой G, либо соединяется с G цепью, все индексы которой являются простыми числами. Концепция $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппы предложена в статье [1] в связи с развитием известной теоремы Хупперта о том, что группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда любая ее собственная подгруппа может быть соединена с G цепью подгрупп с простыми индексами.

Группы с системой Σ заданных $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп исследовались во многих работах. В частности, в [2] описаны группы, у которых $\mathbb{P}$-субнормальной является любая силовская подгруппа. В [3] доказана сверхразрешимость группы в случаях, когда Σ — множество нормализаторов всех силовских подгрупп из G и Σ — множество всех холловых подгрупп группы G. В [4] рассматривались классы групп с $\mathbb{P}$-субнормальными примарными подгруппами и $\mathbb{P}$-субнормальными примарными циклическими подгруппами. Структура групп, представимых в виде произведения $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп, изучалась в работе [5].

Особое место в исследованиях групп с заданной системой $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп занимает случай, когда $\Sigma = Sch(G)$ — множество всех подгрупп Шмидта группы G. Напомним, что

[1]Исследования первого автора поддержаны Национальным фондом естественных наук Китая (грант № 12371021). Исследования третьего автора выполнены при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф23РНФ-237).

группой Шмидта называется ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Простая проверка показывает, что любая ненильпотентная группа содержит по крайней мере одну *подгруппу Шмидта* (т. е. подгруппу, являющуюся группой Шмидта). Исследования групп с заданной системой $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп инициированы проблемой 18.30 из "*Коуровской тетради*" [6], а именно:

Будет ли конечная группа разрешимой, если все ее подгруппы Шмидта $\mathbb{P}$-субнормальны?

С помощью классификации конечных простых групп положительный ответ на этот вопрос получен В. Н. Тютяновым в статье [7]. В связи с этим результатом естественна постановка более общей задачи:

Исследовать нормальное строение группы, все подгруппы Шмидта которой являются $\mathbb{P}$-субнормальными.

Частные аспекты такой задачи рассмотрены в работе [8], где установлена метанильпотентность группы с $\mathbb{P}$-субнормальными обобщенными подгруппами Шмидта. При этом под *обобщенной группой Шмидта* понимается любая *B-группа*, т. е. группа, у которой факторгруппа по подгруппе Фраттини есть группа Шмидта (концепция B-группы предложена Я. Г. Берковичем в [9]). Ясно, что любая группа Шмидта будет B-группой. В то же время диэдральная группа порядка 18 является B-группой и не является группой Шмидта. Из строения групп Шмидта следует, что G — B-группа тогда и только тогда, когда $G/\Phi(G)$ — бипримарная группа Миллера — Морено, т. е. ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы абелевы.

Как показывают результаты работы [10], группы с $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами Шмидта устроены намного сложнее, чем группы с $\mathbb{P}$-субнормальными B-подгруппами.

Пусть G — группа, $\pi(G) = \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$, и, кроме того, $p_1 > p_2 > \ldots > p_r$. Пусть P_i — силовская p_i-подгруппа группы G, $i = 1, 2, \ldots, r$. Будем говорить, что группа G имеет *силовскую башню сверхразрешимого типа* (или *G дисперсивна по Оре*), если подгруппы P_1, $P_1P_2, \ldots, P_1P_2...P_{r-1}$ нормальны в G. Далее через $\mathfrak{D}$ мы будем обозначать класс всех групп G, имеющих силовскую башню сверхразрешимого типа. Тогда для заданного простого числа p через $\mathfrak{D}_{\pi(p-1)}$ обозначается класс всех дисперсивных по Оре групп G таких, что $\pi(G) \subseteq \pi(p-1)$, где $\pi(p-1)$ — множество всех простых делителей числа $p-1$.

Наша главная цель — доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F} = \{H \mid Sch(H) \subseteq \mathfrak{U}\}$, где $\mathfrak{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *$\mathfrak{F}$ — локальная формация с каноническим локальным определением F таким, что $F(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{D}_{\pi(p-1)}$ для каждого простого числа p;*

(2) *если в группе G каждая подгруппа Шмидта $\mathbb{P}$-субнормальна, то $G/F(G) \in \mathfrak{F}$;*

(3) *если в группе G каждая подгруппа Шмидта $\mathbb{P}$-субнормальна и H — ее несверхразрешимая подгруппа Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой P, то $P \subseteq G^{\mathfrak{F}} \cap F(G)$.*

Очевидно, что в разрешимой группе любая субнормальная подгруппа является $\mathbb{P}$-субнормальной. Группы, у которых каждая подгруппа Шмидта субнормальна, описаны в [11].

1. Определения и предварительные результаты

В данной работе используются определения и обозначения, принятые в [12].

Зафиксируем следующие обозначения:

- $\mathfrak{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп;
- $\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп;
- если $\mathfrak{F}$ — непустой класс и π — множество простых чисел, то $\mathfrak{F}_\pi$ — класс всех π-групп из $\mathfrak{F}$;

– если $\mathfrak{F}$ — формация, то через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается пересечение всех тех нормальных подгрупп N группы G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$ (подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ называется $\mathfrak{F}$-*корадикалом* группы G);
– $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел;
– если n — натуральное число, то $\pi(n)$ — множество всех простых чисел, делящих n (в частности, $\pi(G) = \pi(|G|)$);
– $Sch(G)$ — множество всех подгрупп Шмидта группы G;
– если A и B – подгруппы группы G, то $[A]B$ — их полупрямое произведение с нормальной подгруппой A.

Основное строение групп Шмидта, описанное в следующей лемме, установлено в работах [13; 14].

Лемма 1. *Пусть S — группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\pi(S) = \{p, q\}$;
2) $S = [P]\langle a\rangle$, *где P — нормальная силовская p-подгруппа группы S, $\langle a\rangle$ — ее силовская q-подгруппа, $\langle a^q\rangle \subseteq Z(S)$*;
3) P — $\mathfrak{N}$-*корадикал группы* S;
4) $P/\Phi(P)$ — *минимальная нормальная подгруппа группы $S/\Phi(P)$ и, кроме того,* $\Phi(P) = P^{'} \subseteq Z(S)$;
5) $\Phi(S) = Z(S) = P^{'} \times \langle a^q\rangle$;
6) *если $Z(S) = 1$, то $|S| = p^m q$, где m — показатель p по модулю q.*

Следуя [15], $\{p, q\}$-группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и ненормальной циклической силовской q-подгруппой будем называть $S_{<p,q>}$-*группой.* Помимо этого, группу Шмидта $S = [P]\langle a\rangle$ с нормальной силовской p-подгруппой P, для которой $|P/\Phi(P)| = p^m$, где m — показатель p по модулю q, и ненормальной циклической силовской q-подгруппой $\langle a\rangle$ будем называть $S_{<p,q,m>}$-*группой.* Отметим, что $S_{<p,q,m>}$-группа S сверхразрешима тогда и только тогда, когда $m = 1$.

Подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-*субнормальной* в G, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$$

такая, что $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. Если H — $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G, то согласно [1] будем писать H $\mathbb{P}$-sn G.

В следующей лемме приведены основные свойства $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп.

Лемма 2. *Пусть H, K и N — подгруппы группы G, причем N нормальна в G. Тогда*

1) *если H $\mathbb{P}$-sn G, то $H \cap N$ $\mathbb{P}$-sn N и HN/N $\mathbb{P}$-sn G/N*;
2) *если $N \subseteq H$ и H/N $\mathbb{P}$-sn G/N, то H $\mathbb{P}$-sn G*;
3) *если H $\mathbb{P}$-sn K и K $\mathbb{P}$-sn G, то H $\mathbb{P}$-sn G*;
4) *если $G^{\mathfrak{U}} \subseteq H$, то H $\mathbb{P}$-sn G*;
5) *если H $\mathbb{P}$-sn G и $H \subseteq K$, то H $\mathbb{P}$-sn K*;
6) *если группа G разрешима и H $\mathbb{P}$-sn G, то подгруппа $H^{\mathfrak{U}}$ субнормальна в G*;
7) *если H является подгруппой Шмидта разрешимой группы G и H $\mathbb{P}$-sn G, то либо подгруппа H сверхразрешима, либо $H^{\mathfrak{U}} \subseteq F(G)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательства утверждений 1)–4) приведены в лемме 3.1 из [2], а утверждения 5) — в лемме 3.4 из [2].

Обоснуем п. 6). Если $H = G$, то утверждение очевидно. Поэтому $H \neq G$ и существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$$

такая, что $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. Поскольку группа G разрешима, то $H_i^{\mathfrak{U}} \subseteq H_{i-1}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ (см., например, лемму 3.3 из [2]). Так как формация $\mathfrak{U}$ является наследственной, то $H_{i-1}H_i^{\mathfrak{U}}/H_i^{\mathfrak{U}} \in \mathfrak{U}$. Отсюда и из

$$H_{i-1}H_i^{\mathfrak{U}}/H_i^{\mathfrak{U}} \cong H_{i-1}/H_{i-1} \cap H_i^{\mathfrak{U}}$$

вытекает, что $H_{i-1}^{\mathfrak{U}} \subseteq H_i^{\mathfrak{U}}$. Следовательно, $H_{i-1}^{\mathfrak{U}} \subseteq H_i^{\mathfrak{U}} \subseteq H_i$ и $H_{i-1}^{\mathfrak{U}} \trianglelefteq H_i^{\mathfrak{U}}$. Таким образом, подгруппа $H^{\mathfrak{U}}$ субнормальна в G.

Докажем п. 7). Пусть H — $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа Шмидта разрешимой группы G. Тогда ввиду утверждения 6) сверхразрешимый корадикал $H^{\mathfrak{U}}$ подгруппы H субнормален в G. По лемме 1 $\pi(H) = \{p, q\}$ и $H = [P]\langle a\rangle$, где P — нормальная силовская p-подгруппа группы H, а $\langle a\rangle$ — ее силовская q-подгруппа. Кроме того, P — $\mathfrak{N}$-корадикал группы H и $P/\Phi(P)$ — минимальная нормальная подгруппа группы $H/\Phi(P)$. Тогда либо $H^{\mathfrak{U}} = P$, либо $H^{\mathfrak{U}} \subseteq \Phi(P)$. Если $H^{\mathfrak{U}} = P$, то из утверждения 6) следует, что подгруппа P субнормальна в G. Но тогда, очевидно, $P = H^{\mathfrak{N}} \subseteq F(G)$. Пусть $H^{\mathfrak{U}} \subseteq \Phi(P)$. Так как подгруппа P нормальна в H, то $H^{\mathfrak{U}} \subseteq \Phi(H)$. Теперь из насыщенности формации $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп (см. пример IV.3.4.(f) в [12]) и $H/\Phi(H) \in \mathfrak{U}$ следует, что H — сверхразрешимая подгруппа.

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 1. Требование разрешимости группы G в утверждениях 6) и 7) леммы 2 существенно, и в общем случае его отбросить нельзя. Например, в группе $PSL_2(7)$ подгруппа $H \cong S_4$ $\mathbb{P}$-субнормальна, но ее $\mathfrak{U}$-корадикал, очевидно, не является субнормальной подгруппой. В знакопеременной группе A_5 подгруппа A_4 — это $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа Шмидта, но ее сверхразрешимый корадикал не содержится в подгруппе Фиттинга группы A_5.

Напомним, что *формация* — это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Формация $\mathfrak{F}$ называется

– *насыщенной*, если для любой группы G из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$;

– *наследственной*, если она замкнута относительно взятия подгрупп.

Класс $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если он удовлетворяет следующим требованиям:

1) $\mathfrak{F}$ — нормально наследственный класс;

2) из $G = AB$, где $A \trianglelefteq G$, $B \trianglelefteq G$, $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Формация Фиттинга — это формация, являющаяся классом Фиттинга.

Минимальным добавлением к нормальной подгруппе N группы G называется такая подгруппа L из G, что $LN = G$, но $L_1N \neq G$ для любой собственной подгруппы L_1 из L.

Лемма 3. *Если K и D — подгруппы группы G, подгруппа D нормальна в G и K/D — $S_{<p,q>}$-подгруппа, то минимальное добавление L к подгруппе D в K обладает следующими свойствами*:

1) *L — p-замкнутая $\{p, q\}$-подгруппа*;
2) *все собственные нормальные подгруппы из L нильпотентны*;
3) *подгруппа L содержит $S_{<p,q>}$-подгруппу $[P]Q$ такую, что Q не содержится в D и $L = ([P]Q)^L = Q^L$*;
4) *если $S_{<p,q>}$-подгруппа $[P]Q$ является $\mathbb{P}$-субнормальной в G, то справедливо одно из следующих утверждений*:
   i) *$K/D = ([P]Q)D/D$; в частности, подгруппа K/D $\mathbb{P}$-субнормальна в G/D*;
   ii) *подгруппа K/D сверхразрешима, имеет силовскую p-подгруппу порядка p, q делит $p-1$ и силовская q-подгруппа из K/D является $\mathbb{P}$-субнормальной в G/D*;

5) *K/D — $S_{<p,q,m>}$-группа тогда и только тогда, когда $[P]Q$ является $S_{<p,q,m>}$-группой.*

Доказательство. Утверждения 1)–3) доказаны в лемме 2 из [17].

Обоснуем п. 4). Предположим, что $S_{<p,q>}$-подгруппа $[P]Q$ $\mathbb{P}$-субнормальна в G. По лемме 11.1 из [16] $LD = K$ и $L \cap D \subseteq \Phi(L)$. Поскольку подгруппа Фраттини состоит из необразующих элементов, то, если $([P]Q)(L \cap D) = L$, имеем, что $[P]Q = L$. Тогда в силу утверждения 1) леммы 2

$$([P]Q)D/D = LD/D = K/D$$

есть $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G/D.

Пусть теперь $[P]Q$ — собственная подгруппа в L. Тогда из $L \cap D \subseteq \Phi(L)$ следует, что $([P]Q)(L \cap D)$ — собственная подгруппа в L. Если подгруппа $([P]Q)(L \cap D)$ содержится в некоторой субнормальной подгруппе группы L, то ввиду утверждения 2) она является нильпотентной, что невозможно, так как $([P]Q)(L \cap D)$ содержит подгруппу Шмидта $[P]Q$. Следовательно, $([P]Q)(L \cap D)$ не содержится ни в одной нормальной максимальной подгруппе группы L. Из

$$K/D = LD/D \cong L/L \cap D$$

выводим, что $L/L \cap D$ — группа Шмидта. Теперь согласно утверждению 2) леммы 1 имеем, что $Q(L \cap D)/(L \cap D)$ — силовская q-подгруппа группы $L/L \cap D$. $([P]Q)(L \cap D)/L \cap D$ — собственная подгруппа в $L/L \cap D$, поэтому по утверждению 5) леммы 1

$$([P]Q)(L \cap D)/L \cap D \subseteq \Phi(L/L \cap D)(Q(L \cap D)/L \cap D).$$

В силу утверждения 4) леммы 1 $\Phi(L/L \cap D)(Q(L \cap D)/L \cap D)$ — максимальная подгруппа группы $L/L \cap D$. Так как по условию подгруппа $[P]Q$ является $\mathbb{P}$-субнормальной в G, то с учетом леммы 2 подгруппа $\Phi(L/L \cap D)(Q(L \cap D)/L \cap D)$ $\mathbb{P}$-субнормальна в $L/L \cap D$. Значит, индекс максимальной подгруппы

$$\Phi(L/L \cap D)(Q(L \cap D)/L \cap D)$$

в группе $L/L \cap D$ равен простому числу p, а значит, группа $(L/L \cap D)/\Phi(L/L \cap D)$ является сверхразрешимой. Но тогда из насыщенности формации $\mathfrak{U}$ следует, что группа $L/L \cap D$ является сверхразрешимой. Отсюда и из изоморфизма $K/D \cong L/L \cap D$ следует, что K/D — сверхразрешимая группа. Теперь по лемме 1 из [18] группа K/D имеет силовскую p-подгруппу порядка p и q делит $p - 1$. Из $|K/D| = p \cdot q^n$ следует, что $([P]Q)(L \cap D)/L \cap D$ — силовская q-подгруппа группы $L/L \cap D$. В соответствии с леммой 2 отсюда заключаем, что силовская q-подгруппа из K/D является $\mathbb{P}$-субнормальной в G/D.

Докажем п. 5). Предположим, что K/D — $S_{<p,q,m>}$-группа. Тогда ввиду утверждения 6) леммы 1

$$|(K/D)/Z(K/D)| = p^m q,$$

где m — показатель p по модулю q. В силу утверждения 4) леммы 3 подгруппа $[P]Q$ есть $S_{<p,q,k>}$-группа для некоторого натурального $k \geq 1$, являющегося показателем p по модулю q. Отсюда и из определения показателя следует, что $m = k$. Рассуждая в обратном порядке, показываем, что если $[P]Q$ — $S_{\langle p,q,m\rangle}$-группа, то K/D также является $S_{<p,q,m>}$-группой.

Лемма доказана.

Напомним определение локальной формации. Функция

$$f : \mathbb{P} \to \{\text{формации конечных групп}\}$$

называется *формационной функцией.*

Для формационной функции f главный фактор A/B группы G называется *f-центральным* (*f-эксцентральным*), если

$$G/C_G(A/B) \cong \mathrm{Aut}_G(A/B) \in f(p)$$

для всех простых $p \in \pi(A/B)$ (соответственно, $G/C_G(A/B)$ не принадлежит $f(p)$ хотя бы для одного простого числа $p \in \pi(A/B)$). Класс групп $\mathfrak{F} = LF(f)$ называется *локальной формацией*, если он состоит из всех групп G таких, что либо $G = 1$, либо $G \neq 1$ и любой главный фактор A/B группы G является f-центральным. При этом говорят, что локальная формация $\mathfrak{F}$ *определяется с помощью формационной функции* f, а f — *локальное определение* формации $\mathfrak{F}$.

Пусть f — формационная функция и $\mathfrak{F} = LF(f)$. Тогда f называется

(a) *внутренней*, если $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \mathbb{P}$;

(в) *полной*, если $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для всех $p \in \mathbb{P}$;

(c) *канонической*, если она является полной и внутренней.

Как показано в теореме IV.3.7 из 12, для любой локальной формации $\mathfrak{F}$ существует единственная каноническая формационная функция F такая, что $\mathfrak{F} = LF(F)$. Эта функция называется *каноническим локальным определением* формации $\mathfrak{F}$.

Отметим, что на основании теоремы Гашюца — Любезедер — Шмида ([12], теорема IV.4.6) формация $\mathfrak{F}$ является насыщенной тогда и только тогда, когда она локальна. Отсюда, в частности, следует, что для любой насыщенной формации $\mathfrak{F}$ существует каноническое локальное определение F такое, что $\mathfrak{F} = LF(F)$.

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{F} = \{G | Sch(G) \subseteq \mathfrak{U}\}$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *$G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда группа G разрешима и для любой пары простых чисел $p, q \in \pi(G)$ холлова $\{p, q\}$-подгруппа либо нильпотентна, либо p-замкнута и q делит $p - 1$*;
2) *если $G \in \mathfrak{F}$, то группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа*;
3) *класс $\mathfrak{F}$ является наследственной насыщенной формацией Фиттинга*;
4) $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$;
5) *$\mathfrak{F}$ — локальная формация с каноническим локальным определением F таким, что $F(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{D}_{\pi(p-1)}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение 1) следует из леммы 5 и теоремы 1 [18], а утверждения 2)–5) — из леммы 2.3 работы [10].

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 2. Из предложения 2.6 работы [10] следует, что если группа G принадлежит классу $\mathfrak{F} = \{H | Sch(H) \in \mathfrak{U}\}$, то G может иметь любую нильпотентную длину, большую 1. В частности, существуют группы $G \in \mathfrak{F}$, которые не являются сверхразрешимыми. Пусть, например, M — неабелева группа порядка 21. Тогда существует точный и неприводимый M-модуль N над полем из 43 элементов (см., например, следствие B.11.8 [12]). Очевидно, группа $G = [N]M$ не сверхразрешима, но по лемме 4 она принадлежит классу $\{H | Sch(H) \in \mathfrak{U}\}$.

2. Доказательство теоремы 1

(1) В силу утверждения 5) леммы 4 локальная формация $\mathfrak{F} = \{G | Sch(G) \subseteq \mathfrak{U}\}$ обладает таким каноническим локальным определением F, что $F(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{D}_{\pi(p-1)}$.

(2) Пусть в группе G каждая подгруппа Шмидта является $\mathbb{P}$-субнормальной. Тогда в силу основного результата работы [7] группа G разрешима.

Пусть D — минимальное добавление к $F(G)$ в группе G. В этом случае, в частности, $DF(G) = G$ и $D \cap F(G) \subseteq \Phi(D)$. Пусть $K/D \cap F(G)$ — произвольная подгруппа Шмидта группы $D/D \cap F(G)$. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что $K/D \cap F(G)$ — $S_{<p,q>}$-подгруппа для некоторых простых чисел p и q. По утверждению 4) леммы 3 минимальное добавление L к подгруппе $D \cap F(G)$ в K содержит $S_{<p,q>}$-подгруппу $[P]Q$ такую, что Q не содержится в $D \cap F(G)$.

По условию подгруппа $[P]Q$ является $\mathbb{P}$-субнормальной в G. Тогда в силу утверждения 3) леммы 3 имеет место одно из следующих утверждений:

i) $K/D \cap F(G) = ([P]Q)(D \cap F(G))/D \cap F(G)$; в частности, подгруппа $K/D \cap F(G)$ $\mathbb{P}$-субнормальна в $D/D \cap F(G)$;

ii) подгруппа $K/D \cap F(G)$ сверхразрешима, имеет силовскую p-подгруппу порядка p, q делит $p-1$ и силовская q-подгруппа из $K/D \cap F(G)$ является $\mathbb{P}$-субнормальной в $D/D \cap F(G)$.

Рассмотрим случай i). Предположим, что группа $K/D \cap F(G)$ не сверхразрешима. Тогда из

$$K/D \cap F(G) = ([P]Q)(D \cap F(G))/D \cap F(G)$$

и леммы 1 следует, что подгруппа $[P]Q$ не является сверхразрешимой, а потому по утверждению 3) леммы 1 $P = ([P]Q)^{\mathfrak{N}} = ([P]Q)^{\mathfrak{U}}$. В силу утверждения 7) леммы 2 имеем $P \subseteq D \cap F(G)$. Но тогда $K/D \cap F(G)$ — q-группа, что невозможно.

Таким образом, все подгруппы Шмидта группы $D/D \cap F(G)$ являются сверхразрешимыми, т. е. $D/D \cap F(G) \in \mathfrak{F}$. Отсюда и из изоморфизма

$$G/F(G) = DF(G)/F(G) \cong D/D \cap F(G)$$

выводим, что $G/F(G) \in \mathfrak{F}$.

(3) Пусть H — несверхразрешимая $\{p, q\}$-подгруппа Шмидта группы G с нормальной силовской p-подгруппой P. Тогда H — $S_{<p,q,m>}$-группа для некоторого натурального $m > 1$. Предположим, что P не содержится в $F(G)$. Ввиду утверждения 3 леммы 1 P является $\mathfrak{N}$-корадикалом подгруппы H. Отсюда следует, что силовская q-подгруппа Q из H не содержится в $F(G)$. Теперь, применяя утверждение 5) леммы 1, получаем, что $HF(G)/F(G)$ — $S_{<p,q>}$-подгруппа группы $G/F(G)$. Так как $G/F(G) \in \mathfrak{F}$, то $HF(G)/F(G)$ — $S_{<p,q,1>}$-группа, что невозможно согласно утверждению 5) леммы 3. Значит, P содержится в $F(G)$. Из $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ следует также, что $H \subseteq G^{\mathfrak{F}}$.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F} = \{H | Sch(H) \in \mathfrak{U}\}$. Если $\Phi(G) = 1$ и каждая подгруппа Шмидта группы G является $\mathbb{P}$-субнормальной в G, то группа G представима в виде $G = [F(G)]M$, где $M \in \mathfrak{F}$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Васильев А.Ф., Васильева Т.И., Тютянов В.Н.** О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1270–1281.
2. **Васильев А.Ф., Васильева Т.И., Тютянов В.Н.** О произведениях $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп в конечных группах // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 1. С. 59–65.
3. **Kniahina V.N., Monakhov V.S.** On supersolvability of finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups // Int. J. Group Theory. 2013. Vol. 2, no. 4. P. 21–29. doi:10.22108/IJGT.2013.2835
4. **Монахов В.С.** Конечные группы с абнормальными и $\mathfrak{U}$-субнормальными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 447–462. doi: 10.17377/smzh.2016.57.217
5. **Ballester-Bolinches A., Li Y., Pedraza-Aguilera M.C., Su N.** On factorised finite groups // Mediterr. J. Math. 2020. Vol. 17. Art. no. 65. doi:10.1007/s00009-020-1500-1
6. The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory. 20th ed. / eds. V.D. Mazurov, E.I. Khukhro. Novosibirsk: Inst. Math. SO RAN Publ.: 2022. 269 p. URL : https://kourovka-notebook.org/.
7. **Тютянов В.Н.** Конечные группы с $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами Шмидта // Проблемы физики, математики и техники. 2015. № 1 (22). С. 88–91.
8. **Kniahina V.N., Monakhov V.S.** Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal Sylow subgroups // Ukr. Math. J. 2021. Vol. 72, no. 10. P. 1571–1578. doi: 10.37863/umzh.v72i10.2264
9. **Berkovich Y.G., Janko Z.** Groups of prime power order. Vol. 3. Berlin; NY: Walter de Gruyter, 2011. 668 p. doi: 10.1515/9783110254488

10. **Ballester-Bolinches A., Kamornikov S.F., Pérez-Calabuig V., Tyutyanov V.N.** Finite groups with hereditarily G-permutable Schmidt subgroups // Bull. Austral. Math. Soc. 2023. P. 1–7. doi: 10.1017/s0004972723000771
11. **Ведерников В.А.** Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Vol. 46, № 6. С. 669–687.
12. **Doerk K., Hawkes T.** Finite soluble groups. Berlin, NY, Walter de Gruyter, 1992, 891 p. doi: 10.1515/9783110870138
13. **Шмидт О.Ю.** Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Vol. 31, № 3–4. С. 366–372.
14. **Гольфанд Ю.А.** О группах, все подгруппы которых специальные // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, № 8. С. 1313–1315.
15. **Монахов В.С.** О подгруппах Шмидта конечных групп // Вопросы алгебры. 1998. Вып. 13. С. 153–171.
16. **Шеметков Л.А.** Формации конечных групп. М.: Наука, 1978, 271 с.
17. **Князина В.Н., Монахов В.С.** О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1316–1322.
18. **Монахов В.С.** О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта // Мат. заметки. 1995. Т. 58, № 5. С. 717–722.

Поступила 05.12.2023
После доработки 08.01.2024
Принята к публикации 15.01.2024

Йи Сяолан (Yi Xiaolan)
Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou, P. R. China
e-mail: yixiaolan2005@126.com

Сюй Чжуань (Xu Zhuyan)
Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou, P. R. China
e-mail: xuzhuyan2022@163.com

Каморников Сергей Федорович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь
e-mail: sfkamornikov@mail.ru

REFERENCES

1. Vasil'ev A.F., Vasil'eva T.I., Tyutyanov V.N. On the finite groups of supersoluble type. *Sib. Math. J.*, 2010, vol. 51, no. 6, pp. 1004–1012. doi:10.1007/s11202-010-0099-z
2. Vasil'ev A.F., Tyutyanov V.N., Vasil'eva T.I. On the products of $\mathbb{P}$-subnormal subgroups of finite groups. *Sib. Math. J.*, 2012, vol. 53, no. 1, pp. 47–54. doi:10.1134/S0037446612010041
3. Kniahina V.N., Monakhov V.S. On supersolvability of finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups. *Int. J. Group Theory*, 2013, vol. 2, no. 4, pp. 21–29. doi:10.22108/IJGT.2013.2835
4. Monakhov V.S. Finite groups with abnormal and $\mathfrak{U}$-subnormal subgroups. *Sib. Math. J.*, 2016, vol. 57, no. 2, pp. 352–363. doi:10.1134/S0037446616020178
5. Ballester-Bolinches A., Li Y., Pedraza-Aguilera M.C., Su N. On factorised finite groups. *Mediterr. J. Math.*, 2020, vol. 17, article 65. doi:10.1007/s00009-020-1500-1
6. *The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory, 20th ed.*, eds. V.D. Mazurov, E.I. Khukhro. Novosibirsk, Inst. Math. SO RAN Publ., 2022, 269 p. Available at: https://kourovka-notebook.org/ .
7. Tyutyanov V.N. Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal Schmidt subgroups. *Problemy Fiziki, Matematiki i Tekhniki*, 2015, no. 1, pp. 88–91 (in Russian).
8. Kniahina V.N., Monakhov V.S. Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal Sylow subgroups. *Ukr. Math. J.*, 2021, vol. 72, no. 10, pp. 1571–1578. doi: 10.37863/umzh.v72i10.2264
9. Berkovich Y.G., Janko Z. *Groups of prime power order. Volume 3.* Berlin, NY, Walter de Gruyter, 2011, 668 p. doi: 10.1515/9783110254488

10. Ballester-Bolinches A., Kamornikov S.F., Pérez-Calabuig V., Tyutyanov V.N. Finite groups with hereditarily G-permutable Schmidt subgroups. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 2023, pp. 1–7. doi: 10.1017/s0004972723000771
11. Vedernikov V.A. Finite groups with subnormal Schmidt subgroups. *Algebra and Logic*, 2007, vol. 46, no. 6, pp. 363–372. doi:10.1007/s10469-007-0036-9
12. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups.* Berlin, NY, Walter de Gruyter, 1992, 891 p. doi: 10.1515/9783110870138
13. Schmidt O.Yu. Groups whose all subgroups are special, *Mat. Sbornik*, 1924, vol. 31, no. 3–4, pp. 366–372 (in Russian).
14. Gol'fand Yu.A. On groups all of whose subgroups are special. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1948, vol. 60, no. 8, pp. 1313–1315.
15. Monakhov V.S. The Schmidt subgroups of finite groups. *Vopr. Algebry*, 1998, vol. 13, pp. 153–171 (in Russian).
16. Shemetkov L.A. *Formatsii konechnykh grupp* [Formations of finite groups]. Moskow, Nauka Publ., 1978, 271 p.
17. Knyagina V.N., Monakhov V.S. Finite groups with subnormal Schmidt subgroups. *Sib. Math. J.*, 2004, vol. 45, no. 6, pp. 1075–1079. doi: 10.1023/B:SIMJ.0000048922.59466.20
18. Monakhov V.S. Finite groups with a given set of Schmidt subgroups. *Math. Notes*, 1995, vol. 58, no. 5, pp. 1183–1186. doi: 10.1007/BF02305002

Received December 5, 2023
Revised January 8, 2024
Accepted January 15, 2024

Funding Agency: The research of the first author was supported by the National Natural Science Foundation of China (grant no. 12371021). The research of the third author was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project no. Ф23РНФ-237).

Xiaolan Yi, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou, P. R. China, e-mail: yixiaolan2005@126.com .

Zhuyan Xu, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou, P. R. China, e-mail: xuzhuyan2022@163.com .

Sergei Fedorovich Kamornikov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., F. Skorina Gomel State University, Gomel, 246028 Republic of Belarus, e-mail: sfkamornikov@mail.ru .

Cite this article as: X. Yi, Zh. Xu, S. F. Kamornikov. Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal Schmidt subgroups. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 1, pp. 100–108 .