ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 4 2023

УДК 517.98

ОДНОМЕРНОЕ (k,a)-ОБОБЩЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ[1]

В. И. Иванов

В работе изучается двупараметрическое (k,a)-обобщенное преобразование Фурье $\mathcal{F}_{k,a}$, $k,a>0$, на прямой. При $a\neq 2$ оно обладает деформационными свойствами и, в частности, для функции f из пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ $\mathcal{F}_{k,a}(f)$ может не быть бесконечно дифференцируемым или быстро убывающим на бесконечности. Доказано, что инвариантным множеством для обобщенного преобразования Фурье $\mathcal{F}_{k,a}$ и дифференциально-разностного оператора $|x|^{2-a}\Delta_k f(x)$, где Δ_k — лапласиан Данкля, является класс

$$\mathcal{S}_a(\mathbb{R})=\{f(x)=F_1(|x|^{a/2})+xF_2(|x|^{a/2})\colon F_1,F_2\in\mathcal{S}(\mathbb{R}),\ F_1,F_2-\text{четные}\}.$$

Для $a=1/r$, $r\in\mathbb{N}$, рассмотрены два оператора обобщенного сдвига τ^y и $T^y=(\tau^y+\tau^{-y})/2$. Для них предложены простые интегральные представления, позволившие доказать их L^p-ограниченность при $1\le p\le\infty$ и $\lambda=r(2k-1)>-1/2$. При $\lambda\ge 0$ оператор T^y положительный, и его L^p-норма равна 1. Определены две свертки, и для них доказана теорема Юнга. Для обобщенных средних, определенных с помощью сверток, установлено достаточное условие L^p-сходимости. Изучены обобщенные аналоги средних Гаусса — Вейерштрасса, Пуассона и Бохнера — Рисса.

Ключевые слова: (k,a)-обобщенное преобразование Фурье, оператор обобщенного сдвига, свертка, обобщенные средние.

V. I. Ivanov. One-dimensional (k,a)-generalized Fourier transform.

We study the two-parametric (k,a)-generalized Fourier transform $\mathcal{F}_{k,a}$, $k,a>0$, on the line. For $a\neq 2$ it has deformation properties and, in particular, for a function f from the Schwartz space $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}_{k,a}(f)$ may be not infinitely differentiable or rapidly decreasing at infinity. It is proved that the invariant set for the generalized Fourier transform $\mathcal{F}_{k,a}$ and differential-difference operator $|x|^{2-a}\Delta_k f(x)$, where Δ_k is the Dunkl Laplacian, is the class

$$\mathcal{S}_a(\mathbb{R})=\{f(x)=F_1(|x|^{a/2})+xF_2(|x|^{a/2})\colon F_1,F_2\in\mathcal{S}(\mathbb{R}),\ F_1,F_2-\text{are even}\}.$$

For $a=1/r$, $r\in\mathbb{N}$, we consider two generalized translation operators τ^y and $T^y=(\tau^y+\tau^{-y})/2$. Simple integral representations are proposed for them, which make it possible to prove their L^p-boundedness as $1\le p\le\infty$ for $\lambda=r(2k-1)>-1/2$. For $\lambda\ge 0$ the generalized translation operator T^y is positive and its norm is equal to one. Two convolutions are defined and Young's theorem is proved for them. For generalized means defined using convolutions, a sufficient L^p-convergence condition is established. The generalized analogues of the Gauss–Weierstrass, Poisson, and Bochner–Riesz means are studied.

Keywords: (k,a)-generalized Fourier transform, generalized translation operator, convolution, generalized means.

MSC: 42B10, 33C45, 33C52

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-4-92-108

80-летию профессора В.В. Арестова посвящается

1. Введение

Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ — пространство Шварца бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ и быстро убывающих на бесконечности функций, $J_\alpha(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка α, $j_\alpha(x)=2^\alpha\Gamma(\alpha+1)x^{-\alpha}J_\alpha(x)$ — нормированная функция Бесселя,

$$(\alpha)_0=1,\quad (\alpha)_n=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1),\quad n\ge 1,$$

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ, соглашение № 073-03-2023-303/2 от 14.02.23 г., тема научного исследования “Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике”.

— символ Похгаммера,

$$\mathcal{F}(f)(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixy}\,dx$$

— преобразование Фурье на прямой $\mathbb{R}$.

Преобразование Фурье является унитарным преобразованием на прямой с единичным весом. Совершенно естественно возникает вопрос о его унитарных обобщениях для случая прямой с весом. Для прямой со степенным весом $|x|^{2\lambda+1}$, $\lambda\ge -1/2$, таким обобщением стало преобразование Данкля (см. [1; 2])

$$\mathcal{F}_\lambda(f)(y)=\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e_\lambda(xy)\,d\nu_\lambda(x),$$

где ядро и мера на прямой вычисляются как

$$e_\lambda(xy)=j_\lambda(xy)-\frac{ixy}{2(\lambda+1)}j_{\lambda+1}(xy),\quad d\nu_\lambda(x)=\frac{|x|^{2\lambda+1}\,dx}{2^{\lambda+1}\Gamma(\lambda+1)}.$$

Преобразование Фурье получается при $\lambda=-1/2$. Для преобразования Данкля, как и для преобразования Фурье, пространство Шварца является инвариантным.

Пусть $a>0$, $k\ge 0$, $2k+a-1>0$, $\lambda=(2k-1)/a$, $v_{k,a}(x)=|x|^{2k+a-2}$ — степенной вес, $d\mu_{k,a}(x)=c_{k,a}v_{k,a}(x)dx$ — нормированная степенная мера на прямой, $c_{k,a}^{-1}=2a^\lambda\Gamma(\lambda+1)$, $L^p(\mathbb{R},d\mu_{k,a})$, $1\le p\le\infty$, — лебегово пространство измеримых комплекснозначных функций ($L^\infty(\mathbb{R},d\mu_{k,a})=L^\infty(\mathbb{R})$) с конечной нормой

$$\|f\|_{p,d\mu_{k,a}}=\Big(\int\limits_{\mathbb{R}}|f|^p\,d\mu_{k,a}\Big)^{1/p},\quad p<\infty,\quad \|f\|_\infty=\operatorname{vrai}\sup_{\mathbb{R}}|f(x)|,\quad p=\infty,$$

$C_b(\mathbb{R})$ — подмножество $L^\infty(\mathbb{R})$ непрерывных функций, $C_0(\mathbb{R})$ — подмножество $C_b(\mathbb{R})$ исчезающих на бесконечности функций, $C_K(\mathbb{R})$ — подмножество $C_0(\mathbb{R})$ функций с компактным носителем, $C^\infty(\mathbb{R})$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций.

Дальнейшее обобщение преобразований Фурье и Данкля получено в работе [3, гл. 5], в которой предложено двупараметрическое (k,a)-обобщенное унитарное преобразование Фурье

$$\mathcal{F}_{k,a}(f)(y)=\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)B_{k,a}(x,y)\,d\mu_{k,a}(x), \tag{1.1}$$

в котором ядро

$$B_{k,a}(x,y)=b_{k,a}(xy)=j_\lambda\Big(\frac{2}{a}\,|xy|^{a/2}\Big)+\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1+2/a)}\,\frac{xy}{(ai)^{2/a}}\,j_{\lambda+2/a}\Big(\frac{2}{a}\,|xy|^{a/2}\Big). \tag{1.2}$$

Преобразование Данкля получается при $a=2$.

В отличие от преобразования Данкля у (k,a)-обобщенного преобразования Фурье при $a\ne 2$ появляются деформационные свойства. Например, $\mathcal{F}_{k,a}(\mathcal{S}(\mathbb{R}))=\mathcal{S}(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $a=2$. Более точно, множество $\mathcal{F}_{k,a}(\mathcal{S}(\mathbb{R}))\subset C^\infty(\mathbb{R})$, если только a четное. Оно состоит из быстро убывающих на бесконечности функций, если только $a=2/n$, $n\in\mathbb{N}$. Если a — иррациональное, то для любой нетривиальной $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ $\mathcal{F}_{k,a}(f)\notin\mathcal{S}(\mathbb{R})$ [4].

С учетом важности в гармоническом анализе наличия у унитарного преобразования инвариантного класса функций, быстро убывающих на бесконечности, возникает вопрос о существовании такого класса у (k,a)-обобщенного преобразования Фурье. Мы даем положительный ответ на поставленный вопрос.

Пусть для $a>0$

$$\mathcal{S}_a(\mathbb{R})=\big\{f(x)=F_1(|x|^{a/2})+xF_2(|x|^{a/2})\colon F_1,F_2\in\mathcal{S}(\mathbb{R}),\quad F_1,F_2\ \text{ четные}\big\}, \tag{1.3}$$

$$\delta_{k,a}f(x) = |x|^{2-a}\Delta_k f(x), \tag{1.4}$$

где Δ_k— лапласиан Данкля [2, гл. 2, 2.2].

Мы показываем, что класс $\mathcal{S}_a(\mathbb{R})$ инвариантен для преобразования Фурье $\mathcal{F}_{k,a}$ и дифференциально-разностного оператора $\delta_{k,a}$. Равенство $\mathcal{S}_a(\mathbb{R}) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ справедливо только при $a = 2$. Класс $\mathcal{S}_a(\mathbb{R})$ впервые появился в [4], где показано, что при $a = 2/n$, $n \in \mathbb{N}$, справедливо вложение $\mathcal{F}_{k,a}(\mathcal{S}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{S}_a(\mathbb{R})$. Отметим также, что класс $\mathcal{S}_a(\mathbb{R})$ плотен в пространствах $L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ при $p < \infty$ и в пространстве $C_0(\mathbb{R})$.

Последовательность $a_n = 2/n$ разбивается на две последовательности $a_r = 2/(2r+1)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, и $a_r = 1/r$, $r \in \mathbb{N}$, которым соответствуют две последовательности обобщенных преобразований Фурье. Первой последовательности при $r = 0$ принадлежит преобразование Данкля. Остальные преобразования этой последовательности после некоторой замены переменной также становятся недеформированными унитарными преобразованиями с ядрами, являющимися целыми функциями экспоненциального типа (см. [4]). Замена переменной для второй последовательности может привести к недеформированным унитарным операторам с ядрами только конечной гладкости, т. е. эти две последовательности преобразований различаются. В работе изучается (k, a)-обобщенное преобразование Фурье, и основное внимание уделяется второму случаю $a = 1/r$, $r \in \mathbb{N}$. Случай $a = 1$ был известен до появления общего преобразования Фурье. Например, при $a = 1$ и $k = 0$ обобщенное преобразование Фурье является оператором унитарного обращения модели Шредингера минимального представления группы $O(N+1, 2)$ [5].

В разд. 2 устанавливаются некоторые свойства обобщенного преобразования Фурье и, в частности, доказывается инвариантность класса $\mathcal{S}_a(\mathbb{R})$. В последующих разделах $a = 1/r$. В разд. 3 изучаются два оператора обобщенного сдвига

$$\tau^y f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{k,a}(y,z)B_{k,a}(x,z)\mathcal{F}_{k,a}(f)(z)\,d\mu_{k,a}(z), \tag{1.5}$$

$$T^y f(x) = \frac{\tau^y f(x) + \tau^{-y} f(x)}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} j_\lambda\Big(\frac{2}{a}|yz|^{a/2}\Big)B_{k,a}(x,z)\mathcal{F}_{k,a}(f)(z)\,d\mu_{k,a}(z), \quad y \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Оператор τ^y определен в [6]. В [7] для него получено интегральное представление и доказана L^p-ограниченность при $1 \le p \le \infty$. В [8; 9] предложено другое интегральное представление. Оператор T^y ранее был известен для преобразования Данкля (см. [10, гл. 3]). В отличие от оператора τ^y он может быть положительным. Для операторов τ^y, T^y дается простая форма записи, из которой легко получается L^p-ограниченность в большей области параметров. Исследуются условия положительности оператора T^y. Операторы обобщенного сдвига являются важной составляющей гармонического анализа в пространствах с весом. Они необходимы для определения модулей гладкости функций, и с их помощью определяются важные интегральные операторы, в частности, потенциал и преобразование Рисса. В разд. 4 определяются две свертки и для них доказывается теорема Юнга. Как пример их применения в разд. 5 определяются обобщенные средние и исследуется их L^p-сходимость.

Мы будем писать $A \lesssim B$, если выполнено неравенство $A \le cB$ с константой $c > 0$, зависящей только от несущественных параметров. Для функции f на прямой f_e — ее четная, а f_o — нечетная часть.

2. Некоторые свойства обобщенного преобразования Фурье

Преобразование $\mathcal{F}_{k,a}$ (1.1) — унитарный оператор [3, гл. 5], и для $f, g \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ справедливо обобщенное равенство Планшереля

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_{k,a}(f)(y)\overline{\mathcal{F}_{k,a}(g)(y)}\,d\mu_{k,a}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,d\mu_{k,a}(x). \tag{2.1}$$

Напомним, что $\lambda = (2k-1)/a$. Из асимптотики функции Бесселя (см. гл. 7, 7.1 из [11])

$$|B_{k,a}(x, y)| \lesssim \frac{1}{(1+|xy|)^{\lambda+1/2}}.$$

Равномерная норма ядра (1.2) конечна, если только $\lambda \geq -1/2$:

$$M_{k,a} = \|B_{k,a}(x, y)\|_\infty = \|b_{k,a}(x)\|_\infty < \infty.$$

Теорема 1. *Если $a > 0$, $f \in \mathcal{S}_a(\mathbb{R})$, то $\mathcal{F}_{k,a}(f)$, $\delta_{k,a} f \in \mathcal{S}_a(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Пусть $a > 0$, $f(x) = F(|x|^{a/2})$, $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, F четная. Применяя (1.1), (1.2), делая замену переменной $x^{a/2} = au/2$ и учитывая, что $\mathcal{F}_{k,2}(\mathcal{S}(\mathbb{R})) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$, получим

$$\mathcal{F}_{k,a}(f)(y) = 2\int_0^\infty F(x^{a/2}) j_\lambda\Big(\frac{2}{a}\,|xy|^{a/2}\Big)\, d\mu_{k,a}(x) = 2c_{k,a}\Big(\frac{a}{2}\Big)^{2\lambda+1}\int_0^\infty F\Big(\frac{a}{2}u\Big) j_\lambda\big(|y|^{a/2}u\big) u^{2\lambda+1}\, du$$

$$= c_{k,a}\Big(\frac{a}{2}\Big)^{2\lambda+1}\int_{\mathbb{R}} F\Big(\frac{a}{2}u\Big) j_\lambda\big(|y|^{a/2}u\big)|u|^{2\lambda+1}\, du = \frac{c_{k,a}}{c_{k,2}}\Big(\frac{a}{2}\Big)^{2\lambda+1}\mathcal{F}_{k,2}\Big(F\Big(\frac{a}{2}\,\cdot\Big)\Big)\big(|y|^{a/2}\big) \in \mathcal{S}_a(\mathbb{R}).$$

Аналогично, если $f(x) = xF(|x|^{a/2})$, то, полагая $k_1 = k+1$, $\lambda_1 = \lambda + 2/a = (2k_1-1)/a$, получим

$$2y\int_0^\infty x^2 F(x^{a/2}) j_{\lambda+2/a}\Big(\frac{2}{a}\,|xy|^{a/2}\Big)\, d\mu_{k,a}(x) = 2c_{k,a}\Big(\frac{a}{2}\Big)^{2\lambda_1+1} y\int_0^\infty F\big(\frac{a}{2}u\big) j_{\lambda_1}\big(|y|^{a/2}u\big) u^{2\lambda_1+1}\, du$$

$$= c_{k,a}\Big(\frac{a}{2}\Big)^{2\lambda_1+1} y\int_{\mathbb{R}} F\Big(\frac{a}{2}u\Big) j_{\lambda_1}\big(|y|^{a/2}u\big)|u|^{2\lambda_1+1}\, du = \frac{c_{k,a}}{c_{k_1,2}}\Big(\frac{a}{2}\Big)^{2\lambda_1+1} y\mathcal{F}_{k_1,2}\Big(F\Big(\frac{a}{2}\,\cdot\Big)\Big)\big(|y|^{a/2}\big),$$

поэтому $\mathcal{F}_{k,a}(f) \in \mathcal{S}_a(\mathbb{R})$.

Пусть $f(x) = F_1\big(|x|^{a/2}\big) + xF_2\big(|x|^{a/2}\big)$, $F_1, F_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, F_1, F_2 четные. Имеем

$$f'(x) = \frac{a}{2}x|x|^{a-2}\Big[\frac{F_1'\big(|x|^{a/2}\big)}{|x|^{a/2}} + x\frac{F_2'\big(|x|^{a/2}\big)}{|x|^{a/2}}\Big] + F_2\big(|x|^{a/2}\big),$$

$$f''(x) = \frac{a}{2}|x|^{a-2}\Big\{\Big[\Big(\frac{a}{2}-1\Big)\frac{F_1'\big(|x|^{a/2}\big)}{|x|^{a/2}} + \frac{a}{2}F_1''\big(|x|^{a/2}\big)\Big] + x\Big[\Big(\frac{a}{2}+1\Big)\frac{F_2'(|x|^{a/2})}{|x|^{a/2}} + \frac{a}{2}F_2''\big(|x|^{a/2}\big)\Big]\Big\}.$$

Так как по теореме 2.13 из [2]

$$\Delta_k f(x) = f''(x) + \frac{2k}{x}f'(x) - \frac{k}{x^2}(f(x) - f(-x)) = f''(x) + \frac{2k}{x}\big(f'(x) - F_2\big(|x|^{a/2}\big)\big),$$

то

$$\delta_{k,a} f(x) = |x|^{2-a}\Delta_k f(x) = \frac{a}{4}\Big[(4k+a-2)\frac{F_1'\big(|x|^{a/2}\big)}{|x|^{a/2}} + aF_1''\big(|x|^{a/2}\big)$$

$$+ x\Big((4k+a+2)\frac{F_2'\big(|x|^{a/2}\big)}{|x|^{a/2}} + aF_2''\big(|x|^{a/2}\big)\Big)\Big] \in \mathcal{S}_a(\mathbb{R}).$$

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Если $\mathcal{S}_{a,e}(\mathbb{R}), \mathcal{S}_{a,o}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_a(\mathbb{R})$ — подмножества четных и нечетных функций, то $\mathcal{F}_{k,a}(\mathcal{S}_{a,e}(\mathbb{R})), \delta_{k,a}(\mathcal{S}_{a,e}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{S}_{a,e}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{F}_{k,a}(\mathcal{S}_{a,o}(\mathbb{R})), \delta_{k,a}(\mathcal{S}_{a,o}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{S}_{a,o}(\mathbb{R})$.

Пусть

$$\mathcal{A}_{k,a} = \{f \in C_b(\mathbb{R})\colon f,\, \mathcal{F}_{k,a}(f) \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})\}. \tag{2.2}$$

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Для* $a>0$ *справедливо вложение* $\mathcal{S}_a(\mathbb{R})\subset\mathcal{A}_{k,a}$.

В гл. 5 работы [3] многие свойства преобразования $\mathcal{F}_{k,a}$ устанавливаются на некотором подмножестве, плотном в $L^2(\mathbb{R},d\mu_{k,a})$. По теореме 1 в качестве такого подмножества можно взять класс $\mathcal{S}_a(\mathbb{R})$. Например, если $f\in\mathcal{S}_a(\mathbb{R})$, то для любого $n\in\mathbb{N}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}}(\delta_{k,a})^n f(x)B_{k,a}(x,y)\,d\mu_{k,a}(x)=(-1)^n|y|^{an}\int\limits_{\mathbb{R}}f(x)B_{k,a}(x,y)\,d\mu_{k,a}(x), \tag{2.3}$$

откуда

$$(\delta_{k,a})_x B_{k,a}(x,y)=-|y|^a B_{k,a}(x,y).$$

Если $f,g\in\mathcal{S}_a(\mathbb{R})$, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}}g(x)\delta_{k,a}f(x)\,d\mu_{k,a}(x)=\int\limits_{\mathbb{R}}f(x)\delta_{k,a}g(x)\,d\mu_{k,a}(x).$$

3. Операторы обобщенного сдвига

Пусть $\{P_n^{(\alpha)}(t)\}_{n=0}^{\infty}$ — многочлены Гегенбауэра, ортогональные на отрезке $[-1,1]$ с весом $(1-t^2)^\alpha$, $\alpha>-1$, и нормированные условием $P_n^{(\alpha)}(1)=1$,

$$d_{n,\alpha}=\max_{[-1,1]}|P_n^{(\alpha)}(t)|. \tag{3.1}$$

При $\alpha\ge -1/2\quad d_{n,\alpha}=1$ (см., например, [4]). С многочленами Гегенбауэра $C_n^\lambda(t)$, ортогональными с весом $(1-t^2)^{\lambda-1/2}$ (см. гл. 10, 10.9 в [12]), $\lambda>-1/2$, многочлены $P_n^{(\alpha)}(t)$ связаны соотношениями

$$C_n^\lambda(t)=\frac{\Gamma(2\lambda+n)}{n!\,\Gamma(2\lambda)}\,P_n^{(\lambda-1/2)}(t)\quad\text{при}\,\lambda\neq 0,\quad \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\,C_n^\lambda(t)=\frac{2}{n}P_n^{(-1/2)}(t). \tag{3.2}$$

Для удобства далее будем использовать обозначение $\lambda_0=\lambda-1/2$.

Пусть $\lambda>-1/2$, $dm_\lambda(t)=c_\lambda(1-t^2)^{\lambda_0}\,dt$ — вероятностная мера на отрезке $[-1,1]$,

$$c_\lambda^{-1}=\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^{\lambda_0}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda+1/2)}{\Gamma(\lambda+1)}. \tag{3.3}$$

Пусть $a=1/r$, $r\in\mathbb{N}$, $k>0$, $\lambda=r(2k-1)>-1/2$. Ядро обобщенного оператора Фурье (1.1) может быть записано в виде

$$B_{k,a}(x,y)=b_{k,a}(xy)=j_\lambda(2r|xy|^{1/(2r)})+\frac{(-1)^r r^{2r}}{(\lambda+1)_{2r}}xyj_{\lambda+2r}(2r|xy|^{1/(2r)}).$$

Приведем некоторые его свойства. Известно [4], что

$$B_{k,a}(x,y)=\int\limits_{-1}^{1}\big(1+\operatorname{sign}(xy)P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)\big)\,e^{-2ri|xy|^{1/(2r)}t}\,dm_\lambda(t). \tag{3.4}$$

Из (3.1) и (3.4) вытекают оценки

$$M_{k,a}\le 1+d_{2r,\lambda_0},\quad -1/2<\lambda<0,\quad M_{k,a}=1,\quad \lambda\ge 0. \tag{3.5}$$

Обратное преобразование имеет вид $(\mathcal{F}_{k,a})^{-1}=\mathcal{F}_{k,a}$ (см. теорему 5.3 в [3]). Равенство

$$f(x)=\int\limits_{\mathbb{R}}\mathcal{F}_{k,a}(f)(y)B_{k,a}(x,y)\,d\mu_{k,a}(y)$$

справедливо не только в $L^2(\mathbb{R},d\mu_{k,a})$, но и поточечно, если $f\in\mathcal{A}_{k,a}$ (2.2).

Пусть $n\in\mathbb{N}$, $x,y\in\mathbb{R}$, $|t|\le 1$,

$$A_n=A_n(x,y,t)=\sqrt{|x|^{2/n}+|y|^{2/n}-2|xy|^{1/n}\,t},\quad B_n(x,y,t)=\frac{|x|^{1/n}-|y|^{1/n}t}{A_n(x,y,t)}. \tag{3.6}$$

Функции $A_n(x,y,t)$, $B_n(x,y,t)$ четные по x и y и

$$1-B_n^2(x,y,t)=\frac{(1-t^2)|y|^{2/n}}{A_n^2(x,y,t)}\ge 0,\quad |B_n(x,y,t)|\le 1. \tag{3.7}$$

Первое интегральное представление оператора обобщенного сдвига τ^y (1.5) получено в [7]. Удобное для нас представление получено в [8;9]. Заменяя в нем многочлены Гегенбауэра $C_{2r}^{\lambda}(t)$ на многочлены $P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)$ по формуле (3.2), придем к более простому и компактному виду

$$\begin{aligned}\tau^y f(x)=&\int\limits_{-1}^{1}\Big[(f(A_{2r}^{2r}))_e\big(1+\operatorname{sign}(xy)\,P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)\big)\\&+((f(A_{2r}^{2r}))_0\big(\operatorname{sign}x\,P_{2r}^{(\lambda_0)}(B_{2r}(x,y,t))+\operatorname{sign}y\,P_{2r}^{(\lambda_0)}(B_{2r}(y,x,t))\big)\Big]\,dm_\lambda(t)\\=&\frac12\int\limits_{-1}^{1}\Big[f(A_{2r}^{2r})\big(1+\operatorname{sign}(xy)\,P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)+\operatorname{sign}x\,P_{2r}^{(\lambda_0)}(B_{2r}(x,y,t))+\operatorname{sign}y\,P_{2r}^{(\lambda_0)}(B_{2r}(y,x,t))\big)\\&+f(-A_{2r}^{2r})\big(1+\operatorname{sign}(xy)\,P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)-\operatorname{sign}x\,P_{2r}^{(\lambda_0)}(B_{2r}(x,y,t))\\&-\operatorname{sign}y\,P_{2r}^{(\lambda_0)}(B_{2r}(y,x,t))\big)\Big]\,dm_\lambda(t).\end{aligned} \tag{3.8}$$

На четных функциях

$$\tau^y f(x)=\int\limits_{-1}^{1}f\big(A_{2r}^{2r}\big)\big(1+\operatorname{sign}(xy)\,P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)\big)\,dm_\lambda(t). \tag{3.9}$$

Интегральное представление оператора обобщенного сдвига T^y получаем из (1.6) и (3.8)

$$\begin{aligned}T^y f(x)=\frac12\int\limits_{-1}^{1}&\Big[f(A_{2r}^{2r})\big(1+\operatorname{sign}x\,P_{2r}^{(\lambda_0)}(B_{2r}(x,y,t))\big)\\&+f(-A_{2r}^{2r})\big(1-\operatorname{sign}x\,P_{2r}^{(\lambda_0)}(B_{2r}(x,y,t))\big)\Big]\,dm_\lambda(t).\end{aligned} \tag{3.10}$$

Из (3.9) и (3.10) вытекает, что оператор τ^y на четных функциях и оператор T^y при $\lambda\ge 0$ положительные и $T^{-y}=T^y$ при $\lambda>-1/2$.

Пусть функция $g\colon[-1,1]\to[-1,1]$ измеримая по Борелю, функция $\psi(x,y)\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to[-1,1]$ нечетная по x, функция $\varphi(t,x,y)\colon[-1,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to[-1,1]$ четная по x и y, функции ψ,φ измеримые по Лебегу и линейные операторы $T_g^y,\widetilde{T}_g^y,T_0^y$ определены равенствами

$$T_g^y f(x)=\frac12\int\limits_{-1}^{1}\Big[f(A_n^n)\big(1+\psi(x,y)g(\varphi(t,x,y))\big)+f(-A_n^n)\big(1-\psi(x,y)g(\varphi(t,x,y))\big)\Big]\,dm_\lambda(t), \tag{3.11}$$

$$\widetilde{T}_g^y f(x)=\int\limits_{-1}^{1} f(A_n^n)\bigl(1+\psi(x,y)g(\varphi(t,x,y))\bigr)\,dm_\lambda(t),\quad T_0^y f(x)=\int\limits_{-1}^{1} f(A_n^n)\,dm_\lambda(t).\tag{3.12}$$

Лемма 1. *Если $n\in\mathbb{N}$, $y\in\mathbb{R}_+$, $\lambda=n(2k-1)/2$ и $f\in L^1(\mathbb{R}_+,d\mu_{k,a})$, то*

$$\int\limits_0^\infty |T_0^y f(x)|x^{2k+2/n-2}\,dx\le\int\limits_0^\infty |f(x)|x^{2k+2/n-2}\,dx.$$

Доказательство. Так как $|T_0^y f(x)|\le T_0^y|f|(x)$, то можно считать $f(x)\ge 0$. Имеем

$$\int\limits_0^\infty T_0^y f(x)x^{2k+2/n-2}\,dx=c_\lambda\int\limits_0^\infty\int\limits_{-1}^{1} f\bigl(\bigl(x^{2/n}+y^{2/n}-2(xy)^{1/n}t\bigr)^{n/2}\bigr)(1-t^2)^{\lambda-1/2}x^{2k+2/n-2}\,dt\,dx.$$

Делая замену переменной $A_n(x,y,t)=z^{1/n}$ (3.6), получим

$$\int\limits_0^\infty T_0^y f(x)x^{2k+2/n-2}\,dx=\frac{1}{n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty f(z)K^\lambda\bigl(x^{\frac1n},y^{\frac1n},z^{\frac1n}\bigr)z^{2k+2/n-2}\,dz\,x^{2k+2/n-2}\,dx,$$

где

$$K^\lambda(u,v,w)=c_\lambda\frac{(((u+v)^2-w^2)(w^2-(u-v)^2))^{\lambda-1/2}}{2^{2\lambda-1}(uvw)^{2\lambda}}$$

и носитель функции $K^\lambda(u,v,w)$ как функции w лежит на отрезке $[|u-v|,u+v]$. Так как $K^\lambda(u,v,w)=K^\lambda(w,v,u)$, то

$$\int\limits_0^\infty T_0^y f(x)x^{2k+2/n-2}\,dx=\frac{1}{n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty f(z)K^\lambda\bigl(x^{\frac1n},y^{\frac1n},z^{\frac1n}\bigr)z^{2k+2/n-2}\,dz\,x^{2k+2/n-2}\,dx$$

$$=\frac{1}{n}\int\limits_0^\infty K^\lambda\bigl(z^{\frac1n},y^{\frac1n},x^{\frac1n}\bigr)x^{2k+2/n-2}\,dx\int\limits_0^\infty f(z)z^{2k+2/n-2}\,dz.$$

Заменяя $z=u^n$, $y=v^n$, $x=w^n$, получим

$$\frac{1}{n}\int\limits_0^\infty K^\lambda\bigl(z^{\frac1n},y^{\frac1n},x^{\frac1n}\bigr)x^{2k+2/n-2}\,dx=\int\limits_0^\infty K^\lambda(u,v,w)w^{2\lambda+1}\,dw=1$$

(см., например, [7]). Следовательно,

$$\int\limits_0^\infty T_0^y f(x)x^{2k+2/n-2}\,dx=\int\limits_0^\infty f(z)z^{2k+2/n-2}\,dz.$$

Лемма 1 доказана.

Для $n=1$ лемма 1 хорошо известна (см., например, [13]).

Лемма 2. *Для всех $n\in\mathbb{N}$ и $y\in\mathbb{R}$ операторы $T_g^y f(x)$, $\widetilde{T}_g^y f(x)$ положительные. Если $f\in L^p(\mathbb{R},d\mu_{k,a})$, $1\le p\le\infty$, то*

$$\|T_g^y f\|_{p,d\mu_{k,a}}\le\|f\|_{p,d\mu_{k,a}};\tag{3.13}$$

если дополнительно для всех x,y, $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(\varphi(t,x,y))\,dm_\lambda(t)=0$, то

$$\|\widetilde{T}_g^y f\|_{p,d\mu_{k,a}}\le\|f\|_{p,d\mu_{k,a}}.\tag{3.14}$$

Если функция $\psi(x,y)$ четная по y, то и операторы T_g^y, $\widetilde{T}_g^y$ четные по y.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $f(x)\ge 0$, то $T_g^y f(x)\ge 0$, $\widetilde{T}_g^y f(x)\ge 0$. Если $p=\infty$, то согласно (3.3)

$$\|T_g^y f\|_\infty \le \frac{1}{2}\sup_x \int\limits_{-1}^{1}\Big[\big(1+\psi(x,y)g(\varphi(t,x,y))\big)+\big(1-\psi(x,y)g(\varphi(t,x,y))\big)\Big]\,dm_\lambda(t)\|f\|_\infty=\|f\|_\infty.$$

Аналогичное неравенство справедливо и для оператора $\widetilde{T}_g^y f$ при дополнительном условии, что среднее значение функции $g(\varphi(t,x,y))$ по t и мере dm_λ равно нулю.

Если $p=1$, то делая замену $x\to -x$ и учитывая свойства функций A_n^n, ψ, φ, получим

$$2\int\limits_{-\infty}^{\infty}|T_g^y f(x)|\,d\mu_{k,a}(x)$$

$$\le \int\limits_0^\infty\int\limits_{-1}^{1}\Big[|f(A_n^n)|\big(1+\psi(x,y)g(\varphi(t,x,y))\big)+|f(-A_n^n)|\big(1-\psi(x,y)g(\varphi(t,x,y))\big)\Big]\,dm_\lambda(t)d\mu_{k,a}(x)$$

$$+\int\limits_0^\infty\int\limits_{-1}^{1}\Big[|f(A_n^n)|\big(1-\psi(x,y)g(\varphi(t,x,y))\big)+|f(-A_n^n)|\big(1+\psi(x,y)g(\varphi(t,x,y))\big)\Big]\,dm_\lambda(t)d\mu_{k,a}(x)$$

$$=2\int\limits_0^\infty\int\limits_{-1}^{1}\big(|f(A_n^n)|+|f(-A_n^n)|\big)\,dm_\lambda(t)d\mu_{k,a}(x).$$

Применяя лемму 1, получим

$$\|T_g^y f\|_{1,d\mu_{k,a}}\le \int\limits_0^\infty |f(x)|\,d\mu_{k,a}(x)+\int\limits_0^\infty|f(-x)|\,d\mu_{k,a}(x)=\|f\|_{1,d\mu_{k,a}}.$$

Аналогичное неравенство справедливо и для оператора $\widetilde{T}_g^y f$. По интерполяционной теореме Рисса — Торина неравенства (3.13), (3.14) выполнены для всех $1\le p\le\infty$.

Если $\psi(x,y)$ четная относительно y, то при замене $y\to -y$ интегралы (3.11), (3.12) не изменятся, поэтому $T_g^{-y}=T_g^y$, $\widetilde{T}_g^{-y}=\widetilde{T}_g^y$.

Лемма 2 доказана.

Пусть

$$M_{\lambda,r}^\tau=\begin{cases}1+3d_{2r,\lambda_0}, & -1/2<\lambda<0,\\ 4, & \lambda\ge 0,\end{cases}$$

$$M_{\lambda,r}^T=\begin{cases}1+d_{2r,\lambda_0}, & -1/2<\lambda<0,\\ 1, & \lambda\ge 0.\end{cases}$$

Для линейных операторов (3.8), (3.10) справедливы оценки

$$|\tau^y f(x)|\le\frac{1}{2}\big(1+3d_{2r,\lambda_0}\big)\int\limits_{-1}^{1}\big(|f(A_{2r}^{2r})|+|f(-A_{2r}^{2r})|\big)\,dm_\lambda(t),\quad -1/2<\lambda<0,$$

$$|\tau^y f(x)|\le 2\int\limits_{-1}^{1}\big(|f(A_{2r}^{2r})|+|f(-A_{2r}^{2r})|\big)\,dm_\lambda(t),\quad \lambda\ge 0,$$

$$|T^y f(x)| \le \frac{1}{2}\big(1+d_{2r,\lambda_0}\big)\int\limits_{-1}^{1}\big(|f(A_{2r}^{2r})|+|f(-A_{2r}^{2r})|\big)\,dm_\lambda(t),\quad -1/2<\lambda<0,$$

$$|T^y f(x)| \le \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\Big[|f(A_{2r}^{2r})|\big(1+\mathrm{sign}x\,P_{2r}^{(\lambda_0)}(B_{2r}(x,y,t))\big)$$

$$+\,|f(-A_{2r}^{2r})|\big(1-\mathrm{sign}x\,P_{2r}^{(\lambda_0)}(B_{2r}(x,y,t))\big)\Big]\,dm_\lambda(t),\quad \lambda\ge 0.$$

На подпространстве четных функций

$$|\tau^y f(x)| \le \big(1+d_{2r,\lambda_0}\big)\int\limits_{-1}^{1}|f(A_{2r}^{2r})|\,dm_\lambda(t),\quad -1/2<\lambda<0,$$

$$|\tau^y f(x)| \le \int\limits_{-1}^{1}|f(A_{2r}^{2r})|\big(1+\mathrm{sign}(xy)\,P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)\big)\,dm_\lambda(t),\quad \lambda\ge 0.$$

Применяя лемму 2 для $g(t)=0$, $P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)$, $\psi(x,y)=\mathrm{sign}x$, $\mathrm{sign}(xy)$, $\varphi(t,x,y)=t$, $B_{2r}(x,y,t)$ и учитывая (3.6) и (3.7), приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Для всех $1\le p\le\infty$, $y\in\mathbb{R}$, $r\in\mathbb{N}$, $\lambda>-1/2$ линейные операторы* (3.8) *и* (3.10) *ограничены в пространствах $L^p(\mathbb{R},d\mu_{k,a})$, и для их норм справедливы оценки*

$$\|\tau^y\|_{p\to p}\le M_{\lambda,r}^{\tau},\quad \|T^y\|_{p\to p}\le M_{\lambda,r}^{T}. \tag{3.15}$$

На подпространстве четных функций

$$\|\tau^y\|_{p\to p}\le M_{\lambda,r}^{T}.$$

Неравенство (3.15) для оператора τ^y при $\lambda\ge 0$ доказано в [7].

Теорема 3. *Для всех $1\le p\le\infty$, $x\in\mathbb{R}$, $r\in\mathbb{N}$, $\lambda>-1/2$, справедливы оценки*

$$\Big(\int\limits_{\mathbb{R}}|T^y f(x)|^p\,d\mu_{k,a}(y)\Big)^{1/p}\le\big(1+d_{2r,\lambda_0}\big)\big\|f\big\|_{p,d\mu_{k,a}},\quad -1/2<\lambda<0, \tag{3.16}$$

$$\Big(\int\limits_{\mathbb{R}}|T^y f(x)|^p\,d\mu_{k,a}(y)\Big)^{1/p}\le\big\|f\big\|_{p,d\mu_{k,a}},\quad \lambda\ge 0. \tag{3.17}$$

Доказательство. Для $u\in\mathbb{R}$ рассмотрим линейный оператор $B^x f(y)=T^y f(x)$. Неравенство (3.16) вытекает из оценки

$$|B^x f(y)| \le \frac{1}{2}\big(1+d_{2r,\lambda_0}\big)\int\limits_{-1}^{1}\big(|f(A_{2r}^{2r})|+|f(-A_{2r}^{2r})|\big)\,dm_\lambda(t),\quad -1/2<\lambda<0,$$

и лемм 1, 2.

Пусть $\lambda\ge 0$. Применяем интерполяционную теорему Рисса — Торина. Как и в лемме 2, $\|B^x f\|_\infty\le\|f\|_\infty$, поэтому достаточно доказать (3.17) для $p=1$. Так как $T^y=T^{-y}$, то по (12.13) из [14]

$$\|B^x f\|_{1,d\mu_{k,a}}=\sup\Big\{\int\limits_{\mathbb{R}}T^y f(x)\overline{g(y)}\,d\mu_{k,a}(y)\colon \|g\|_\infty\le 1,\ g\in C_K(\mathbb{R}),\ g\ \text{четная}\Big\}.$$

Применяя обобщенное равенство Планшереля (2.1) и (1.5), (1.6), получим

$$\int_{\mathbb{R}} T^y f(x)\overline{g(y)}\,d\mu_{k,a}(y)=\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_{k,a}(f)(z)\overline{B_{k,a}(x,z)\mathcal{F}_{k,a}(g)(z)}\,d\mu_{k,a}(z)=\int_{\mathbb{R}} f(y)\overline{\tau^x g(y)}\,d\nu_\lambda(y),$$

поэтому

$$\|B^x f\|_{1,d\mu_{k,a}}\le \|f\|_{1,d\mu_{k,a}}\sup\bigl\{\|\tau^x g\|_\infty\colon \|g\|_\infty\le 1,\ g\in C_K(\mathbb{R}),\ g\text{ четная}\bigr\}.$$

Если $\|g\|_\infty\le 1$ и g четная, то согласно теореме 2

$$\|\tau^x g\|_\infty\le 1,\quad \|B^x f\|_{1,d\mu_{k,a}}\le 1.$$

Теорема 3 доказана.

Соберем вместе некоторые свойства операторов обобщенного сдвига.

Теорема 4. *Для операторов обобщенного сдвига τ^y, T^y справедливы следующие свойства*:

1. *Если* $\lambda\ge 0,\ f(x)\ge 0,$ *то* $T^t f(x)\ge 0.$ (3.18)
2. $\tau^0 f(x)=T^0 f(x)=f(x),\quad \tau^y f(x)=\tau^x f(y).$ (3.19)
3. $\tau^t 1=T^t 1=1.$ (3.20)
4. $\tau^y B_{k,a}(x,z)=B_{k,a}(y,z)B_{k,a}(x,z),\quad T^y B_{k,a}(x,z)=(B_{k,a}(y,z))_e B_{k,a}(x,z),$
   $\mathcal{F}_{k,a}(\tau^y f)(z)=B_{k,a}(y,z)\mathcal{F}_{k,a}(f)(z),\quad \mathcal{F}_{k,a}(T^y f)(z)=(B_{k,a}(y,z))_e\mathcal{F}_{k,a}(f)(z).$ (3.21)
5. *Если* $f,g\in L^2(\mathbb{R},d\mu_{k,a})$, *то*
$$\int_{\mathbb{R}}\tau^y f(x)g(x)\,d\mu_{k,a}(x)=\int_{\mathbb{R}} f(x)\tau^y g(x)\,d\mu_{k,a},\tag{3.22}$$
$$\int_{\mathbb{R}}T^y f(x)g(x)\,d\mu_{k,a}(x)=\int_{\mathbb{R}} f(x)T^y g(x)\,d\mu_{k,a}(x).\tag{3.23}$$
6. *Если* $f\in L^1(\mathbb{R},d\mu_{k,a})$, *то*
$$\int_{\mathbb{R}}\tau^t f(x)\,d\mu_{k,a}(x)=\int_{\mathbb{R}} f(x)\,d\mu_{k,a}(x),\tag{3.24}$$
$$\int_{\mathbb{R}}T^t f(x)\,d\mu_{k,a}(x)=\int_{\mathbb{R}} f(x)\,d\mu_{k,a}(x).\tag{3.25}$$
7. *Пусть* $\delta>0$, $\operatorname{supp} f\subset[-\delta,\delta]$. *Если* $|y|\le\delta$ *и* $\delta_1=\bigl(|y|^{1/(2r)}+\delta^{1/(2r)}\bigr)^{2r}$, *то* $\operatorname{supp}\tau^y f,\ \operatorname{supp}T^y f\subset[-\delta_1,\delta_1]$. *Если* $|y|>\delta$ *и* $\delta_2=\bigl(|y|^{1/(2r)}-\delta^{1/(2r)}\bigr)^{2r}$, *то* $\operatorname{supp}\tau^y f,\ \operatorname{supp}T^y f\subset[-\delta_1,-\delta_2]\cup[\delta_2,\delta_1]$. (3.26)
8. *Если* $f\in\mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$, *то для всех* y $\tau^y f,\ T^y f\in\mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$. (3.27)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Свойства (3.18)–(3.21) получаются из (1.2), (1.5), (1.6), (3.3), (3.8), (3.10). Свойства (3.22), (3.23) вытекают из обобщенного равенства Планшереля (2.1).

Если $\chi_R(x)$ — характеристическая функция отрезка $[-R,R]$, то $\lim\limits_{R\to\infty}\chi_R(x)=1$ для всех x, поэтому по теореме Лебега об ограниченной сходимости и согласно (3.10) $\lim\limits_{R\to\infty}T^y\chi_R(x)=1$ для всех x и y. Для любой $f\in L^1(\mathbb{R},d\mu_{k,a})\cap L^2(\mathbb{R},d\mu_{k,a})$ по теореме Лебега об ограниченной сходимости при $R\to\infty$

$$\int_{\mathbb{R}}T^y f(x)\chi_R(x)\,d\mu_{k,a}(x)\to\int_{\mathbb{R}}T^y f(x)\,d\mu_{k,a}(x),$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)T^y\chi_R(x)\,d\mu_{k,a}(x) \to \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\,d\mu_{k,a}(x).$$

Но для таких f по свойству (3.23)

$$\int\limits_{\mathbb{R}} T^y f(x)\chi_R(x)\,d\mu_{k,a}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)T^y\chi_R(x)\,d\mu_{k,a}(x)$$

и для них свойство (3.25) выполнено. Так как множество $L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a}) \cap L^2(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ плотно в $L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, то в силу непрерывности оператора T^y в $L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ свойство (3.25) выполнено для всех $f \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$. Свойство (3.24) для оператора τ^y доказывается аналогично.

Свойство (3.26) вытекает из неравенства $A_{2r}^{2r}(x,y,t) \geq \big||x|^{1/(2r)} - |y|^{1/(2r)}\big|^{2r}$ в (3.8), (3.10).

Пусть $f \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$. По теореме 1 $\mathcal{F}_{k,a}(f) \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$. Так как $z^2 = (|z|^{1/(2r)})^{4r}$, то

$$z^2\mathcal{F}_{k,a}(f)(z) \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R}) \ \text{ и } \ B_{k,a}(y,z)\mathcal{F}_{k,a}(f)(z) \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R}).$$

Следовательно, для всех y

$$\tau^y f(x) = \mathcal{F}_{k,a}(B_{k,a}(y,\cdot)\mathcal{F}_{k,a}(f)(\cdot))(x) \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R}).$$

Свойство (3.27) для оператора T^y доказывается аналогично.

Теорема 4 доказана.

4. Свертки

С помощью операторов τ^y и T^y определим две свертки

$$(f *_\tau g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\tau^x g(y)\,d\mu_{k,a}(y), \tag{4.1}$$

$$(f *_T g_e)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} T^y f(x) g_e(y)\,d\mu_{k,a}(y). \tag{4.2}$$

Лемма 3. *Если $f \in \mathcal{A}_{k,a}$, $g \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ и g четная, то для всех $x, y \in \mathbb{R}$*

$$(f *_\tau g)(x) = (f *_T g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \tau^y f(x) g(y)\,d\mu_{k,a}(y), \tag{4.3}$$

$$\mathcal{F}_{k,a}(f *_\tau g)(y) = \mathcal{F}_{k,a}(f *_T g)(y) = \mathcal{F}_{k,a}(f)(y)\mathcal{F}_{k,a}(g)(y). \tag{4.4}$$

Доказательство. В силу (4.1), (1.1) и (1.5)

$$(f *_\tau g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\tau^x g(y)\,d\mu_{k,a}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} \tau^y f(x) g(y)\,d\mu_{k,a}(y)$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} g(y) \int\limits_{\mathbb{R}} B_{k,a}(y,z)B_{k,a}(x,z)\mathcal{F}_{k,a}(f)(z)\,d\mu_{k,a}(z)\,d\mu_{k,a}(y)$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} B_{k,a}(x,z)\mathcal{F}_{k,a}(f)(z)\mathcal{F}_{k,a}(g)(z)\,d\mu_{k,a}(z).$$

Согласно теореме 2 и условиям леммы все предыдущие интегралы сходятся абсолютно. Аналогично, применяя (4.2) и (1.6), получим

$$(f *_T g)(x) = \int_{\mathbb{R}} T^y f(x) g(y)\, d\mu_{k,a}(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(y) \int_{\mathbb{R}} (B_{k,a}(y,z))_e B_{k,a}(x,z) \mathcal{F}_{k,a}(f)(z)\, d\mu_{k,a}(z)\, d\mu_{k,a}(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} B_{k,a}(x,z) \mathcal{F}_{k,a}(f)(z) \mathcal{F}_{k,a}(g)(z)\, d\mu_{k,a}(z).$$

Равенства (4.3), (4.4) и лемма 3 доказаны.

Для сверток (4.1) и (4.2) докажем неравенство Юнга.

Теорема 5. *Пусть* $1 \le p, q \le \infty$, $1/p + 1/q \ge 1$ *и* $1/s = 1/p + 1/q - 1$. *Если* $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, $g \in L^q(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, *то*

$$\|(f *_\tau g)\|_{s,d\mu_{k,a}} \le M^\tau_{r,\lambda} \|f\|_{p,d\mu_{k,a}} \|g\|_{q,d\mu_{k,a}}, \tag{4.5}$$

$$\|(f *_T g_e)\|_{s,d\mu_{k,a}} \le M^T_{r,\lambda} \|f\|_{p,d\mu_{k,a}} \|g_e\|_{q,d\mu_{k,a}}. \tag{4.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство можно провести, как в [10]. Обычно константа в неравенстве Юнга равна 1. Так как константа в (4.5) больше 1, а в (4.6) может быть больше 1, доказательство все-таки приведем, например, для свертки (4.2).

Пусть $1/\mu = 1/p - 1/s$ и $1/\nu = 1/q - 1/s$. Тогда $1/\mu \ge 0$, $1/\nu \ge 0$ и $1/s + 1/\mu + 1/\nu = 1$. Применяя неравенство Гельдера, получим

$$\Big|\int_{\mathbb{R}} T^y f(x) g_e(y)\, d\mu_{k,a}(y)\Big| \le \Big(\int_{\mathbb{R}} |T^y f(x)|^p |g_e(y)|^q\, d\mu_{k,a}(y)\Big)^{1/s}$$

$$\times \Big(\int_{\mathbb{R}} |T^y f(x)|^p\, d\mu_{k,a}(y)\Big)^{1/\mu} \Big(\int_{\mathbb{R}} |g_e(y)|^q\, d\mu_{k,a}(y)\Big)^{1/\nu}$$

$$\le \Big(\int_{\mathbb{R}} |T^y f(x)|^p |g_e(y)|^q\, d\mu_{k,a}(t)\Big)^{1/s} \|T^y f\|^{p/\mu}_{p,d\mu_{k,a}} \|g_e\|^{q/\nu}_{q,d\mu_{k,a}}.$$

Отсюда и из оценки (3.15) для оператора T^y

$$\|(f *_T g_e)\|_{s,d\mu_{k,a}} \le \Big(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |T^y f(x)|^p |g_e(y)|^q\, d\mu_{k,a}(y)\, d\mu_{k,a}(x)\Big)^{1/s}$$

$$\times \|T^y f\|^{p/\mu}_{p,d\mu_{k,a}} \|g_e\|^{q/\nu}_{q,d\mu_{k,a}} \le M^T_{r,\lambda} \|f\|_{p,d\mu_{k,a}} \|g_e\|_{q,d\mu_{k,a}}.$$

Неравенство (4.6) доказано. Неравенство (4.5) доказывается аналогично.

Теорема 5 доказана.

З а м е ч а н и е 2. Если $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ при $1 \le p < \infty$, $f \in C_0(\mathbb{R})$ при $p = \infty$, $f_\varepsilon \in \mathcal{A}_{k,a}$, $\|f - f_\varepsilon\|_{p,d\mu_{k,a}} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и $g \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, g четная, то применяя лемму 3 и теорему 5, получим

$$\|(f *_\tau g)(x) - (f *_T g)(x)\|_{p,d\mu_{k,a}} \le \{M^\tau_{r,\lambda} + M^T_{r,\lambda}\} \|f - f_\varepsilon\|_{p,d\mu_{k,a}} \|g\|_{1,d\mu_{k,a}},$$

поэтому $\|(f *_\tau g)(x) - (f *_T g)(x)\|_{p,d\mu_{k,a}} = 0$ и $(f *_\tau g)(x) = (f *_T g)(x)$ почти всюду.

5. Обобщенные средние. Сходимость в пространствах L^p

Пусть $\varepsilon>0$, $\widehat{\varphi}=\mathcal{F}_{k,a}(\varphi)$, $\varphi,\widehat{\varphi}\in\mathcal{A}_{k,a}$, $\varphi(0)=1$, $\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)=\mathcal{F}_{k,a}(\varphi(\varepsilon(\cdot)))(y)$. Тогда

$$\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)=\varepsilon^{-(2k+1/r-1)}\widehat{\varphi}\big(\varepsilon^{-1}y\big),\quad \widehat{\varphi}_\varepsilon\in L^1(\mathbb{R},d\mu_{k,a})\cap C_0(\mathbb{R}),\quad \int_{\mathbb{R}}\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\,d\mu_{k,a}(y)=1.$$

Далее под $L^\infty(\mathbb{R})$ мы понимаем $C_0(\mathbb{R})$. В соответствии с теоремой 4 для $f\in L^p(\mathbb{R},d\mu_{k,a})$, $1\le p\le\infty$, определяем $(k,1/r)$-обобщенные средние

$$\Phi_\varepsilon^\tau f(x)=(f*_\tau\widehat{\varphi}_\varepsilon)(x)=\int_{\mathbb{R}}f(y)\tau^x\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\,d\mu_{k,a}(y). \tag{5.1}$$

Функцию φ будем называть генератором обобщенных средних (5.1). Если $\varphi(x)$ — четный генератор, то согласно замечанию 2 почти всюду

$$\Phi_\varepsilon^\tau f(x)=\Phi_\varepsilon^T f(x)=(f*_T\widehat{\varphi}_\varepsilon)(x)=\int_{\mathbb{R}}T^yf(x)\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\,d\mu_{k,a}(y).$$

В силу (4.5), (4.6)

$$\|\Phi_\varepsilon^\tau f\|_{p,d\mu_{k,a}}\le M_{r,\lambda}^\tau\|\widehat{\varphi}_\varepsilon\|_{1,d\mu_{k,a}}\|f\|_{p,d\mu_{k,a}}, \tag{5.2}$$

$$\|\Phi_\varepsilon^T f\|_{p,d\mu_{k,a}}\le M_{r,\lambda}^T\|\widehat{\varphi}_\varepsilon\|_{1,d\mu_{k,a}}\|f\|_{p,d\mu_{k,a}}. \tag{5.3}$$

Исследуем L^p-сходимость обобщенных средних. Пусть

$$\omega_\tau(\delta,f)_{p,d\mu_{k,a}}=\sup_{|y|\le\delta}\|\tau^yf-f\|_{p,d\mu_{k,a}},\quad \omega_T(\delta,f)_{p,d\mu_{k,a}}=\sup_{|y|\le\delta}\|T^yf-f\|_{p,d\mu_{k,a}}$$

— модули непрерывности функции $f\in L^p(\mathbb{R},d\mu_{k,a})$, $1\le p\le\infty$.

Лемма 4. *Если $f\in L^p(\mathbb{R},d\mu_{k,a})$, $1\le p\le\infty$, то*

$$\omega_\tau(\delta,f)_{p,d\mu_{k,a}}\le\big(1+M_{r,\lambda}^\tau\big)\|f\|_{p,d\mu_{k,a}},\quad \omega_T(\delta,f)_{p,d\mu_{k,a}}\le\big(1+M_{r,\lambda}^T\big)\|f\|_{p,d\mu_{k,a}}, \tag{5.4}$$

$$\lim_{\delta\to0}\omega_\tau(\delta,f)_{p,d\mu_{k,a}}=0,\quad \lim_{\delta\to0}\omega_T(\delta,f)_{p,d\mu_{k,a}}=0. \tag{5.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя (3.15), получим (5.4). Равенство (5.5) докажем для модуля непрерывности $\omega_\tau(\delta,f)_{p,d\mu_{k,a}}$. Второе равенство будет доказываться аналогично. Так как для $f,g\in L^p(\mathbb{R},d\mu_{k,a})$

$$|\,\omega_\tau(\delta,f)_{p,d\mu_{k,a}}-\omega_\tau(\delta,g)_{p,d\mu_{k,a}}|\le\big(1+M_{r,\lambda}^\tau\big)\|f-g\|_{p,d\mu_{k,a}},$$

равенство (5.5) можно доказывать для функций из плотного множества $S_{1/r}(\mathbb{R})$.

Пусть $f\in S_{1/r}(\mathbb{R})$. Для нормированной функции Бесселя

$$j_\lambda'(z)=-\frac{z}{2(\lambda+1)}j_{\lambda+1}(z)$$

(см. [11, гл. 5]), поэтому $|j_\alpha(z)-1|\le\dfrac{|z|}{2(\lambda+1)}$ и из (1.2) следует $|B_{k,a}(y,z)-1|\lesssim|yz|^{1/(2r)}$.

Так как $\mathcal{F}_{k,a}(f)(z)$ быстро убывает на бесконечности, то согласно (3.5)

$$|\tau^yf(x)-f(x)|\le\int_{\mathbb{R}}|B_{k,a}(x,z)||B_{k,a}(y,z)-1||\mathcal{F}_{k,a}(f)(z)|\,d\mu_{k,a}(z)$$

$$\lesssim \int\limits_{\mathbb{R}} |B_{k,a}(y,z)-1||\mathcal{F}_{k,a}(f)(z)|\,d\mu_{k,a}(z) \lesssim \int\limits_{\mathbb{R}} |yz|^{1/(2r)}|\mathcal{F}_{k,a}(f)(z)|\,d\mu_{k,a} \lesssim |y|^{1/(2r)}.$$

Отсюда вытекает (5.5) при $p=\infty$.

Рассмотрим случай $p<\infty$. По свойству (3.25) теоремы 4 для всех y имеем $\tau^y f(x)\in\mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$. Получим равномерные оценки по y. Для любого натурального m $(\delta_{k,a})_z^m(B_{k,a}(y,z)\mathcal{F}_{k,a}(f)(z))$ является конечной линейной комбинацией функций вида $|y|^{\alpha_s}j_{\lambda+s}(2r|yz|^{1/(2r)})f_s(z)$, $\alpha_s\geq 0$, $f_s\in\mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$, и согласно (2.3)

$$|\tau^y f(x)|\lesssim |x|^{-m/r}, \quad |f(x)|\lesssim |x|^{-m/r}$$

равномерно по $|y|\leq 1$. Равенство (5.5) будет вытекать из оценки

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\tau^y f(x)-f(x)|^p\,d\mu_{k,a} \lesssim |y|^{p/(2r)}\int\limits_{-R}^{R} d\mu_{k,a} + \int\limits_{|x|\geq R} |x|^{-mp/r}\,d\mu_{k,a}(x).$$

для достаточно больших m и $R>0$.

Лемма 4 доказана.

Теорема 6. *Пусть* $\widehat{\varphi}=\mathcal{F}_{k,a}(\varphi)$, *функции* $\varphi,\widehat{\varphi}\in\mathcal{A}_{k,a}$, $\varphi(0)=1$. *Если* $f\in L^p(\mathbb{R},d\mu_{k,a})$ *при* $1\leq p\leq\infty$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|f(x)-\Phi_\varepsilon^\tau f(x)\|_{p,d\mu_{k,a}}=0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая (5.2) и теорему Банаха — Штейнгауза, теорему 6 достаточно доказывать на плотном множестве $\mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$. Если $f\in\mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$, то в силу (4.3)

$$\Phi_\varepsilon f(x)=(f*_\tau\widehat{\varphi}_\varepsilon)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\tau^x\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\,d\mu_{k,a}(y)=\int\limits_{\mathbb{R}}\tau^y f(x)\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\,d\mu_{k,a}(y),$$

поэтому

$$\|f(x)-\Phi_\varepsilon f(x)\|_{p,d\mu_{k,a}}=\Big\|\int\limits_{\mathbb{R}}(\tau^{\varepsilon y}f(x)-f(x))\widehat{\varphi}(y)\,d\mu_{k,a}(y)\Big\|_{p,d\mu_{k,a}}$$

$$\leq\int\limits_{\mathbb{R}}\|\tau^{\varepsilon y}f(x)-f(x)\|_{p,d\mu_{k,a}}|\widehat{\varphi}(y)|\,d\mu_{k,a}(y)\leq\int\limits_{\mathbb{R}}\omega_\tau(\varepsilon y,f)_{p,d\mu_{k,a}}|\widehat{\varphi}(y)|\,d\mu_{k,a}(y).$$

Утверждение теоремы 6 вытекает из (5.4), (5.5) и оценки

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\omega_\tau(\varepsilon y,f)_{p,d\mu_{k,a}}|\widehat{\varphi}(y)|\,d\mu_{k,a}(y)\leq\omega_\tau(\varepsilon R,f)_{p,d\mu_{k,a}}\int\limits_{|y|\leq R}|\widehat{\varphi}(y)|\,d\mu_{k,a}(y)$$

$$+\big(1+M_{r,\lambda}^\tau\big)\|f\|_{p,d\mu_{k,a}}\int\limits_{|y|\geq R}|\widehat{\varphi}(y)|\,d\mu_{k,a}(y).$$

Теорема 6 доказана.

Следствие 2. *Если в условиях теоремы* 6 *генератор* φ *четный, то с учетом неравенства* (5.3)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|f(x)-\Phi_\varepsilon^T f(x)\|_{p,d\mu_{k,a}}=0.$$

Обобщенные средние $\Phi_\varepsilon f$, для которых имеет место сходимость в пространствах $L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, $1 \le p \le \infty$, назовем регулярными.

В [15] для преобразования Данкля исследованы средние Гаусса — Вейерштрасса, Пуассона, Бохнера — Рисса. Все они порождены четными генераторами. Рассмотрим их аналоги для обобщенного преобразования Фурье при $a = 1/r$.

Напомним, что $\lambda = r(2k-1)$. Генератором обобщенных средних Гаусса — Вейерштрасса будет функция $\varphi(x) = e^{-r|x|^{1/r}} \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$. Известно [3, теорема 5.1], что $\widehat{\varphi} = \varphi \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$. Следовательно, обобщенные средние Гаусса — Вейерштрасса регулярные.

Генератором обобщенных средних Пуассона будет функция $\varphi(x) = e^{-2r|x|^{1/2r}} \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$. Согласно [16, гл. 8, (8.6.4)] $\widehat{\varphi}(y) = c_{\lambda,r}\big(1 + y^{1/r}\big)^{-(\lambda+3/2)}$. Хотя $\widehat{\varphi} \notin \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$, $\widehat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,1/r})$ и обобщенные средние Пуассона также являются регулярными.

Для обобщенных средних Бохнера — Рисса

$$\varphi(x) = \begin{cases} \big(1 - |x|^{1/r}\big)^{\delta}, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| \ge 1, \end{cases} \qquad \widehat{\varphi}(y) = c_{\lambda,r,\delta}\, j_{\lambda+\delta+1}\big(2r|y|^{1/(2r)}\big), \quad \delta > 0$$

(см. [16, гл. 8, (8.5.33)]). Генератор $\varphi \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,1/r})$. Из асимптотики функции Бесселя [11, гл. 7, 7.1] следует, что функция $\widehat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,1/r})$, если только $\delta > \delta_0 = \lambda + 1/2$. Число δ_0 называют критическим показателем. Если $\delta > \delta_0$, то обобщенные средние Бохнера — Рисса являются регулярными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Dunkl C.F.** Integral kernels with reflection group invariance // Canad. J. Math. 1991. Vol. 43, no. 6. P. 1213–1227. doi: 10.4153/CJM-1991-069-8
2. **Rösler M.** Dunkl operators. Theory and applications // Orthogonal Polynomials and Special Functions eds. Erik Koelink Walter van Assche. Berlin; Heidelberg: Springer, 2002. P. 93–135. (Lecture Notes in Math.; vol. 1817.) doi: 10.1007/3-540-44945-0_3
3. **Ben Saïd S., Kobayashi T., Ørsted B.** Laguerre semigroup and Dunkl operators // Compos. Math. 2012. Vol. 148, no. 4. P. 1265–1336. doi: 10.1112/S0010437X11007445
4. **Gorbachev D., Ivanov V., Tikhonov S.** On the kernel of the (κ, a)-Generalized Fourier transform // Forum of Math., Sigma. 2023. Vol. 11, e72. https://doi.org/10.1017/fms.2023.69
5. **Kobayashi T., Mano G.** The Schrödinger model for the minimal representation of the indefinite orthogonal group $O(p;q)$ // Memoirs of the American Mathematical Societies. 2011. Vol. 213, no. 1000. 132 p. doi: 10.1090/S0065-9266-2011-00592-7
6. **Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Yu.** Pitt's inequalities and uncertainty principle for generalized Fourier transform // Int. Math. Res. Notices. 2016. Vol. 2016, no. 23. P. 7179–7200. doi: 10.1093/imrn/rnv398
7. **Boubatra M.A., Negzaoui S, Sifi M.** A new product formula involving Bessel functions // Integral Transforms Spec. Funct. 2022. Vol. 33, no. 3. P. 247–263. doi: 10.1080/10652469.2021.1926454
8. **Mejjaoli H.** Deformed Stockwell transform and applications on the reproducing kernel theory // Int. J. Reprod. Kernels. 2022. Vol. 1, iss. 1. P. 1–39.
9. **Mejjaoli H., Trimèche K.** Localization operators and scalogram associated with the deformed Hankel wavelet transform // Mediterr. J. Math. 2023. Vol. 20, no. 3. Article no. 186. doi: 10.1007/s00009-023-02325-1
10. **Gorbachev D. V., Ivanov V. I. , Tikhonov S. Yu.** Positive *Lp*-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications // Constr. Approx. 2019. Vol. 49, no. 3. P. 555–605. doi: 10.1007/s00365-018-9435-5
11. **Ватсон Г.Н.** Теория бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949. 798 с.
12. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Том 2. М.: Наука, 1966. 297 с.
13. **Платонов С.С.** Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой // Изв. РАН. Сер. математическая. 2007. Т. 71, № 5. С. 149–196.
14. **Хьюитт Э., Росс К.** Абстрактный гармонический анализ. Том 1. М.: Наука, 1975. 656 с.

15. **Thangavelu S., Xu Y.** Convolution operator and maximal function for Dunkl transform // J. d'Analyse. Math. 2005. Vol. 97. P. 25–55. doi: 10.1007/BF02807401
16. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Таблицы интегральных преобразований. Том 2. М.: Наука, 1970. 328 с.

Поступила 10.07.2023
После доработки 16.08.2023
Принята к публикации 21.08.2023

Иванов Валерий Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор
Тульский государственный университет;
ведущий науч. сотрудник
Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого
г. Тула
e-mail: ivaleryi@mail.ru

REFERENCES

1. Dunkl C. F. Integral kernels with reflection group invariance. *Canad. J. Math.*, 1991, vol. 43, no. 6, pp. 1213–1227. doi: 10.4153/CJM-1991-069-8
2. Rösler M. Dunkl operators. Theory and applications. In: *Orthogonal polynomials and special functions*, eds. Erik Koelink Walter van Assche Berlin, Heidelberg, Springer, 2002, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1817, pp. 93–135. doi: 10.1007/3-540-44945-0_3
3. Ben Saïd S., Kobayashi T., Ørsted B. Laguerre semigroup and Dunkl operators. *Compos. Math.*, 2012, vol. 148, no. 4, pp. 1265–1336. doi: 10.1112/S0010437X11007445
4. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. On the kernel of (κ, a)-generalized Fourier transform. *Forum of Math., Sigma*, 2023, vol. 11, e72, pp. 1–25. doi: 10.1017/fms.2023.69
5. Kobayashi T., Mano G. The Schrödinger model for the minimal representation of the indefinite orthogonal group $O(p; q)$. *Memoirs Amer. Math. Soc.*, 2011, vol. 213, no. 1000, 132 p. doi: 10.1090/S0065-9266-2011-00592-7
6. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S. Yu. Pitt's inequalities and uncertainty principle for generalized Fourier transform. *Int. Math. Res. Notices*, 2016, vol. 2016, no. 23, pp. 7179–7200. doi: 10.1093/imrn/rnv398
7. Boubatra M.A., Negzaoui S, Sifi M. A new product formula involving Bessel functions. *Integral Transforms Spec. Funct.*, 2022, vol. 33, no. 3, pp. 247–263. doi: 10.1080/10652469.2021.1926454
8. Mejjaoli H. Deformed Stockwell transform and applications on the reproducing kernel theory. *Int. J. Reprod. Kernels*, 2022. vol. 1, no. 1, pp. 1–39.
9. Mejjaoli H., Trimèche K. Localization operators and scalogram associated with the deformed Hankel wavelet transform. *Mediterr. J. Math.*, 2023, vol. 20, no. 3, article no. 186. doi: 10.1007/s00009-023-02325-1
10. Gorbachev D.V., Ivanov V.I. , Tikhonov S.Yu. Positive *Lp*-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications. *Constr. Approx.*, 2019, vol. 49, no. 3, pp. 555–605. doi: 10.1007/s00365-018-9435-5
11. Watson G.N. *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1944, 804 p. ISBN: 9780722230435 . Translated to Russian under the title *Teoriya besselevykh funktsii. Ch.* 1, Moscow, Inostr. Liter. Publ., 1949, 798 p.
12. Bateman G., Erdélyi A. *Higher transcendental functions. Vol. II.* NY, McGraw Hill Book Company, 1953, 396 p. ISBN: 0486446158 . Translated to Russian under the title *Vysshie transtsendentnye funktsii. T.* 2. *Funktsii Besselya, Funktsii parabolicheskogo tsilindra, ortogonal'nye mnogochleny*, Moscow, Nauka Publ., 1966, 295 p.
13. Platonov S.S. Bessel harmonic analysis and approximation of functions on the half-line. *Izv. Math.*, 2007, vol. 71, no. 5, pp. 1001–1048. doi: 10.1070/IM2007v071n05ABEH002379
14. Hewitt E., Ross K.A. *Abstract Harmonic Analysis. Vol. I*, Berlin, Heidelberg, Springer, 1963, 519 p. ISBN: 9780387941905 . Translated to Russian under the title *Abstraktnyi garmonicheskii analiz*, Moscow, Nauka Publ., 1975, 656 p.

15. Thangavelu S., Xu Y. Convolution operator and maximal function for Dunkl transform. *J. d'Analyse Math.*, 2005, vol. 97, pp. 25–55. doi: 10.1007/BF02807401
16. Bateman H., Erdèlyi A. *Tables of integral transforms*, vol. II, NY, McGraw Hill Book Company, 1954, 451 p. ISBN: 9780070195509 . Translated to Russian under the title *Tablitsy integral'nykh preobrazovanii*, Moscow, Nauka Publ., 1970, 328 p.

Received July 10, 2023
Revised August 16, 2023
Accepted August 21, 2023

Funding Agency: This work was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Education of the Russian Federation, agreement no. 073-03-2023-303/2 dated 02.14.23, the topic of scientific research is "Number-theoretic methods in approximate analysis and their applications in mechanics and physics".

Valerii Ivanovich Ivanov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Tula State University, Tula, 300012 Russia, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula, 300026 Russia, e-mail: ivaleryi@mail.ru .

Cite this article as: V. I. Ivanov. One-dimensional (k, a)-generalized Fourier transform. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 92–108 .