ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 4 2023

УДК 517.518.86

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМАХ[1]

В. П. Заставный

Пусть $\mathscr{T}_n$ — множество всех тригонометрических полиномов порядка $\le n$, $n \in \mathbb{N}$. Для мультипликаторов $H : \mathscr{T}_n \to \mathscr{T}_n$ доказана интерполяционная формула вида $H(f)(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} \Lambda_k f\left(t - \tau + k\pi/n\right)$, с помощью которой получены неравенства и критерии экстремального полинома в этих неравенствах (теорема 4):

$$\int_{\mathbb{T}} J\left(|H(f)(t)|\right)\,dt \le \int_{\mathbb{T}} J\left(\varkappa|f(t)|\right)\,dt\,;\ \ \|H(f)\|_p \leqslant \varkappa\|f\|_p,\ 1 \le p \le \infty,\ \varkappa = |\Lambda_0| + \ldots + |\Lambda_{2n-1}| > 0.$$

Здесь функция J выпукла вниз и не убывает на $[0, +\infty)$. Основная цель данной работы — это описание всех экстремальных полиномов в указанных неравенствах. В теореме 5 доказано, что если функция J выпукла вниз и строго возрастает на $[0, +\infty)$ и выполняются два условия: 1) $\exists s \in \mathbb{Z} : \overline{\Lambda_s}\Lambda_{s+1} < 0$ и 2) $\exists \varepsilon \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon| = 1 : \varepsilon\Lambda_k(-1)^k \ge 0$, $k \in \mathbb{Z}$, то в указанных неравенствах экстремальными являются только полиномы вида $f(t) = \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\mu, \nu \in \mathbb{C}$. Главные случаи в этой теореме — случаи $p = \infty$ и $p = 1$. В теореме 6 доказано, что если функция J выпукла вниз и строго возрастает на $[0, +\infty)$ и для оператора H выполнено условие Сегё (неотрицательность специального тригонометрического полинома), то во всех случаях, кроме одного исключительного, в указанных неравенствах экстремальными являются только полиномы вида $f(t) = \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\mu, \nu \in \mathbb{C}$. В исключительном случае есть и другие экстремальные полиномы. В работе приведены общие примеры операторов H, которые удовлетворяют условиям теоремы 6 (пример 1, теоремы 7 и 8). В частности, этим условиям удовлетворяет оператор С. Т. Завалищина (пример 2) и оператор дробной производной $H(f)(t) = f^{(r,\beta)}(t)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $r \ge 1$, $\varkappa = n^r$ (следствие 3). В работе также описаны экстремальные полиномы в неравенствах Тригуба и Боаса (при некоторых значениях параметров экстремальными являются не только полиномы вида $\mu e^{int} + \nu e^{-int}$).

Ключевые слова: экстремальный тригонометрический полином, условие Бернштейна, условие Сегё, производная в смысле Вейля — Надя, неравенство Бернштейна — Сегё, положительно определенная функция, метод Боаса — Сайвина.

V. P. Zastavnyi. On extremal trigonometric polynomials.

Let $\mathscr{T}_n$ be the set of all trigonometric polynomials of order $\le n$, $n \in \mathbb{N}$. For multipliers $H : \mathscr{T}_n \to \mathscr{T}_n$, we prove an interpolation formula $H(f)(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} \Lambda_k f\left(t - \tau + k\pi/n\right)$, which is used to obtain the following inequalities and criteria for an extremal polynomial in them (Theorem 4):

$$\int_{\mathbb{T}} J\left(|H(f)(t)|\right)\,dt \le \int_{\mathbb{T}} J\left(\varkappa|f(t)|\right)\,dt\,;\ \ \|H(f)\|_p \leqslant \varkappa\|f\|_p,\ 1 \le p \le \infty,\ \varkappa = |\Lambda_0| + \ldots + |\Lambda_{2n-1}| > 0.$$

Here the function J is convex and nondecreasing on $[0, +\infty)$. The main goal of this work is to describe all extremal polynomials in the above inequalities. Theorem 5 proves that if the function J is convex and strictly increasing on $[0, +\infty)$ and two conditions are satisfied: (1) $\exists s \in \mathbb{Z} : \overline{\Lambda_s}\Lambda_{s+1} < 0$ and (2) $\exists \varepsilon \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon| = 1 : \varepsilon\Lambda_k(-1)^k \ge 0$, $k \in \mathbb{Z}$, then only polynomials of the form $f(t) = \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\mu, \nu \in \mathbb{C}$ are extremal in these inequalities. The main cases in this theorem are the cases $p = \infty$ and $p = 1$. Theorem 6 proves that if the function J is convex and strictly increasing on $[0, +\infty)$ and the operator H satisfies the Szegö condition (the nonnegativity of a special trigonometric polynomial), then, in all cases different from one exceptional case, only polynomials of the form $f(t) = \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\mu, \nu \in \mathbb{C}$, are extremal in these inequalities. In the exceptional case, there are other extremal polynomials. In this paper we give general examples of operators H that satisfy the conditions of Theorem 6 (Example 1, Theorems 7 and 8). In particular, S. T. Zavalishchin's operator (Example 2) and the fractional derivative operator $H(f)(t) = f^{(r,\beta)}(t)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $r \ge 1$, $\varkappa = n^r$ (Corollary 3), satisfy these conditions. In this paper we also describe extremal polynomials in the Trigub and Boas inequalities (for some values of the parameters, not only polynomials of the form $\mu e^{int} + \nu e^{-int}$ are extremal).

Keywords: extremal trigonometric polynomial, Bernstein condition, Szegö condition, Weil–Nagy derivative, Bernstein-Szegö inequality, positive definite function, Boas–Civin method.

MSC: 41A17

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-4-70-91

[1]Исследование проводилось по теме государственного задания (шифр из системы ЕГИСУ НИОКТР: FRRE-2023-0015).

1. Введение

Символом $C(\mathbb{T})$, $\mathbb{T} := [-\pi, \pi]$, обозначим класс 2π-периодических функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, которые непрерывны на $\mathbb{R}$. Для $f \in C(\mathbb{T})$ полагаем

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)|\colon t \in \mathbb{T}\} \quad \text{и} \quad \|f\|_p := \left(\int\limits_{\mathbb{T}} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Обозначим через $\mathscr{F}_n$, $n \in \mathbb{N}$, множество тригонометрических полиномов порядка не выше n с коэффициентами из $\mathbb{C}$

$$f(t) := \sum_{|k| \le n} c_k e^{ikt} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad c_k = c_k(f) \in \mathbb{C},$$

где $a_k := c_k + c_{-k}$, $b_k := i(c_k - c_{-k})$, $k \ge 0$.

Для многих линейных операторов $H : \mathscr{F}_n \to \mathscr{F}_n$ известны неравенства следующего вида с точной константой $\varkappa > 0$:

$$\int\limits_{\mathbb{T}} J\left(|H(f)(t)|\right) dt \le \int\limits_{\mathbb{T}} J\left(\varkappa |f(t)|\right) dt, \quad f \in \mathscr{F}_n, \tag{1.1}$$

$$\|H(f)\|_p \leqslant \varkappa \|f\|_p, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \quad f \in \mathscr{F}_n, \tag{1.2}$$

где функция J выпукла вниз и не убывает на $[0, +\infty)$. В неравенствах (1.1) и (1.2) величина $\varkappa$ в общем случае зависит от H, n и соответственно от функции J и параметра p.

Неравенство (1.2) при $p = \infty$ для оператора $H(f)(t) = f'(t)$ и $\varkappa = n$ в 1912 г. доказал С. Н. Бернштейн (см. [1, п. 10]) первоначально для четных и нечетных вещественных тригонометрических полиномов, а в общем случае и другим методом в 1914 г. — М. Рисс [2; 3]. Для оператора $H(f)(t) = \cos\beta\, \widetilde{f}\,'(t) + \sin\beta\, f'(t)$, $\beta \in \mathbb{R}$, и $\varkappa = n$ неравенство (1.2) при $p = \infty$ в 1928 г. получил Сегё [4]. Он также показал, что при $\beta \ne q\pi$, $q \in \mathbb{Z}$, экстремальными в этом неравенстве являются только полиномы вида $f(t) = \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\mu, \nu \in \mathbb{C}$. Неравенство (1.1) доказал Зигмунд [5, Ch. X, § 3, (3.25)]. Отсюда вытекает справедливость неравенств (1.1) и (1.2) для оператора $H(f)(t) = \cos\beta\, \widetilde{f}^{(r)}(t) + \sin\beta\, f^{(r)}(t)$, $\beta \in \mathbb{R}$, и $\varkappa = n^r$ при любом $r \in \mathbb{N}$.

В дальнейшем подобные неравенства были получены для производных дробного порядка. Существует несколько различных определений дробной производной. Следующий оператор при $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, по-видимому, впервые появился в работе Надя [6]. Для $f \in \mathscr{F}_n$ полагаем

$$f^{(r,\beta)}(t) := \sum_{|k| \le n} |k|^r e^{i\beta \operatorname{sign} k} c_k(f) e^{ikt} = \sum_{k=1}^{n} k^r \left(a_k \cos(kt + \beta) + b_k \sin(kt + \beta)\right).$$

При $\beta = r\pi/2$ получается производная в смысле Вейля, которая при $r \in \mathbb{N}$ совпадает с обычной производной порядка r. Этот оператор часто называют производной в смысле Вейля — Надя. Неравенства (1.1) и (1.2) для оператора $H(f)(t) = f^{(r,\beta)}(t)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $r \ge 1$, и $\varkappa = n^r$ доказаны многими авторами. Для этого оператора неравенство (1.2) при $p = \infty$, $r \ge 1$ было доказано при любом $\beta \in \mathbb{R}$ в 1935 г. для вещественных полиномов в работе Г. Т. Соколова [7, неравенства (6), (10)] (задача С. Н. Бернштейна), а при $\beta = -r\pi/2$ и $\beta = 0$ в 1965 г. — в работе П. И. Лизоркина (см. теоремы 2, $2'$ в [8]). Неравенства (1.1) и (1.2) для оператора $H(f)(t) = f^{(r,\beta)}(t)$, $\varkappa = n^r$ при $r \ge 1$, $\beta = r\pi/2$ (случай производной в смысле Вейля) для вещественных тригонометрических полиномов доказаны в 1992 г. в монографии [9, теоремы 3.3.6, 3.3.7], где отмечено, что приведенные доказательства принадлежат С. А. Пичугову. В 1998 г. А. И. Козко [10, Theorem 1, Corollary 1] доказал неравенства (1.1) и (1.2) для оператора $H(f)(t) = f^{(r,\beta)}(t)$, $\varkappa = n^r$ для всех $\beta \in \mathbb{R}$, $r \ge 1$.

Другие случаи выполнения неравенства (1.2) для оператора $H(f)(t) = f^{(r,\beta)}(t)$ с $\varkappa = n^r$, когда $0 < r < 1$ или $0 \le p < 1$, рассмотрены в работе В. В. Арестова и П. Ю. Глазыриной [11], в которой эти неравенства называются неравенствами Бернштейна — Сегё и изложена полная история таких неравенств, а также в работе А. О. Леонтьевой [12]. Отметим, что неравенства (1.1) и (1.2) на классе тригонометрических полиномов, когда вместо дробных производных $f^{(r,\beta)}$ берутся различные дифференциальные операторы и композиции Сегё, изучали многие авторы. При этом рассматривались не только выпуклые вниз функции J. Подробная история этого вопроса изложена в работе В. В. Арестова [13].

В работе В. В. Арестова 1981 г. [14] в интегральных неравенствах (1.1) для операторов, связанных с алгебраическими полиномами, получено полное описание экстремальных алгебраических полиномов и как следствие доказано, что для оператора $H(f)(t) = f^{(r)}(t)$, $f \in \mathscr{F}_n$, при натуральных r в неравенстве (1.1) с $\varkappa = n^r$ экстремальными являются только полиномы вида $f(t) = \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\mu, \nu \in \mathbb{C}$, по крайней мере в случае, когда функция $J(t)$ не убывает, а $tJ'(t)$ строго возрастает на $(0, +\infty)$. В частности это верно для функции $J(t) = t^p$, $p > 0$.

Если неравенства (1.1) и (1.2) доказаны, то их точность, как правило, доказывается легко: указывается ненулевой полином $f \in \mathscr{F}_n$, на котором эти неравенства обращаются в равенство.

Основная цель данной работы — это описание всех экстремальных полиномов в неравенствах (1.1) и (1.2) для операторов H, которые являются мультипликаторами. Основной метод — использование интерполяционных формул для таких операторов. В разд. 2 доказаны характеристические свойства экспоненты, которые используются для описания экстремальных полиномов в случае $p = \infty$ (теоремы 1 и 2, следствия 1 и 2) и в случае $p = 1$ (теорема 3). В разд. 3 для мультипликаторов $H : \mathscr{F}_n \to \mathscr{F}_n$ в предложении 1 доказана интерполяционная формула вида

$$H(f)(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} \Lambda_k f\Big(t - \tau + \frac{k\pi}{n}\Big), \quad f \in \mathscr{F}_n,$$

с помощью которой получены неравенства (1.1) и (1.2), где $\varkappa = |\Lambda_0| + \ldots + |\Lambda_{2n-1}| > 0$, и критерии экстремального полинома в этих неравенствах (теорема 4).

В теореме 5 доказано, что *если функция J выпукла вниз и строго возрастает на* $[0, +\infty)$ *и выполняются два условия:* 1) $\exists s \in \mathbb{Z}$: $\overline{\Lambda_s}\Lambda_{s+1} < 0$ *и* 2) $\exists \varepsilon \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon| = 1 : \varepsilon\Lambda_k(-1)^k \ge 0$, $k \in \mathbb{Z}$ (*условие С. Н. Бернштейна*), *то в указанных неравенствах экстремальными являются только полиномы вида* $f(t) = \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\mu, \nu \in \mathbb{C}$. Главные случаи в теореме 5 — случай $p = \infty$ (применяется теорема 1) и случай $p = 1$ (применяется теорема 3).

В теореме 6 доказано, что *если для оператора H выполнено условие Сегё* (3.9)*, то во всех случаях, кроме одного исключительного, в неравенствах* (1.1)*, если функция J выпукла вниз и строго возрастает на* $[0, +\infty)$*, и* (1.2) *экстремальными являются только полиномы вида* $f(t) = \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\mu, \nu \in \mathbb{C}$*, а в исключительном случае есть и другие экстремальные полиномы.*

В разд. 4 приведены общие примеры операторов H, которые удовлетворяют условиям теоремы 6 в неисключительном случае (пример 1, теоремы 7 и 8). Эти примеры, как и условие Сегё (3.9), связаны с положительно определенными функциями. В частности, этим условиям удовлетворяет оператор С. Т. Завалищина (пример 2) и оператор $H(f)(t) = f^{(r,\beta)}(t)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $r \ge 1$, $\varkappa = n^r$ (см. следствие 3), для которого неисследованным оставался случай: $r = 1$, $\beta = \pi q$, $q \in \mathbb{Z}$, $n \ge 2$, $p = \infty$, $p = 1$, *а функция J выпукла вниз и строго возрастает на* $[0, +\infty)$ (см. замечание 7, § 9 в [15]). При $p = \infty$ этот случай отмечен в работе Сегё [4, p. 66]. Доказательство для случая $p = \infty$ автору сообщил в ноябре 2021 г. О. Л. Виноградов, и этот случай содержится в следствии 1. В разд. 5 изложен метод Боаса — Сайвина получения интерполяционных формул. В разд. 6 и 7 описаны экстремальные полиномы в неравенствах Тригуба и Боаса (теоремы 9, 10).

2. Характеристические свойства экспоненты

Теорема 1. *Пусть для полинома $f \in \mathscr{F}_n$, $n \in \mathbb{N}$, и для некоторых $\eta, \delta \in \mathbb{R}$ равенство $(-1)^s f(\eta + \pi s/n) = e^{i\delta}\|f\|_\infty$ выполняется для некоторых двух соседних целых s. Тогда $f(t) = \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\mu, \nu \in \mathbb{C}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть указанное в теореме равенство выполняется при $s = p$ и $s = p+1$. Рассмотрим функцию $g(t) := (-1)^p f(t + \eta + \pi p/n)e^{-i\delta}$, $t \in \mathbb{R}$. Очевидно, $g \in \mathscr{F}_n$, $\|g\|_\infty = \|f\|_\infty =: M$ и $(-1)^s g(\pi s/n) = \|g\|_\infty$ для $s \in \{0,1\}$. Функции $r(t) := \operatorname{Re} g(t)$ и $w(t) := \operatorname{Im} g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, являются вещественными тригонометрическими полиномами порядка $\le n$. Очевидно, $(-1)^s r(\pi s/n) = \|g\|_\infty$ для $s \in \{0,1\}$ и $|r(t)| \le |g(t)| \le \|g\|_\infty$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Поэтому $\|r\|_\infty = \|g\|_\infty$. Таким образом, $(-1)^s r(\pi s/n) = \|r\|_\infty = M$ для $s \in \{0,1\}$. Так как $r(t)$ — вещественный полином, то $r'(\pi s/n) = 0$ для $s \in \{0,1\}$.

Пусть сначала $n \ge 2$. Полином $Q(t) := M\cos(nt) - r(t)$ является вещественным, и его порядок $\le n$. Кроме того $(-1)^s Q(\pi s/n) \ge 0$ для всех $s \in \mathbb{Z}$ и $Q(\pi s/n) = Q'(\pi s/n) = 0$ для $s \in \{0,1\}$. Если при некотором $s \in \mathbb{Z}$ выполняется равенство $Q(\pi s/n) = 0$, то $r(\pi s/n) = (-1)^s M$ и, следовательно, $r'(\pi s/n) = 0$ и $Q'(\pi s/n) = 0$. Точки $\pi s/n$ при $s \in \{0,1\}$ являются нулями полинома $Q(t)$ кратности не меньше 2. Рассмотрим множество $U = \{s \in \{2, \ldots, 2n-1\} : Q(\pi s/n) = 0\}$. Пусть[2] $|U| = m$. Тогда $0 \le m \le 2n-2$. Предположим, что $0 \le m \le n-2$. Так как $n-2 < 2n-2$, то $Q(\pi s/n) \ne 0$ при некотором $s \in \{2, \ldots, 2n-1\}$ и, значит, $Q(t) \not\equiv 0$. Если $m \ge 1$, то $n \ge 3$ и $U = \{s_1, \ldots, s_m\} \subset \mathbb{Z}$, где $2 \le s_1 < \ldots < s_m \le 2n-1$. На отрезке $[2, 2n-1]$ количество различных отрезков единичной длины с концами в целых точках равно $2n-3$. Из отрезка $[2, 2n-1]$ выбрасываем те интервалы единичной длины с концами в целых точках, у которых хотя бы один конец принадлежит U. Для каждого $s \in U$ выбрасывается максимум 2 интервала. Количество оставшихся отрезков не меньше $2n-3-2m$ ($\ge 2n-3-2(n-2) = 1$). На концах каждого из оставшихся отрезков функция $Q(\pi t/n)$ отлична от нуля и принимает значения разных знаков. Поэтому количество нулей полинома $Q(t)$ на промежутке $[0, 2\pi)$ с учетом кратности не меньше, чем $4 + 2m + (2n-3-2m) = 2n+1$. Это верно и при $m = 0$. Но это противоречит тому, что Q имеет порядок $\le n$ и $Q(t) \not\equiv 0$. Таким образом, случай $0 \le m \le n-2$ невозможен. Поэтому $m > n-2$. Тогда число нулей полинома Q на промежутке $[0, 2\pi)$ с учетом кратности не меньше, чем $4 + 2m > 2n$. Отсюда следует, что $Q(t) \equiv 0$ и $r(t) \equiv M\cos(nt)$ (см. также замечание после доказательства леммы из работы С. Б. Стечкина [16]). Тогда

$$|w(t)| \equiv \sqrt{|g(t)|^2 - r^2(t)} \le \sqrt{M^2 - M^2\cos^2(nt)} = M|\sin nt|, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Два тригонометрических многочлена $w(t)$ и $\sin nt$ порядка $\le n$ обращаются в ноль в одних и тех же $2n$ различных точках $\xi_k = \pi k/n$, $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$ из промежутка $[0, 2\pi)$. Поэтому $w(t) \equiv \gamma \sin nt$, где γ — некоторая постоянная (в нашем случае вещественная и $|\gamma| \le M$). Значит, $g(t) \equiv M\cos nt + i\gamma \sin nt$. Окончательно получаем, что

$$f(t) = (-1)^p e^{i\delta} g(t - \eta - \pi p/n) = \mu e^{int} + \nu e^{-int}.$$

Утверждение теоремы при $n \ge 2$ доказано.

Пусть тригонометрический полином $f \in \mathscr{F}_1$ удовлетворяет условию теоремы при $n = 1$. Несложно проверить, что полином $\tilde{f}(t) := f(2t)$ удовлетворяет условию теоремы при $n = 2$ с $\tilde{\delta} = \delta$, $\tilde{\eta} = \eta/2$ и для тех же соседних целых s. По доказанному $\tilde{f}(t) = \mu e^{i2t} + \nu e^{-i2t}$, $\mu, \nu \in \mathbb{C}$, и, значит, $f(t) = \tilde{f}(t/2) = \mu e^{it} + \nu e^{-it}$.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть для полинома $f \in \mathscr{F}_n$, $n \in \mathbb{N}$, и для некоторых $\eta, \delta \in \mathbb{R}$ равенство $(-1)^s f(\eta + \pi s/n) = e^{i\delta}\|f\|_\infty$ выполняется для всех целых $s \in U \subset \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$. Если $|U| \ge n$ и в U есть числа разной четности, то $f(t) = \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\mu, \nu \in \mathbb{C}$.*

[2]Символом $|U|$ обозначается количество элементов во множестве U.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $n=1$, то $U=\{0,1\}$, и утверждение вытекает из теоремы 1. Пусть $n\geq 2$ и $\{k_1,\dots,k_n\}\subset U$, где целые числа k_j удовлетворяют условию $0\leq k_1<\dots<k_n\leq 2n-1$ и среди этих чисел есть числа разной четности. Если $k_{j+1}-k_j=1$ для некоторого $j\in[1,n-1]$, то снова можно применить теорему 1. Если $k_{j+1}-k_j\geq 2$ для всех $j\in[1,n-1]$, то

$$2n-1-k_1\geq k_n-k_1=\sum_{j=1}^{n-1}(k_{j+1}-k_j)\geq 2(n-1).$$

В последнем неравенстве не может быть знака равенства, иначе все числа k_j одной четности. Поэтому $2n-1-k_1\geq k_n-k_1\geq 2n-1$. Отсюда следует, что $k_1=0$ и $k_n=2n-1$. В этом случае теорему 1 можно применить для $s=2n-1$ и $s=2n$. $\square$

Теорема 2. *Пусть U состоит из всех четных или всех нечетных целых чисел от 0 до $2n-1$, $n\in\mathbb{N}$. Если для полинома $f\in\mathscr{F}_n$, $n\in\mathbb{N}$, и для некоторых $\eta,\delta\in\mathbb{R}$ равенство $(-1)^s f(\eta+\pi s/n)=e^{i\delta}\|f\|_\infty$ выполняется для всех $s\in U$, то*

$$f(t)=e^{i\delta}(a\cos n(t-\eta)+b+iq(t)),\quad a,b\in\mathbb{R}, \tag{2.1}$$

где $q(t)$ — произвольный вещественный полином из $\mathscr{F}_n$, удовлетворяющий неравенству $q^2(t)\leq(|a|+|b|)^2-(a\cos n(t-\eta)+b)^2$, $t\in\mathbb{R}$. Если дополнительно f — вещественный полином, то $f(t)=a\cos n(t-\eta)+b$, $a,b\in\mathbb{R}$. Справедливо и обратное утверждение: всякий полином вида (2.1), где $\eta,\delta,a,b\in\mathbb{R}$, и с тем же условием на $q(t)$ удовлетворяет условиям теоремы с $\widetilde{\delta}=\delta+\pi\varepsilon_1$, $\widetilde{\eta}=\eta+\pi\varepsilon_2/n$, где $\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\{0,1\}$ выбираются так, чтобы $(-1)^{s+\varepsilon_1}b\geq 0$ для $s\in U$ и $(-1)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}a\geq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в доказательстве теоремы 1, функция $r(t):=\mathrm{Re}\{f(t+\eta)e^{-i\delta}\}$ является вещественным полиномом из $\mathscr{F}_n$, для которой равенства $(-1)^s r(\pi s/n)=\|r\|_\infty=\|f\|_\infty=:M$ и $r'(\pi s/n)=0$ выполняются для всех $s\in U$. Рассмотрим два полинома $T(t)=r(t)-M\cos nt$ и $Q(t)=1-\gamma\cos nt$ порядка $\leq n$, где $\gamma=(-1)^s$, $s\in U$. В n различных точках $\pi s/n\in[0,2\pi)$, $s\in U$, выполняются равенства $T^{(k)}(\pi s/n)=Q^{(k)}(\pi s/n)=0$ при $k=0$ и $k=1$. Тогда (см., например, [5, Ch. X, § 1, (1.7)]) для некоторой постоянной b выполняется тождество $T(t)\equiv bQ(t)$. Поэтому $r(t)\equiv M\cos nt+b(1-\gamma\cos nt)=(M-\gamma b)\cos nt+b$, где $b\in\mathbb{R}$. Из равенства $M=\|r\|_\infty=|M-\gamma b|+|b|$ вытекает, что $0\leq\gamma b\leq M$. Таким образом, $f(t)=e^{i\delta}(a\cos n(t-\eta)+b+iq(t))$, где $a=M-\gamma b\geq 0$, а вещественный полином $q\in\mathscr{F}_n$ удовлетворяет неравенству

$$q^2(t)=|f(t)|^2-(a\cos n(t-\eta)+b)^2\leq M^2-(a\cos n(t-\eta)+b)^2.$$

Осталось учесть, что $M=a+\gamma b=|a|+|b|$. Если дополнительно f — вещественный полином и $f\not\equiv 0$, то $e^{i\delta}=\pm 1$ и $f(t)=e^{i\delta}r(t-\eta)$.

Обратное утверждение проверяется непосредственно.

Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть $\varepsilon\in\mathbb{C}$, $|\varepsilon|=1$. Если для полинома $f\in\mathscr{F}_n$, $n\in\mathbb{N}$, и для некоторых $\eta,\delta\in\mathbb{R}$ равенство $-f(\eta+\pi s/n)=e^{i\delta}\|f\|_\infty=\varepsilon f(\eta)$ выполняется для всех нечетных s от 1 до $2n-1$, то*

$$f(t)=e^{i\delta}M(a\cos n(t-\eta)+a-1+iq(t)),\quad M\geq 0, \tag{2.2}$$

где $a=\mathrm{Re}(\overline{\varepsilon}+1)/2$, а $q(t)$ — произвольный вещественный полином из $\mathscr{F}_n$, удовлетворяющий условиям

$$\begin{aligned}&q^2(t)\leq a(1+\cos n(t-\eta))(2-a-a\cos n(t-\eta)),\quad t\in\mathbb{R},\\ &q(\eta)=\gamma(\varepsilon)2\sqrt{a(1-a)},\ \gamma(\varepsilon):=\mathrm{sign}(\mathrm{Im}\,\overline{\varepsilon}).\end{aligned} \tag{2.3}$$

Справедливо и обратное утверждение: если полином f имеет вид (2.2), где $\eta, \delta \in \mathbb{R}$, $a = \mathrm{Re}(\overline{\varepsilon}+1)/2$ и вещественный полином $q \in \mathscr{F}_n$ удовлетворяет условиям (2.3), то $f \in \mathscr{F}_n$ и равенство $-f(\eta+\pi s/n) = e^{i\delta}\|f\|_\infty = \varepsilon f(\eta)$ выполняется для всех нечетных s от 1 до $2n-1$.

Если $\varepsilon = 1$, то $a = 1$ и $q(t) \equiv c\sin n(t-\eta)$, $c \in \mathbb{R}$, $|c| \le 1$.

Если $\varepsilon = -1$, то $a = 0$ и $q(t) \equiv 0$, и, значит, $f(t) \equiv \alpha \in \mathbb{C}$.

Если число n четное, то условию (2.3) удовлетворяют, например, полиномы вида

$$q(t) = \gamma(\varepsilon) 2\sqrt{a(1-a)}\cos\frac{n(t-\eta)}{2}\, q_1(t),$$

где $q_1(t)$ — произвольный вещественный полином степени не выше $n/2$, удовлетворяющий условию $|q_1(t)| \le q_1(\eta) = 1$, $t \in \mathbb{R}$.

Если число n нечетное, то условию (2.3) удовлетворяют, например, полиномы вида

$$q(t) = \gamma(\varepsilon) 2\sqrt{a(1-a)}\cos\frac{n(t-\eta)}{2}\,\cos\frac{(t-\eta)}{2}\, q_1(t),$$

где $q_1(t)$ — произвольный вещественный полином степени не выше $(n-1)/2$, удовлетворяющий условиям и $|q_1(t)| \le q_1(\eta) = 1$, $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $M := \|f\|_\infty = 1$. Тогда f имеет вид (2.1), где $0 \le -b \le 1$ и $a = 1+b \ge 0$, т. е. $a \in [0,1]$ и $b = a-1$ (см. доказательство теоремы 2, когда U состоит из всех нечетных целых чисел от 1 до $2n-1$). Равенство $a = \mathrm{Re}(\overline{\varepsilon}+1)/2$ и второе условие в (2.3) вытекают из равенства $\overline{\varepsilon} = 2a-1+iq(\eta)$. Первое условие в (2.3) — это неравенство для $q^2(t)$ из теоремы 2.

Оставшиеся утверждения, в том числе и обратное, проверяются непосредственно. $\square$

Теорема 3. *Пусть для полинома $f \in \mathscr{F}_n$, $n \in \mathbb{N}$, и для любого $t \in \mathbb{R}$ найдется число $\delta(t) \in \mathbb{R}$ такое, что тождество $(-1)^k f\Big(t+\dfrac{\pi k}{n}\Big) \equiv e^{i\delta(t)}\Big|f\Big(t+\dfrac{\pi k}{n}\Big)\Big|$ выполняется для двух соседних целых чисел $k = s$ и $k = s+1$. Тогда $f(t) = \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\mu, \nu \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Функции $r(t) := \mathrm{Re}\, f(t)$ и $w(t) := \mathrm{Im}\, f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, являются вещественными тригонометрическими полиномами порядка $\le n$. Тогда для всех $t \in \mathbb{R}$ выполняются соотношения

$$r\Big(t+\frac{\pi s}{n}\Big) r\Big(t+\frac{\pi(s+1)}{n}\Big) \equiv -\cos^2\delta(t)\Big|f\Big(t+\frac{\pi s}{n}\Big) f\Big(t+\frac{\pi(s+1)}{n}\Big)\Big| \le 0\,; \tag{2.4}$$

$$w\Big(t+\frac{\pi s}{n}\Big) w\Big(t+\frac{\pi(s+1)}{n}\Big) \equiv -\sin^2\delta(t)\Big|f\Big(t+\frac{\pi s}{n}\Big) f\Big(t+\frac{\pi(s+1)}{n}\Big)\Big| \le 0. \tag{2.5}$$

Из (2.4) следует, что полином $r(t)$ имеет хотя бы один нуль $\xi \in \mathbb{R}$ (иначе левая часть в (2.4) положительна при всех $t \in \mathbb{R}$, что противоречит неравенству в правой части соотношения (2.4)). Рассмотрим сначала случай, когда $r(t) \not\equiv 0$. В этом случае на каждом отрезке прямой может находиться лишь конечное число нулей. Пусть m — число различных нулей $\{t_j\}_{j=1}^m$ полинома $g(t) := r(t+\xi)$ на промежутке $[0, 2\pi)$, $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_m < t_{m+1} = 2\pi$. Из (2.4) следует, что расстояние между соседними нулями не больше π/n. Тогда

$$2\pi = \sum_{j=1}^m (t_{j+1} - t_j) \le \frac{\pi}{n}\, m$$

и, значит, $m \ge 2n$. Случай $m \ge 2n+1$ невозможен, иначе $r(t) \equiv 0$. Поэтому $m = 2n$ и $t_j = (j-1)\pi/n$, $1 \le j \le m = 2n$. Тогда (см., например, [5, Ch. X, § 1, (1.7)]) $g(t) \equiv C\sin nt$ для некоторой постоянной $C \in \mathbb{R}$ и $r(t) \equiv C\sin n(t-\xi)$. В этой же формуле содержится и случай, когда $r(t) \equiv 0$. Аналогично из (2.5) следует, что $w(t) \equiv B\sin n(t-\eta)$ для некоторых $\eta, B \in \mathbb{R}$. Тогда $f(t) = r(t) + iw(t) = \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\mu, \nu \in \mathbb{C}$.

Теорема доказана.

3. Интерполяционные формулы и точные неравенства для полиномов. Критерий экстремального полинома. Условия Бернштейна и Сегё

Для заданного набора чисел $\{\lambda(k)\}_{k=-n}^{n} \subset \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, рассмотрим оператор $H : \mathscr{F}_n \to \mathscr{F}_n$, который представлен формулой

$$H(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \lambda(k) c_k(f) e^{ikt}, \quad f \in \mathscr{F}_n. \tag{3.1}$$

Рассмотрим вопрос существования таких чисел $\tau \in \mathbb{R}$ и $\{\Lambda_k\}_{k=0}^{2n-1} \subset \mathbb{C}$, что для любых $f \in \mathscr{F}_n$ и $t \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$H(f)(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} \Lambda_k f\Big(t - \tau + \frac{k\pi}{n}\Big). \tag{3.2}$$

Выполнение тождества (3.2) для любого полинома $f \in \mathscr{F}_n$ эквивалентно выполнению этого тождества для базисных гармоник $f(t) = e^{imt}$, $m \in \mathbb{Z}$, $|m| \le n$, что в свою очередь эквивалентно разрешимости линейной системы $(2n+1)$ уравнений с $2n$ неизвестными:

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \Lambda_k e^{imk\pi/n} = \lambda(m) e^{im\tau}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad |m| \le n. \tag{3.3}$$

Левые части этих уравнений при $m = -n$ и $m = n$ совпадают. Поэтому необходимо должно выполняться условие $\lambda(n)e^{in\tau} = \lambda(-n)e^{-in\tau}$. Существование такого $\tau \in \mathbb{R}$ эквивалентно равенству $|\lambda(n)| = |\lambda(-n)|$. Предположим, что $\lambda(n)e^{in\tau} = \lambda(-n)e^{-in\tau}$. Тогда в (3.3) можно оставить $2n$ уравнений при $m = -n, \dots, n-1$. Определитель этой системы $\det(\{x_m^k\})$, $m, k = 0, \dots, 2n-1$, где $x_m = e^{i(m-n)\pi/n}$, это определитель Вандермонда. Если $m, j = 0, \dots, 2n-1$ и $m \ne j$, то $x_m/x_j = e^{i(m-j)\pi/n} \ne 1$. Поэтому определитель системы отличен от нуля, и, значит, система (3.3) имеет единственное решение, которое легко можно найти, если в равенстве (3.2) взять полином

$$g_n(t) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} e^{ikt} + \frac{1}{2}(e^{int} + e^{-int}) = \frac{\sin(nt)\cos(t/2)}{\sin(t/2)}$$

и $t = \tau - j\pi/n$, $j \in \mathbb{Z}$. Надо только учесть, что $g_n(j\pi/n) = 0$, если $j \in \mathbb{Z}$, $j/2n \notin \mathbb{Z}$, и $g_n(j\pi/n) = 2n$, если $j/2n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, доказана основная часть следующего утверждения.

Предложение 1. *Для оператора* (3.1) *и числа* $\tau \in \mathbb{R}$ *следующие условия эквивалентны*:

(1) *существуют числа* $\{\Lambda_k\}_{k=0}^{2n-1} \subset \mathbb{C}$ *такие, что равенство* (3.2) *справедливо для любого полинома* $f \in \mathscr{F}_n$;

(2) *выполняется равенство* $\lambda(n)e^{in\tau} = \lambda(-n)e^{-in\tau}$.

При выполнении условия $\lambda(n)e^{in\tau} = \lambda(-n)e^{-in\tau}$ *числа* $\{\Lambda_k\}_{k=0}^{2n-1}$ *определяются однозначно по формуле*

$$\Lambda_j = \frac{1}{2n} K(\tau - j\pi/n),\ j \in \mathbb{Z}; \quad K(t) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \lambda(k) e^{ikt} + \frac{1}{2}(\lambda(n)e^{int} + \lambda(-n)e^{-int}). \tag{3.4}$$

Кроме того, числа $\{\Lambda_k\}_{k=0}^{2n-1}$ *также могут быть вычислены по формуле*

$$\Lambda_j = \frac{(-1)^j}{2n} Q_\gamma(\tau - j\pi/n),\ j \in \mathbb{Z}, \gamma \in \mathbb{C},$$

$$Q_\gamma(t) = \lambda(0)\cos n(t-\tau) + \gamma \sin n(t-\tau) + \lambda(n)e^{in\tau} + \sum_{p=1}^{n-1} \left(\lambda(n-p)e^{in\tau}e^{-ipt} + \lambda(p-n)e^{-in\tau}e^{ipt}\right). \tag{3.5}$$

Равенство (3.5) вытекает из (3.4), так как при $t_j = \tau - j\pi/n$, $j \in \mathbb{Z}$, имеем

$$\begin{aligned} K(t_j) = \lambda(0) + \frac{\lambda(n)e^{int_j} + \lambda(-n)e^{-int_j}}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(\lambda(k)e^{ikt_j} + \lambda(-k)e^{-ikt_j}) \\ = \lambda(0) + (-1)^j\lambda(n)e^{in\tau} + \sum_{p=1}^{n-1}(\lambda(n-p)e^{i(n-p)t_j} + \lambda(p-n)e^{-i(n-p)t_j}) \\ = \lambda(0) + (-1)^j\lambda(n)e^{in\tau} + (-1)^j\sum_{p=1}^{n-1}\left(\lambda(n-p)e^{in\tau}e^{-ipt_j} + \lambda(p-n)e^{-in\tau}e^{ipt_j}\right). \end{aligned}$$

Из последнего равенства следует, что $K(t_j) = (-1)^j Q_\gamma(t_j)$. Здесь мы учли, что $(-1)^j\lambda(0) = H_\gamma(t_j)$, $j \in \mathbb{Z}$, $\gamma \in \mathbb{C}$, где $H_\gamma(t) = \lambda(0)\cos n(t-\tau) + \gamma \sin n(t-\tau)$. $\square$

Для удобства мы всегда считаем, что набор чисел $\{\Lambda_k\}_{k=0}^{2n-1} \subset \mathbb{C}$ продолжен на множество всех целочисленных индексов $k \in \mathbb{Z}$ с периодом $2n$, т. е. $\Lambda_{k+2n} = \Lambda_k$ для всех $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 4. *Пусть для оператора H вида* (3.1) *и для некоторого $\tau \in \mathbb{R}$ выполнено условие $\lambda(n)e^{in\tau} = \lambda(-n)e^{-in\tau}$ и $\varkappa := |\Lambda_0| + \ldots + |\Lambda_{2n-1}| > 0$, где числа $\{\Lambda_k\}_{k=0}^{2n-1}$ определяются по формуле* (3.4). *Пусть функция J выпукла вниз и не убывает на $[0, +\infty)$.*

Тогда справедливы неравенства (1.1) *и* (1.2). *Пусть $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{2n-1}$ — такие комплексные числа, что $|\varepsilon_k| = 1$ и $\Lambda_k = \varepsilon_k|\Lambda_k|$, $k \in \mathbb{Z}$, а $U(H)$ — множество всех $k \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$, для которых $\Lambda_k \neq 0$. Тогда справедливы утверждения*:

(1) *При $p = \infty$ неравенство* (1.2) *обращается в равенство для некоторого полинома $f \in \mathscr{F}_n$ $\iff$ для некоторых $\eta, \delta \in \mathbb{R}$ равенство $\varepsilon_k f(\eta + k\pi/n) = e^{i\delta}\|f\|_\infty$ выполняется для всех целых $k \in U(H)$.*

(2) i) *При $p = 1$ неравенство* (1.2) *обращается в равенство для некоторого полинома $f \in \mathscr{F}_n$ $\iff$ для любого $t \in \mathbb{R}$ найдется число $\delta(t) \in \mathbb{R}$ такое, что тождество $\varepsilon_k f(t + k\pi/n) \equiv e^{i\delta(t)}|f(t + k\pi/n)|$ выполняется для всех целых $k \in U(H)$.*

ii) *Если неравенство* (1.2) *при $p = 1$ обращается в равенство для некоторого полинома f, степень которого равна m и $0 \le m \le n-1$, то неравенство* (1.2) *при $p = 1$ обращается в равенство для любого полинома вида $cf(t)g(t)$, где $c \in \mathbb{C}$, $g \in \mathscr{F}_{n-m}$ и $g(t) \ge 0$, $t \in \mathbb{R}$.*

(3) *Если функция J не убывает на $[0, +\infty)$ и строго выпукла вниз в каждой точке интервала $(0, +\infty)$, то неравенство* (1.1) (*или неравенство* (1.2) *при $1 < p < \infty$*) *обращается в равенство для некоторого полинома $f \in \mathscr{F}_n$ $\iff$ функции $\varepsilon_k f(t + k\pi/n)$ тождественно равны между собой на $\mathbb{R}$ для всех целых $k \in U(H)$.*

(4) *Если функция J выпукла вниз и строго возрастает на $[0, +\infty)$, а неравенство* (1.1) (*или неравенство* (1.2) *при некотором $p \in (1, \infty)$*) *обращается в равенство для некоторого полинома $f \in \mathscr{F}_n$, то и неравенство* (1.2) *при $p = 1$ также обращается в равенство для этого полинома f.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 4 повторяет доказательство теорем 2, 4 и замечаний 2, 4, 5 из [15] для оператора $A_{\varepsilon,\tau}$, в определении которого из [15, (1.1)] функцию $e^{-i\tau u}$ надо заменить на функцию $e^{-ih(u)}$, где h — произвольная μ-измеримая, вещественнозначная функция на $\mathbb{R}$. Эти результаты надо применить для случая, когда мера μ дискретная и сосредоточена в точках $t_k = -\tau + k\pi/n$, $\mu(\{t_k\}) = |\Lambda_k|$, $e^{-ih(t_k)} = \varepsilon_k$, $k = 0, \ldots, 2n-1$. В этом случае $\varphi(x) \equiv |\Lambda_0|e^{it_0x} + \ldots + |\Lambda_{2n-1}|e^{it_{2n-1}x}$ и $\varphi(0) = |\Lambda_0| + \ldots + |\Lambda_{2n-1}| > 0$.

Теорема доказана.

Если для полинома $f \in \mathscr{F}_n$ неравенство (1.1) или (1.2) обращается в равенство, то этот полином будем называть экстремальным для соответствующего неравенства. Если для неравенства (1.1) или (1.2) существует ненулевой экстремальный полином, то соответствующее неравенство будем называть точным.

Предложение 2. *Пусть для оператора H вида* (3.1) *и для некоторого $\tau \in \mathbb{R}$ выполнено условие $\lambda(n)e^{in\tau} = \lambda(-n)e^{-in\tau}$ и $\varkappa = |\Lambda_0| + \ldots + |\Lambda_{2n-1}| > 0$, где числа $\{\Lambda_k\}_{k=0}^{2n-1}$ определяются по формуле* (3.4). *Пусть $m \in \mathbb{Z} \cap [-n, n]$. В этом случае $\varkappa = |\lambda(m)|$ тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{C}: \ |\varepsilon| = 1\colon \varepsilon \Lambda_k e^{imk\pi/n} \geq 0, \quad k = 0, \ldots, 2n-1. \tag{3.6}$$

При выполнении условия (3.6) *неравенства* (1.1) *и* (1.2) *являются точными и полином $f(t) = e^{imt}$ является экстремальным. Если условие* (3.6) *выполнено при $m = n$ или $m = -n$, то экстремальным будет любой полином вида $f(t) = \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\mu, \nu \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Первое утверждение в предложении 2 сразу получается из равенства (3.2) для базисной гармоники $f(t) = e^{imt}$:

$$|\lambda(m)| = |H(f)(t)| \equiv \Big| \sum_{k=0}^{2n-1} \Lambda_k e^{imk\pi/n} \Big| \leq \sum_{k=0}^{2n-1} |\Lambda_k| = \varkappa.$$

Если условие (3.6) выполнено при $m = n$ или $m = -n$, то для любого полинома вида $f(t) = \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\mu, \nu \in \mathbb{C}$, выполняются тождества $f(t + \pi k/n) \equiv (-1)^k f(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, и $|H(f)(t)| \equiv \varkappa |f(t - \tau)|$. Отсюда следует, что неравенства (1.1) и (1.2) обращаются в равенства. □

Отметим, что при каждом целом $m \in [-n, n]$ условие (3.6) реализуется для чисел $\{\lambda(k)\}_{k=0}^{2n-1}$, вычисленных по формуле (3.3), где $\Lambda_k = r_k e^{-imk\pi/n}$, $k = 0, \ldots, 2n-1$, а $\{r_k\}_{k=0}^{2n-1}$ — произвольный набор неотрицательных чисел.

Теорема 5. *Пусть для оператора H вида* (3.1) *и для некоторого $\tau \in \mathbb{R}$ выполнено условие $\lambda(n)e^{in\tau} = \lambda(-n)e^{-in\tau}$ и $\varkappa = |\Lambda_0| + \ldots + |\Lambda_{2n-1}| > 0$, где числа $\{\Lambda_k\}_{k=0}^{2n-1}$ определяются по формуле* (3.4), *а функция J выпукла вниз и строго возрастает на $[0, +\infty)$. Пусть выполняется условие*

$$\exists s \in \mathbb{Z}: \ \overline{\Lambda_s} \Lambda_{s+1} < 0. \tag{3.7}$$

Тогда следующие три условия эквивалентны:

(1) *одно из неравенств в* (1.1) *и* (1.2) *является точным*;

(2) $\varkappa = |\lambda(\pm n)|$;

(3) *выполняется условие*

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{C} \ |\varepsilon| = 1\colon \varepsilon \Lambda_k (-1)^k \geq 0, \quad k = 0, \ldots, 2n-1. \tag{3.8}$$

Если выполняется одно из этих трех условий, то все неравенства (1.1) *и* (1.2) *являются точными, а множество всех экстремальных полиномов в этих неравенствах совпадает со множеством функций вида $f(t) = \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\mu, \nu \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Пусть для некоторого целого $s \in \mathbb{Z}$ выполняется неравенство $\overline{\Lambda_s} \Lambda_{s+1} < 0$, а целые числа $k_1, k_2 \in [0, 2n-1)$ такие, что числа $m_1 = (s - k_1)/(2n)$ и $m_2 = (s + 1 - k_2)/(2n)$ являются целыми. Тогда $k_2 - k_1 = 2(m_1 - m_2)n + 1$ и $\Lambda_s = \Lambda_{k_1} = \varepsilon_{k_1} |\Lambda_{k_1}| \neq 0$ и $\Lambda_{s+1} = \Lambda_{k_2} = \varepsilon_{k_2} |\Lambda_{k_2}| \neq 0$. Поэтому $\overline{\varepsilon_{k_1}} \varepsilon_{k_2} < 0$, и, следовательно, $\overline{\varepsilon_{k_1}} \varepsilon_{k_2} = -1$.

Если полином $f \in \mathscr{F}_n$ является экстремальным для неравенства (1.2) при $p = \infty$, то по теореме 4 для некоторых $\eta, \delta \in \mathbb{R}$ равенство $\varepsilon_k f(\eta + k\pi/n) = e^{i\delta} \|f\|_\infty$ выполняется для

$k=k_1$ и $k=k_2$. Умножая оба этих равенства на $(-1)^s\,\overline{\varepsilon_{k_1}}$, получаем два равенства, в которых $\delta_0=\arg((-1)^s\,\overline{\varepsilon_{k_1}})$:

$$(-1)^s f(\eta+s\pi/n)=(-1)^s f(\eta+k_1\pi/n)=e^{i(\delta_0+\delta)}\|f\|_\infty,$$
$$(-1)^{s+1} f(\eta+(s+1)\pi/n)=(-1)^s\,\overline{\varepsilon_{k_1}}\,\varepsilon_{k_2} f(\eta+k_2\pi/n)=e^{i(\delta_0+\delta)}\|f\|_\infty.$$

Применяя теорему 1, получаем, что $f(t)=\mu e^{int}+\nu e^{-int}$, $\mu,\nu\in\mathbb{C}$.

Если полином $f\in\mathscr{F}_n$ является экстремальным для неравенства (1.2) при $p=1$, то по теореме 4 для любого $t\in\mathbb{R}$ найдется число $\delta(t)\in\mathbb{R}$ такое, что тождество $\varepsilon_k f(t+k\pi/n)\equiv e^{i\delta(t)}|f(t+k\pi/n)|$ выполняется для $k=k_1$ и $k=k_2$. Умножая оба этих тождества на $(-1)^s\,\overline{\varepsilon_{k_1}}$, получаем два тождества, в которых $\delta_0(t)=\delta_0+\delta(t)$, $\delta_0=\arg((-1)^s\,\overline{\varepsilon_{k_1}})$:

$$(-1)^s f(t+s\pi/n)\equiv e^{i\delta_0(t)}|f(t+k_1\pi/n)|\equiv e^{i\delta_0(t)}|f(t+s\pi/n)|,$$
$$(-1)^{s+1} f(t+(s+1)\pi/n)\equiv e^{i\delta_0(t)}|f(t+k_2\pi/n)|\equiv e^{i\delta_0(t)}|f(t+(s+1)\pi/n)|.$$

Применяя теорему 3, получаем, что $f(t)=\mu e^{int}+\nu e^{-int}$, $\mu,\nu\in\mathbb{C}$.

Докажем импликацию (1) $\Rightarrow$ (2) . Если одно из неравенств в (1.1) и (1.2) является точным и ненулевой полином $f\in\mathscr{F}_n$ является экстремальным в этом неравенстве, то он является экстремальным в неравенстве (1.2), или при $p=\infty$ или при $p=1$ (см. утверждение (4) в теореме 4). По доказанному выше $f(t)=\mu e^{int}+\nu e^{-int}$, $\mu,\nu\in\mathbb{C}$. Так как для такого полинома выполняется тождество

$$H(f)(t)=\lambda(n)\mu e^{int}+\lambda(-n)\nu e^{-int}=\lambda(n)e^{in\tau}f(t-\tau),$$

то $||H(f)||_p=|\lambda(n)|\,||f||_p$ при любом $1\le p\le\infty$. Но или при $p=\infty$, или при $p=1$ выполняется равенство $||H(f)||_p=\varkappa||f||_p$. Так как полином f ненулевой, то $\varkappa=|\lambda(n)|=|\lambda(-n)|$. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) доказана.

Эквивалентность условий (2) и (3) и импликация (3) $\Rightarrow$ (1) доказаны в предложении 2 при $m=n$ и без предположения выполнения условия (3.7). Значит, эквивалентность условий (1), (2) и (3) в теореме доказана.

Если выполняется одно из условий (1)–(3), то из условия (3.8) вытекает (см. предложение 2 при $m=n$), что все неравенства (1.1) и (1.2) являются точными и любой полином вида $f(t)=\mu e^{int}+\nu e^{-int}$, $\mu,\nu\in\mathbb{C}$ является экстремальным в этих неравенствах, а других экстремальных полиномов в этих неравенствах нет (см. доказательство импликации (1) $\Rightarrow$ (2)).

Теорема доказана.

Замечание 1. Если выполняется условие (3.8), то оно выполняется для всех $k\in\mathbb{Z}$. Тогда $\overline{\Lambda_s}\Lambda_{s+1}=-\overline{\varepsilon\Lambda_s(-1)^s}\cdot\varepsilon\Lambda_{s+1}(-1)^{s+1}\le 0$ для всех $s\in\mathbb{Z}$. Поэтому *при выполнении условия* (3.8) *невыполнение условия* (3.7) *эквивалентно условию* $\Lambda_s\Lambda_{s+1}=0$, $s\in\mathbb{Z}$.

Теорема 6. *Пусть для оператора H вида* (3.1) *и для некоторого $\tau\in\mathbb{R}$ выполнено условие $\lambda(n)e^{in\tau}=\lambda(-n)e^{-in\tau}$ и $\varkappa=|\Lambda_0|+\ldots+|\Lambda_{2n-1}|>0$, где числа $\{\Lambda_k\}_{k=0}^{2n-1}$ определяются по формуле* (3.4). *Пусть для полинома Q_γ из* (3.5) *выполнено условие*

$$\exists\gamma,\varepsilon\in\mathbb{C}:\ |\varepsilon|=1\colon \varepsilon Q_\gamma(t)\ge 0\quad\forall t\in\mathbb{R}. \tag{3.9}$$

Тогда выполняется условие (3.8), *и, значит, $\varkappa=|\lambda(n)|$, а неравенства* (1.1) *и* (1.2) *являются точными, и экстремальным будет любой полином вида $f(t)=\mu e^{int}+\nu e^{-int}$, $\mu,\nu\in\mathbb{C}$.*

Кроме того, справедливы следующие утверждения:

(1) *Пусть не выполняется условие*

$$\lambda(n)e^{in\tau}=\delta\lambda(0)\ne 0,\quad \delta=\pm1;\quad \lambda(k)=0,\quad 1\le|k|\le n-1,\quad n\ge 2. \tag{3.10}$$

Если функция J выпукла вниз и строго возрастает на $[0,+\infty)$, то в неравенствах (1.1) *и* (1.2) *экстремальными являются только полиномы вида $f(t)=\mu e^{int}+\nu e^{-int}$, $\mu,\nu\in\mathbb{C}$.*

(2) *Пусть выполняется условие* (3.10). *Тогда для полиномов* $f(t) = \alpha + \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\alpha, \mu, \nu \in \mathbb{C}$, *неравенства* (1.1) *и* (1.2) *обращаются в равенство. Если функция* J *не убывает на* $[0, +\infty)$ *и строго выпукла вниз в каждой точке интервала* $(0, +\infty)$, *то в неравенствах* (1.1) *и* (1.2) *при* $1 < p < \infty$ *экстремальными являются только полиномы вида* $f(t) = \alpha + \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\alpha, \mu, \nu \in \mathbb{C}$.

- *При* $p = \infty$ *экстремальными полиномами в неравенстве* (1.2) *являются только полиномы вида* $f(t) = e^{i\delta}(a \cos n(t - \eta) + b + iq(t))$, $a, b, \delta, \eta \in \mathbb{R}$, *где* $q(t)$ *— произвольный вещественный полином из* $\mathscr{F}_n$, *удовлетворяющий неравенству* $q^2(t) \le (|a| + |b|)^2 - (a \cos n(t - \eta) + b)^2$, $t \in \mathbb{R}$.
- *При* $p = 1$ *кроме полиномов вида* $f(t) = \alpha + \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\alpha, \mu, \nu \in \mathbb{C}$, *экстремальными в неравенстве* (1.2) *являются и полиномы вида* $cg(t)$, *где* $c \in \mathbb{C}$, *а* g *— произвольный неотрицательный полином из* $\mathscr{F}_n$.

Сначала докажем лемму.

Лемма 1. *Пусть для оператора* H *вида* (3.1) *и для некоторого* $\tau \in \mathbb{R}$ *выполнено условие* $\lambda(n)e^{in\tau} = \lambda(-n)e^{-in\tau}$ *и* $\varkappa = |\Lambda_0| + \ldots + |\Lambda_{2n-1}| > 0$, *где числа* $\{\Lambda_k\}_{k=0}^{2n-1}$ *определяются по формуле* (3.4). *Пусть для полинома* Q_γ *из* (3.5) *выполнено условие* (3.9). *Тогда невыполнение условия* (3.7) *эквивалентно выполнению условия* (3.10).

Доказательство. Предположим, что условие (3.7) не выполняется. Тогда (см. замечание 1) $\Lambda_s \Lambda_{s+1} = 0$, $s \in \mathbb{Z}$. Так как $\varkappa = |\Lambda_0| + \ldots + |\Lambda_{2n-1}| > 0$, то $\Lambda_q \neq 0$ при некотором $q \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим полином $f(t) = \varepsilon Q_\gamma(\tau - t - q\pi/n)$. Он обладает следующими свойствами: 1) $f \in \mathscr{F}_n$; 2) $f(t) \ge 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$; 3) $f(s\pi/n) = \varepsilon 2n(-1)^{s+q}\Lambda_{s+q}$; 4) $f(0) > 0$; 5) $f(s\pi/n) \times f((s+1)\pi/n) = 0$ для всех $s \in \mathbb{Z}$. Обозначим через m количество целых чисел $s \in [0, 2n]$, для которых $f(s\pi/n) \neq 0$. Занумеруем эти числа в порядке возрастания: $0 = s_1 < \ldots < s_m = 2n$. Для оставшихся $2n + 1 - m$ целых $s \in (0, 2n)$ выполняется равенство $f(s\pi/n) = f'(s\pi/n) = 0$. Так как $f(t) \not\equiv 0$, то $2(2n + 1 - m) \le 2n$. Число оставшихся целых $s \in (s_j, s_{j+1})$, $1 \le j \le m - 1$, равно $s_{j+1} - s_j - 1 \ge 1$ (иначе выполняется условие (3.7)). Учитывая это, получаем неравенства

$$m - 1 \le \sum_{j=1}^{m-1} (s_{j+1} - s_j - 1) = 2n + 1 - m \le n.$$

Из этих неравенств вытекает, что $m = n + 1$ и неравенства обращаются в равенство. Поэтому $s_{j+1} = s_j + 2$, и, значит, $f(\xi_k) = f'(\xi_k) = 0$, где $\xi_k = (2k - 1)\pi/n$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда $f(t) \equiv C(1 + \cos nt)$ для некоторого числа $C > 0$ (см., например, [5, Ch. X, § 1, (1.7)]) и

$$Q_\gamma(t) = \overline{\varepsilon} f(-t + \tau + q\pi/n) = \overline{\varepsilon} C(1 + (-1)^q \cos n(t - \tau)).$$

Сравнивая представление этого полинома по формуле (3.5), получаем, что $\gamma = 0$ и выполняются условие (3.10).

Если выполнено условие (3.10), то полином, вычисленный по формуле (3.5), при $\gamma = 0$ равен $Q_0(t) = \lambda(0)(1 \pm \cos n(t - \tau))$. Тогда $\Lambda_s \Lambda_{s+1} = 0$, $s \in \mathbb{Z}$. Поэтому условие (3.7) не выполняется (см. замечание 1). □

Доказательство теоремы 6. Выполнение условия (3.8) вытекает из равенства (3.5), а первая часть теоремы следует из предложения 2 при $m = n$.

Докажем утверждение (1). Пусть условие (3.10) не выполняется. Тогда по лемме 1 выполняется условие (3.7), и можно применить теорему 5.

Докажем утверждение (2). Пусть выполняется условие (3.10). Тогда $2n\Lambda_j = (-1)^j Q_0(\tau - j\pi/n)$, $j \in \mathbb{Z}$, где $Q_0(t) = \lambda(0)(1 + \delta \cos n(t - \tau))$, $\delta = \pm 1$. Поэтому в критерии экстремального полинома в неравенствах (1.1) и (1.2) (теорема 4) в качестве множества U выступает или множество всех нечетных целых чисел от 1 до $2n-1$ (если $\delta=-1$), или множество всех четных целых чисел от 0 до $2n-2$ (если $\delta=1$). Для полиномов $f(t)=\alpha+\mu e^{int}+\nu e^{-int}$, $\alpha,\mu,\nu\in\mathbb{C}$, неравенства (1.1) и (1.2) обращаются в равенства, так как для таких полиномов справедливо или тождество $H(t)\equiv\lambda(0)f(t-\tau+\pi/n)$ (если $\delta=-1$), или тождество $H(t)\equiv\lambda(0)f(t-\tau)$ (если $\delta=1$).

Если функция J не убывает на $[0,+\infty)$ и строго выпукла вниз в каждой точке интервала $(0,+\infty)$, а полином $f\in\mathscr{F}_n$ является экстремальным в неравенстве (1.1) или (1.2) при некотором $1<p<\infty$, то функции $(-1)^s f\left(t+\dfrac{\pi s}{n}\right)$ должны быть тождественно равны между собой на $\mathbb{R}$ для всех $s\in U$. Поэтому полином f имеет период $2\pi/n$, и, значит, коэффициенты Фурье $c_k(f)=0$ при $1\le|k|<n$. Следовательно, f имеет вид $f(t)=\alpha+\mu e^{int}+\nu e^{-int}$, $\alpha,\mu,\nu\in\mathbb{C}$.

Утверждение (2) для случая $p=\infty$ вытекает из теоремы 2, а для случая $p=1$ — из утверждения ii) теоремы 4.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Условие (3.9) для более узкого класса операторов впервые появилось в работе 1928 г. Г. Сегё [4], где оно применяется для доказательства неравенства (1.2) при $p=\infty$. В 1935 г. С. Н. Бернштейн [17] распространил условие Г. Сегё (3.9) на более широкий класс операторов и заменил его на условие (3.8) в терминах полинома Q_γ из равенства (3.5). Результат С. Н. Бернштейна [17] по существу эквивалентен предложению 1 при $m=\pm n$ в случае неравенства (1.2) при $p=\infty$ (см. также работу С. Т. Завалищина 1965 г. [18] и теорему 3 в работе С. Б. Стечкина, Л. В. Тайкова 1965 г. [19]).

З а м е ч а н и е 3. Если взять $\lambda(\pm n)=1$ и $\lambda(k)=0$ при $|k|\le n-1$, то $\tau=0$ и для оператора H, построенного по формуле (3.1), полином K и числа Λ_j из (3.4) равны соответственно $K(t)=\cos nt$ и $\Lambda_j=(-1)^j/(2n)$. В этом случае очевидно выполняются условия (3.7) и (3.8). Поэтому применима теорема 5. Учитывая, что $H(g)\equiv0$ для любого полинома $g\in\mathscr{F}_{n-1}$, получаем, что для любых полиномов $f_{\mu,\nu}(t)=\mu e^{int}+\nu e^{-int}$, $\mu,\nu\in\mathbb{C}$, и $g\in\mathscr{F}_{n-1}$ выполняются неравенства

$$\int\limits_{\mathbb{T}} J\left(|f_{\mu,\nu}(t)|\right)\,dt=\int\limits_{\mathbb{T}} J\left(|H(f_{\mu,\nu}+g)(t)|\right)\,dt\le\int\limits_{\mathbb{T}} J\left(|f_{\mu,\nu}(t)+g(t)|\right)\,dt,$$

$$\|f_{\mu,\nu}\|_p=\|H(f_{\mu,\nu}+g)\|_p\leqslant\|f_{\mu,\nu}+g\|_p,\quad 1\leqslant p\leqslant\infty,$$

где функция J выпукла вниз и не убывает на $[0,+\infty)$. Если функция J выпукла вниз и строго возрастает на $[0,+\infty)$, то эти неравенства обращаются в равенства только для нулевого полинома $g\equiv0$. Для вещественных полиномов это результат С.Н. Бернштейна 1930–1937 гг. (см. “Введение” монографии [20]). С подробным обзором таких и других неравенств в эпоху П. Л. Чебышева и братьев Марковых можно ознакомиться в обзоре Д. В. Горбачева 2021 г. [21].

З а м е ч а н и е 4. Если взять $\lambda(\pm n)=\lambda(0)=1$ и $\lambda(k)=0$ при $1\le|k|\le n-1$, $n\ge2$, то $\tau=0$ и для оператора H, построенного по формуле (3.1), полином Q_0 и числа Λ_j из (3.5) равны соответственно $Q_0(t)=1+\cos nt$ и $\Lambda_j=(-1)^j(1+(-1)^j)/(2n)$. В этом случае очевидно выполняются условия (3.9) и (3.10) . Поэтому можно применить утверждение (2) теоремы 6. Учитывая, что $H(g)\equiv0$ для любого полинома $g\in\mathscr{F}^0_{n-1}:=\{g\in\mathscr{F}_{n-1},\ c_0(g)=0\}$, получаем, что для любых полиномов $f_{\alpha,\mu,\nu}(t)=\alpha+\mu e^{int}+\nu e^{-int}$, $\alpha,\mu,\nu\in\mathbb{C}$, и $g\in\mathscr{F}^0_{n-1}$ выполняются неравенства

$$\int\limits_{\mathbb{T}} J\left(|f_{\alpha,\mu,\nu}(t)|\right)\,dt=\int\limits_{\mathbb{T}} J\left(|H(f_{\alpha,\mu,\nu}+g)(t)|\right)\,dt\le\int\limits_{\mathbb{T}} J\left(|f_{\alpha,\mu,\nu}(t)+g(t)|\right)\,dt,$$

$$\|f_{\alpha,\mu,\nu}\|_p=\|H(f_{\alpha,\mu,\nu}+g)\|_p\leqslant\|f_{\alpha,\mu,\nu}+g\|_p,\ 1\leqslant p\leqslant\infty,$$

где функция J выпукла вниз и не убывает на $[0,+\infty)$. Если функция J не убывает на $[0,+\infty)$ и строго выпукла вниз в каждой точке интервала $(0,+\infty)$, то первое неравенство и второе при $1 < p < \infty$ обращаются в равенства только для нулевого полинома ($g \equiv 0$). При $p = \infty$ неравенство обращается в равенство только для таких полиномов $g \in \mathscr{F}_{n-1}^0$, для которых полином $f = f_{\alpha,\mu,\nu} + g$ имеет вид, указанный в теореме 6. При $p = 1$ и $\alpha \neq 0$ полное описание таких полиномов $g \in \mathscr{F}_{n-1}^0$ неизвестно.

4. Примеры операторов, удовлетворяющих условиям теоремы 6

Если для некоторого $\tau \in \mathbb{R}$ выполнено равенство $\lambda(n)e^{in\tau} = \lambda(-n)e^{-in\tau}$, то для выполнения условия (3.9) полином $\varepsilon Q_\gamma(t)$ необходимо должен принимать на $\mathbb{R}$ вещественные значения, что эквивалентно выполнению равенств: $\overline{\lambda(k)} = \varepsilon^2\lambda(-k)$, $|k| \leq n$, $\overline{\gamma} = \varepsilon^2\gamma$. Рассмотрим случай, когда $\varepsilon = 1$. Пусть набор чисел $\{\lambda(k)\}_{k=-n}^n \subset \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, задан по формуле

$$\begin{aligned} &\lambda(k) = g(k)(\cos\beta + i\,\mathrm{sign}\,k\,\sin\beta), \quad k \in \mathbb{N}, \quad |k| \leq n, \\ &\{g(k)\}_{k=-n}^n \subset \mathbb{C}, \quad \overline{g(k)} = g(-k), \quad |k| \leq n, \quad \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Очевидно, что $g(0) \in \mathbb{R}$, $\lambda(0) = g(0)\cos\beta$ и $\overline{\lambda(k)} = \lambda(-k)$, $|k| \leq n$. Возьмем такое число $\tau_0 \in \mathbb{R}$, для которого выполняется равенство $g(n)e^{in\tau_0} = |g(n)|$ (если $g(n) > 0$, то $\tau_0 = 0$). Число $\tau = \tau(\beta) \in \mathbb{R}$, для которого выполняется равенство $\lambda(n)e^{in\tau} = \lambda(-n)e^{-in\tau}$, выбираем из условия $\beta + n\tau = n\tau_0$. Тогда $\lambda(n)e^{in\tau} = g(n)e^{in\tau_0} = |g(n)|$. Полином Q_γ из (3.5) имеет вид

$$Q_\gamma(t) = g(0)\cos\beta\cos n(t-\tau) + \gamma\sin n(t-\tau) + g(n)e^{in\tau_0}$$
$$+\sum_{p=1}^{n-1}\left(g(n-p)e^{in\tau_0}e^{-ipt} + g(p-n)e^{-in\tau_0}e^{ipt}\right).$$

В нашем случае удобно взять $\gamma = g(0)\sin\beta$. Тогда

$$\begin{aligned} &Q(t) = Q_\gamma(t) = \sum_{p=-n}^{n}\varphi(p)e^{-ipt}; \quad \varphi(-p) = \overline{\varphi(p)}, \quad |p| \leq n; \\ &\varphi(p) = g(n-p)e^{in\tau_0}, \quad 0 \leq p \leq n-1; \quad \varphi(n) = \frac{g(0)}{2}e^{in\tau_0}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Полином (4.2) не зависит от $\beta \in \mathbb{R}$. Поэтому, если $Q(t) \geq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$, то условие (3.9) выполняется для оператора $H = H_\beta$ вида (3.1) с коэффициентами (4.1), где β — произвольное вещественное число, и, следовательно, для таких операторов применима теорема 6. Если дополнительно $|g(0)| < |g(n)| = \varkappa$ или $g(k) \neq 0$ для некоторого натурального $k \in [1, n-1]$, $n \geq 2$, то для оператора $H = H_\beta$ при любом $\beta \in \mathbb{R}$ условие (3.10) не выполняется, и, значит, в неравенствах (1.1) (если функция J выпукла вниз и строго возрастает на $[0, +\infty)$) и (1.2) экстремальными являются только полиномы вида $f(t) = \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\mu, \nu \in \mathbb{C}$. Если $|g(0)| \geq |g(n)| = \varkappa > 0$ и $g(k) = 0$ для всех натуральных $k \in [1, n-1]$, $n \geq 2$, то ответ такой же кроме исключительного случая, когда $|\cos\beta| = |g(n)|/|g(0)|$ (см. утверждение (2) в теореме 6).

В связи с проверкой условий в теореме 6 полезным является утверждение 3, связанное с положительно определенными функциями. Пусть G — абелева группа. Функция $f : G \to \mathbb{C}$ называется положительно определенной на G, если для любого натурального m, для каждого набора точек $\{x_j\}_{j=1}^m \subset G$ и $\{c_j\}_{j=1}^m \subset \mathbb{C}$ выполняется неравенство $\sum_{k,j=1}^m c_k\overline{c_j}f(x_k - x_j) \geq 0$. Множество всех таких функций обозначим символом $\Phi(G)$. Если G_1 — подгруппа G, то очевидно, что $\Phi(G) \subset \Phi(G_1)$. В частности, $\Phi(\mathbb{R}) \subset \Phi(\mathbb{Z})$. Из критерия Ф. Рисса—Герглотца следует, что *если* $\sum_{p\in\mathbb{Z}}|\varphi(p)| < +\infty$, *то* $\varphi \in \Phi(\mathbb{Z}) \iff \sum_{p\in\mathbb{Z}}\varphi(p)e^{-ipt} \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$. Из критерия Бохнера—Хинчина следует, что *если* $\varphi \in C(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$, *то* $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}) \iff$ *преобразование Фурье функции* φ *неотрицательно, т. е.* $\widehat{\varphi}(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Предложение 3. *Пусть* $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *и* $\varphi(p) = 0$ *при* $|p| \geq n+1$, *а* $l_\varphi(x)$ — *кусочно-линейная функция с узлами в целых точках и* $l_\varphi(p) = \varphi(p)$ *для всех* $p \in \mathbb{Z}$. *Тогда следующие три условия эквиваленты*:

(1) $\sum_{p=-n}^{n} \varphi(p) e^{-ipt} \geq 0$ *для всех* $t \in \mathbb{R}$;
(2) $\varphi \in \Phi(\mathbb{Z})$;
(3) $l_\varphi \in \Phi(\mathbb{R})$.

Доказательство. Эквивалентность условий (1) и (2) вытекает из критерия Ф. Рисса — Герглотца, а эквивалентность условий (2) и (3) доказал Шепп (более подробно и соответствующие ссылки см. в [22]). □

Пример 1. Из предложения 3 вытекает хорошо известный результат Фейера. Пусть для чисел из (4.1) выполняются условия: $g(-k) = g(k) \in \mathbb{R}$ при $0 \leq k \leq n$, $g(n) > 0$. Тогда $\tau_0 = 0$, а числа из (4.2) равны: $\varphi(k) = g(n - |k|)$, $|k| \leq n - 1$ и $\varphi(\pm n) = g(0)/2$. Пусть $l_\varphi(x)$ — четная, кусочно-линейная функция с узлами в целых точках и $l_\varphi(k) = \varphi(k)$, $|k| \leq n$, $l_\varphi(k) = 0$ при $|k| \geq n+1$. Если функция $l_\varphi(x)$ не возрастает и выпукла вниз на отрезке $[0, n+1]$, то по теореме Пойа $l_\varphi \in \Phi(\mathbb{R})$, и, значит, для полинома Q из (4.2) выполняется неравенство $Q(t) \geq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$ (это и есть теорема Фейера). Поэтому теорема 6 применима к оператору $H = H_\beta$ с коэффициентами $\lambda(k) = g(|k|)(\cos\beta + i \operatorname{sign} k \sin\beta)$, $|k| \leq n$. Так как функция $l_\varphi(x)$ не возрастает и выпукла вниз на отрезке $[0, n+1]$, то для оператора $H = H_\beta$ при любом $\beta \in \mathbb{R}$ условие (3.10) не выполняется, и, значит, в неравенствах (1.1) (если функция J выпукла вниз и строго возрастает на $[0, +\infty)$) и (1.2) экстремальными являются только полиномы вида $f(t) = \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\mu, \nu \in \mathbb{C}$.

Теорема 7. *Пусть функция* g *непрерывна, не убывает, выпукла вниз и* $g(t) \not\equiv 0$ *на отрезке* $[0, n]$, $n \in \mathbb{N}$, $g(0) = 0$, *а* $\lambda(k) = g(|k|) e^{i\beta \operatorname{sign} k}$, $|k| \leq n$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тогда условие* $\lambda(n) e^{in\tau} = \lambda(-n) e^{-in\tau}$ *выполняется при* $\tau = -\beta/n$. *В этом случае* $\varkappa = |\Lambda_0| + \ldots + |\Lambda_{2n-1}| = |\lambda(n)| = g(n) > 0$, *и для оператора* $H : \mathscr{F}_n \to \mathscr{F}_n$, *который задан формулой* (3.1) *с помощью набора чисел* $\{\lambda(k)\}_{k=-n}^{n}$, *неравенства* (1.1) *и* (1.2) *являются точными, и экстремальным будет любой полином вида* $f(t) = \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\mu, \nu \in \mathbb{C}$. *Кроме того, в неравенствах* (1.1), *если функция* J *выпукла вниз и строго возрастает на* $[0, +\infty)$, *и* (1.2) *других экстремальных полиномов нет.*

Доказательство. Так как $g(0) = 0$, то равенства $g(|k|) e^{i\beta \operatorname{sign} k} = g(|k|)(\cos\beta + i \operatorname{sign} k \sin\beta)$ выполняются при всех $|k| \leq n$. По теореме Пойа функция $\varphi(t) = g(n - |t|)$ при $|t| \leq n$ и $\varphi(t) = 0$ при $|t| > n$ является положительно определенной на $\mathbb{R}$, и, значит, $\varphi \in \Phi(\mathbb{Z})$. Далее, как и в примере 1, применяем теорему 6.

Теорема доказана.

Если в теореме 7 взять $g(t) = t^r$, $r \geq 1$, то для оператора дробной производной получим следующее следствие.

Следствие 3. *Для оператора* $H(f)(t) = f^{(r,\beta)}(t)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $r \geq 1$, *неравенства* (1.1) *и* (1.2) *с* $\varkappa = n^r$ *являются точными, и экстремальным будет любой полином вида* $f(t) = \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\mu, \nu \in \mathbb{C}$. *Кроме того, в неравенствах* (1.1), *если функция* J *выпукла вниз и строго возрастает на* $[0, +\infty)$, *и* (1.2) *других экстремальных полиномов нет.*

Пример 2. Отметим, что условие (3.9) было использовано в работе С. Т. Завалищина [18] для получения точного неравенства (1.2) при $p = \infty$ для оператора $H = f^{(r)} - h^{-r}\delta_h^r$, где $r \in \mathbb{N}$, $h > 0$, δ_h^r — оператор симметрической разности r-го порядка: $\delta_h^1(f)(t) = f(t + h/2) - f(t - h/2)$ и $\delta_h^r := \delta_h^1(\delta_h^{r-1})$, $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. Рассмотрим более общий оператор $H_{r,\beta,h}$, который задан формулой (3.1) с помощью набора чисел $\lambda(k) = g(|k|) e^{i\beta \operatorname{sign} k}$, $|k| \leq n$, $\beta \in \mathbb{R}$, где $g(t) = t^r - (2h^{-1}\sin(th/2))^r$, $0 \leq t \leq n$, $0 < h \leq \pi/n$, $r > 0$. При $\beta = r\pi/2$, $r \in \mathbb{N}$, этот оператор совпадает с оператором $f^{(r)} - h^{-r}\delta_h^r$. Несложно показать, что при $r = 1$ и $r \geq 2$

функция g удовлетворяет условиям теоремы 7, и, значит, при таких параметрах для оператора $H = H_{r,\beta,h}$ неравенства (1.1) и (1.2) с $\varkappa = g(n) = n^r - (2h^{-1}\sin(nh/2))^r > 0$ являются точными, и экстремальным будет любой полином вида $f(t) = \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\mu, \nu \in \mathbb{C}$. Кроме того, в неравенствах (1.1), если функция J выпукла вниз и строго возрастает на $[0, +\infty)$, и (1.2) других экстремальных полиномов нет.

Более общий случай получается, если взять функцию $G \in \Phi(\mathbb{R})$ (необязательно непрерывную) такую, что $G(0) > 0$ и $G(x) = 0$ при $|x| \geq n$, $n \in \mathbb{N}$, а в качестве набора чисел $\{g(k)\}_{k=-n}^{n} \subset \mathbb{C}$, $\overline{g(k)} = g(-k)$, $|k| \leq n$, из (4.1) взять такой, что $g(p) = G(n-p)$ при $0 \leq p \leq n$. Тогда $g(n) = G(0) > 0$, $\tau_0 = 0$, $g(0) = G(n) = 0$, а числа из (4.2) удовлетворяют равенствам

$$\overline{\varphi(-p)} = \varphi(p) = g(n-p) = G(p) = \overline{G(-p)}, \quad 0 \leq p \leq n.$$

Поэтому $\varphi(p) = G(p)$ при $|p| \leq n$, и, значит, для полинома Q из (4.2) выполняется неравенство $Q(t) \geq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$ (см. предложение 3) и применимо утверждение (1) теоремы 6. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 8. *Пусть $G \in \Phi(\mathbb{R})$, $G(0) > 0$ и $G(x) = 0$ при $|x| \geq n$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\lambda(k) = g(k)e^{i\beta \operatorname{sign} k}$ при $|k| \leq n$, где $\beta \in \mathbb{R}$, $\overline{g(k)} = g(-k)$, $|k| \leq n$, и $g(p) = G(n-p)$ при $0 \leq p \leq n$. Тогда условие $\lambda(n)e^{in\tau} = \lambda(-n)e^{-in\tau}$ выполняется при $\tau = -\beta/n$. В этом случае $\varkappa = |\Lambda_0| + \ldots + |\Lambda_{2n-1}| = |\lambda(n)| = G(0) > 0$, и для оператора $H : \mathscr{F}_n \to \mathscr{F}_n$, который задан формулой* (3.1) *с помощью набора чисел $\{\lambda(k)\}_{k=-n}^{n}$, неравенства* (1.1) *и* (1.2) *являются точными, и экстремальным будет любой полином вида $f(t) = \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\mu, \nu \in \mathbb{C}$. Кроме того, в неравенствах* (1.1)*, если функция J выпукла вниз и строго возрастает на* $[0, +\infty)$*, и* (1.2) *других экстремальных полиномов нет.*

Отметим, что теорема 8 с дополнительным условием $G \in C(\mathbb{R})$ и без описания всех экстремальных полиномов доказана в [23, § 6] и в работе автора [15, Theorem 6], в которой все экстремальные полиномы были описаны при дополнительных ограничениях (например, при $p = \infty$ и $p = 1$ по существу предполагалось, что $\Lambda_s(\beta) \neq 0$ для всех $s \in \mathbb{Z}$).

5. Метод Боаса — Сайвина получения интерполяционных формул и проверки условий теоремы 5

Для оператора $H(f)(t) = f'(t)$ простое доказательство интерполяционной формулы для целых функций экспоненциального типа, ограниченных на вещественной оси (в частности формулы М. Рисса [2; 3] для тригонометрических полиномов) содержится в работе Р. П. Боаса 1937 г. [24], в которой отмечено, что этот метод применим и для оператора Г. Сегё [4] $H(f)(t) = n\sigma_n(f)(t) + \sin\omega\, \widetilde{f}'(t) + \cos\omega\, f'(t)$, где $\sigma_n(f)(t) = f(t) - \widetilde{f}'(t)/n$ — оператор средних арифметических. Развивая идею Р. П. Боаса, П. Сайвин в работе 1941 г. [25] предложил общий метод получения точных неравенств для целых функций, в частности и для тригонометрических полиномов. С применением и развитием этого метода можно ознакомиться, например, в монографиях Р П. Боаса [26, Ch. 11] и А. Ф. Тимана [27, § 4.8.61], в статьях П. И. Лизоркина [8] и О. Л. Виноградова [28; 29].

Рассмотрим набор чисел $\{\lambda(k)\}_{k=-n}^{n} \subset \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, для которого при некотором $\tau \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $\lambda(n)e^{in\tau} = \lambda(-n)e^{-in\tau}$. Мы всегда считаем, что среди этих чисел есть ненулевые. Для этого набора чисел рассмотрим оператор $H\colon \mathscr{F}_n \to \mathscr{F}_n$, который задается формулой (3.1). Для такого оператора существует единственная интерполяционная формула вида (3.2), а ее коэффициенты $\{\Lambda_k\}_{k=0}^{2n-1}$ однозначно определяются по формуле (3.4) и $\varkappa := |\Lambda_0| + \ldots + |\Lambda_{2n-1}| > 0$ (иначе оператор H нулевой). Эти же коэффициенты найдем по методу Боаса — Сайвина. Рассмотрим произвольную непрерывную на отрезке $[-n, n]$ функцию, которая в целочисленных точках $k \in [-n, n]$ принимает значения $\lambda(k)$. Для удобства эту функцию будем обозначать той же буквой $\lambda(t)$, $t \in [-n, n]$, и считаем, что $\lambda(t) = 0$ при $|t| > n$.

Среди таких функций рассматриваем только те, для которых функция $\lambda(t)e^{i\tau t}$ раскладывается на отрезке $[-n,n]$ в абсолютно сходящийся ряд Фурье (этому условию удовлетворяет, например, кусочно-линейная функция $\lambda(t)$):

$$\lambda(t)e^{i\tau t}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_ke^{ik\pi t/n},\quad t\in[-n,n];$$
$$c_k=\frac{1}{2n}\int\limits_{-n}^{n}\lambda(t)e^{-i(-\tau+k\pi/n)t}\,dt=\frac{1}{2n}\widehat{\lambda}\Big(\frac{k\pi-\tau n}{n}\Big),\quad k\in\mathbb{Z}. \tag{5.1}$$

Заменяя в (3.1) значения $\lambda(k)$ в виде ряда (5.1) и используя абсолютную сходимость этого ряда, несложно получить равенство

$$H(f)(t)=\sum_{k=0}^{2n-1}\Lambda_kf\Big(t-\tau+\frac{k\pi}{n}\Big),$$
$$\Lambda_k=\sum_{j\in\mathbb{Z}}c_{k+2nj}=\frac{1}{2n}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\widehat{\lambda}\Big(\frac{(k+2nj)\pi-\tau n}{n}\Big),\quad k\in\mathbb{Z}. \tag{5.2}$$

Отметим, что хотя коэффициенты c_k зависят от выбора функции $\lambda(t)$, числа Λ_k из (5.2) в силу их однозначности не зависят от выбора функции $\lambda(t)$.

З а м е ч а н и е 5. Если функция $\lambda\in C[-n,n]$ и для некоторого $\tau\in\mathbb{R}$ выполняется равенство $\lambda(n)e^{i\tau n}=\lambda(-n)e^{-i\tau n}$ и выполнены условия

$$\exists\varepsilon\in\mathbb{C}\ \ |\varepsilon|=1\colon\varepsilon(-1)^k\widehat{\lambda}\Big(\frac{k\pi-\tau n}{n}\Big)\ge 0,\quad k\in\mathbb{Z}, \tag{5.3}$$

то функция $\psi(t)=\lambda(t)e^{i\tau t}$ раскладывается на отрезке $[-n,n]$ в абсолютно сходящийся ряд Фурье. Действительно, в этом случае функция ψ допускает $2n$-периодическое непрерывное продолжение на $\mathbb{R}$ (так как $\psi(n)=\psi(-n)$), а коэффициенты Фурье функции $\varepsilon\psi(t+n)$ равны $\varepsilon(-1)^kc_k$, $k\in\mathbb{Z}$, и все они неотрицательны (это эквивалентно тому, что функция $\varepsilon\psi(t+n)$ является $2n$-периодической, непрерывной, положительно определенной на $\mathbb{R}$ функцией). Поэтому (см., например, [30, § II.1]) функция $\varepsilon\psi(t+n)$, а, значит, и функция $\psi(t)$ раскладываются в абсолютно сходящийся ряд Фурье и выполняется условие (3.8): $\varepsilon\Lambda_k(-1)^k\ge 0,\ k=0,\dots,2n-1$. В этом случае условие (3.7): $\exists s\in\mathbb{Z}:\ \overline{\Lambda_s}\Lambda_{s+1}<0$ эквивалентно условию (5.4):

$$\exists s,m_1,m_2\in\mathbb{Z}:\ \ \widehat{\lambda}\Big(\frac{(s+2nm_1)\pi-\tau n}{n}\Big)\cdot\widehat{\lambda}\Big(\frac{(s+1+2nm_2)\pi-\tau n}{n}\Big)\ne 0. \tag{5.4}$$

Таким образом, если выполнено условие (5.3), то $\varkappa=|\Lambda_0|+\ldots+|\Lambda_{2n-1}|=|\lambda(\pm n)|>0$, а неравенства (1.1) и (1.2) являются точными, и экстремальным будет любой полином вида $f(t)=\mu e^{int}+\nu e^{-int}$, $\mu,\nu\in\mathbb{C}$ (см. предложение 2). А если дополнительно выполняется условие (5.4), то в неравенствах (1.1) (если функция J выпукла вниз и строго возрастает на $[0,+\infty)$) и (1.2) других экстремальных полиномов нет (см. теорему 5).

6. Экстремальные полиномы в неравенстве Тригуба

Запишем формулу Г. Сегё для производной сопряженного полинома $f\in\mathscr{F}_n$:

$$\widetilde{f}'(t)=\frac{nf(t)}{2}-n\sum_{k=1}^{n}f\Big(t+\frac{\pi(2k-1)}{n}\Big)\mu_{2k-1};\quad\sum_{k=1}^{n}\mu_{2k-1}=\frac{1}{2},\quad\mu_{2k-1}>0,\quad k=1,\dots,n.$$

Из этой формулы при любом $\theta\in\mathbb{C}$ получаем

$$2\widetilde{f}'(t)-\theta f(t)=(n-\theta)f(t)-2n\sum_{k=1}^{n}f\Big(t+\frac{\pi(2k-1)}{n}\Big)\mu_{2k-1},\quad f\in\mathscr{F}_n.$$

Для оператора $H(f)(t) = 2\widetilde{f}'(t) - \theta f(t)$, $f \in \mathscr{F}_n$, в интерполяционной формуле (3.2) $\tau = 0$, $\Lambda_0 = n - \theta$, остальные коэффициенты с четными номерами равны нулю, а $\Lambda_{2k-1} = -2n\mu_{2k-1} < 0$, $k = 1, \ldots, n$. Из теоремы 4 вытекает, что для этого оператора H справедливы неравенства (1.1) и (1.2) с $\varkappa = |\Lambda_0| + \ldots + |\Lambda_{2n-1}| = |n - \theta| + n$, где функция J выпукла вниз и не убывает на $[0, +\infty)$. Неравенство (1.2) — это неравенство Р. М. Тригуба [31, 5.7], а при $p = \infty$, $\theta = 0$ и $\theta = n$ это соответственно неравенства Г. Сегё [4] и Р. П. Боаса (см. [26, 11.4.3] и оператор (7.1) при $\sin\omega = -\sin\gamma = 1$).

В следующей теореме для вещественных θ описаны все экстремальные полиномы в неравенствах (1.1) и (1.2), кроме случая $p = 1$, $\theta \geq n$. В случае $\theta \geq n$ экстремальными в неравенстве (1.2) при $p = 1$ очевидно являются полиномы вида $cg(t)$, где $c \in \mathbb{C}$, а g — произвольный неотрицательный полином из $\mathscr{F}_n$, а если $\theta = n$, то и полиномы вида $f(t) = \alpha + \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\alpha, \mu, \nu \in \mathbb{C}$.

Теорема 9. *Пусть $H(f)(t) = 2\widetilde{f}'(t) - \theta f(t)$, $f \in \mathscr{F}_n$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\varkappa = |n - \theta| + n$. Тогда*

(1) *Если $\theta < n$, то в неравенствах (1.1) (если функция $J(t)$ выпукла вниз и строго возрастает на $(0, +\infty)$) и (1.2) экстремальными полиномами являются только полиномы вида $f(t) = \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\mu, \nu \in \mathbb{C}$.*

(2) *Пусть $\theta = n$. Тогда для полиномов $f(t) = \alpha + \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\alpha, \mu, \nu \in \mathbb{C}$, неравенства (1.1) и (1.2) обращаются в равенство.*

Если функция J не убывает на $[0, +\infty)$ и строго выпукла вниз в каждой точке интервала $(0, +\infty)$, то в неравенствах (1.1) и (1.2) при $1 < p < \infty$ экстремальными являются только полиномы вида $f(t) = \alpha + \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\alpha, \mu, \nu \in \mathbb{C}$.

- *При $p = \infty$ экстремальными полиномами в неравенстве (1.2) являются только полиномы вида $f(t) = e^{i\delta}(a\cos n(t - \eta) + b + iq(t))$, $a, b, \delta, \eta \in \mathbb{R}$, где $q(t)$ — произвольный вещественный полином из $\mathscr{F}_n$, удовлетворяющий неравенству $q^2(t) \leq (|a| + |b|)^2 - (a\cos n(t - \eta) + b)^2$, $t \in \mathbb{R}$.*
- *При $p = 1$ кроме полиномов вида $f(t) = \alpha + \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\alpha, \mu, \nu \in \mathbb{C}$, экстремальными в неравенстве (1.2) являются и полиномы вида $cg(t)$, где $c \in \mathbb{C}$, а g — произвольный неотрицательный полином из $\mathscr{F}_n$.*

(3) *Пусть $\theta > n$. Тогда для любого постоянного полинома $f(t) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$, неравенства (1.1) и (1.2) обращаются в равенства. Если функция J не убывает на $[0, +\infty)$ и строго выпукла вниз в каждой точке интервала $(0, +\infty)$, то в неравенствах (1.1) и (1.2) при $1 < p \leq \infty$ экстремальными являются только постоянные полиномы. При $p = 1$ экстремальными в неравенстве (1.2) являются полиномы вида $cg(t)$, где $c \in \mathbb{C}$, а g — произвольный неотрицательный полином из $\mathscr{F}_n$.*

Доказательство. Докажем утверждение (1). Если $\theta < n$, то применима теорема 5 при $s = 0$.

Докажем утверждение (2). Если $\theta = n$, то в критерии экстремального полинома в неравенствах (1.1) и (1.2) (теорема 4) в качестве множества U выступает множество всех нечетных целых чисел от 1 до $2n - 1$. Для полиномов $f(t) = \alpha + \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\alpha, \mu, \nu \in \mathbb{C}$, неравенства (1.1) и (1.2) обращаются в равенства, так как для таких полиномов справедливо тождество $nf(t) - 2\widetilde{f}'(t) \equiv nf(t + \pi/n)$.

Если функция J не убывает на $[0, +\infty)$ и строго выпукла вниз в каждой точке интервала $(0, +\infty)$, а полином $f \in \mathscr{F}_n$ является экстремальным в неравенстве (1.1) или (1.2) при некотором $1 < p < \infty$, то функции $f(t + \pi s/n)$ должны быть тождественно равны между собой на $\mathbb{R}$ для всех нечетных целых чисел s от 1 до $2n - 1$, и, значит, для всех нечетных целых чисел

$s \in \mathbb{Z}$. Поэтому полином f имеет период $2\pi/n$, и, значит, коэффициенты Фурье $c_k(f) = 0$ при $1 \le |k| < n$. Следовательно, полином f имеет вид $f(t) = \alpha + \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\alpha, \mu, \nu \in \mathbb{C}$.

Утверждение (2) для случая $p = \infty$ вытекает из теоремы 2, а для случая $p = 1$ тривиально.

Докажем утверждение (3). Пусть $\theta > n$. Если функция J не убывает на $[0, +\infty)$ и строго выпукла вниз в каждой точке интервала $(0, +\infty)$ и полином $f \in \mathscr{F}_n$ является экстремальным в неравенстве (1.1) или (1.2) при некотором $1 < p < \infty$, то $f(t + \pi s/n) \equiv f(t)$ на $\mathbb{R}$ для всех нечетных целых чисел s от 1 до $2n-1$. Поэтому полином f имеет период π/n. Отсюда вытекает, что коэффициенты Фурье $c_k(f) = 0$ при $1 \le |k| \le n$.

Если полином $f \in \mathscr{F}_n$ является экстремальным в неравенстве (1.2) при $p = \infty$, то для некоторых $\eta, \delta \in \mathbb{R}$ равенство $-f(\eta + \pi s/n) = e^{i\delta}\|f\|_\infty$ выполняется для всех нечетных целых чисел s от 1 до $2n - 1$ и для $s = 0$. Из следствия 2 при $\varepsilon = -1$ следует, что $f(t) \equiv \alpha \in \mathbb{C}$.

Утверждение (3) для случая $p = 1$ тривиально.

Теорема доказана.

В следующей теореме для комплексных $\theta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ описаны все экстремальные полиномы в неравенствах (1.1) и (1.2).

Теорема 10. *Пусть* $H(f)(t) = 2\widetilde{f}'(t) - \theta f(t)$, $f \in \mathscr{F}_n$, $\varkappa = |n - \theta| + n$, $\theta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Если функция $J(t)$ *выпукла вниз и строго возрастает на* $(0, +\infty)$, *то в неравенствах* (1.1) *и* (1.2) *при* $1 \le p < \infty$ *экстремальным является только нулевой полином* $f(t) \equiv 0$.

При $p = \infty$ *экстремальными полиномами в неравенстве* (1.2) *являются только полиномы вида* (2.2), *где* $\eta, \delta \in \mathbb{R}$, $a = \mathrm{Re}(\overline{\varepsilon} + 1)/2$, $\varepsilon = (n - \theta)/|n - \theta|$, *а вещественный полином* $q \in \mathscr{F}_n$ *удовлетворяет условиям* (2.3).

Доказательство. Пусть функция $J(t)$ выпукла вниз и строго возрастает на $(0, +\infty)$ и для полинома $f \in \mathscr{F}_n$ неравенство (1.1) обращается в равенство. Тогда для этого же полинома f неравенство (1.2) при $p = 1$ также обращается в равенство. В этом случае для любого $t \in \mathbb{R}$ найдется число $\delta(t) \in \mathbb{R}$ такое, что тождества

$$-f\Big(t + \frac{\pi s}{n}\Big) \equiv e^{i\delta(t)}\Big|f\Big(t + \frac{\pi s}{n}\Big)\Big|, \quad \varepsilon f(t) \equiv e^{i\delta(t)}|f(t)|, \quad \varepsilon = \frac{n - \theta}{|n - \theta|} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\,, \tag{6.1}$$

выполняются для всех нечетных целых чисел s от 1 до $2n - 1$ (и, значит, для всех нечетных $s \in \mathbb{Z}$). Из первого тождества в (6.1) при $s = 3$ и $s = 1$ вытекают равенства

$$e^{i\delta(t)}\Big|f\Big(t + \frac{3\pi}{n}\Big)\Big| = -f\Big(t + \frac{3\pi}{n}\Big) = e^{i\delta(t+2\pi/n)}\Big|f\Big(t + \frac{3\pi}{n}\Big)\Big|, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{6.2}$$

Из второго тождества в (6.1) и первого при $s = 1$ вытекают равенства

$$e^{i\delta(t+\pi/n)}\Big|f\Big(t + \frac{\pi}{n}\Big)\Big| = \varepsilon f\Big(t + \frac{\pi}{n}\Big) = -\varepsilon e^{i\delta(t)}\Big|f\Big(t + \frac{\pi}{n}\Big)\Big|, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{6.3}$$

Если $f(t) \not\equiv 0$, то найдется точка $\xi \in \mathbb{R}$, в которой $f(\xi + \pi/n)f(\xi + 2\pi/n)f(\xi + 3\pi/n) \neq 0$. Из (6.2) и (6.3) следует, что $e^{i\delta(\xi+2\pi/n)} = e^{i\delta(\xi)}$ и $e^{i\delta(\xi+2\pi/n)} = -\varepsilon e^{i\delta(\xi+\pi/n)} = \varepsilon^2 e^{i\delta(\xi)}$. Следовательно, $\varepsilon = \pm 1$, что противоречит условию $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Поэтому $f(t) \equiv 0$.

При $p = \infty$ неравенство (1.2) обращается в равенство для некоторого полинома $f \in \mathscr{F}_n$ $\iff$ для некоторых $\eta, \delta \in \mathbb{R}$ равенство $-f(\eta + \pi s/n) = e^{i\delta}\|f\|_\infty = \varepsilon f(\eta)$, где $\varepsilon = (n - \theta)/|n - \theta|$, выполняется для всех нечетных целых чисел s от 1 до $2n - 1$. Осталось применить следствие 2.

Теорема доказана.

7. Экстремальные полиномы в неравенстве Боаса

Рассмотрим оператор Р. П. Боаса [26, 11.4.3]

$$B_{\gamma,\omega}(f)(t) = n \sin\gamma\, f(t) + (\sin\omega - \sin\gamma)\widetilde{f}'(t) + \cos\omega\, f'(t), \quad f \in \mathscr{F}_n, \tag{7.1}$$

где $\gamma, \omega \in \mathbb{R}$. При $\sin\gamma = 0$ и $\sin\gamma = 1$ получаются операторы Сегё (см. формулы (5) и (23) из [4]). В качестве функции $\lambda(t)$ из метода Боаса — Сайвина можно взять функцию

$$\lambda(t) = n\sin\gamma + (\sin\omega - \sin\gamma)|t| + it\cos\omega, \quad t \in [-n, n].$$

Равенство $\lambda(n)e^{in\tau} = \lambda(-n)e^{-in\tau}$ выполняется при $\tau n = \omega - \pi/2$. Несложно проверить, что $\widehat{\lambda}(0) = n^2(\sin\gamma + \sin\omega)$, а при $x \neq 0$

$$\widehat{\lambda}(x) = \int_{-n}^{n} \lambda(t)e^{-ixt}\,dt = \frac{2((\sin\omega - \sin\gamma)(\cos(nx) - 1) + \cos\omega\sin(nx))}{x^2} - \frac{2n\cos(nx + \omega)}{x}.$$

Тогда (см. [26, 11.4.3])

$$(-1)^k\widehat{\lambda}\Big(\frac{k\pi - \tau n}{n}\Big) = \begin{cases} \dfrac{2n^2(1 + (-1)^k\sin\gamma)(1 - (-1)^k\sin\omega)}{(\omega - \pi/2 - k\pi)^2}, & k \in \mathbb{Z}, \quad k \neq \dfrac{\omega - \pi/2}{\pi}, \\ n^2(1 + (-1)^k\sin\gamma), & k \in \mathbb{Z}, \quad k = \dfrac{\omega - \pi/2}{\pi}. \end{cases}$$

Из этого равенства вытекает, что для оператора $H = B_{\gamma,\omega}$ условия (5.3) выполнены при $\varepsilon = 1$. Поэтому $\varkappa = |\Lambda_0| + \ldots + |\Lambda_{2n-1}| = |\lambda(\pm n)| = n$, а неравенства (1.1) и (1.2) являются точными, и экстремальным будет любой полином вида $f(t) = \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\mu, \nu \in \mathbb{C}$ (см. предложение 2). Неравенство (1.2) при $p = \infty$ этим же методом доказал Р. П. Боас [26, 11.4.3] и для целых функций. Опишем все экстремальные полиномы в этих неравенствах.

1) Пусть $|\sin\omega| < 1$ и $|\sin\gamma| < 1$. Тогда условие (5.4) выполняется для всех $s, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$. Поэтому в неравенстве (1.2) и в неравенстве (1.1) (если функция $J(t)$ выпукла вниз и строго возрастает на $(0, +\infty)$) экстремальными являются только полиномы вида $f(t) = \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\mu, \nu \in \mathbb{C}$.

2) Пусть $|\sin\omega| < 1$ и $|\sin\gamma| = 1$. Тогда множество $U = \{k \in \mathbb{Z} : \widehat{\lambda}((k\pi - \tau n)/n) \neq 0\}$ состоит из всех четных чисел, если $\sin\gamma = 1$, или из всех нечетных чисел, если $\sin\gamma = -1$. В этом случае ответ такой же, как в теореме 9 при $\theta = n$.

3) Пусть $|\sin\omega| = 1$ и $|\sin\gamma| = 1$. Если $\sin\omega = \sin\gamma$, то $B_{\gamma,\omega}(f)(t) = n\sin\gamma\, f(t)$, и любой полином $f \in \mathscr{F}_n$ является экстремальным в неравенствах (1.1) и (1.2). Если $\sin\omega = -\sin\gamma$, то $B_{\gamma,\omega}(f)(t) = \sin\omega\,(2\widetilde{f}\,'(t) - nf(t))$, и ответ в этом случае такой же, как в теореме 9 при $\theta = n$.

4) Пусть $|\sin\omega| = 1$ и $|\sin\gamma| < 1$. Тогда

$$B_{\gamma,\omega}(f)(t) = \frac{1}{2}\,(\sin\omega - \sin\gamma)(2\widetilde{f}\,'(t) - \theta f(t)), \quad \theta = -\frac{2n\sin\gamma}{\sin\omega - \sin\gamma}.$$

Так как $\theta - n = -n(1 + \sin\omega\,\sin\gamma)/(1 - \sin\omega\,\sin\gamma) < 0$, то ответ в этом случае такой же, как в теореме 9 при $\theta < n$, т. е. в неравенстве (1.2) и в неравенстве (1.1) (если функция $J(t)$ выпукла вниз и строго возрастает на $(0, +\infty)$) экстремальными являются только полиномы вида $f(t) = \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\mu, \nu \in \mathbb{C}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бернштейн С.Н.** О наилучшемъ приближенiи непрерывныхъ функцiй посредствомъ многочленовъ данной степени. I // Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер. 1912. Т. 13, № 2–3. С. 49–144.
2. **Riesz M.** Formule d'interpolation pour la dérivée d'un polynome trigonométrique // C. R. Acad. Sci. 1914. Vol. 158. P. 1152–1154.
3. **Riesz M.** Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1914. Vol. 23. P. 354–368.

4. **Szegö G.** Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein // Schriften der Königsberger Gelehrten Gesellschaft. 1928. Jahr 5, Heft 4. P. 59–70.
5. **Zygmund A.** Trigonometric series, vol. I, II. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1959, vol. II, 364 p. Translated under the title Trigonometricheskie ryady, Moscow, Mir Publ., 1965, vol. II, 538 c.
6. **Sz.-Nagy B.** Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. I. Periodischer Fall // Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. 1938. Vol. 90. P. 103–134.
7. **Соколов Г.Т.** О некоторых экстремальных свойствах тригонометрических сумм // Изв. АН СССР. VII серия: Отд. мат. и естест. наук. 1935. № 6–7. С. 857–884.
8. **Лизоркин П.И.** Оценки тригонометрических интегралов и неравенство Бернштейна для дробных производных // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1965. Т. 29, № 1. С. 109–126.
9. **Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.** Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. АН Украины. Ин-т математики. Киев: Наук. думка, 1992. 304 с.
10. **Kozko A.I.** The exact constants in the Bernstein-Zygmund-Szegö inequalities with fractional derivatives and the Jackson-Nikolskii inequality for trigonometric polynomials // East J. Approx. 1998. Vol. 4, no. 3. P. 391–416.
11. **Арестов В.В., Глазырина П.Ю.** Неравенство Бернштейна–Сегё для дробных производных тригонометрических полиномов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 17–31.
12. **Леонтьева А.О.** Неравенство Бернштейна–Сегё для производной Рисса тригонометрических полиномов в пространствах L_p, $0 \le p \le \infty$, с классическим значением точной константы // Мат. сб. 2023. Т. 214, № 3. С. 135–152. doi: 10.4213/sm9822
13. **Арестов В.В.** Точные неравенства для тригонометрических полиномов относительно интегральных функционалов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 38–53.
14. **Арестов В.В.** Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1981. Т. 45, № 1. С. 3–22.
15. **Zastavnyi V.P.** Positive definite functions and sharp inequalities for periodic functions // Ural Math. J. 2017. Vol. 3, no. 2. P. 82–99. doi: 10.15826/umj.2017.2.011
16. **Стечкин С.Б.** Обобщение некоторых неравенств С.Н. Бернштейна // Избранные труды: Математика. М.: Наука. Физматлит, 1998. С. 15–18.
17. **Бернштейн С.Н.** Об одной теореме Сегё // Собрание сочинений. Т. II: Конструктивная теория функций: в 4 т. М.: Изд.-во АН СССР,1954. С. 173–177.
18. **Завалищин С.Т.** О некоторых экстремальных свойствах тригонометрических полиномов // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 78. С. 3–11.
19. **Стечкин С.Б., Тайков Л.В.** О минимальных продолжениях линейных функционалов // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 78. С. 12–23.
20. **Бернштейн С.Н.** О многочленах, ортогональных на конечном отрезке // Собрание сочинений: в 4 т. Т. II: Конструктивная теория функций. М.: Изд.-во АН СССР, 1954. С. 7–106.
21. **Горбачев Д.В.** Точные неравенства Бернштейна — Никольского для полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сб. 2021. Т. 22, № 5. С. 58–110. doi: 10.22405/2226-8383-2021-22-5-58-110
22. **Заставный В.П.** Одно обобщение теоремы Шеппа о положительной определенности кусочно-линейной функции // Мат. заметки. 2020. Т. 107, № 6. С. 873–887. doi: 10.4213/mzm12412
23. **Заставный В.П., Манов А.Д.** Положительная определенность комплексной кусочно-линейной функции и некоторые ее применения // Мат. заметки. 2018. Т. 103, № 4. С. 519–535.
24. **Boas R.P., Jr.** The derivative of a trigonometric integral // J. London Math. Soc. 1937. Vol. 12. P. 164–165. doi: 10.1112/jlms/s1-12.2.164
25. **Civin P.** Inequalities for trigonometric integrals // Duke Math. J. 1941. Vol. 8, № 4. P. 656–665.
26. **Boas R.P., Jr.** Entire Functions. NY: Acad. Press, 1954. 275 p.
27. **Тиман А.Ф.** Теория приближения функций действительного переменного. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960. 624 с.
28. **Виноградов О.Л.** Точные оценки погрешностей формул типа численного дифференцирования на классах целых функций конечной степени // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 3. С. 538–555.
29. **Виноградов О.Л.** Точные неравенства типа Бернштейна для мультипликаторов Фурье — Данкля // Мат. сб. 2023. Т. 214, № 1. С. 3–30. doi: 10.4213/sm9724

30. **Кахан Ж.-П.** Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. М.: Мир, 1976.
31. **Trigub R.M.** Fourier multipliers and K-functionals in spaces of smooth functions // Ukr. Math. Bull. 2005. Vol 2, № 2. P. 239–284.

Поступила 28.06.2023
После доработки 9.08.2023
Принята к публикации 11.09.2023

Заставный Виктор Петрович
д-р физ.-мат. наук, доцент
Донецкий государственный университет
г. Донецк
e-mail: zastavn@rambler.ru

REFERENCES

1. Bernstein S.N. On the best approximation of continuous functions by polynomials of given degree. I. *Soobscch. Khar'kov. Matem. Obscch., Ser. 2*, 1912, vol. 13, no. 2–3, pp. 49–144 (in Russian).
2. Riesz M. Formule d'interpolation pour la dérivée d'un polynome trigonométrique. *C. R. Acad. Sci.*, 1914, vol. 158, pp. 1152–1154.
3. Riesz M. Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1914, vol. 23, pp. 354–368.
4. Szegö G. Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein. *Schriften der Königsberger Gelehrten Gesellschaft*, 1928, Jahr 5, Heft 4, pp. 59–70.
5. Zygmund A. *Trigonometric series*, vol. I, II, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1959, vol. II, 364 p. Translated to Russian under the title *Trigonometricheskie ryady*, Moscow, Mir publ., 1965, vol. II, 538 p.
6. Sz.-Nagy B. Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. I. Periodischer Fall. *Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig*, 1938, vol. 90, pp. 103–134.
7. Sokolov G.T. Some extremal properties of trigonometric sums. *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. VII series. Branch of mathematics and natural sciences*, 1935, vol. 6–7, pp. 857–884 (in Russian).
8. Lizorkin P.I. Estimations of trigonometric integrals and Bernstein inequality for fractional derivatives. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 1965, vol. 4, no. 3, pp. 109–126 (in Russian).
9. Korneichuk N. P., Babenko V. F., Ligun A. A. *Extremal properties of polynomials and splines*. NY, Nova Science Publ., 1996, 439 p. ISBN: 978-1560723615 . Original Russian text was published in Korneichuk N. P., Babenko V. F., Ligun A. A., *Ekstremal'nye svoistva polinomov i splainov*, Kiev, Naukova Dumka Publ., 1992, 304 p. ISBN: 5-12-002210-3 .
10. Kozko A.I. The exact constants in the Bernstein–Zygmund–Szegő inequalities with fractional derivatives and the Jackson–Nikol'skii inequality for trigonometric polynomials. *East J. Approx.*, 1998, vol. 4, no. 3, pp. 391–416.
11. Arestov V.V., Glazyrina P.Yu. The Bernstein-Szegő inequality for fractional derivatives of trigonometric polynomials. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 288, suppl. 1, pp. 13–28. doi: 10.1134/S0081543815020030
12. Leont'eva A.O. Bernstein–Szegő inequality for Riesz derivative of trigonometric polynomials in the spaces L_p, $0 \le p \le \infty$, with classical value of the sharp constant. *Mat. Sbornik*, 2023, vol. 214, no. 3, pp. 135–152 (in Russian). doi: 10.4213/sm9822
13. Arestov V.V. Sharp inequalities for trigonometric polynomials with respect to integral functionals. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2011, vol. 273, suppl. 1 pp. 21–36. doi: 10.1134/S0081543811050038
14. Arestov V.V. On integral inequalities for trigonometric polynomials and their derivatives. *Math. USSR Izv.*, 1982, vol. 18, no. 1, pp. 1–17. doi: 10.1070/IM1982v018n01ABEH001375
15. Zastavnyi V.P. Positive definite functions and sharp inequalities for periodic functions. *Ural Math. J.*, 2017, vol. 3, no. 2, pp. 82–99. doi: 10.15826/umj.2017.2.011
16. Stechkin S.B. Generalization of some S. N. Bernstein inequalities. In: *Izbrannye trudy: matematika* [Selected works: mathematics], Moscow, Nauka Publ., Fizmatlit, 1998. P. 15–18.

17. Bernstein S.N. On one theorem of G. Szegő. In: *Sobranie sochinenii* [Collected works], vol. II: *Konstruktivnaya teoriya funktsii* [Constructive function theory], in 4 vol., Moscow, Akad. Nauk SSSR, 1954. P. 173–177.
18. Zavalishchin S.T. On some extremal properties of trigonometric polynomials. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1967, vol. 78, pp. 1–10.
19. Stechkin S.B., Taikov L.V. On minimal continuations of linear functionals. *Trudy Mat. Inst. Steklov*, 1965, vol. 78, pp. 12–23 (in Russian).
20. Bernstein S.N. On polynomials, orthogonal on finite segment. In: *Sobranie sochinenii* [Collected works], vol. II: *Konstruktivnaya teoriya funktsii* [Constructive function theory], in 4 vol., Moscow, Akad. Nauk SSSR, 1954. P. 7–106.
21. Gorbachev D.V. Sharp Bernstein–Nikolskii inequalities for polynomials and entire functions of exponential type. *Chebyshevskii Sbornik*, 2021, vol. 22, no. 5, pp. 58–110 (in Russian). doi: 10.22405/2226-8383-2021-22-5-58-110
22. Zastavnyi V.P. A generalization of Schep's theorem on the positive definiteness of a piecewise linear function. *Math. Notes*, 2020, vol. 107, no. 6, pp. 959–971. doi: 10.1134/S0001434620050272
23. Zastavnyi V.P., Manov A. On the positive definiteness of some functions related to the Schoenberg problem. *Math. Notes*, 2017, vol. 102, no. 3, pp. 325–337. doi: 10.1134/S0001434617090036
24. Boas R.P., Jr. The derivative of a trigonometric integral. *J. London Math. Soc.*, 1937, vol. 12, pp. 164–165. doi: 10.1112/jlms/s1-12.2.164
25. Civin P. Inequalities for trigonometric integrals. *Duke Math. J.*, 1941, vol. 8, pp. 656–665. doi: 10.1215/S0012-7094-41-00855-4
26. Boas R.P., Jr. *Entire functions.* NY, Acad. Press, 1954. 275 p. ISBN: 9780080873138 .
27. Timan A.F. *Theory of approximation of functions of a real variable.* Oxford, Pergamon Press, 1963, 631 p. doi: 10.1016/C2013-0-05307-8 . Original Russian text was published in Timan A.F., *Teoriya priblizheniya funktsii deistvitel'nogo peremennogo*, Moscow, Gos. Izd-vo Fiz. Mat. Lit., 1960, 624 p.
28. Vinogradov O. L. Sharp error estimates for the numerical differentiation formulas on the classes of entire functions of exponential type. *Siberian Math. J.*, 2007, vol. 48, no. 3, pp. 430–445. doi: 10.1007/s11202-007-0046-9
29. Vinogradov O.L. Sharp Bernstein type inequalities for Fourier-Dunkl multipliers, *Sbornik: Math.*, 2023, vol. 214, no. 1, pp. 1–27. doi: 10.4213/sm9724e
30. Kahane J.-P. *Séries de Fourier absolument convergentes*, Berlin, Heidelberg, Springer, 1970, 172 p. doi: 10.1007/978-3-662-59158-1. Translated to Russian under the title *Absolutno skhodyashchiesya ryady Furie*, Moscow, Mir Publ., 1976, 208 p.
31. Trigub R. M. Fourier multipliers and K-functionals in spaces of smooth functions. *Ukr. Math. Bull.*, 2005, vol. 2, no. 2, pp. 239–284.

Received June 28, 2023
Revised August 9, 2023
Accepted September 11, 2023

Funding Agency: The research was carried out under a state assignment (code FRRE-2023-0015 in the Unified State Information System for Recording Research, Development, and Technological Work for Civil Purposes) .

Viktor Petrovych Zastavnyi, Dr. Phys.-Math. Sci., Donetsk State University, Donetsk, 283001 Russia, e-mail: zastavn@rambler.ru .

Cite this article as: V. P. Zastavnyi. On extremal trigonometric polynomials. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 70–91.