ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 4 2023

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ, ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫХ $PSp_4(q)$[1]

М. А. Гречкосеева, В. М. Родионов

Спектром конечной группы называется множество порядков ее элементов. Пусть q — степень простого числа p, где $p \geq 5$. Известно, что любая конечная группа, имеющая такой же спектр, как простая симплектическая группа $PSp_4(q)$, либо изоморфна почти простой группе с цоколем $PSp_4(q)$, либо гомоморфно отображается на почти простую группу H с цоколем $PSL_2(q^2)$. В работе доказывается, что указанная группа H не может совпадать с $PSL_2(q^2)$, т. е. H должна содержать внешние автоморфизмы своего цоколя.

Ключевые слова: конечная группа, порядок элемента.

M. A. Grechkoseeva, V. M. Rodionov. On finite groups isospectral to $PSp_4(q)$.

The spectrum of a finite group is the set of its element orders. Let q be a power of a prime p, with $p \geqslant 5$. It is known that any finite group having the same spectrum as the simple symplectic group $PSp_4(q)$ either is isomorphic to an almost simple group with socle $PSp_4(q)$ or can be homomorphically mapped onto an almost simple group H with socle $PSL_2(q^2)$. We prove that the group H cannot coincide with $PSL_2(q^2)$, i.e., H must contain outer automorphisms of its socle.

Keywords: finite group, element order.

MSC: 20D06, 20D60

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-4-64-69

Введение

Спектром $\omega(G)$ конечной группы G называется множество порядков ее элементов. Пусть $h(G)$ — число попарно неизоморфных конечных групп с таким же спектром, как у G. Конечная группа G называется не распознаваемой по спектру, если $h(G) = \infty$. Известно, что группа, содержащая нетривиальную разрешимую нормальную подгруппу, нераспознаваема по спектру [1, лемма 1]. Напротив, известно лишь конечное число неабелевых простых групп, не принадлежащих сериям $PSp_4(q)$, $PSp_8(q)$ и $P\Omega_9(q)$, которые нераспознаваемы по спектру (см. [2, табл. 10]).

В настоящей работе рассматриваются конечные группы, имеющие такой же спектр, как простые симплектические группы $PSp_4(q)$, где $q > 3$ (отметим, что $PSp_4(2) \simeq S_6$ не является простой, а $PSp_4(3) \simeq PSU_4(2)$). В [3; 4] было доказано, что группы $PSp_4(q)$ нераспознаваемы по спектру при $q \neq 3^{2m+1}$, $m \geqslant 1$. А именно, для каждого $q \neq 3^{2m+1}$, $m \geqslant 1$, были найдены группа H и элементарная абелева группа U с H-действием такие, что $\omega(PSp_4(q)) = \omega(H \ltimes U)$, где $H \ltimes U$ обозначает полупрямое произведение групп H и U. При этом $H = PSL_2(q^2)$ для $q = 2^m$ или $q = 3^{2m}$ и $H = \langle\tau\rangle \ltimes PSL_2(q^2)$, где τ — полевой автоморфизм группы $PSL_2(q^2)$ порядка 2 для $q = p^m$, $p \geq 5$.

Общее строение конечных групп G с таким же спектром, как у $PSp_4(q)$, изучалось в [5]. Было доказано, что либо $PSp_4(q) \leqslant G \leqslant \mathrm{Aut}(PSp_4(q))$, либо $PSL_2(q^2) \leqslant G/K \leqslant \mathrm{Aut}(PSL_2(q^2))$, где K — наибольшая разрешимая нормальная подгруппа в G. Также было показано, что в последнем случае G/K является расширением группы $PSL_2(q^2)$ с помощью полевого автоморфизма порядка 2^l для некоторого $l \geqslant 0$. При этом осталось неизвестным, какие значения

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики СО РАН, тема FWNF-2022-0002.

может принимать число l [5, замечание 4]. В частности, возможно ли, что $l = 0$? Из результатов, приведенных выше, следует, что ответ положителен при q, являющемся степенью числа 2 или четной степенью числа 3. Также известно [5, замечание 4], что ответ отрицателен при $q = 7$. В настоящей работе получен отрицательный ответ для всех q, не являющихся степенью числа 2 или числа 3.

Теорема 1. *Пусть q — степень простого числа p и $p \geq 5$. Если G — конечная группа, $K \trianglelefteq G$ и $G/K \simeq PSL_2(q^2)$, то $\omega(G) \neq \omega(PSp_4(q))$.*

Основой для доказательства является теорема Брауэра — Несбитта (см. [6], а также лемму 1 ниже) об абсолютно неприводимых представлениях группы $SL_2(q)$ в характеристике определения.

1. Предварительные сведения

Пусть p — простое число и F — алгебраическое замыкание поля порядка p. Конечное поле порядка q обозначается через $GF(q)$, и через $GF(q)^\times$ обозначается его мультипликативная группа. Для конечной группы G обозначим через $\omega(G)$ спектр группы G, т. е. множество порядков всех ее элементов. Поскольку множество $\omega(G)$ замкнуто по отношению делимости, оно однозначно определяется своим подмножеством $\mu(G)$, состоящим из максимальных по делимости элементов спектра. Через J_k обозначается жорданова клетка размера k над полем F с 1 на главной диагонали. Если $g \in GL_n(F)$, то через $d(g)$ будем обозначать степень минимального аннулирующего многочлена преобразования g. Если группа G действует на группе H, то через $G \ltimes H$ обозначим их соответствующее полупрямое произведение.

Рассмотрим пространство однородных многочленов степени i от переменных x, y над полем F и обозначим его через W_i. Упорядоченный набор $x^i, x^{i-1}y, \ldots, y^i$ — это базис пространства W_i, следовательно, $\dim W_i = i + 1$. Пусть $j \geqslant 0$ и $0 \leqslant i < p$. Зададим действие группы $SL_2(F)$ на W_i следующим образом: если $f(x, y) \in W_i, g \in SL_2(F)$, где

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix},$$

то $f(x, y) \cdot g = f(g_{11}^{p^j}x + g_{12}^{p^j}y, g_{21}^{p^j}x + g_{22}^{p^j}y)$. Это действие превращает пространство W_i в $F[SL_2(F)]$-модуль, который мы будем обозначать через W_i^j. Соответствующее матричное представление (в базисе $x^i, x^{i-1}y, \ldots, y^i$) обозначим через ρ_i^j. Под ρ_i будем понимать представление ρ_i^0. Отметим, что $\rho_1(g) = g$, т. е. W_1^0 — это естественный модуль группы $SL_2(F)$.

Для любого $q = p^n$ группа $SL_2(q)$ естественно вкладывается в $SL_2(F)$, и можно рассмотреть ограничение модуля W_i^j на $F[SL_2(q)]$. В следующей лемме, для того чтобы избежать громоздких обозначений, W_i^j обозначает именно это ограничение.

Лемма 1 (Брауэр — Несбитт [6]). *Пусть p — простое число, $q = p^n$. Модули вида*

$$\bigotimes_{j=0}^{n-1} W_{i_j}^j, \quad \text{где} \ \ 0 \leqslant i_j < p,$$

составляют полное множество представителей классов эквивалентности неприводимых $F[SL_2(q)]$-модулей.

Лемма 2. *Выполнены следующие утверждения.*

1) *Если $g \in SL_2(q)$ диагонализируема над F и λ, λ^{-1} — ее собственные числа, то собственными числами матрицы $\rho_i^j(g)$ будут $\lambda^{ip^j}, \lambda^{(i-2)p^j}, \ldots, \lambda^{-ip^j}$.*

2) *Если* $g \in SL_2(q)$ *не диагонализируема над* F, *то жорданова форма матрицы* $\rho_i^j(g)$ *состоит из одной клетки.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \sim \mathrm{diag}(\lambda, \lambda^{-1}) = h,$$

тогда

$$\begin{pmatrix} g_{11}^{p^j} & g_{12}^{p^j} \\ g_{21}^{p^j} & g_{22}^{p^j} \end{pmatrix} \sim \mathrm{diag}(\lambda^{p^j}, \lambda^{-p^j}).$$

Подобные матрицы из $SL_2(F)$ сопряжены матрицей из $SL_2(F)$, поэтому $\rho_i^j(g) \sim \rho_i^j(h)$. Базисный вектор $x^k y^{i-k}$ под действием $\rho_i^j(h)$ перейдет в $\lambda^{(2k-i)p^j} x^k y^{i-k}$, следовательно, $\rho_i^j(g) \sim \mathrm{diag}(\lambda^{ip^j}, \lambda^{(i-2)p^j}, \ldots, \lambda^{-ip^j})$.

2) Если g не диагонализируема, то $g \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = h$. Значит, $x^k y^{i-k}$ под действием $\rho_i^j(h)$ перейдет в

$$(\lambda x + y)^k y^{i-k} \lambda^{i-k} = \lambda^i \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \lambda^{l-k} x^l y^{i-l}.$$

Заметим, что матрица $\rho_i^j(h)$ верхнетреугольная с λ^i на главной диагонали и без нулей над ней ($i < p$). Следовательно, $\dim\ker(\rho_i^j(g) - \lambda^i E) = 1$.

Лемма 3 [9, лемма 2.8]. *Пусть* p *— простое число и* $1 \leqslant a,\ b \leqslant p$. *Тогда над любым полем характеристики* p *выполнено*

$$d(J_a \otimes J_b) = \begin{cases} a + b - 1, & \text{если } a + b \leqslant p, \\ p, & \text{если } a + b > p. \end{cases}$$

Лемма 4 [9, лемма 2.10]. *Пусть* $f \geqslant a$ *и* $g \geqslant b$. *Тогда* $d(J_f \otimes J_g) \geqslant d(J_a \otimes J_b)$.

2. Доказательство теоремы 1

На протяжении всего раздела мы фиксируем следующие обозначения: p — простое число, $p \geqslant 5, q = p^m$ и $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ такой, что $q \equiv \varepsilon \pmod 4$.

Спектры групп $PSL_2(q)$ и $PSp_4(q)$ хорошо известны (см., например, [7, Hauptsatz 8.27] и [8] соответственно):

$$\mu(PSL_2(q)) = \left\{ p, \frac{q-1}{2}, \frac{q+1}{2} \right\}, \tag{2.1}$$

$$\mu(PSp_4(q)) = \left\{ p(q+1), p(q-1), \frac{q^2-1}{2}, \frac{q^2+1}{2} \right\}. \tag{2.2}$$

Предложение 1. *Предположим, что существует конечная группа* G *такая, что* $\omega(G) = \omega(PSp_4(q))$ *и* $G/K \simeq PSL_2(q^2)$ *для некоторой нормальной подгруппы* K *группы* G. *Тогда найдется абсолютно неприводимый модуль* W *группы* $PSL_2(q^2)$ *над полем характеристики* p *такой, что*

$$p(q + \varepsilon) \in \omega(PSL_2(q^2) \ltimes W) \subseteq \omega(PSp_4(q)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу основного результата работы [5], упомянутого во введении, можно считать, что подгруппа K — это p-группа. Как следует из (2.1) и (2.2), в группе G в отличие от $PSL_2(q^2)$ есть элемент порядка $p(q+\varepsilon)$. Следовательно, в G есть элемент порядка $q+\varepsilon$, который централизует элемент группы K порядка p. Дальнейшее доказательство аналогично доказательству утверждения 18.1 в лемме 18 из [4]. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. Предположим, что найдутся конечная группа G и нормальная подгруппа K группы G такие, что $G/K \simeq PSL_2(q^2)$ и $\omega(G) = \omega(PSp_4(q))$. По предложению 1 найдется абсолютно неприводимый модуль W группы $PSL_2(q^2)$ над полем характеристики p такой, что $p(q+\varepsilon) \in \omega(PSL_2(q^2) \ltimes W) \subseteq \omega(PSp_4(q))$. В силу леммы 1 можно считать, что $W = \bigotimes\limits_{j=0}^{2m-1} W_{i_j}^j$, где $0 \leqslant i_j \leqslant p-1$.

Пусть $\overline{x}$ — образ элемента $x \in SL_2(q^2)$ в $PSL_2(q^2)$. Любой элемент группы $PSL_2(q^2)$ порядка $q+\varepsilon$ сопряжен элементу $g = \overline{\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}}$, где $\lambda \in GF(q)^\times$ и $|\lambda| = 2(q+\varepsilon)$. По п. 1 леммы 2 собственные числа элемента g в $W_{i_j}^j$ будут иметь вид $\lambda^{a_j p^j}$, где $a_j \equiv i_j \pmod 2$ и $|a_j| \leqslant i_j$. Значит, собственные числа элемента g в W имеют вид λ^u, где

$$u = \sum_{j=0}^{2m-1} a_j p^j, \quad |a_j| \leqslant i_j, \quad a_j \equiv i_j \pmod 2. \tag{2.3}$$

Поскольку $p(q+\varepsilon) \in \omega(PSL_2(q^2) \ltimes W) \setminus \omega(PSL_2(q^2))$, у некоторого элемента группы $PSL_2(q^2)$ порядка $q+\varepsilon$ есть неподвижная точка в W. Как было сказано, все такие элементы сопряжены g, поэтому у g есть неподвижная точка в W, значит, $\lambda^u = 1$ для некоторого u вида (2.3). Последнее равенство эквивалентно тому, что $2(q+\varepsilon)$ делит u, в частности, $q+\varepsilon$ делит u. Перепишем это условие в следующем виде:

$$\sum_{j=0}^{m-1} a_j p^j + q \sum_{j=0}^{m-1} a_{j+m} p^j \equiv 0 \pmod{q+\varepsilon}, \text{ откуда}$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} (a_j - a_{j+m}\varepsilon) p^j \equiv 0 \pmod{q+\varepsilon}. \tag{2.4}$$

Оценим сверху выражение из левой части последнего сравнения:

$$|\sum_{j=0}^{m-1} (a_j - a_{j+m}\varepsilon) p^j| \leqslant \sum_{j=0}^{m-1} |a_j - a_{j+m}\varepsilon| p^j \leqslant \sum_{j=0}^{m-1} (i_j + i_{j+m}) p^j. \tag{2.5}$$

По п. 2 леммы 2 жорданова форма элемента $h = \overline{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$ в $W_{i_j}^j$ имеет вид J_{i_j+1}. Поскольку $p^2 \notin \omega(G)$, применяя лемму 4, заключаем, что

$$d(J_{i_j+1} \otimes J_{i_{j+m}+1}) \leqslant d(J_{i_0+1} \otimes J_{i_1+1} \otimes \ldots \otimes J_{i_{2m-1}+1}) \leqslant p-1.$$

В силу леммы 3 это означает, что $i_j + 1 + i_{j+m} + 1 - 1 \leq p-1$, отсюда $i_j + i_{j+m} \leq p-2$. Подставим эту оценку в (2.5):

$$|\sum_{j=0}^{m-1} (a_j - a_{j+m}\varepsilon) p^j| \leqslant (p-2) \sum_{j=0}^{m-1} p^j = \frac{p-2}{p-1}(q-1) < q+\varepsilon.$$

С учетом (2.4) получаем, что

$$\sum_{j=0}^{m-1} (a_j - a_{j+m}\varepsilon) p^j = 0. \tag{2.6}$$

Заметим, что $|a_0 - a_m\varepsilon| \leqslant p-2$ и p делит $a_0 - a_m\varepsilon$. Следовательно, $a_0 = a_m\varepsilon$, и можно разделить сумму в (2.6) на p. Повторяя данное рассуждение, приходим к тому, что $a_j = a_{j+m}\varepsilon$ для $j = 0, 1, \dots, m-1$.

Вернемся к u и представим его в следующем виде:

$$u = \sum_{j=0}^{m-1} a_j p^j + q\varepsilon \sum_{j=0}^{m-1} a_j p^j = \varepsilon(q+\varepsilon)\sum_{j=0}^{m-1} a_j p^j.$$

Напомним, что $2(q+\varepsilon)$ делит u, поэтому сумма $\sum\limits_{j=0}^{m-1} a_j p^j$ должна быть четной. Из условия $a_j \equiv i_j \pmod 2$ вытекает, что сумма $i_0 + i_1 + \ldots + i_{m-1}$ тоже четна. Докажем, что можно выбрать такие a'_j, $j = 0, 1, \dots, m-1$, что $a'_j \equiv i_j \pmod 2$, $|a'_j| \leqslant i_j$ и 4 делит $\sum\limits_{j=0}^{m-1} a'_j p^j$.

Пусть $\{0, 1, \dots, m-1\} = A \sqcup B$, где $j \in A$, если i_j нечетно, и $j \in B$ в противном случае. Заметим, что $|A|$ четно. Для $j \in A$ положим $\gamma_j = 1$, если $p^j \equiv 1 \pmod 4$, и $\gamma_j = -1$, если $p^j \equiv -1 \pmod 4$. Рассмотрим любое разбиение $A = A^+ \sqcup A^-$ такое, что $|A^+| = |A^-|$. Положим

$$a'_j = \begin{cases} 0, & \text{если } j \in B, \\ \gamma_j, & \text{если } j \in A^+, \\ -\gamma_j, & \text{если } j \in A^-. \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{j=0}^{m-1} a'_j p^j \equiv \sum_{j\in A^+} \gamma_j p^j - \sum_{j\in A^-} \gamma_j p^j \equiv \sum_{j\in A^+} 1 - \sum_{j\in A^-} 1 \equiv |A^+| - |A^-| \equiv 0 \pmod 4.$$

Таким образом, a'_j — искомые числа. Для $j = 0, 1, \dots, m-1$ положим $a'_{j+m} = a'_j\varepsilon$ и отметим, что $a'_{j+m} \equiv a'_j \equiv i_j \equiv a_j \equiv a_{j+m} \equiv i_{j+m} \pmod 2$.

В силу выбора ε в $GF(q)^\times$ найдется элемент λ_1 порядка $4(q+\varepsilon)$. Рассмотрим элемент $g_1 = \overline{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1^{-1} \end{pmatrix}}$ и положим $u' = \sum\limits_{j=0}^{2m-1} a'_j p^j$. По п. 1 леммы 2 матрица $\rho_{i_j}^j(g_1)$ имеет собственное число, равное $\lambda_1^{a'_j p^j}$, следовательно $\lambda_1^{u'}$ — одно из собственных чисел матрицы $\bigotimes\limits_{j=0}^{2m-1} \rho_{i_j}^j(g_1)$. В силу выбора чисел a'_j и равенства $u' = \varepsilon(q+\varepsilon)\sum\limits_{j=0}^{m-1} a'_j p^j$ число u' делится на $4(q+\varepsilon)$, т. е. $\lambda_1^{u'} = 1$. Таким образом, $p|g_1| = 2p(q+\varepsilon) \in \omega(G)$. Это противоречит (2.2). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мазуров В.Д.** Распознавание конечных групп по множеству порядков их элементов // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 6. С. 651–666.
2. **Grechkoseeva M.A., Mazurov V.D., Shi W. et al.** Finite groups isospectral to simple groups // Commun. Math. Stat. 2023. Vol. 11. P. 169–194. doi: 10.1007/s40304-022-00288-5
3. **Мазуров В.Д., Су М.Ч., Чао Ч.П.** Распознавание конечных простых групп $L_3(2^m)$ и $U_3(2^m)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 5. С. 567–585.
4. **Мазуров В.Д.** Распознавание конечных простых групп $S_4(q)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 2. С. 166–198.
5. **Lytkin Y.V.** On finite groups isospectral to the simple groups $S_4(q)$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Т. 15. С. 570–584. doi: 10.17377/semi.2018.15.046
6. **Brauer R., Nesbitt C.** On the modular characters of groups // Ann. Math. 1941. Vol. 42, no. 2. P. 556–590. doi: 10.2307/1968918
7. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin: Springer-Verl., 1967. 793 p. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3

8. **Srinivasan B.** The characters of the finite symplectic group $Sp(4, q)$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 131, no. 2. P. 488–525.
9. **Suprunenko I.D.** The minimal polynomials of unipotent elements in irreducible representations of the classical groups in odd characteristic // Mem. Amer. Math. Soc. 2009. Vol. 200, no. 939. doi: 10.1090/memo/0939

Поступила 15.08.2023
После доработки 19.09.2023
Принята к публикации 25.09.2023

Гречкосеева Мария Александровна
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
e-mail: grechkoseeva@gmail.com

Родионов Владислав Максимович
студент
Новосибирский государственный университет
г. Новосибирск
e-mail: v.rodionov@g.nsu.ru

REFERENCES

1. Mazurov V.D. Recognition of finite groups by a set of orders of their elements. *Algebra and Logic*, 1998, vol. 37, no. 6. doi: 10.1007/BF02671691
2. Grechkoseeva M.A., Mazurov V.D., Shi W. et al. Finite groups isospectral to simple groups. *Commun. Math. Stat.*, 2023, vol. 11, pp. 169–194. doi: 10.1007/s40304-022-00288-5
3. Mazurov V.D., Xu M.C., Cao H.P. Recognition of the finite simple groups $L_3(2^m)$ and $U_3(2^m)$ from the orders of their elements. *Algebra and Logic*, 2000, vol. 39, no. 5, pp. 324–334. doi: 10.1007/BF02681616
4. Mazurov V.D. Recognition of finite simple groups $S_4(q)$ by their element orders. *Algebra and Logic*, 2002, vol. 41, no. 2, pp. 93–110. doi: 10.1023/A:1015356614025
5. Lytkin Y.V. On finite groups isospectral to the simple groups $S_4(q)$. *Sib. Electron. Math. Reports*, 2018, vol. 15, pp. 570–584. doi: 10.17377/semi.2018.15.046
6. Brauer R., Nesbitt C. On the modular characters of groups. *Ann. Math.*, 1941, vol. 42, no. 2, pp. 556–590. doi: 10.2307/1968918
7. Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin: Springer-Verl., 1967. 793 p. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3
8. Srinivasan B. The characters of the finite symplectic group $Sp(4, q)$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1968, vol. 131, no. 2, pp. 488–525.
9. Suprunenko I.D. The minimal polynomials of unipotent elements in irreducible representations of the classical groups in odd characteristic // Mem. Amer. Math. Soc. 2009. Vol. 200, no. 939. doi: 10.1090/memo/0939

Received August 15, 2023
Revised September 19, 2023
Accepted September 25, 2023

Funding Agency: This research was carried out within a state task to the Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (project no. FWNF-2022-0002).

Mariya Aleksandrovna Grechkoseeva, Dr. Phys.-Math. Sci., Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, 630090 Russia, e-mail: grechkoseeva@gmail.com .

Vladislav Maksimovich Rodionov, Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia, e-mail: v.rodionov@g.nsu.ru .

Cite this article as: M. A. Grechkoseeva, V. M. Rodionov. On finite groups isospectral to $PSp_4(q)$. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 64–69.