ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 4 2023

УДК 517.518.224

КОЛМОГОРОВСКИЕ ПОПЕРЕЧНИКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ ВЕСОВЫХ КЛАССОВ СОБОЛЕВА НА ОТРЕЗКЕ С ОДИНАКОВОЙ ГЛАДКОСТЬЮ[1]

А. А. Васильева

В работе получены порядковые оценки колмогоровских n-поперечников пересечения двух весовых классов Соболева $W^r_{p_1,g_1}[a, b]$ и $W^r_{p_2,g_2}[a, b]$ в весовом пространстве Лебега $L_{q,v}[a, b]$ при больших n. Предполагается, что $p_1 > p_2$. Веса g_1, g_2, v имеют общий вид. Условия на эти функции таковы, что порядок поперечника по n такой же, как у невесового класса Соболева $W^r_{p_1}[a, b]$. Кроме того, вес g_2 в некотором смысле значительно меньше веса g_1. Константы в порядковом равенстве для поперечника зависят только от p_1, p_2, q и r. Оценка сверху сводится к использованию одного из предыдущих результатов автора (2010) для одного весового класса Соболева. Для оценки снизу используется метод дискретизации. Затем оценивается поперечник пересечения p_1- и p_2-эллипсоидов. В это множество вписывается многогранник специального вида. При подходящем выборе параметров получается нужная оценка снизу для поперечника многогранника.

Ключевые слова: колмогоровские поперечники, пересечение классов функций.

A. A. Vasil'eva. Kolmogorov widths of the intersection of two weighted Sobolev classes on an interval with the same smoothness.

Order estimates are obtained for the Kolmogorov n-widths of the intersection of two weighted Sobolev classes on an interval with the same smoothness for large n. The weights have a general form, and one of them is in a certain sense significantly less than the other. The constants in the order equality are independent of the weights. Order estimates are obtained for the Kolmogorov n-widths of the intersection of two weighted Sobolev classes $W^r_{p_1,g_1}[a, b]$ and $W^r_{p_2,g_2}[a, b]$ in the weighted Lebesgue space $L_{q,v}[a, b]$ for large n. It is assumed that $p_1 > p_2$. The weights g_1, g_2, and v have general form. The conditions on these functions are such that the order of the width in n is the same as for the unweighted Sobolev class $W^r_{p_1}[a, b]$. In addition, the weight g_2 in a certain sense is considerably less than the weight g_1. The constants in the order equality for the width depend only on p_1, p_2, q, and r. The upper estimate reduces to the use of our earlier result (2010) for one weighted Sobolev class. The lower estimate is derived by using the discretization method and estimating the width of the intersection of the p_1- and p_2-ellipsoids. Then a polyhedron of special form is inscribed in this set, and the required lower estimate is obtained for the width of the polyhedron under an appropriate choice of the parameters.

Keywords: Kolmogorov widths, intersection of function classes.

MSC: 41A46

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-4-55-63

1. Введение

В [1] исследовалась задача об оценке колмогоровских n-поперечников весовых классов Соболева на отрезке в весовом пространстве Лебега; полученный результат обобщал и уточнял предыдущие исследования [2–5]. Условия на веса были такие, что поперечники имели такой же порядок, как и для единичных весов (об оценках поперечников невесового класса Соболева см. [6; 7]). При этом константы в порядковом равенстве при больших $n \in \mathbb{N}$ не зависели от весов.

Здесь мы исследуем задачу о колмогоровских поперечниках пересечения двух весовых классов Соболева одинаковой гладкости на отрезке в весовом пространстве Лебега. Похожая

[1]Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 22-21-00204, https://rscf.ru/project/22-21-00204/.

задача о поперечнике пересечения двух функциональных классов одинаковой гладкости рассматривалась в [8]; один из классов был невесовым классом Соболева $W^1_p[0,\, 1]$, а второй задавался ограничением вида $\|f'\|_{L_1[(j-1)/s,\, j/s]} \le \varepsilon_j/s$, $1 \le j \le s$, где $\varepsilon_j \in [0,\, 1]$. Мультипликативные константы в порядковой оценке не зависели от ε_j.

Об оценках поперечников пересечения функциональных классов разной гладкости см., например, [9; 10].

Дадим необходимые определения.

Пусть X — нормированное пространство, $M \subset X$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Колмогоровским n-поперечником множества M в пространстве X называется величина

$$d_n(M,\, X) = \inf_{L \in \mathcal{L}_n(X)} \sup_{x \in M} \inf_{y \in L} \|x - y\|;$$

здесь $\mathcal{L}_n(X)$ — совокупность всех подпространств в X размерности не выше n.

Для $1 \le p \le \infty$ через $L_p[a,\, b]$ обозначаем пространство Лебега, т.е. пространство классов эквивалентности измеримых функций на отрезке $[a,\, b]$ с конечной нормой

$$\|f\|_{L_p[a,\, b]} = \begin{cases} \left(\int_{[a,\, b]} |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p} & \text{при } 1 \le p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{t \in [a,\, b]} |f(t)| & \text{при } p = \infty. \end{cases}$$

Пусть $r \in \mathbb{N}$, $1 \le p,\, q \le \infty$, $g : [a,\, b] \to [0,\, +\infty)$, $v : [a,\, b] \to [0,\, +\infty)$ — измеримые функции. Весовой класс Соболева $W^r_{p,g}[a,\, b]$ определяется формулой

$$W^r_{p,g}[a,\, b] = \left\{ f \in AC[a,\, b] \colon f^{(j)} \in AC[a,\, b],\ 1 \le j \le r-1,\ \left\| \frac{f^{(r)}}{g} \right\|_{L_p[a,\, b]} \le 1 \right\};$$

если $g|_E = 0$ для некоторого измеримого множества $E \subset [a,\, b]$, то считаем, что $f^{(r)}|_E = 0$.

Весовое пространство $L_{q,v}[a,\, b]$ состоит из классов эквивалентности измеримых функций f таких, что $\|f\|_{L_{q,v}[a,\, b]} := \|vf\|_{L_q[a,\, b]} < \infty$.

В [1] было рассмотрено несколько достаточных условий на веса, при которых поперечники имели такой же порядок, как для случая единичных весов. Здесь мы приведем только два простых частных случая:

1. $g \in L_{p'}[a,\, b]$, $v \in L_q[a,\, b]$, где p' определено равенством $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ (полагаем $1/\infty = 0$);

2. g — неубывающая функция, v — невозрастающая, при этом $gv \in L_\varkappa[a,\, b]$, где $\varkappa = \dfrac{1}{r + 1/q - 1/p}$.

Здесь мы исследуем задачу об оценке поперечников пересечения двух классов Соболева

$$M = W^r_{p_1,g_1}[a,\, b] \cap W^r_{p_2,g_2}[a,\, b] \tag{1.1}$$

в $L_{q,v}[a,\, b]$, где $r \in \mathbb{N}$, $1 < p_2 < p_1 \le \infty$, $1 < q < \infty$, g_1, g_2, $v \colon [a,\, b] \to (0,\, +\infty)$ — измеримые функции. Условия на веса здесь будут такими, что порядки поперечников будут совпадать с порядками для невесового класса Соболева $W^r_{p_1}[a,\, b]$. Кроме того, мы здесь будем рассматривать случай, когда вес g_2 в некотором смысле значительно меньше, чем вес g_1. Оценки будут получены при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$, при этом константы в порядковом равенстве не будут зависеть от весов.

Обозначим

$$\beta(t) = \frac{g_2(t)}{g_1(t)}, \quad t \in [a,\, b], \tag{1.2}$$

$$q_* = \min\{q,\, 2\}, \quad \varkappa = \begin{cases} \dfrac{1}{r + \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{q_*}}, & \text{если } p_2 < q_* < p_1, \\ \dfrac{1}{r + \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p_1}}, & \text{если } p_2 < p_1 \le q_*, \\ \dfrac{1}{r + \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p_2}}, & \text{если } q_* \le p_2 < p_1. \end{cases} \tag{1.3}$$

Пусть X, Y — множества, $f_1,\, f_2 :\ X \times Y \to \mathbb{R}_+$. Обозначим $f_1(x,\, y) \underset{y}{\lesssim} f_2(x,\, y)$ (или $f_2(x,\, y) \underset{y}{\gtrsim} f_1(x,\, y)$), если для любого $y \in Y$ существует $c(y) > 0$ такое, что $f_1(x,\, y) \le c(y) f_2(x,\, y)$ для любого $x \in X$; $f_1(x,\, y) \underset{y}{\asymp} f_2(x,\, y)$, если $f_1(x,\, y) \underset{y}{\lesssim} f_2(x,\, y)$ и $f_2(x,\, y) \underset{y}{\lesssim} f_1(x,\, y)$.

Теорема 1. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $1 < q < \infty$, $1 \le p_2 < p_1 \le \infty$, множество M задано формулой (1.1), функция $\beta(\cdot)$ — формулой (1.2), числа q_* и $\varkappa$ — формулой (1.3). Предположим, что существуют неубывающие последовательности неотрицательных кусочно-постоянных функций $\{g_{1,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$, $\{\beta_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ и $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, сходящихся п.в. к g_1, β и v соответственно.*

1. *Пусть $p_2 < q_* < p_1$. Определим число $\lambda \in (0,\, 1)$ равенством*

$$\frac{1}{q_*} = \frac{1-\lambda}{p_1} + \frac{\lambda}{p_2}.$$

Пусть выполнено одно из условий теоремы 1 из [1] для $g = g_1^{1-\lambda} g_2^{\lambda}$, $p = q_*$. Также предположим, что

$$[\beta(t)]^{(p_1p_2)/(p_1-p_2)} (g_1^{1-\lambda}(t) g_2^{\lambda}(t) v(t))^{\varkappa} \le \int\limits_a^b (g_1^{1-\lambda}(s) g_2^{\lambda}(s) v(s))^{\varkappa}\, ds \quad \text{для п. в. } t \in [a,\, b]. \tag{1.4}$$

Тогда при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$

$$d_n(M,\, L_{q,v}[a,\, b]) \underset{p_1,p_2,q,r}{\asymp} \|g_1^{1-\lambda} g_2^{\lambda} v\|_{L_\varkappa[a,\, b]} n^{-r}.$$

2. *Пусть $p_2 < p_1 \le q_*$. Пусть выполнено одно из условий теоремы 1 из [1] для $g = g_1$, $p = p_1$. Тогда при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$*

$$d_n(M,\, L_{q,v}[a,\, b]) \underset{p_1,p_2,q,r}{\asymp} \|g_1 v\|_{L_\varkappa[a,\, b]} n^{-r-1/q_*+1/p_1}.$$

3. *Пусть $q_* \le p_2 < p_1$. Пусть выполнено одно из условий теоремы 1 из [1] для $g = g_2$, $p = p_2$. Предположим, что*

$$\|g_2 v \cdot \beta^{(r+1/q-1/p_2)p_2}\|_{L_{\varkappa p_1/p_2}[a,\, b]} \le \|g_2 v\|_{L_\varkappa[a,\, b]}. \tag{1.5}$$

Тогда при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$d_n(M,\, L_{q,v}[a,\, b]) \underset{p_1,p_2,q,r}{\asymp} \|g_2 v\|_{L_\varkappa[a,\, b]} n^{-r}.$$

2. Доказательство теоремы

Оценка сверху в пп. 2 и 3 следует из тривиального включения $M \subset W^r_{p_i,g_i}[a,\,b]$ $(i=1,\,2)$ и теоремы 1 из [1]. В условиях п. 1 из неравенства Гёльдера получаем, что

$$\Big\|\frac{f^{(r)}}{g_1^{1-\lambda}g_2^{\lambda}}\Big\|_{L_{q*}[a,\,b]} \le \Big\|\frac{f^{(r)}}{g_1}\Big\|^{1-\lambda}_{L_{p_1}[a,\,b]}\Big\|\frac{f^{(r)}}{g_2}\Big\|^{\lambda}_{L_{p_2}[a,\,b]},$$

откуда получаем включение $M \subset W^r_{q*,g_1^{1-\lambda}g_2^{\lambda}}[a,\,b]$ и применяем теорему 1 из [1].

Докажем оценку снизу.

Нам понадобятся оценки поперечников некоторых конечномерных множеств.

Пусть $\nu \in \mathbb{N}$, $1 \le q \le \infty$. Через l_q^ν обозначим пространство $\mathbb{R}^\nu$ с нормой

$$\|(x_j)_{j=1}^\nu\|_{l_q^\nu} = \begin{cases} \Big(\sum\limits_{j=1}^{\nu}|x_j|^q\Big)^{1/q} & \text{при } q<\infty,\\ \max_{1\le j\le\nu}|x_j| & \text{при } q=\infty,\end{cases}$$

а через B_q^ν — единичный шар пространства l_q^ν. При $p \ge q$ известны точные значения поперечников $d_n(B_p^\nu,\, l_q^\nu)$ [11; 12], а при $p<q<\infty$ и $p \ge 2$, $q=\infty$ — порядковые оценки [7; 13; 14]. Выпишем оценки для тех случаев, которые нам понадобятся в дальнейшем:

$$d_n(B_\infty^\nu,\, l_q^\nu) = (\nu-n)^{1/q}, \quad 1 \le q < \infty, \tag{2.1}$$

$$d_n(B_1^\nu,\, l_q^\nu) \asymp 1, \quad n \le \frac{\nu}{2},\ 1 \le q \le 2, \tag{2.2}$$

$$d_n(B_1^\nu,\, l_q^\nu) \underset{q}{\asymp} \min\{1,\, n^{-1/2}\nu^{1/q}\}, \quad n \le \frac{\nu}{2},\ 2 \le q < \infty. \tag{2.3}$$

Пусть $m \in \mathbb{N}$. Положим $G = S_m \times \{-1,\,1\}^m$, где S_m — группа перестановок m элементов. Для $\gamma = (\sigma,\, \varepsilon_1,\, \dots,\, \varepsilon_m) \in S_m \times \{-1,\,1\}^m$, $x = (x_j)_{j=1}^m \in \mathbb{R}^m$ обозначим через $\gamma(x)$ вектор, у которого j-я координата равна $\varepsilon_j x_{\sigma(j)}$. Пусть $1 \le k \le m$, $e = (1,\, \dots,\, 1,\, 0,\, \dots,\, 0)$ (единицы на первых k местах). Обозначим

$$V_k^m = \mathrm{conv}\,\{\gamma(e):\ \gamma \in G\},$$

где conv — выпуклая оболочка.

Следующая лемма фактически была доказана в [8, с. 61–64]; μ_j, k_j и n_j имели специальный вид. Общий случай получается дословным повторением выкладок. Отметим также, что доказательство обобщает рассуждения Е. Д. Глускина [15].

Лемма 1. *Пусть $s \in \mathbb{N}$, $n_j,\ k_j \in \mathbb{N}$, $k_j \le n_j$, $\mu_j > 0$, $1 \le j \le s$, $V = \prod_{j=1}^s \mu_j V_{k_j}^{n_j}$, $\nu = \sum_{j=1}^s n_j$, при этом существуют числа $b>0$ и $c \ge 1$ такие, что $c^{-1}b \le \dfrac{\mu_j^{q_*}k_j}{n_j} \le cb$, $1 \le j \le s$. Тогда для $n \le \nu/2$ выполнено*

$$d_n(V,\, l_{q_*}^\nu) \underset{q,c}{\gtrsim} b^{1/q_*}\nu^{1/q_*}. \tag{2.4}$$

Перейдем к оценке снизу поперечников множества M.

Сначала рассмотрим случай кусочно-постоянных положительных весов. Пусть $\{\Delta_j\}_{j=1}^s$ — разбиение $[a,\,b]$ на неперекрывающиеся отрезки, $g_1|_{\Delta_j} = a_j$, $g_2|_{\Delta_j} = a_j\varepsilon_j$, $v|_{\Delta_j} = b_j$, где a_j, b_j, $\varepsilon_j > 0$, $1 \le j \le s$.

Пусть $n_j \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le s$, $\sum\limits_{j=1}^{s} n_j = \nu \in [2n, 4n]$. Положим $c_j = a_j b_j$, $1 \le j \le s$. Через W обозначим множество точек $(x_{i,j})_{1\le j\le s,\, 1\le i\le n_j} \in \mathbb{R}^\nu$, заданных условием

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j} \frac{1}{c_j^{p_1}} n_j^{(r+1/q-1/p_1)p_1} |\Delta_j|^{-(r+1/q-1/p_1)p_1} |x_{i,j}|^{p_1} \le 1,\\ \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j} \frac{1}{(c_j\varepsilon_j)^{p_2}} n_j^{(r+1/q-1/p_2)p_2} |\Delta_j|^{-(r+1/q-1/p_2)p_2} |x_{i,j}|^{p_2} \le 1.\end{gathered} \tag{2.5}$$

Стандартным образом с помощью дискретизации получаем

$$d_n(M,\, L_{q,v}[a,\, b]) \underset{p_1,p_2,q,r}{\gtrsim} d_n(W,\, l_q^\nu). \tag{2.6}$$

Доказательство аналогично рассуждениям из [8; 10] и является обобщением метода дискретизации В. Е. Майорова [16].

Случай $p_2 < q_* < p_1$. Положим

$$\tilde{n}_j = 4n\, \frac{(c_j\varepsilon_j^{\lambda})^{\varkappa}|\Delta_j|}{\sum\limits_{i=1}^{s}(c_i\varepsilon_i^{\lambda})^{\varkappa}|\Delta_i|}, \quad n_j = \lfloor \tilde{n}_j \rfloor. \tag{2.7}$$

При достаточно больших n получаем

$$\tilde{n}_j/2 \le n_j \le \tilde{n}_j, \tag{2.8}$$

откуда

$$2n \le \nu \le 4n. \tag{2.9}$$

Рассмотрим множество $V = \prod_{j=1}^{s} \mu_j V_{k_j}^{n_j}$, где $1 \le k_j \le n_j$,

$$\mu_j = c_j \varepsilon_j^{-p_2/(p_1-p_2)} |\Delta_j|^{r+1/q} \tilde{n}_j^{-r-1/q}. \tag{2.10}$$

Для включения $V \subset W$ достаточно (см. (2.5), (2.8))

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{s} \frac{1}{c_j^{p_1}} \tilde{n}_j^{(r+1/q-1/p_1)p_1} |\Delta_j|^{-(r+1/q-1/p_1)p_1} \mu_j^{p_1} k_j \le 1,\\ \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{(c_j\varepsilon_j)^{p_2}} \tilde{n}_j^{(r+1/q-1/p_2)p_2} |\Delta_j|^{-(r+1/q-1/p_2)p_2} \mu_j^{p_2} k_j \le 1.\end{gathered} \tag{2.11}$$

Подставляя (2.10), получаем, что (2.11) эквивалентно неравенству

$$\sum_{j=1}^{s} |\Delta_j| \tilde{n}_j^{-1} k_j \varepsilon_j^{-(p_1p_2)/(p_1-p_2)} \le 1. \tag{2.12}$$

Положим

$$k_j = \min\{\lfloor \tilde{k}_j \rfloor,\, n_j\}, \tag{2.13}$$

где $\tilde{k}_j$ выбираются так, чтобы

$$\sum_{j=1}^{s} |\Delta_j| \tilde{n}_j^{-1} \tilde{k}_j \varepsilon_j^{-(p_1p_2)/(p_1-p_2)} = 1, \quad \frac{\mu_j^{q_*}\tilde{k}_j}{\tilde{n}_j} = \mathrm{const} =: b. \tag{2.14}$$

Из (2.7), (2.10), (2.14) находим b:

$$b = \Big(\sum_{j=1}^{s} (c_j \varepsilon_j^{\lambda})^{\varkappa} |\Delta_j| \Big)^{q_*/\varkappa} (4n)^{-q_*(r+1/q)} = \|g_1^{1-\lambda} g_2^{\lambda} v\|^{q_*}_{L_{\varkappa}[a,\,b]} (4n)^{-q_*(r+1/q)}. \qquad (2.15)$$

Если $1 \le \tilde{k}_j \le 2\tilde{n}_j$, то

$$\tilde{k}_j/4 \le k_j \le \tilde{k}_j \qquad (2.16)$$

в силу (2.8) и (2.13); кроме того, $1 \le k_j \le n_j$. Так как $k_j \le \tilde{k}_j$, то из (2.12) и первого равенства (2.14) получаем, что $V \subset W$. Значит, в силу (2.4), (2.8), (2.9), (2.14), (2.16),

$$d_n(W,\, l^{\nu}_{q_*}) \ge d_n(V,\, l^{\nu}_{q_*}) \underset{q}{\gtrsim} b^{1/q_*} n^{1/q_*} \overset{(2.15)}{\underset{r}{\asymp}} \|g_1^{1-\lambda} g_2^{\lambda} v\|_{L_{\varkappa}[a,\,b]} n^{-r-1/q+1/q_*}.$$

Отсюда $d_n(W,\, l^{\nu}_{q}) \ge \nu^{1/q-1/q_*} d_n(W,\, l^{\nu}_{q_*}) \overset{(2.9)}{\underset{q,r}{\gtrsim}} \|g_1^{1-\lambda} g_2^{\lambda} v\|_{L_{\varkappa}[a,\,b]} n^{-r}$. Это вместе с (2.6) дает оценку

$$d_n(M,\, L_{q,v}[a,\,b]) \underset{r,p_1,p_2,q}{\gtrsim} \|g_1^{1-\lambda} g_2^{\lambda} v\|_{L_{\varkappa}[a,\,b]} n^{-r}. \qquad (2.17)$$

Остается выяснить, при каких условиях выполнено $1 \le \tilde{k}_j \le 2\tilde{n}_j$. Из второго равенства (2.14) получаем, что это эквивалентно условиям $\mu_j^{q_*} \le b\tilde{n}_j$, $2\mu_j^{q_*} \ge b$. Подставив (2.7), (2.10) и (2.15), получаем, что $\mu_j^{q_*} \le b\tilde{n}_j$ при достаточно больших n, а $2\mu_j^{q_*} \ge b$ выполнено, если

$$(c_j \varepsilon_j^{\lambda})^{\varkappa} \varepsilon_j^{(p_1 p_2)/(p_1 - p_2)} \le 2 \sum_{i=1}^{s} (c_i \varepsilon_i^{\lambda})^{\varkappa} |\Delta_i|, \quad 1 \le j \le s. \qquad (2.18)$$

Последнее неравенство следует из (1.4).

Случай $p_2 < p_1 \le q_*$. Положим

$$\tilde{n}_j = 4n \, \frac{c_j^{\varkappa} |\Delta_j|}{\sum_{i=1}^{s} c_i^{\varkappa} |\Delta_i|}, \quad n_j = \lfloor \tilde{n}_j \rfloor.$$

Тогда снова при больших n выполнено (2.8), (2.9). Для первого соотношения (2.5) достаточно выполнения условия

$$(x_{i,j})_{1 \le j \le s,\, 1 \le i \le n_j} \in (4n)^{-r-1/q+1/p_1} \|g_1 v\|_{L_{\varkappa}[a,\,b]} B^{\nu}_{p_1}.$$

Последнее множество содержит $(4n)^{-r-1/q+1/p_1} \|g_1 v\|_{L_{\varkappa}[a,\,b]} B^{\nu}_1$. Если n достаточно велико, то из условия $(x_{i,j})_{1 \le j \le s,\, 1 \le i \le n_j} \in (4n)^{-r-1/q+1/p_1} \|g_1 v\|_{L_{\varkappa}[a,\,b]} B^{\nu}_1$ следует и второе включение (2.5); здесь использовалось условие $p_1 > p_2$. Остается воспользоваться оценками (2.2), (2.3), (2.6), (2.9).

Случай $q_* \le p_2 < p_1$. Положим

$$\tilde{n}_j = 4n \, \frac{(c_j \varepsilon_j)^{\varkappa} |\Delta_j|}{\sum_{i=1}^{s} (c_i \varepsilon_i)^{\varkappa} |\Delta_i|}, \quad n_j = \lfloor \tilde{n}_j \rfloor.$$

Снова получаем (2.8), (2.9) при больших n. Для второго соотношения (2.5) достаточно выполнения условия $(x_{i,j})_{1 \le j \le s,\, 1 \le i \le n_j} \in (4n)^{-r-1/q+1/p_2} \|g_2 v\|_{L_{\varkappa}[a,\,b]} B^{\nu}_{p_2}$. Последнее множество содержит $(4n)^{-r-1/q} \|g_2 v\|_{L_{\varkappa}[a,\,b]} B^{\nu}_{\infty}$. Непосредственными выкладками получаем: если

$$\sum_{j=1}^{s} (c_j \varepsilon_j)^{(p_1 \varkappa)/p_2} \varepsilon_j^{p_1} |\Delta_j| \le 2 \Big(\sum_{j=1}^{s} (c_j \varepsilon_j)^{\varkappa} |\Delta_j| \Big)^{p_1/p_2}, \qquad (2.19)$$

то из условия $(x_{i,j})_{1\le j\le s,\,1\le i\le n_j} \in (cn)^{-r-1/q}\|g_2 v\|_{L_\varkappa[a,\,b]}B^\nu_\infty$ следует первое соотношение (2.5); здесь c — абсолютная константа. Тогда

$$d_n(M,\, L_{q,v}[a,\,b]) \underset{p_1,p_2,q,r}{\overset{(2.6)}{\gtrsim}} n^{-r-1/q}\|g_2 v\|_{L_\varkappa[a,\,b]} d_n(B^\nu_\infty,\, l^\nu_q) \overset{(2.1),(2.9)}{\gtrsim} n^{-r}\|g_2 v\|_{L_\varkappa[a,\,b]}.$$

Условие (2.19) следует из (1.5).

Итак, для положительных ступенчатых весов теорема доказана. Для неотрицательных ступенчатых весов оценки доказываются аналогично; в (2.5) участвуют не все отрезки, а только те, на которых $c_j > 0$ и $\varepsilon_j > 0$.

Теперь рассмотрим случай произвольных весов. Пусть выполнены условия п. 1 теоремы (остальные случаи рассматриваются аналогично). Из теоремы Беппо Леви следует, что при достаточно большом $m \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\int\limits_{[a,\,b]} (g_{1,m}\beta^\lambda_m v_m)^\varkappa\, dt \ge \frac{1}{2}\int\limits_{[a,\,b]} (g_1\beta^\lambda v)^\varkappa\, dt = \frac{1}{2}\int\limits_{[a,\,b]} (g_1^{1-\lambda} g_2^\lambda v)^\varkappa\, dt. \tag{2.20}$$

Так как $g_1(t)$, $g_2(t)$ и $v(t)$ положительны п.в., то правая часть (2.20) положительна.

Существует разбиение $\{\Delta_j\}_{j=1}^s$ отрезка $[a,\,b]$ такое, что $g_{1,m}|_{\Delta_j} = a_j$, $\beta_m|_{\Delta_j} = \varepsilon_j$, $v|_{\Delta_j} = b_j$, $1 \le j \le s$. Положим $c_j = a_j b_j$, $g_{2,m} = g_{1,m}\beta_m$. В силу (1.4) и (2.20), выполнено (2.18). Значит,

$$d_n(M,\, L_{q,v}[a,\,b]) \overset{(1.1)}{\ge} d_n(W^r_{p_1,g_{1,m}}[a,\,b] \cap W^r_{p_2,g_{2,m}}[a,\,b],\, L_{q,v_m}[a,\,b]) \underset{q,p_1,p_2,r}{\overset{(2.17)}{\gtrsim}}$$

$$\gtrsim \|g_{1,m}^{1-\lambda} g_{2,m}^\lambda v_m\|_{L_\varkappa[a,\,b]} n^{-r} \underset{q,p_1,p_2,r}{\overset{(2.20)}{\gtrsim}} \|g_1^{1-\lambda} g_2^\lambda v\|_{L_\varkappa[a,\,b]} n^{-r}.$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В [8] были ограничения другого вида, и оценки поперечников выполнены при любых $\varepsilon_j \in [0,\,1]$. Этот момент в доказательстве был пропущен. Здесь мы восполним этот пробел. Далее используем обозначения из [8].

При доказательстве оценки снизу в лемме 1 из работы [8] дополнительно нужно потребовать, чтобы $\varepsilon\nu^{\gamma+1/p} \le 1$; тогда $\hat{k}^{1-1/p} = \varepsilon\nu^{1+\gamma} \le \nu^{1-1/p}$, т. е. $\hat{k} \le \nu$.

Тем самым нам далее нужно проверить неравенства $\varepsilon_j\hat{\nu}_j^{\gamma_j+1/p} \le 1$ или $\varepsilon_j^{-p}\sigma_j \ge 1$ (числа $\sigma_j = \hat{\nu}_j^{-p\gamma_j-1}$ определялись при доказательстве оценки сверху).

В случае $p > 2$, $q \ge 2$ выполнено $\sigma_j = \tau_j^{p-1}$; из равенств (2.7) [8] и $\theta = \dfrac{q+2}{q}\,\dfrac{p-1}{p-2}$ получаем

$$\sigma_j = s\frac{\hat{\nu}_j^{-\theta}\varepsilon_j}{\sum\limits_{k=1}^s \hat{\nu}_k^{-\theta}\varepsilon_k}. \tag{2.21}$$

При $p > q$, $q \le 2$ имеем $\sigma_j = \tau_j^{(p-1)/(q-1)}$; из равенства (2.20) [8] и $\theta = \dfrac{q(p-1)}{p-q}$ снова получаем (2.21). Отсюда и из (2.12), (2.23) работы [8] следует, что

$$\sigma_j = s\frac{\varepsilon_j^{1/(\theta+1)}}{\sum\limits_{k=1}^s \varepsilon_k^{1/(\theta+1)}}.$$

Таким образом, остается проверить неравенство

$$\varepsilon_j^{-p}\,\varepsilon_j^{1/(\theta+1)} \ge \frac{1}{s}\sum_{k=1}^s \varepsilon_k^{1/(\theta+1)}$$

для любого $j \in \{1, \ldots, s\}$. По условию, $0 < \varepsilon_j \le 1$. Пусть $j_0 = \operatorname{argmax}_{1\le k\le s} \varepsilon_k$. Тогда для любого $j = 1, \ldots, s$

$$\varepsilon_j^{-p}\,\varepsilon_j^{1/(\theta+1)} \ge \varepsilon_{j_0}^{-p}\,\varepsilon_{j_0}^{1/(\theta+1)} \ge \varepsilon_{j_0}^{1/(\theta+1)} \ge \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}\varepsilon_k^{1/(\theta+1)}.$$

Неравенство $\varepsilon_j\hat{\nu}_j^{\gamma_j+1/p} \le 1$ доказано. Тем самым доказательство оценки снизу в [8] проходит при всех $\varepsilon_j \in [0, 1]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Васильева А.А.** Оценки поперечников весовых соболевских классов // Мат. сб. 2010. Т. 201, № 7. С. 15–52. doi 10.4213/sm7520
2. **Lifshits M.A., Linde W.** Approximation and entropy numbers of Volterra operators with application to Brownian motion // Mem. Amer. Math. Soc. Vol. 157, no. 745. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002. doi: 10.1090/memo/074
3. **Edmunds D.E., Lang J.** Approximation numbers and Kolmogorov widths of Hardy-type operators in a non-homogeneous case // Math. Nachr. 2006. Vol. 297, no. 7. P. 727–742. doi: 10.1002/mana.200510389
4. **Lomakina E.N., Stepanov V.D.** On asymptotic behaviour of the approximation numbers and estimates of Schatten–von Neumann norms of the Hardy-type integral operators // Function spaces and applications: Proc. of Delhi Conf. (New Delhi, India, 1997), New Delhi: Narosa Publ., 2000. P. 153–187.
5. **Ломакина Е.Н., Степанов В.Д.** Асимптотические оценки аппроксимативных и энтропийных чисел одновесового оператора Римана — Лиувилля // Мат. тр. 2006. Т. 9, № 1. С. 52–100.
6. **Тихомиров В.М.** Теория приближений. // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 14. (Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР). М., 1987. С. 103–260.
7. **Кашин Б.С.** Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1977. Т. 41, № 2. С. 334–351.
8. **Васильева А.А.** Колмогоровские поперечники классов Соболева на отрезке с ограничениями на вариацию // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 2. С. 48–66. doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-48-66
9. **Галеев Э.М.** Поперечники по Колмогорову классов периодических функций одной и нескольких переменных // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1990. Т. 54, № 2. С. 418–430.
10. **Васильева А.А.** Колмогоровские поперечники пересечений весовых классов Соболева на отрезке с ограничениями на нулевую и первую производные // Изв. РАН. Сер. математическая. 2021. Т. 85, № 1. С. 3–26. doi: 10.4213/im8969
11. **Pietsch A.** s-numbers of operators in Banach space // Studia Math. 1974. Vol. 51. P. 201–223.
12. **Стесин М.И.** Александровские поперечники конечномерных множеств и классов гладких функций // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220, № 6. С. 1278–1281.
13. **Глускин Е.Д.** Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств // Мат. сб. 1983. Т. 120 (162), №2. С. 180–189.
14. **Гарнаев А.Ю., Глускин Е.Д.** О поперечниках евклидового шара // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, №5. С. 1048–1052.
15. **Глускин Е.Д.** Пересечения куба с октаэдром плохо аппроксимируются подпространствами малой размерности // Приближение функций специальными классами операторов: межвуз. сб. научн. тр., Мин. прос. РСФСР / Вологодский гос. пед. ин-т. Вологда, 1987. С. 35–41.
16. **Майоров В.Е.** Дискретизация задачи о поперечниках // Успехи мат. наук. 1975. Т. 30, №. 6 (186). С. 179–180.

Поступила 02.08.2023
После доработки 11.10.2023
Принята к публикации 16.10.2023

Васильева Анастасия Андреевна
д-р физ.-мат. наук
доцент механико-математического факультета
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова;
Московский центр фундаментальной и прикладной математики, г. Москва
e-mail: vasilyeva_nastya@inbox.ru

REFERENCES

1. Vasil'eva A.A. Estimates for the widths of weighted Sobolev classes. *Math. Sb.*, 2010, vol. 201, no. 7, pp. 947–984. doi: 10.1070/SM2010v201n07ABEH004098
2. Lifshits M.A., Linde W. Approximation and entropy numbers of Volterra operators with application to Brownian motion. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 2002, vol. 157, no. 745. doi: 10.1090/memo/0745
3. Edmunds D.E., Lang J. Approximation numbers and Kolmogorov widths of Hardy-type operators in a non-homogeneous case. *Math. Nachr.*, 2006, vol. 279, no. 7, pp. 727–742. doi: 10.1002/mana.200510389
4. Lomakina E.N., Stepanov V.D. On asymptotic behaviour of the approximation numbers and estimates of Schatten–von Neumann norms of the Hardy-type integral operators. In: *Proc. Conf. Function spaces and applications (New Delhi, 1997)*, New Delhi, Narosa Publ., 2000, pp. 153–187.
5. Lomakina E.N., Stepanov V.D. Asymptotic estimates for the approximation and entropy numbers of a one-weight Riemann–Liouville operator. *Sib. Advances Math.*, 2007, vol. 17, no. 1, pp. 1–36. doi: 10.3103/S1055134407010014
6. Tikhomirov V.M. Approximation theory. *Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Probl. Mat., Fundam. Napravleniya*, 1987, vol. 14, pp. 103–260 (in Russian).
7. Kashin B.S. Diameters of some finite-dimensional sets and classes of smooth functions. *Math. USSR-Sbornik*, 1977, vol. 11, no. 2, pp. 317–333. doi: 10.1070/IM1977v011n02ABEH001719
8. Vasil'eva A.A. Kolmogorov widths of Sobolev classes on a segment with constraints on variation. *Trudy Inst. Mat. Mekh. URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 48–66 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-48-66
9. Galeev E. M. Kolmogorov widths of classes of periodic functions of one and several variables. *Math. USSR-Izvestiya*, 1991, vol. 36, no. 2, pp. 435–448. doi: 10.1070/IM1991v036n02ABEH002029
10. Vasil'eva A. A. Kolmogorov widths of intersections of weighted Sobolev classes on an interval with conditions on the zeroth and first derivatives. *Izvestiya Math.*, 2021, vol. 85, no. 1, pp. 1–23. doi: 10.1070/IM8969
11. Pietsch A. s-numbers of operators in Banach spaces, *Studia Math.*, 1974, vol. 51, no. 3, pp. 201–223. doi: 10.4064/sm-51-3-201-223
12. Stesin M. I. Aleksandrov diameters of finite-dimensional sets and classes of smooth functions. *Sov. Math. Dokl.*, 1975, vol. 16, pp. 252–256.
13. Gluskin E. D. Norms of random matrices and widths of finite-dimensional sets. *Math. USSR-Sbornik*, 1984, vol. 48, no. 1, pp. 173–182. doi: 10.1070/SM1984v048n01ABEH002667
14. Garnaev A. Yu., Gluskin E. D. On widths of the euclidean ball. *Sov. Math. Dokl.*, 1984, vol. 30, pp. 200–204.
15. Gluskin E. D. Intersections of a cube and a octahedron are badly approximated by subspaces of small dimension. *Priblizhenie funktsii spetsial'nymi klassami operatorov* [Approximation of functions by special class of operators] (collection of scientific works), Vologda, Vologda State Ped. Univ. Publ., 1987, pp. 35–41.
16. Mayorov V. E. Discretization of widths problem. *Uspekhi Matem. Nauk*, 1975, vol. 30, no. 6 (186), pp. 179–180 (in Russian).

Received August 2, 2023
Revised October 11, 2023
Accepted October 16, 2023

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00204, https://rscf.ru/project/22-21-00204/).

Anastasia Andreevna Vasil'eva, Dr. Phys.-Math. Sci., Lomonosov Moscow State University; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, 119991 Russia,
e-mail: vasilyeva_nastya@inbox.ru .

Cite this article as: A. A. Vasil'eva. Kolmogorov widths of the intersection of two weighted Sobolev classes on an interval with the same smoothness. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 55–63 .