ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 4 2023

УДК 517.5

О НАИЛУЧШЕМ СОВМЕСТНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ

М. Ш. Шабозов

В пространствах Харди $H_{q,\rho}$ $(1 \le q \le \infty,\ 0 < \rho \le 1)$ найдены точные неравенства между наилучшим совместным приближением функции и усредненными модулями гладкости угловых граничных значений r-х производных. Даны некоторые приложения найденных неравенств к задаче отыскания точных верхних граней наилучших совместных приближений некоторых классов функций, задаваемых модулями гладкости и принадлежащих пространству Харди $H_{q,\rho}$.

Ключевые слова: наилучшее совместное приближение, пространство Харди, верхняя грань, модуль гладкости, мажоранта.

M. Sh. Shabozov. On the best simultaneous approximation of functions in the Hardy space.

In the Hardy spaces $H_{q,\rho}$ $(1 \le q \le \infty,\ 0 < \rho \le 1)$, exact inequalities are found between the best simultaneous approximation of a function and the averaged moduli of smoothness of the angular boundary values of the rth derivatives. Some applications of these inequalities to the problem of finding the best upper bounds of the best simultaneous approximations of some classes of functions defined by moduli of smoothness and belonging to the Hardy space $H_{q,\rho}$ are given.

Keywords: best simultaneous approximation, Hardy space, upper bound, modulus of smoothness, majorant.

MSC: 42C10, 47A58

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-4-283-291

Посвящается 80-летнему юбилею профессора Виталия Владимировича Арестова

1. Введение

Экстремальные задачи, связанные с наилучшим полиномиальным приближением аналитических в круге функций, принадлежащих пространству Харди H_q, $1 \le q \le \infty$, ранее изучались в [1; 2], где получены первые точные результаты по наилучшим полиномиальным приближениям аналитических в круге функций. В работах [3–8] (идейно связанных с исследованиями данной статьи) были получены результаты по наилучшему приближению и вычислению поперечников некоторых классов аналитических в единичном круге функций и их производных, модули непрерывности граничных значений которых, в частности, мажорируются заданными функциями.

Продолжая исследования в этом направлении, рассмотрим более общую задачу: требуется найти верхние грани наилучших совместных приближений (см. [9]) аналитических в круге функций и их промежуточных производных алгебраическими комплексными полиномами в пространстве H_q, $1 \le q \le \infty$.

Введем необходимые обозначения и понятия. Всюду далее $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — соответственно множество натуральных, целых неотрицательных, вещественных и комплексных чисел.

Пусть $U_\rho := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < \rho\}$ — открытый круг радиуса ρ, $0 < \rho \le 1$, с центром в нуле, $U := U_1$; $A(U_\rho)$ — множество функций, аналитических в круге U_ρ. Через H_q, $1 \le q \le \infty$, обозначим пространство Харди, состоящее из функций $f \in A(U)$, для которых

$$\|f\|_q := \|f\|_{H_q} = \lim_{\rho \to 1-0} M_q(f,\rho) < \infty,$$

где

$$M_q(f,\rho)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\left|f(\rho e^{it})\right|^q dt\right)^{1/q}, & 1\le q<\infty;\\ \max\limits_{0\le t<2\pi}|f(\rho e^{it})|, & q=\infty.\end{cases}\tag{1.1}$$

Известно [10, с. 78; 11, с. 279, 280], что в (1.1) интеграл не убывает при возрастании $\rho\in(0,1]$ и почти всюду на окружности $|z|=1$ существуют угловые граничные значения

$$f(e^{it})=:F(t).$$

При этом функция $F\in L_q[0,2\pi]$, $1\le q\le\infty$, и

$$\|f\|_q=\|F\|_q<\infty,\tag{1.2}$$

где

$$\|F\|_q=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\left|f(e^{it})\right|^q dt\right)^{1/q} & \text{при}\ \ 1\le q<\infty,\\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{0\le t<2\pi}|f(e^{it})| & \text{при}\ \ q=\infty.\end{cases}\tag{1.3}$$

Производную r-го порядка ($r\in\mathbb{Z}_+$) функции $f\in A(U)$ определим как обычно:

$$f^{(r)}(z):=\frac{d^r f(z)}{dz^r}=\sum_{k=r}^{\infty}\alpha_{k,r}c_k(f)z^{k-r}\quad \text{для}\ r\in\mathbb{N},\quad f^{(0)}:=f,\tag{1.4}$$

где

$$\alpha_{n,r}:=n(n-1)\cdots(n-r+1),\quad n>r,\quad n,r\in\mathbb{N};\quad \alpha_{n,0}=1,\quad \alpha_{n,1}=n;$$

$c_k(f)$ — коэффициенты ряда Тейлора функции

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)z^k.\tag{1.5}$$

Используя равенство (1.2), полагаем

$$H_{q,\rho}:=\left\{f\in A(U_\rho)\colon \left\|f(\cdot)\right\|_{q,\rho}:=\left\|f(\rho e^{i(\cdot)})\right\|_q<\infty\right\},\quad H_{q,1}=:H_q$$

и для $r\in\mathbb{Z}_+$

$$H_q^{(r)}:=\{f\in A(U)\colon f^{(r)}\in H_q\}.$$

Для функции $f\in H_q$ определим модуль гладкости равенством

$$\omega_2(f,2x)_q:=\sup\left\{\left\|f\left(e^{i(\cdot+t)}\right)-2f\left(e^{i(\cdot)}\right)+f\left(e^{i(\cdot-t)}\right)\right\|_q\colon |t|\le x\right\},\ x>0.$$

Через $\mathcal{P}_{n-1}$ обозначим подпространство комплексных алгебраических полиномов степени не выше $n-1$. Равенством

$$E_{n-1}(f)_q:=\inf\left\{\left\|f-p_{n-1}\right\|_q\colon p_{n-1}\in\mathcal{P}_{n-1}\right\}$$

определим наилучшее приближение функции $f\in H_q$ подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$.

Пусть $\Phi(t)$ — положительная неубывающая выпуклая вниз при $t>0$ функция такая, что $\lim\limits_{t\to0}\Phi(t)=\Phi(0)=0$. Определим классы аналитических в круге U функций посредством мажоранты Φ

$$W^{(r)}H_q(\Phi):=\left\{f\in H_q^{(r)}\colon \frac{n}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega_2\left(f^{(r)},2x\right)_q dx\le\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right),\ n\in\mathbb{N}\right\}.\tag{1.6}$$

Л. В. Тайков в работе [3] (в частности) доказал, что если мажоранта $\Phi(t)$ при $t \in (0, \pi/2]$ удовлетворяет ограничению

$$\frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(t)} \geq \frac{\pi}{\pi - 2} \begin{cases} 1 - 2\,\dfrac{\sin(\lambda\pi/2)}{\lambda\pi} & \text{при } 0 < \lambda \leq 2, \\ 2\Big(1 - \dfrac{1}{\lambda}\Big) & \text{при } \lambda \geq 2, \end{cases} \tag{1.7}$$

то для любых $n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, при $1 \leq q \leq \infty$ справедливо равенство

$$\mathcal{E}_{n-1}\big(W^{(r)}H_q(\Phi)\big) := \sup\big\{E_{n-1}(f)_q \colon f \in W^{(r)}H_q(\Phi)\big\} = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\Big(\frac{\pi}{2(n-r)}\Big).$$

В [3] также доказано, что условию (1.7) удовлетворяет, например, функция $\Phi_0(t) = t^{2/(\pi-2)}$.

Поскольку для $f \in H_q^{(r)}$ наравне с функциями f и $f^{(r)}$ все промежуточные производные $f^{(s)}(s = 1, 2, \ldots, r-1)$ также принадлежат пространству H_q, $1 \leq q \leq \infty$, (см. [12, с. 1582]), то представляет интерес отыскание точных значений совместных приближений

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_{q,\rho} := \inf\big\{\big\|f^{(s)} - p_{n-1}^{(s)}\big\|_{q,\rho} \colon\ p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\big\}$$

на некотором подмножестве функций $\mathfrak{N} \subseteq H_q^{(r)}$, где $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq 1$. Иными словами, требуется найти точное значение экстремальной величины

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(\mathfrak{N})_{q,\rho} := \sup\big\{E_{n-s-1}(f^{(s)})_{q,\rho} \colon f \in \mathfrak{N}\big\}. \tag{1.8}$$

2. Предварительные результаты

Теорема 1. *Пусть $f \in H_q^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq q \leq \infty$). Тогда для любых $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющих условию $n > r \geq s$, и $0 < \rho \leq 1$ имеет место неравенство*

$$E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_{q,\rho} \leq \frac{\rho^{n-s}\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot E_{n-r-1}\big(f^{(r)}\big)_q. \tag{2.1}$$

Существует функция $f_0 \in H_q^{(r)}$, для которой неравенство (2.1) *обращается в равенство.*

Доказательство. Воспользуемся схемой рассуждений работы [2], где (2.1) доказано в случае $s = 0$ и $\rho = 1$ (см. [2, теорема 1]). Пусть $P_{n-r-1}\big(f^{(r)}, z\big)$ — полином наилучшего приближения производной $f^{(r)}(z)$ в норме пространства H_q:

$$E_{n-r-1}\big(f^{(r)}\big)_q = \big\|f^{(r)} - P_{n-r-1}\big(f^{(r)}\big)\big\|_q.$$

Положим

$$R(z) := R\big(f^{(r)}, z\big) = f^{(r)}(z) - P_{n-r-1}\big(f^{(r)}, z\big).$$

Выражая коэффициенты Тейлора $c_k(f)$ функции $f(z)$ по формуле

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi i\, \alpha_{k,r}} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^r R(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta, \quad k \geq n, \quad k, n \in \mathbb{N},$$

и, для $z \in U$, $|z| = \rho < 1$ полагая

$$d_k(f) = d_{k,s,n}(f) = -\frac{\alpha_{2n-k,s} \cdot |z|^{2(n-k)}}{2\pi i\, \alpha_{k,s} \cdot \alpha_{2n-k,r}} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^r R(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta, \quad s \leq k \leq n-1,$$

с учетом формулы (1.4) для производных $f^{(s)}$ для любых $s = 0, 1, 2, \ldots, r-1$ получаем

$$f^{(s)}(z) - \sum_{k=s}^{n-1} \alpha_{k,s} c_k(f) z^{k-s} - \sum_{k=s}^{n-1} \alpha_{k,s} d_k(f) z^{k-s} = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,s} c_k(f) z^{k-s} - \sum_{k=s}^{n-1} \alpha_{k,s} d_k(f) z^{k-s}$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,r}} \left(\frac{z^{k-s}}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^r R(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta \right) + \sum_{k=s}^{n-1} \frac{\alpha_{2n-k,s} \cdot |z|^{2(n-k)}}{\alpha_{2n-k,r}} \left(\frac{z^{k-s}}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^r R(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta \right)$$

$$= \frac{z^{r-s}}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{n-r} R(\zeta) \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,r}} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k-n} + \sum_{k=s}^{n-1} \frac{\alpha_{2n-k,s}}{\alpha_{2n-k,r}} \left|\frac{z}{\zeta}\right|^{2(n-k)} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k-n} \right\} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$= \frac{z^{r-s}}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{n-r} R(\zeta) \left\{ \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+k,s}}{\alpha_{n+k,r}} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k} + \sum_{k=1}^{n-s} \frac{\alpha_{n+k,s}}{\alpha_{n+k,r}} \left(\frac{\overline{z}}{\overline{\zeta}}\right)^{k} + \sum_{k=n-s+1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+k,s}}{\alpha_{n+k,r}} \left(\frac{\overline{z}}{\overline{\zeta}}\right)^{k} \right\} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$= \frac{z^{r-s}}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{n-r} R(\zeta) \left\{ \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+k,s}}{\alpha_{n+k,r}} \left[\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k} + \left(\frac{\overline{z}}{\overline{\zeta}}\right)^{k} \right] \right\} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$= \frac{z^{r-s}}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{n-r} R(\zeta) \left\{ \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} + 2\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+k,s}}{\alpha_{n+k,r}} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k} \right\} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Таким образом, с некоторым полиномом $P_{n-1}^{(s)}(z)$, зависящим от функции $f(z)$ и ее производных $f^{(s)}(z)$ $(s = 1, 2, \ldots, r-1)$, справедлива формула

$$f^{(s)}(z) - P_{(n-1)}^{(s)}(z)$$

$$= \frac{z^{r-s}}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{n-r} R(\zeta) \left\{ \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} + 2\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+k,s}}{\alpha_{n+k,r}} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k} \right\} \frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{2.2}$$

Полагая в (2.2) $z = \rho e^{it}, \zeta = e^{i\theta}$ и выполнив замену переменных $\theta - t = \tau$, запишем (2.2) в следующем виде:

$$f^{(s)}(\rho e^{it}) - P_{(n-1)}^{(s)}(\rho e^{it})$$

$$= \frac{\rho^{n-s} e^{i(r-s)t}}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} e^{-i(n-r)\tau} R\big(e^{i(t+\tau)}\big) \left\{ \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k \alpha_{n+k,s}}{\alpha_{n+k,r}} \cos k\tau \right\} d\tau. \tag{2.3}$$

Нетрудно убедиться, что числовая последовательность $\left\{ \rho^k \dfrac{\alpha_{n+k,s}}{\alpha_{n+k,r}} \right\}_{k=0}^{\infty}$ является выпуклой вниз и ее общий член стремится к нулю при $k \to \infty$. Но тогда в силу теоремы 1.5 [13, с. 294] функция

$$\Psi_{n,r,s}(t) := \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+k,s}}{\alpha_{n+k,r}} \cos kt$$

является неотрицательной и интегрируемой на отрезке $[0, 2\pi]$ функцией.

Пусть $1 \le q < \infty$. Используя представление разности (2.3), запишем

$$E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_{q,\rho} \le \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \big| f^{(s)}(\rho e^{it}) - P_{n-1}^{(s)}(\rho e^{it}) \big|^q dt \right\}^{1/q}$$

$$= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{\rho^{n-s} e^{i(r-s)t}}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-i(n-r)\tau} R\big(e^{i(t+\tau)}\big) \Psi_{n,r,s}(\tau) d\tau \right|^q dt \right\}^{1/q}. \tag{2.4}$$

В силу обобщенного неравенства Минковского из (2.4) имеем

$$E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_{q,\rho} \le \frac{\rho^{n-s}}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \big|e^{-i(n-r)\tau} \Psi_{n,r,s}(\tau)\big| d\tau \cdot \|R\|_q = \rho^{n-s} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \|R\|_q,$$

и, поскольку $\|R\|_q = E_{n-r-1}\big(f^{(r)}\big)_q$, окончательно получаем

$$E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_{q,\rho} \le \rho^{n-s} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot E_{n-r-1}\big(f^{(r)}\big)_q, \quad s = 1, 2, \ldots, r-1,$$

и тем самым неравенство (2.1) доказано при $1 \le q < \infty$.

Случай $q = \infty$ (см. (1.3)) получается предельным переходом. В самом деле, из (2.1) имеем

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_{\infty,\rho} \le \|f^{(s)} - p_{n-1}^{(s)}\|_{\infty,\rho} = \lim_{q\to\infty} \|f^{(s)}(\rho\cdot) - p_{n-1}^{(s)}(\rho\cdot)\|_{q,\rho}$$

$$= \rho^{n-s} \cdot \operatorname*{ess\,sup}_{0\le t<2\pi} \big|R(e^{it})\big| \int\limits_0^{2\pi} \big|e^{-i(n-r)\tau} \Psi_{n,r,s}(\tau)\big| d\tau$$

$$= \rho^{n-s} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \|R\|_\infty = \rho^{n-s} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot E_{n-r-1}(f^{(r)})_\infty.$$

Этим неравенство (2.1) полностью доказано. Непосредственным вычислением легко убедиться, что неравенство (2.1) для функции $f_0(z) = z^n \in H_q^{(r)}$ $(n, r \in \mathbb{N},\ 1 \le q \le \infty,\ n > r)$ обращается в равенство.

Теорема 1 доказана.

Проведя аналогичные рассуждения, нетрудно доказать, что

$$\big\|f^{(s)} - T_{n-1}^{(s)}(f)\big\|_{q,\rho} \le \rho^{n-s} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \big\|f^{(r)} - T_{n-1}^{(r)}(f)\big\|_q, \tag{2.5}$$

где

$$T_{n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) z^k$$

— частичная сумма $(n-1)$-го порядка ряда Тейлора (1.5) функции $f \in A(U)$. Легко проверить, что неравенство (2.5) превращается в равенство тоже для функции $f_0(z) = z^n$. Из неравенств (2.1) и (2.5) вытекает

Следствие. *При любых $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \ge s$, $1 \le q \le \infty$, $0 < \rho \le 1$ справедливы равенства*

$$\sup_{f\in H_q^{(r)}} \frac{E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_{q,\rho}}{E_{n-r-1}\big(f^{(r)}\big)_q} = \rho^{n-s} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}, \qquad \sup_{f\in H_q^{(r)}} \frac{\big\|f^{(s)} - T_{n-1}^{(s)}(f)\big\|_{q,\rho}}{\big\|f^{(r)} - T_{n-1}^{(r)}(f)\big\|_q} = \rho^{n-s} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}.$$

Обозначим через $W^{(r)}H_q$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \le q \le \infty)$ — множество функций $f \in H_q^{(r)}$, у которых $\|f^{(r)}\|_q \le 1$. Справедливо следующая

Теорема 2. *Для любых чисел $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющих условию $n > r \ge s$, при любых $1 \le q \le \infty$, $0 < \rho \le 1$ справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(W^{(r)}H_q)_{q,\rho} := \sup_{f\in W^{(r)}H_q} E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_{q,\rho} = \rho^{n-s} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}. \tag{2.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольной функции $f \in W^{(r)}H_q$ имеем

$$E_{n-r-1}\big(f^{(r)}\big)_q \le \big\|f^{(r)}\big\|_q \le 1,$$

а потому из (2.1) сразу следует оценка сверху величины в левой части (2.6)

$$\sup_{f\in W^{(r)}H_q} E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_{q,\rho} \le \rho^{n-s}\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}. \tag{2.7}$$

С другой стороны, для функции $f_1(z) = \dfrac{z^n}{\alpha_{n,r}}$, очевидно принадлежащей классу $W^{(r)}H_q$, имеем

$$\sup_{f\in W^{(r)}H_q} E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_{q,\rho} \ge E_{n-s-1}\big(f_1^{(s)}\big)_{q,\rho} = \rho^{n-s}\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}. \tag{2.8}$$

Требуемое равенство (2.6) следует из сопоставления неравенств (2.7) и (2.8).

Теорема 2 доказана.

3. Основные результаты

В этом разделе приводим некоторые применения неравенства (2.1). В [3] доказано,что если структурные свойства функции $f \in H_q$, $1 \le q \le \infty$, охарактеризовать скоростью убывания к нулю модуля гладкости граничных значений производной r-го порядка $\omega_2\big(f^{(r)}, 2t\big)_q$, то для произвольной функции $f \in H_q^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \le q \le \infty$) при любых $n \in \mathbb{N}$, $n > r$, справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f)_q \le \frac{n-r}{(\pi-2)\alpha_{n,r}} \int\limits_0^{\pi/(2(n-r))} \omega_2\big(f^{(r)}, 2t\big)_q dt, \tag{3.1}$$

и равенство в (3.1) достигается для функции $f_0(z) = z^n \in H_q^{(r)}$.

Докажем более общее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \ge s$, $0 < \rho \le 1$. Тогда для любой функции $f \in H_q^{(r)}$, $1 \le q \le \infty$, справедливо неравенство*

$$E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_{q,\rho} \le \frac{\rho^{n-s}\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \frac{n-r}{\pi-2} \int\limits_0^{\pi/(2(n-r))} \omega_2\big(f^{(r)}, 2t\big)_q dt, \tag{3.2}$$

и знак равенства в (3.2) достигается для функции $f_0(z) = z^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая в (3.1) $r = 0$, $f^{(0)} \equiv f$ и учитывая, что при этом $\alpha_{n,0} = 1$, имеем

$$E_{n-1}(f)_q \le \frac{n}{\pi-2} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega_2(f, 2t)_q dt. \tag{3.3}$$

Заменив в (3.3) число n на $n-r$ и функцию f на $f^{(r)}$, будем иметь

$$E_{n-r-1}\big(f^{(r)}\big)_q \le \frac{n-r}{\pi-2} \int\limits_0^{\pi/(2(n-r))} \omega_2\big(f^{(r)}, 2t\big)_q dt. \tag{3.4}$$

Учитывая (3.4), из (2.1) для $s=0,1,\ldots,r$ получаем

$$E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_{q,\rho} \le \frac{\rho^{n-s}\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\cdot\frac{n-r}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/(2(n-r))}\omega_2\big(f^{(r)},2t\big)_q dt,$$

и неравенство (3.2) доказано. Для ранее введенной нами функции $f_0(z)=z^n\in H_q^{(r)}$, $n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $n>r$, $1\le q\le\infty$, имеем

$$E_{n-s-1}\big(f_0^{(s)}\big)_{q,\rho}=\rho^{n-s}\alpha_{n,s},\quad 0<\rho\le 1,\quad s=0,1,\ldots,r;$$

$$\int\limits_0^{\pi/(2(n-r))}\omega_2\big(f_0^{(r)},2t\big)_q dt=\alpha_{n,r}\,\frac{\pi-2}{n-r},\qquad n>r.$$

Пользуясь этими равенствами, получаем

$$\frac{\rho^{n-s}\cdot\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\cdot\frac{n-r}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/(2(n-r))}\omega_2\big(f_0^{(r)},2t\big)_q dt$$

$$=\frac{\rho^{n-s}\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\cdot\frac{n-r}{\pi-2}\cdot\alpha_{n,r}\cdot\frac{\pi-2}{n-r}=\rho^{n-s}\alpha_{n,s}=E_{n-s-1}\big(f_0^{(s)}\big)_{q,\rho}.$$

Теорема 3 полностью доказана.

Вычислим теперь экстремальную величину $\mathcal{E}_{n-s-1}(\mathfrak{N})_{q,\rho}$ (см. (1.8)) для класса (см. (1.6)) $\mathfrak{N}=W^{(r)}H_q(\Phi)$ ($r\in\mathbb{Z}_+$, $1\le q\le\infty$).

Теорема 4. *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $n>r\ge s$, $1\le q\le\infty$, $0<\rho\le 1$. Если мажоранта Φ при любых $0<t\le\pi/2$ удовлетворяет условию (1.7), то при всех $s=0,1,\ldots,r$ справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_{n-s-1}\big(W^{(r)}H_q(\Phi)\big)_{q,\rho}=\rho^{n-s}\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\cdot\Phi\Big(\frac{\pi}{2(n-r)}\Big). \tag{3.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соотношения (3.2), используя определение класса $W^{(r)}H_q(\Phi)$, получаем оценку сверху величины, стоящей в левой части равенства (3.5)

$$\mathcal{E}_{n-s-1}\big(W^{(r)}H_q(\Phi)\big)_{q,\rho}\le\rho^{n-s}\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\cdot\Phi\Big(\frac{\pi}{2(n-r)}\Big). \tag{3.6}$$

При доказательстве основного результата в [6, с. 327, 328] показано, что если мажоранта Φ удовлетворяет ограничению (1.7), то функция

$$g(z)=\frac{1}{\alpha_{n,r}}\cdot\Phi\Big(\frac{\pi}{2(n-r)}\Big)z^n$$

принадлежит классу $W^{(r)}H_q(\Phi)$. Поскольку, кроме того, для этой функции

$$E_{n-s-1}\big(g^{(s)}\big)_{q,\rho}=\rho^{n-s}\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\cdot\Phi\Big(\frac{\pi}{2(n-r)}\Big),$$

то имеем оценку снизу

$$\mathcal{E}_{n-s-1}\big(W^{(r)}H_q(\Phi)\big)_{q,\rho}\ge E_{n-s-1}\big(g^{(s)}\big)_{q,\rho}=\rho^{n-s}\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\cdot\Phi\Big(\frac{\pi}{2(n-r)}\Big). \tag{3.7}$$

Сопоставляя неравенства (3.6) и (3.7), получаем требуемое равенство (3.5).

Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бабенко К.И.** О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1958. Т. 22, № 5. С. 631–640.
2. **Тайков Л.В.** О наилучшем приближении в среднем некоторых классов функций // Мат. заметки. 1967. Т. 1, № 2. С. 155–162.
3. **Тайков Л.В.** Поперечники некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. 1977. Т. 22, № 2. С. 285–295.
4. **Айнуллоев Н., Тайков Л.В.** Наилучшее приближение в смысле А. Н. Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // Мат. заметки. 1986. Т. 40, № 3. С. 341–351.
5. **Вакарчук С.Б.** Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Мат. заметки. 1995. Т. 57, № 1. С. 30–39.
6. **Вакарчук С.Б., Забутная В.И.** О наилучших линейных методах приближения функций классов Л. В. Тайкова в пространствах Харди $H_{q,\rho}$, $q \geq 1$, $0 < \rho \leq 1$ // Мат. заметки. 2009. Т. 85, № 3. С. 323–329. doi: 10.4213/mzm6633
7. **Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш.** Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 // Мат. заметки. 2000. Т. 68, № 5. С. 796–800. doi: 10.4213/mzm1002
8. **Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А.** Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций // Докл. РАН. 2002. Т. 382, № 6. С. 747–749.
9. **Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А., Заргаров Дж.Дж.** О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 4. С. 239–254. doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-4-239-254.
10. **Привалов И.И.** Граничные свойства аналитических функций. М.: Гостехиздат, 1950. 336 с.
11. **Смирнов В.И, Лебедев Н.А.** Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1964. 440 с.
12. **Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б.** Неравенства типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их приложение к теории аппроксимации // Укр. мат. журн. 2011. Т. 63, № 12. С. 1579–1601.
13. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2 т. Т. 1. М.: Мир, 1965. 616 с.

Поступила 4.07.2023
После доработки 14.09.2023
Принята к публикации 18.09.2023

Шабозов Мирганд Шабозович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Таджикский национальный университет;
Институт математики им. А. Джураева НАН Таджикистана
г. Душанбе, Таджикистан
e-mail: shabozov@mail.ru

REFERENCES

1. Babenko K.I. Best approximations to a class of analytic functions. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1958, vol. 22, no. 5, pp. 631–640 (in Russian).
2. Taikov L.V. On the best approximation in the mean of certain classes of analytic functions. *Math. Notes Acad. Sci. of the USSR*, 1967, vol. 1, no. 2, pp. 104–109. doi: 10.1007/BF01268058
3. Taikov L.V. Diameters of certain classes of analytic functions. *Math. Notes Acad. Sci. of the USSR*, 1977, vol. 22, no. 2, pp. 650–656. doi: 10.1007/BF01780976
4. Ainulloev N., Taikov L.V. Best approximation in the sense of Kolmogorov of classes of functions analytic in the unit disc. *Math. Notes*, 1986, vol. 40, no. 3, pp. 699–705. doi: 10.1007/BF01142473
5. Vakarchuk S.B. Best linear methods of approximation and widths of classes of analytic functions in a disk. *Math. Notes*, 1995, vol. 57, no. 1, pp. 21–27. doi: 10.1007/BF02309390
6. Vakarchuk S.B., Zabutnaya V.I. Best linear approximation methods for functions of Taikov classes in the Hardy spaces $H_{q,\rho}$, $q \geq 1$, $0 < \rho \leq 1$. *Math. Notes*, 2009, vol. 85, no. 3, pp. 323–329. doi: 10.1134/S000143460903002X

7. Shabozov M.Sh., Shabozov O.Sh. Widths of some classes of analytic functions in the Hardy space H_2. *Math. Notes*, 2000, vol. 68, no. 5, pp. 675–679. doi: 10.1023/A:1026692112651
8. Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. Best approximation and widths of some classes of analytic functions. *Dokl. Math.*, 2002, vol. 65, no. 1, pp. 111–113.
9. Shabozov M.Sh., Usupov G.A., Zargarov J.J. On the best simultaneous polynomial approximation of functions and their derivatives in Hardy spaces. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 4, pp. 240–256 (in Russian).
10. Privalov I.I. *Granichnye svoistva analiticheskikh funktsii* [Boundary properties of analytic functions]. Moscow: Gostekhizdat Publ., 1950, 336 p.
11. Smirnov V.I., Lebedev N.A. *Functions of a complex variable. Constructive theory.* London: Iliffe Books Ltd., 1968, 488 p. ISBN: 9780262190466 . Original Russian text published in Smirnov V.I., Lebedev N.A. Konstruktivnaya teoriya funktsii kompleksnogo peremennogo, Moscow; Leningrad: Nauka Publ., 1964, 440 p.
12. Vakarchuk S.B., Vakarchuk M.B. Kolmogorov type inequalities for analytic functions of one and two complex variables and their application to approximation theory. *Ukr. Math. Journal*, 2011, vol. 63, no. 12, pp. 1579–1601.
13. Zygmund A. Trigonometric series. Vol. I. Cambridge: Cambridge University Press, 1959, 383 p. Translated to Russian under the title Trigonometricheskie ryady. I. Moscow: Mir Publ., 1965, vol. 1, 616 p.

Received July 4, 2023
Revised September 14, 2023
Accepted September 18, 2023

Mirgand Shabozovich Shabozov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Tajik National University; A. Juraev Institute of Mathematics of the NAS of Tajikistan, Dushanbe, Tajikistan, e-mail: shabozov@mail.ru .

Cite this article as: M. Sh. Shabozov. On the best simultaneous approximation of functions in the Hardy space. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 283–291 .