ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 4 2023

УДК 517.518.86

ОБОБЩЕННЫЙ СДВИГ, ПОРОЖДЕННЫЙ sinc-ФУНКЦИЕЙ, НА ОТРЕЗКЕ[1]

В. В. Арестов, М. В. Дейкалова

Обсуждаются свойства оператора обобщенного сдвига, порожденного системой функций $\mathfrak{S} = \{(\sin k\pi x)/(k\pi x)\}_{k=1}^{\infty}$, в пространствах $L^q = L^q((0,1),\upsilon)$, $q \ge 1$, на интервале $(0,1)$ с весом $\upsilon(x) = x^2$. Построено интегральное представление этого оператора, и исследована его норма в пространствах L^q, $1 \le q \le \infty$. Оператор сдвига применяется к исследованию неравенства Никольского между равномерной и L^q-нормами полиномов по системе $\mathfrak{S}$.

Ключевые слова: обобщенный сдвиг, sinc-функция, неравенство разных метрик.

V.V. Arestov, M.V. Deikalova. A generalized translation operator generated by the sinc function on an interval.

We discuss the properties of the generalized translation operator generated by the system of functions $\mathfrak{S} = \{(\sin k\pi x)/(k\pi x)\}_{k=1}^{\infty}$ in the spaces $L^q = L^q((0,1),\upsilon)$, $q \ge 1$, on the interval $(0,1)$ with the weight $\upsilon(x) = x^2$. We find an integral representation of this operator and study its norm in the spaces L^q, $1 \le q \le \infty$. The translation operator is applied to the study of Nikol'skii's inequality between the uniform norm and the L^q-norm of polynomials in the system $\mathfrak{S}$.

Keywords: generalized translation, sinc-function, inequality of different metrics.

MSC: 41A17

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-4-27-48

1. Введение

1.1. Некоторые обозначения

В данной статье рассматриваются классические комплексные пространства комплекснозначных измеримых (в частности непрерывных) функций одного переменного на конечном или бесконечном промежутке $I = (a,b)$ числовой прямой. Пусть υ — неотрицательная суммируемая функция на I, называемая весом. При $0 < q < \infty$ обозначим через $L^q = L^q(I;\upsilon)$ пространство комплекснозначных измеримых по Лебегу на I функций f таких, что функция $\upsilon|f|^q$ суммируема на I. Функционал

$$\|f\|_q = \|f\|_{L^q(I;\upsilon)} = \left(\int_a^b |f(x)|^q \upsilon(x)\,dx\right)^{1/q}, \quad f \in L^q(I;\upsilon), \tag{1.1}$$

при $1 \le q < \infty$ является нормой в пространстве $L^q = L^q(I;\upsilon)$; при $0 < q < 1$ он таковым уже не является. Тем не менее при всех $0 < q < \infty$ мы будем называть (1.1) нормой или, точнее, q-нормой. Пространство $L^2 = L^2(I;\upsilon)$ (здесь $q = 2$) является гильбертовым со скалярным произведением

$$\langle f,g\rangle = \langle f,g\rangle_{L^2(I;\upsilon)} = \int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\,\upsilon(x)\,dx, \quad f,g \in L^2(I;\upsilon).$$

[1]Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2023-913).

Пространство $L^\infty = L^\infty(I) = L^\infty(I; \upsilon)$ состоит из (комплекснозначных) измеримых существенно ограниченных функций на I; оно наделено равномерной нормой

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty(I)} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)|\colon x \in I\}.$$

В дальнейшем параметр a, как правило, будет равен нулю; параметр b в зависимости от ситуации будет равен 1, π, 2π либо $+\infty$; в большинстве случаев вес $\upsilon(x) = x^2$.

1.2. Предварительные сведения

Целью данной статьи является изучение свойств оператора обобщенного сдвига (коротко — оператора сдвига), порожденного системой функций

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(1/2) = \left\{\frac{\sin k\pi x}{k\pi x}\right\}_{k=1}^{\infty}, \tag{1.2}$$

в пространствах $L^q = L^q((0,1), x^2)$ на интервале $(0,1)$ с весом $\upsilon(x) = x^2$. Оператор сдвига будет применен к исследованию неравенства Никольского между равномерной и L^q-нормами полиномов по системе (1.2).

Система (1.2) порождена нормированной функцией Бесселя

$$j_{1/2}(x) = \Gamma(1/2)\left(\frac{2}{x}\right)^{1/2} J_{1/2}(x) = \frac{\sin x}{x} \tag{1.3}$$

с индексом 1/2. На полуоси $(0,\infty)$ функция (1.3) имеет счетное множество простых нулей $\lambda_k = \lambda_k^{(1/2)} = k\pi$, $k \ge 1$. Система функций $\{j_{1/2}(\lambda_k x)\}_{k\ge 1}$ как раз и есть система (1.2). Свойства систем функций, построенных подобным образом по функциям Бесселя произвольного индекса $\alpha > -1$ в пространствах Лебега на интервале $(0,1)$ с соответствующим весом Бесселя, можно найти, в частности, в ([1], гл. 3, § 3.1, (8); [2], гл. 7, § 7.2, (2); [3], гл. 5, § 23). Примем для функций системы (1.2) при $k \ge 1$ короткое обозначение

$$\eta_k(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin k\pi x}{k\pi x}, & x \in (0,1], \\ 1, & x = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

1.3. Ортогональность

Система (1.2) относительно скалярного произведения

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(\xi)\,\overline{g(\xi)}\,\xi^2\,d\xi, \quad f, g \in L^2((0,1), x^2),$$

ортогональная. В самом деле, имеем

$$\delta_{k,m} = \langle \eta_k, \eta_m\rangle = \int_0^1 \eta_k(\xi)\eta_m(\xi)\xi^2\,d\xi = \frac{1}{km\pi^2}\int_0^1 \sin k\pi\xi\,\sin m\pi\xi\,d\xi$$

$$= \left[\xi = \frac{t}{\pi}\right] = \frac{1}{km\pi^3}\int_0^\pi \sin kt\,\sin mt\,dt.$$

Применяя формулу

$$2\sin a\,\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b), \tag{1.5}$$

получаем

$$\delta_{k,m} = \frac{1}{2km\pi^3} \int\limits_0^{\pi} \big(\cos(k-m)t - \cos(k+m)t\big)\,dt.$$

При $k \neq m$ имеем $\delta_{k,m} = 0$. В случае $m = k \geq 1$ имеем

$$\delta_{k,k} = \langle \eta_k, \eta_k \rangle = \frac{1}{2k^2\pi^3} \int\limits_0^{\pi} \big(1 - \cos 2kt\big)\,dt = \frac{1}{2k^2\pi^2}.$$

1.4. Ряды Фурье по системе (1.4)

Система функций (1.4) полна в пространстве $L^2 = L^2((0,1), x^2)$ (см., например, гл. 5, § 23, п. 7 в [3], а также лемму 6 ниже). Итак, система (1.4) в пространстве L^2 полна и ортогональна, а следовательно, образует ортогональный базис. Так что, произвольная функция $f \in L^2$ разлагается (в пространстве L^2) в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \eta_k(x), \quad f_k = \frac{\langle f, \eta_k \rangle}{\sigma_k}, \tag{1.6}$$

$$\sigma_k = \delta_{k,k} = \langle \eta_k, \eta_k \rangle = \frac{1}{2k^2\pi^2}, \quad k \geq 1.$$

В терминах разложений Фурье функций $f \in L^2$ имеет место обобщенный вариант равенства Парсеваля

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k f_k \overline{g}_k, \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \eta_k, \quad g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \eta_k,$$

и, в частности, равенство Парсеваля для квадрата нормы функции

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k\, |f_k|^2, \quad f \in L^2. \tag{1.7}$$

1.5. Оператор сдвига в пространстве $L^2((0,1), x^2)$ в терминах рядов Фурье функций

Оператором (обобщенного) сдвига, порожденным системой (1.2), с шагом $t \in [0,1]$ называют линейный оператор τ_t, который определен на функциях $f \in L^2$ с рядом Фурье (1.6) формулой

$$\tau_t f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \eta_k(t) \eta_k(x). \tag{1.8}$$

Оператор (1.8) есть реализация обобщенного сдвига Бесселя на отрезке для значения параметра Бесселя $\alpha = 1/2$. Очевидно, τ_0 есть единичный (тождественный) оператор и $\tau_1 \equiv 0$. Свойствам и применению оператора обобщенного сдвига Бесселя посвящены обширные исследования (см. [4–9] и приведенную там библиографию).

Одним из важных свойств оператора (1.8) является в данном случае очевидная формула

$$\tau_t \eta_k(x) = \eta_k(t) \eta_k(x), \quad t, x \geq 0, \quad k \geq 1, \tag{1.9}$$

называемая формулой умножения (для оператора τ_t на системе функций (1.4)).

Применяя дважды равенство Парсеваля (1.7), получаем

$$\|\tau_t f\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k\, |f_k|^2 |\eta_k(t)|^2 \leq \mathcal{A}^2(t) \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k\, |f_k|^2 = \mathcal{A}^2(t) \|f\|_2^2,$$

где $\mathcal{A}(t) = \sup\{|\eta_k(t)|\colon k \ge 1\}$, а следовательно, $\|\tau_t\|_{L^2\to L^2} \le \mathcal{A}(t)$. Из формулы умножения (1.9) следует, что справедливо и обратное неравенство, поэтому на самом деле выполняется равенство

$$\|\tau_t\|_{L^2\to L^2} = \mathcal{A}(t), \quad t \in [0,1].$$

При любом целом $k \ge 1$ имеет место неравенство $|\sin ku| \le k|\sin u|$, $u \in [0,\infty)$; более того, при любом $k \ge 2$ для $0 < u < \pi$ это неравенство строгое. Это влечет, что $\mathcal{A}(t) = \eta_1(t)$, $t \in [0,1]$. Итак,

$$\|\tau_t\|_{L^2\to L^2} = \eta_1(t) \le 1, \quad 0 \le t \le 1.$$

В частности, $\mathcal{A}(0) = 1$, $\mathcal{A}(1) = 0$. Если же $0 < t < 1$, то

$$\|\tau_t\|_{L^2\to L^2} = \frac{\sin \pi t}{\pi t} < 1;$$

более того, в этом случае норма оператора τ_t в пространстве $L^2((0,1),x^2)$ достигается и только на функциях $c\,\eta_1$, $c \in \mathbb{C}$.

Основная цель данной статьи состоит в исследовании свойства оператора (1.8) в пространствах $L^q = L^q((0,1),x^2)$, $1 \le q \le \infty$. Исходя из интегрального представления соответствующего оператора для полуоси будет построено интегральное представление оператора τ_t и исследована норма оператора сдвига в пространстве L^q, $1 \le q \le \infty$, на отрезке.

Подобные исследования оператора обобщенного сдвига для системы функций

$$\mathfrak{S}(-1/2) = \Big\{ \cos\Big(\frac{(2k-1)\pi}{2} t\Big)\Big\}_{k=1}^{\infty}$$

(что соответствует параметру Бесселя $\alpha = -1/2$) были проведены в работах авторов [10; 11]. Как оказалось, результаты для систем $\mathfrak{S}(-1/2)$ и $\mathfrak{S}(1/2)$ существенно разнятся.

Оператор обобщенного сдвига имеет важные применения в математике [4;12]; в частности, в теории приближения с помощью оператора сдвига задается гладкость функций (см., например, работы [5–9] и приведенную там библиографию).

1.6. Полиномы по системе $\mathfrak{S}$

Пусть $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$, $n \ge 1$, есть множество конечных сумм

$$\phi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \eta_k(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\sin k\pi x}{k\pi x} \tag{1.10}$$

с комплексными коэффициентами по системе (1.2). Функции (1.10) будем называть $\mathfrak{S}$-полиномами или просто полиномами порядка n. Отметим, что функции (1.10) в точке $x = 1$ зануляются: $\phi_n(1) = 0$. Пусть $\mathcal{P} = \bigcup_{n\ge 1} \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ есть множество всех полиномов (1.10).

В разд. 3 данной статьи результаты для оператора сдвига будут применены в исследовании неравенства Никольского между равномерной и $L^q((0,1),x^2)$-нормами $\mathfrak{S}$-полиномов.

2. Интегральное представление оператора сдвига, порожденного системой $\mathfrak{S}$, в пространствах $L^q((0,1),x^2)$, $1 \le q \le \infty$

В данном разделе будет построено семейство интегральных операторов T_t, $t \in [0,1]$, в пространствах $L^q((0,1),x^2)$ на интервале $(0,1)$, относительно которого будет доказано, что оно является интегральным представлением оператора сдвига (1.8), и оценена его норма в пространствах $L^q((0,1),x^2)$. Для этого будет использовано интегральное представление соответствующего оператора обобщенного сдвига на полуоси, его свойства и методы исследования в пространствах $L^q((0,\infty),x^2)$ на полуоси, содержащиеся в [6; 9].

2.1. Классический оператор обобщенного сдвига Бесселя в пространствах $L^q(I, x^2)$, $1 \le q \le \infty$, для полуоси $I = (0, \infty)$

2.1.1. Классический оператор обобщенного сдвига Бесселя. Приведем некоторые свойства классического оператора обобщенного сдвига Бесселя, порожденного функцией Бесселя (см., например, гл. 3, § 3.1 (8) в [1]; гл. 7, § 7.2 (2) в [2]; гл. 2 в [13])

$$J_\alpha(z) = \Big(\frac{z}{2}\Big)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\alpha+1)} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2k},$$

или, что то же самое, нормированной функцией Бесселя

$$j_\alpha(z) = \Gamma(\alpha+1)\Big(\frac{2}{z}\Big)^\alpha J_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\alpha+1)} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2k} \tag{2.1}$$

при значении параметра $\alpha \ge -1/2$. Оператор обобщенного сдвига Бесселя допускает несколько описаний (представлений) (см. в первую очередь [4]); каждое из них можно принять за его определение. Часто за определение оператора обобщенного сдвига Бесселя с шагом $t \in [0, \infty)$ при $\alpha > -1/2$ принимают интегральный оператор

$$\mathcal{T}_t^{(\alpha)} f(x) = \gamma(\alpha) \int_0^\pi f\left(\sqrt{t^2 + x^2 - 2xt\cos\varphi}\right) \sin^{2\alpha}\varphi \, d\varphi; \tag{2.2}$$

здесь

$$\gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\Gamma\Big(\alpha+\frac{1}{2}\Big)} = \frac{1}{\int_0^\pi \sin^{2\alpha}\varphi d\varphi}.$$

При $\alpha = -1/2$ оператор обобщенного сдвига Бесселя определяется формулой

$$\mathcal{T}_t^{(-1/2)} f(x) = \frac{1}{2}\big\{f(x+t) + f(|x-t|)\big\}.$$

Для оператора $\mathcal{T}_t^{(\alpha)}$ при $\alpha \ge -1/2$ на функциях $\eta_y^{(\alpha)}(x) = j_\alpha(yx)$, зависящих от параметра $y \ge 0$, имеет место формула

$$\mathcal{T}_t^{(\alpha)} \eta_y^{(\alpha)}(x) = \eta_y^{(\alpha)}(t)\eta_y^{(\alpha)}(x), \quad t, x \ge 0, \tag{2.3}$$

называемая формулой умножения для функций Бесселя (2.1); впервые формулу умножения (2.3) получил в 1875 г. Л. Гегенбауэр ([1] § 11.41, (16)).

Свойства оператора обобщенного сдвига обстоятельно исследовал Б. М. Левитан (см. § 7 в [4]). Он, в частности, доказал ([4] § 7, (7.4)), что при всех $\alpha \ge -1/2$ оператор $\mathcal{T}_t^{(\alpha)}$ является самосопряженным, а точнее, если функция f непрерывная и на полуоси $[0, \infty)$ суммируема с весом Бесселя $x^{2\alpha+1}$, а функция g непрерывная и ограниченная на полуоси, т. е. $g \in C[0, \infty)$, то имеет место формула

$$\int_0^\infty (\mathcal{T}_t^{(\alpha)} f)(x) g(x) x^{2\alpha+1} dx = \int_0^\infty f(x)(\mathcal{T}_t^{(\alpha)} g)(x) x^{2\alpha+1} dx.$$

Оператор $\mathcal{T}_t^{(\alpha)}$ ограничен в пространствах $L^q((0,\infty), x^{2\alpha+1})$ при всех $\alpha \ge -1/2$, $t \ge 0$, $1 \le q \le \infty$ и, более того,

$$\|\mathcal{T}_t^{(\alpha)}\|_{q,\alpha} = \|\mathcal{T}_t^{(\alpha)}\|_{L^q((0,\infty),x^{2\alpha+1}) \to L^q((0,\infty),x^{2\alpha+1})} = 1. \tag{2.4}$$

Случай $\alpha = -1/2$ очевиден. При $\alpha > -1/2$ неравенство $\|\mathcal{T}_t^{(\alpha)}\|_{q,\alpha} \le 1$ доказал С. С. Платонов (см. формулы (2.24) и (2.21) в [6]); равенство нормы единице в (2.4) и достижимость норм при $t > 0$ обсуждались в леммах 6 и 7 работы [9].

2.1.2. Оператор сдвига Бесселя при $\boldsymbol{\alpha = 1/2}$. При $\alpha = 1/2$ функция (2.1) есть sinc-функция (1.3). Формула (2.2) для оператора $\mathcal{T}_t = \mathcal{T}_t^{(1/2)}$ принимает вид

$$\mathcal{T}_t f(x) = \frac{1}{2}\int_0^\pi f\left(\sqrt{t^2 + x^2 - 2xt\cos\varphi}\right)\sin\varphi\, d\varphi. \tag{2.5}$$

Сделав в (2.5) замену $\xi = \cos\varphi$, получаем представление

$$\mathcal{T}_t f(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 f\left(\sqrt{t^2 + x^2 - 2xt\xi}\right) d\xi. \tag{2.6}$$

Функция $u = \sqrt{t^2 + x^2 - 2xt\xi}$ по $\xi \in [-1, 1]$ монотонно и непрерывно меняется от $x+t$ до $|x - t|$. В последнем интеграле перейдем от переменного ξ к переменному $u = \sqrt{t^2 + x^2 - 2xt\xi}$. В результате получаем для $(\mathcal{T}_t f)(x)$ представление

$$\mathcal{T}_t f(x) = \int_{|x-t|}^{x+t} f(u)\Psi(t, x, u)\, du; \quad \Psi(t, x, u) = \frac{u}{2xt}, \quad xt > 0. \tag{2.7}$$

При фиксированных $xt > 0$ функция $\Psi(t, x, u)$ по переменному $u \in (|x - t|, x + t)$ положительная, и, как легко проверить,

$$\int_{|x-t|}^{x+t} \Psi(t, x, u)\, du = 1. \tag{2.8}$$

В некоторых ситуациях нам будет удобно рассматривать функцию $\Psi(t, x, u)$ для $u \in (0, \infty)$, положив $\Psi(t, x, u) = 0$ для $u \in (0, \infty) \setminus (|x - t|, x + t)$.

Для функций

$$\eta_y(x) = \eta_y^{(1/2)}(x) = \frac{\sin xy}{xy}, \quad xy \ne 0; \quad \eta_y(x) = 1, \quad xy = 0,$$

как частный случай (2.3) имеет место формула умножения

$$\mathcal{T}_t \eta_y(x) = \eta_y(t)\eta_y(x). \tag{2.9}$$

В данном случае ее нетрудно обосновать. В самом деле, при $yxt \ne 0$

$$\mathcal{T}_t \eta_y(x) = \frac{1}{2xt}\int_{|x-t|}^{x+t} u\,\frac{\sin uy}{uy}\, du = \frac{1}{2xty}\int_{|x-t|}^{x+t} \sin uy\, du$$

$$= -\frac{1}{2xty^2}\cos uy\Big|_{|x-t|}^{x+t} = \frac{1}{2xty^2}(\cos y(x - t) - \cos y(x + t)).$$

Применяя формулу (1.5), получаем

$$\mathcal{T}_t \eta_y(x) = \frac{1}{xty^2}\sin yx \sin yt = \frac{\sin yx}{yx}\,\frac{\sin yt}{yt} = \eta_y(x)\eta_y(t).$$

Формула умножения (2.9), по крайней мере при $yxt \ne 0$, проверена.

Формулы (2.9) и (1.9) влекут, что на множестве полиномов (1.10) имеет место равенство

$$\mathcal{T}_t f = \tau_t f, \quad f \in \mathcal{P}.$$

Этот факт расширяет возможности изучения оператора сдвига (1.8). Однако на этом пути есть трудности. Мы хотим изучать оператор сдвига в пространствах $L^q((0,1),x^2)$; функции из этих пространств определены лишь для $x \in (0,1)$. Формула же (2.7) требует при $t \in [0,1]$ значения функции f на интервале $(0,1+t)$, большем единичного. Поэтому оператор (2.7) нельзя использовать в качестве интегрального представления оператора сдвига τ_t на отрезке $[0,1]$.

2.2. Интегральное представление оператора сдвига по системе $\mathfrak{S}$ в пространствах $L^q((0,1),x^2)$, $1 \le q \le \infty$

В данном разделе, исходя из представления (2.6), а точнее формулы (2.7) для оператора обобщенного сдвига $\mathcal{T}_t$, $t \ge 0$, на полуоси, будет построено семейство интегральных операторов T_t, $t \in [0,1]$, в пространствах $L^q(I,x^2)$ на промежутке $I=(0,1)$, относительно которого будет доказано, что оно является интегральным представлением оператора сдвига (1.8).

2.2.1. Конструкция оператора сдвига на отрезке. Зададим семейство операторов T_t, $t \in (0,1)$, на пространстве $L^1((0,1),x^2)$ формулой

$$T_t f(x) = \int\limits_{|x-t|}^{\min\{x+t,2-(x+t)\}} f(u)\Psi(t,x,u)\,du, \quad \Psi(t,x,u) = \frac{u}{2xt}. \tag{2.10}$$

Используя обозначение интервала

$$U(t,x) = \left(|x-t|, \min\{x+t, 2-(x+t)\}\right), \quad x,t \in (0,1], \tag{2.11}$$

перепишем формулу (2.10) в виде

$$T_t f(x) = \frac{1}{2xt} \int\limits_{U(t,x)} u f(u)\,du. \tag{2.12}$$

Нетрудно понять, что для каждого $t \in (0,1)$ при $x \ne t$ интеграл в правой части (2.12) сходится и по $x \in (0,1) \setminus \{t\}$ является непрерывной функцией.

Доопределим операторы T_t для $t=0$ и $t=1$, исходя из предельных соображений. Для значений $t=0$ естественно положить

$$T_0 f(x) = f(x), \quad f \in L^1((0,1),x^2), \tag{2.13}$$

т. е. считать, что T_0 есть тождественный оператор. В самом деле, при $0<t<x<1$ для значений t со свойством $0<x+t<1$ формула (2.12) принимает вид

$$T_t f(x) = \frac{1}{2xt} \int\limits_{x-t}^{x+t} u f(u)\,du.$$

В пределе при $t \to +0$ (по крайней мере в точках Лебега $x \in (0,1)$ функции f) как раз имеем предельное значение (2.13).

В случае $t=1$ естественно положить

$$T_1 f(x) \equiv 0, \quad f \in L^1((0,1),x^2). \tag{2.14}$$

В самом деле, при $1/2 < t < 1$ для значений x, удовлетворяющих условию $0 < 1-t < x < t < 1$, формула (2.12) принимает вид

$$T_t f(x) = \frac{1}{2xt} \int\limits_{t-x}^{2-(x+t)} u f(u)\, du.$$

Длина отрезка интегрирования здесь $2-(x+t)-(t-x) = 2(1-t)$. Функция $f \in L^1((0,1), x^2)$ на интервале $(x_0, 1)$ при любом $0 < x_0 < 1$ суммируема. Отсюда в силу свойства абсолютной непрерывности интеграла Лебега по множеству следует, что

$$x \cdot T_t f(x) = \frac{1}{2t} \int\limits_{t-x}^{2-(x+t)} u f(u)\, du \to 0, \quad t \to 1-0.$$

Поэтому естественно определить оператор T_1 именно формулой (2.14).

В дальнейшем под формулой (2.10) при $t = 0$ и $t = 1$ предполагается понимать формулы (2.13) и (2.14) соответственно.

Убедимся, что для оператора (2.12) на системе функций

$$\eta_k(x) = \frac{\sin k\pi x}{k\pi x}, \quad x \in (0,1]; \quad \eta_k(0) = 1 \tag{2.15}$$

имеет место формула умножения (ср. с (2.9), (1.9)).

Лемма 1. *Для оператора* T_t, $0 \le t \le 1$, *на элементах системы* (2.15) *при любом* $k \ge 1$ *имеет место формула*

$$T_t \eta_k(x) = \eta_k(t)\eta_k(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{2.16}$$

называемая формулой умножения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для значений $t = 0$ и $t = 1$ в силу (2.13) и (2.14) формула (2.16) выполняется.

Пусть теперь $0 < t, x < 1$. Введем обозначение концевых точек $A = A(t,x) = |x-t|$, $B = B(t,x) = \min\{x+t, 2-(x+t)\}$ интервала (2.11). Согласно формуле (2.12) имеем

$$(T_t\eta_k)(x) = \frac{1}{2xt} \int\limits_{A(t,x)}^{B(t,x)} u\eta_k(u)\, du = \frac{1}{2xt}\frac{1}{k\pi} \int\limits_{A(t,x)}^{B(t,x)} \sin k\pi u\, du$$

$$= -\frac{1}{2xt}\frac{1}{k\pi}\frac{1}{k\pi}\cos(k\pi u)\Big|_{A(t,x)}^{B(t,x)} = \frac{1}{2xt}\frac{1}{k\pi}\frac{1}{k\pi}\big(\cos(k\pi A) - \cos(k\pi B)\big).$$

В силу четности и 2π-периодичности функции cos имеем

$$\cos(k\pi A) = \cos(k\pi(x-t)),$$

$$\cos(k\pi B) = \cos\big(k\pi \min\{x+t, 2-(x+t)\}\big) = \cos(k\pi(x+t)).$$

Применяя теперь формулу $2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$, получаем

$$(T_t\eta_k)(x) = \frac{1}{2xt}\frac{1}{k\pi}\frac{1}{k\pi} 2\sin k\pi t\, \sin k\pi x = \frac{\sin k\pi t}{k\pi t}\frac{\sin k\pi x}{k\pi t} = \eta_k(t)\eta_k(x).$$

Формула (2.16) проверена.

О п р е д е л е н и е. Имея в виду свойство (2.16), будем называть семейство операторов T_t, $0 \le t \le 1$, интегральным представлением оператора сдвига (1.8) или даже оператором сдвига с шагом t по системе $\mathfrak{S}$ на отрезке.

2.2.2. Ограниченность и норма оператора сдвига T_t, $0 \le t \le 1$, в пространстве $L^q((0,1),x^2)$, $1 \le q \le \infty$. Введем обозначение

$$E(t,x) = (T_t e)(x) \tag{2.17}$$

для значения оператора сдвига с шагом $0 < t < 1$ на функции $e(x) \equiv 1$. Это функция двух переменных $0 < t, x < 1$; вычислим функцию (2.17) явно. Имеем

$$T_t e(x) = \int\limits_{U(t,x)} \frac{u}{2xt}\,du = \frac{u^2}{4xt}\Big|_{U(t,x)};$$

напомним, что согласно (2.11)

$$U(t,x) = (|x-t|, \min\{x+t, 2-(x+t)\}), \quad x,t \in (0,1).$$

В зависимости от положения точки $x \in (0,1)$ находим

$$T_t e(x) = \frac{u^2}{4xt}\Big|_{U(t,x)} = \frac{(x+t)^2 - (x-t)^2}{4xt} = 1, \quad 0 < x \le 1-t,$$

$$T_t e(x) = \frac{u^2}{4xt}\Big|_{U(t,x)} = \frac{1}{4xt}\left((2-(x+t))^2 - (x-t)^2\right) = \frac{(1-x)(1-t)}{xt}, \quad 0 < 1-t \le x < 1.$$

Таким образом,

$$E(t,x) = T_t e(x) = 1, \quad 0 < x \le 1-t,$$

$$E(t,x) = T_t e(x) = \frac{(1-x)(1-t)}{xt} < 1, \quad 0 < 1-t < x < 1.$$

На всем интервале $(0,1)$ справедлива оценка

$$0 \le E(t,x) = T_t e(x) \le 1, \quad x \in (0,1). \tag{2.18}$$

Лемма 2. *В пространстве $L^1 = L^1((0,1),x^2)$ при (фиксированном) $t \in (0,1)$ справедливы следующие утверждения*:

(1) *Для любой функции $f \in L^1((0,1),x^2)$ функция*

$$T_t f(x) = \frac{1}{2xt} \int\limits_{U(t,x)} u f(u)\,du \tag{2.19}$$

суммируема с весом x^2 на $(0,1)$, т. е. принадлежит пространству $L^1((0,1),x^2)$, и имеет место формула

$$\int\limits_0^1 x^2 (T_t f)(x) dx = \int\limits_0^1 x^2 f(x) E(t,x) dx. \tag{2.20}$$

(2) *Для модуля $|f|$ функции $f \in L^1((0,1),x^2)$ выполняются соотношения*

$$\int\limits_0^1 x^2 (T_t|f|)(x) dx = \int\limits_0^1 x^2 |f(x)| E(t,x) dx \le \int\limits_0^1 x^2 |f(x)|\,dx. \tag{2.21}$$

(3) *Оператор сдвига T_t является линейным ограниченным оператором в пространстве $L^1 = L^1((0,1),x^2)$, и его L^1-норма равна единице*:

$$\|T_t\|_{L^1 \to L^1} = 1.$$

На функции $f \in L^1$ норма достигается в том и только том случае, если функция f сохраняет знак (почти всюду) на $(0, 1-t)$ и $f(x) \equiv 0$, $x \in (1-t, 1)$.

Доказательство. Выше уже отмечалось, что для функции $f \in L^1((0,1), x^2)$ интегралы в правой части (2.19) при любом $x \in (0,1)$, $x \neq t$, существуют, и на множестве $X(t) = (0,t) \cup (t,1)$ функция (2.19) непрерывная.

Достаточно доказать первое утверждение леммы для неотрицательных функций $f \in L^1((0,1), x^2)$. Преобразуем интеграл в правой части (2.20):

$$I = \int_0^1 x^2 f(x) E(t,x) dx.$$

Заменим здесь функцию $E(t,u)$ ее выражением (2.17):

$$I = \int_0^1 x^2 f(x) E(t,x) dx = \frac{1}{2t} \int_0^1 x f(x) \int_{U(t,x)} u\, du\, dx. \tag{2.22}$$

Обозначим через $\Pi(t)$, $0 < t < 1$, прямоугольник

$$\Pi(t) = \left\{ (x,u) \in (0,1)^2 \colon x \in (0,1),\ u \in (|x-t|, \min\{x+t, 2-(x+t)\}) \right\};$$

его можно описать симметричным образом:

$$\Pi(t) = \left\{ (x,u) \in (0,1)^2 \colon u \in (0,1),\ x \in (|u-t|, \min\{u+t, 2-(u+t)\}) \right\}.$$

С помощью характеристической функции $\chi = \chi_{\Pi(t)}$ прямоугольника $\Pi(t)$ интеграл (2.22) можно представить в виде повторного интеграла

$$I = \frac{1}{2t} \int_0^1 \int_0^1 x f(x) \chi(x,u) u\, du\, dx. \tag{2.23}$$

Подынтегральная функция $x f(x) \chi(x,u) u$ есть произведение трех измеримых функций $x f(x)$, $\chi(x,u)$, u на прямоугольнике $(0,1)^2$, поэтому также измерима. В силу теоремы Фубини—Тонелли (см., например, гл. 3, § 11, теоремы 9, 14 в [14]; гл. 12, § 3, теорему 1, § 4, теорему 2 в [15]) в (2.23) можно поменять порядки интегрирования, а точнее, функция

$$u \int_{U(t,u)} x f(x) dx$$

суммируема на $(0,1)$, и имеет место равенство

$$\frac{1}{2t} \int_0^1 \int_0^1 x f(x) \chi(x,u) u\, du\, dx = \frac{1}{2t} \int_0^1 u \int_{U(t,u)} x f(x) dx\, du.$$

Таким образом, для величины (2.23) выполняется равенство

$$I = \int_0^1 u^2 \frac{1}{2ut} \int_{U(t,u)} x f(x) dx\, du.$$

Тем самым первое утверждение леммы 2, включая равенство (2.20), доказано.

Утверждение (2.21) есть следствие равенства (2.20) и оценок (2.18).

Обоснуем третье утверждение леммы. В силу формулы (2.12) для любой функции $f \in L^1$ для $x \in (0,1)$, $x \neq t$, справедливо неравенство

$$|(T_t f)(x)| = \left| \frac{1}{2xt} \int\limits_{U(t,x)} u f(u)\, du \right| \leq \frac{1}{2xt} \int\limits_{U(t,x)} u|f(u)|\, du = (T_t|f|)(x). \tag{2.24}$$

Отсюда и из равенства (2.20) следуют оценки

$$\|T_t f\|_1 \leq \|T_t|f|\,\|_1 = \int\limits_0^1 x^2|f(x)|E(t,x)dx \leq \int\limits_0^1 x^2|f(x)|dx = \|f\|_1. \tag{2.25}$$

В силу этих оценок оператор T_t ограничен в пространстве L^1, и его норма не превосходит 1. Убедимся, что норма оператора на самом деле равна 1, и опишем все функции, на которых эта норма достигается; эти функции обращают в равенство оба неравенства в (2.25).

Для того чтобы на функции $f \in L^1$ обратилось в равенство (2.25), необходимо и достаточно, чтобы 1) на этой функции почти для всех $x \in (0,1)$ обратилось в равенство неравенство (2.24) и 2) выполнялось свойство $f(x) = 0$, $x \in (1-t,1)$. Неравенство (2.24) обращается в равенство в том и только том случае, если почти всюду на интервале $U(t,x) = (|x-t|, \min\{x+t, 2-(x+t)\})$ функция f сохраняет знак. Объединение интервалов $U(t,x)$ есть интервал $(0,1)$:

$$\cup\{U(t,x)\colon x \in (0, 1-t)\} = (0,1).$$

Соображения компактности влекут, что для любого отрезка $[a,b] \subset (0,1)$ найдется конечная система интервалов $\{I(t,x_k)\}_{k=1}^N$, покрывающая отрезок: $[a,b] \subset \cup\{I(t,x_k)\colon 1 \leq k \leq n\}$. При этом можно считать, что для любого k, $1 \leq k \leq N-1$, интервалы $I(t,x_k)$, $I(t,x_{k+1})$ пересекаются: $I(t,x_k) \cap I(t,x_{k+1}) \neq \varnothing$. Поскольку на каждом из интервалов $I(t,x_k)$, $I(t,x_{k+1})$ функция почти всюду сохраняет знак, она будет иметь один и тот же знак и (почти всюду) на их объединении $I(t,x_k) \cup I(t,x_{k+1})$, а значит, на всем отрезке $[a,b]$, а как следствие и на $(0,1)$. Помимо того, она должна зануляться на $(1-t,1)$.

Все утверждения леммы 2 доказаны.

Лемма 3. *Оператор сдвига* T_t, $0 < t < 1$, *является линейным ограниченным оператором в пространстве* $L^\infty = L^\infty(0,1)$, *и его норма в* L^∞ *равна единице*:

$$\|T_t\|_{L^\infty \to L^\infty} = 1.$$

Более того, при каждом $0 < t < 1$ *имеет место точное поточечное неравенство*

$$|T_t f(x)| \leq E(t,x)\|f\|_\infty, \quad x \in (0,1);$$

это неравенство на функции $f \in L^\infty(0,1)$ *обращается в равенство в том и только том случае, если функция* f *достигает равномерной нормы* (*почти*) *в каждой точке промежутка* $U(t,x)$ *и сохраняет на* $U(t,x)$ *знак, т. е.* $f(u) = \zeta\,\|f\|_\infty$ (*почти*) *для всех* $u \in U(t,x)$, *здесь* ζ *есть константа с единичным модулем*: $|\zeta| = 1$.

Доказательство. Для функции $f \in L^\infty$ функция

$$(T_t f)(x) = \int\limits_{U(t,x)} f(u)\Psi(t,x,u)du = \frac{1}{2xt} \int\limits_{U(t,x)} u f(u)du$$

непрерывна и ограничена на интервале $x \in (0,1)$. Более того, поточечно для $x \in (0,1)$ выполняется оценка

$$|(T_t f)(x)| \leq E(t,x)\|f\|_\infty.$$

Отсюда нетрудно получить все утверждения леммы.

Лемму 3 можно считать доказанной.

Лемма 4. *Оператор сдвига T_t при $0 \le t \le 1$ является линейным ограниченным в $L^q = L^q((0,1),x^2)$ для любого q, $1 \le q \le \infty$, и его норма в L^q не превосходит единицы:*

$$\|T_t\|_{L^q \to L^q} \le 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждения леммы для значений $t = 0$ и $t = 1$ при всех значениях $1 \le q \le \infty$ содержатся соответственно в (2.13) и (2.14). Будем считать, что $0 < t < 1$.

При $q = 1$ и $q = \infty$ утверждения леммы содержатся соответственно в леммах 2 и 3.

Итак, будем считать, что $1 < q < \infty$, $0 < t < 1$. Имеет место вложение $L^q((0,1),x^2) \subset L^1((0,1),x^2)$. В силу этого вложения и утверждения леммы 2 оператор сдвига

$$(T_t f)(x) = \int\limits_{U(t,x)} f(u)\Psi(t,x,u)du$$

определен на пространстве L^q и является линейным оператором из L^q, по крайней мере, в L^1. Убедимся, что на самом деле $T_t f \in L^q$ для $f \in L^q$. Действительно, для $x \in (0,1)$ в силу неравенства Гельдера имеем

$$\begin{aligned} |(T_t f)(x)| &= \Big|\int\limits_{U(t,x)} f(u)\Psi(t,x,u)du\Big| = \Big|\int\limits_{U(t,x)} f(u)(\Psi(t,x,u))^{1/q}(\Psi(t,x,u))^{1/q'}du\Big| \\ &\le \Big(\int\limits_{U(t,x)} |f(u)|^q\Psi(t,x,u)du\Big)^{1/q}\Big(\int\limits_{U(t,x)} \Psi(t,x,u)du\Big)^{1/q'}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

здесь $q' = q/(q-1)$ есть сопряженный показатель для q. В силу (2.8) последний интеграл в (2.26) не превосходит 1. Следовательно, справедливо неравенство

$$|(T_t f)(x)| = \Big|\int\limits_{U(t,x)} f(u)\Psi(t,x,u)du\Big| \le \Big(\int\limits_{U(t,x)} |f(u)|^q\Psi(t,x,u)du\Big)^{1/q}.$$

Применяя последнюю оценку и равенство (2.20) для функции $|f|^q$, получаем

$$\|T_t f\|_q^q \le \|T_t(|f|^q)\|_1 \le \||f|^q\|_1 = \|f\|_q^q.$$

Таким образом, T_t есть линейный ограниченный оператор в пространстве L^q, и его норма в L^q не превосходит единицы.

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Оператор сдвига T_t при $0 \le t \le 1$ в пространстве $L^2 = L^2((0,1),x^2)$ совпадает с оператором τ_t:*

$$T_t f = \tau_t f, \quad f \in L^2((0,1),x^2),$$

и как следствие для нормы оператора T_t в L^2 имеет место равенство

$$\|T_t\|_{L^2 \to L^2} = \mathcal{A}(t),$$

где

$$\mathcal{A}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}, \quad 0 < t \le 1, \quad \mathcal{A}(0) = 1.$$

При $0 < t < 1$ норма оператора T_t достигается лишь на функциях $c\eta_1$, $c \in \mathbb{C}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $f \in L^2((0,1),x^2)$ представима в виде суммы (1.6) ее ряда Фурье:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \eta_k(x), \quad f_k = \frac{\langle f, \eta_k \rangle}{\langle \eta_k, \eta_k \rangle};$$

этот ряд сходится к f в L^2. Согласно предыдущей лемме оператор T_t в пространстве $L^2((0,1),x^2)$ ограничен. Поэтому

$$(T_t f)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k (T_t \eta_k)(x).$$

Применяя теперь формулу умножения (2.16), получаем

$$(T_t f)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \eta_k(t) \eta_k(x).$$

Ввиду (1.8) такое же представление имеет и оператор τ_t.

Лемму 5 можно считать доказанной.

В следующем утверждении используется обозначение $\overline{q} = \max\{q, q'\}$, где $q' = q/(q-1)$ есть показатель, сопряженный для q, $1 \le q \le \infty$.

Теорема 1. *Оператор сдвига T_t при $0 \le t \le 1$ является линейным ограниченным оператором в пространстве $L^q = L^q((0,1),x^2)$ для любого q, $1 \le q \le \infty$, и для его нормы L^q справедливы оценки*

$$\mathcal{A}(t) \le \|T_t\|_{L^q \to L^q} \le \big(\mathcal{A}(t)\big)^{2/\overline{q}}. \tag{2.27}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценка сверху (2.27) при $q = 1$, $q = \infty$ и $q = 2$ содержится соответственно в леммах 2, 3 и 5. Воспользуемся раздельно для $1 \le q \le 2$ и $2 \le q \le \infty$ теоремой Рисса о выпуклости (см., например, гл. 6, § 10, п. 12, следствие в [14] или гл. 5, § 1, теорему 1.3 в [16]).

Для значений $1 \le q \le 2$ в силу теоремы Рисса о выпуклости оператор T_t является линейным ограниченным в пространстве L^q, и для его нормы справедлива оценка

$$\|T_t\|_{L^q \to L^q} \le \big(\mathcal{A}(t)\big)^{2/q'}, \quad q' = q/(q-1).$$

В случае $2 \le q \le \infty$ в силу тех же соображений оператор T_t является ограниченным в пространстве L^q, и для его нормы справедлива оценка

$$\|T_t\|_{L^q \to L^q} \le \big(\mathcal{A}(t)\big)^{2/q}.$$

Тем самым ограниченность оператора T_t в L^q и оценка сверху в (2.27) обоснованы.

Оценка снизу в (2.27) есть следствие формулы умножения (2.16).

Теорема 1 доказана.

2.3. Плотность множества $\mathfrak{S}$-полиномов в пространствах $L^q((0,1),x^2)$ и ее применение для оператора сдвига

В данном разделе и ниже под L^∞ наряду с классическим пространством $L^\infty(0,1)$ иногда понимается пространство $C = C[0,1]$ функций f, непрерывных на отрезке $[0,1]$, с равномерной нормой, а иногда подпространство $C_0 = C[0,1]_0$ пространства $C[0,1]$ функций f, зануляющихся в точке 1: $f(1) = 0$; эти случаи будут оговариваться особо.

2.3.1. Плотность множества $\mathfrak{S}$-полиномов в пространствах $L^q((0,1),x^2)$. Напомним, что $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 1$, есть множество $\mathfrak{S}$-полиномов порядка n с комплексными коэффициентами

$$\phi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \eta_k(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\sin k\pi x}{k\pi x} \tag{2.28}$$

и $\mathcal{P} = \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{P}_n$ есть множество всех полиномов (2.28).

Лемма 6. *Множество $\mathcal{P}$ полиномов* (2.28) *плотно в пространстве $L^q = L^q((0,1),x^2)$ при всех q, $1 \leq q \leq \infty$. Под L^∞ здесь понимается пространство $C_0 = C[0,1]_0$ функций f, непрерывных на отрезке* $[0,1]$, *зануляющихся в точке* 1: $f(1) = 0$.

Доказательство. Начнем со случая $q = \infty$. Пусть $f \in C_0$. Сгладим эту функцию в несколько шагов.

(1) Для чисел $0 < \alpha < \beta < 1$ определим функцию $f_{\alpha,\beta}$ соотношениями

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq \alpha; \\ f(\alpha)\,\dfrac{\beta - x}{\beta - \alpha}, & \alpha \leq x \leq \beta; \\ 0, & \beta \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Поскольку $f(1) = 0$, то $\|f - f_{\alpha,\beta}\|_{C[0,1]} \to 0$, $\alpha \to 1-0$. При этом $f_{\alpha,\beta} \in C[0,1]_0$.

Достаточно теперь приблизить функцию $f_{\alpha,\beta}$; будем использовать для этой функции вновь обозначение f. Сейчас важно лишь, что f непрерывна на $[0,1]$ и $f(x) = 0$ для $x \in [\beta, 1]$ при некотором $0 < \beta < 1$.

(2) Продолжим функцию f четно на $[-1,1]$ и нулем вне отрезка $[-1,1]$. Построенную функцию обозначим тем же символом f. Сгладим эту функцию. А именно, обозначим через ω шапочку Соболева, т. е. бесконечно дифференцируемую на оси функцию, четную, неотрицательную, носитель которой сосредоточен на $[-1,1]$, с единичным интегралом $\int_{-1}^{1} \omega(x)dx = 1$. При $\delta > 0$ функция $\omega_\delta(t) = \omega(t/\delta)/\delta$, $t \in (-\infty, \infty)$, имеет подобные свойства. Рассмотрим свертку функций f и ω_δ:

$$f_\delta(x) = (f * \omega_\delta)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+u)\omega_\delta(u)du.$$

Нетрудно понять, что при $\delta \to +0$ функция f_δ будет равномерно сходиться к функции f на всей оси. Будем считать, что $\delta < 1 - \beta$.

Достаточно теперь приблизить функцию f_δ; будем использовать для этой функции вновь обозначение f. Сейчас важно лишь, что f бесконечно дифференцируемая на всей оси, четная и ее носитель сосредоточен на отрезке $[-\Delta, \Delta]$, $\Delta = \beta + \delta < 1$.

(3) Функция $F(x) = xf(x)$ бесконечно дифференцируемая на всей оси, нечетная, ее носитель сосредоточен на том же отрезке $[-\Delta, \Delta]$, $\Delta = \beta + \delta < 1$. Тригонометрический ряд Фурье функции F на отрезке $[-1,1]$ обладает следующими свойствами. Поскольку функция F нечетная, то этот ряд будет рядом по синусам. А поскольку функция F бесконечно дифференцируемая, то ряд Фурье будет сходиться к функции F на $[-1,1]$ равномерно:

$$xf(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi x, \quad x \in [-1,1],$$

и, более того, коэффициенты Фурье $\{b_k\}$ будут сходиться к нулю быстрее любой степени номера k. Разделим это соотношение на x:

$$f(x) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \frac{\sin k\pi x}{k\pi x}, \quad x \in [-1,1], \quad x \neq 0. \tag{2.29}$$

Вместе с последовательностью $\{b_k\}$ последовательность $\{kb_k\}$ сходится к нулю быстрее любой степени k. Следовательно, ряд в правой части (2.29) сходится равномерно на $[-1,1]$. Отсюда и из соображений непрерывности следует, что разложение (2.29) имеет место для всех $x \in [-1,1]$, включая точку $x = 0$, и сходимость ряда равномерная на $[-1,1]$. Этот факт, в частности, влечет, что функция f аппроксимируется множеством $\mathcal{P}$ полиномов. Утверждение леммы 6 для $q = \infty$ доказано.

Рассмотрим теперь случай $1 \le q < \infty$. Пусть $f \in L^q((0,1),x^2)$; для этой функции

$$\|f\|_q = \left(\int\limits_0^1 |f(x)|^q x^2 dx\right)^{1/q} < \infty.$$

Возьмем любое $\epsilon > 0$. Выберем число h, $0 < h < 1$, так, чтобы $\displaystyle\int_0^h |f(x)|^q x^2 dx < \epsilon^q$.

Достаточно приблизить функцию f_h, определенную соотношением

$$f_h(x) = \begin{cases} f(x), & h \le x < 1; \\ 0, & 0 < x < h. \end{cases}$$

Эта функция принадлежит пространству $\mathbf{L}^q = L^q((0,1),1)$ (с единичным весом на $(0,1)$). Довольно очевидно, что существует функция $g \in C[0,1]_0$ такая, что

$$\|f_h - g\|_{\mathbf{L}^q} = \left(\int\limits_0^1 |f_h(x) - g(x)|^q dx\right)^{1/q} < \epsilon.$$

Согласно первой части доказательства существует полином (2.28) такой, что $\|g - \phi_n\|_{C[0,1]_0} < \epsilon$. Как следствие

$$\|g - \phi_n\|_q = \left(\int\limits_0^1 |g(x) - \phi_n(x)|^q x^2 dx\right)^{1/q} \le c_q\epsilon, \quad c_q = 3^{-1/q}.$$

Объединяя полученные результаты, получаем, что

$$\|f - \phi_n\|_q = \left(\int\limits_0^1 |f(x) - \phi_n(x)|^q x^2 dx\right)^{1/q} < (2 + c_q)\epsilon.$$

Лемма 6 полностью доказана.

2.3.2. О связи операторов $\boldsymbol{\tau_t}$ и $\boldsymbol{T_t}$. В данной статье мы исходим из определения (1.8) оператора обобщенного сдвига τ_t по системе функций (1.2). Однако формулой (1.8) оператор сдвига τ_t корректно определен лишь в пространстве $L^2((0,1),x^2)$.

Обсудим ситуацию в пространстве $L^q((0,1),x^2)$ для произвольного q, $1 \le q \le \infty$. Оператор сдвига τ_t определен формулой (1.8) на подпространстве $\mathfrak{S}$-полиномов $\mathcal{P} \subset L^q((0,1),x^2)$. В силу (1.9) и (2.16) операторы (1.8) и (2.10) на множестве $\mathcal{P}$ совпадают: $T_t\phi = \tau_t\phi$, $\phi \in \mathcal{P}$, $0 \le t \le 1$. Согласно результатам теоремы 1 оператор T_t, $0 \le t \le 1$, ограничен в $L^q((0,1),x^2)$ при произвольном q, $1 \le q \le \infty$. Значит, оператор T_t, $0 \le t \le 1$, а вместе с ним и оператор τ_t, $0 \le t \le 1$, являются ограниченными операторами и на подпространстве $\mathcal{P}$ с нормой пространства $L^q((0,1),x^2)$. Согласно лемме 6 множество $\mathcal{P}$ плотно в пространстве $L^q((0,1),x^2)$. Следовательно, справедливо такое утверждение.

Теорема 2. *При любом q, $1 \le q \le \infty$, оператор T_t, $0 \le t \le 1$, можно интерпретировать как (однозначное) продолжение по непрерывности оператора τ_t, $0 \le t \le 1$, с подпространства $\mathcal{P}$ на все пространство $L^q = L^q((0,1),x^2)$ с сохранением нормы. Здесь вновь под L^∞ понимается пространство $C_0 = C[0,1]_0$ функций f, непрерывных на отрезке $[0,1]$, зануляющихся в точке 1.*

3. Неравенство Никольского между равномерной и $L^q((0,1),x^2)$-нормами полиномов по системе $\mathfrak{S}$

3.1. Применение оператора обобщенного сдвига в неравенстве Никольского для $\mathfrak{S}$-полиномов

Оператор обобщенного сдвига (2.10) оказался полезным в исследовании точного неравенства разных метрик (неравенства Никольского)

$$\|\phi_n\|_{C[0,1]} \le M(n)_q \|\phi_n\|_q, \quad \phi_n \in \mathcal{P}_n, \tag{3.1}$$

между равномерной нормой $\|\phi_n\|_{C[0,1]} = \max\{|\phi_n(x)|\colon x \in [0,1]\}$ и интегральной q-нормой с весом x^2

$$\|\phi_n\|_q = \|\phi_n\|_{L^q((0,1),x^2)} = \Big(\int\limits_0^1 |\phi_n(x)|^q\, x^2\, dx\Big)^{1/q}$$

на множестве $\mathcal{P}_n$ полиномов

$$\phi_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \eta_k(x) = \sum_{k=1}^n a_k \frac{\sin k\pi x}{k\pi x}$$

порядка n по системе (1.2) с комплексными коэффициентами.

Наряду с неравенством (3.1) рассмотрим точное поточечное неравенство

$$|\phi_n(t)| \le M(n;t)_q \|\phi_n\|_q, \quad \phi_n \in \mathcal{P}_n, \tag{3.2}$$

для точек $t \in [0,1]$. Особенно важным для нас является неравенство (3.2) в концевой точке $t = 0$:

$$|\phi_n(0)| \le M(n,0)_q \|\phi_n\|_q, \quad \phi_n \in \mathcal{P}_n. \tag{3.3}$$

Такие неравенства впервые (для тригонометрических полиномов) возникли в работе Джексона [17], однако обстоятельно они были исследованы и применены С. М. Никольским (см. [18]; гл. 3, § 3.3 в [19]), поэтому их называют неравенствами Никольского или неравенствами разных метрик. К настоящему времени подобные неравенства для тригонометрических полиномов, алгебраических многочленов и целых функций составляют обширный раздел теории функций (см. монографии [20]; гл. 3, §§ 3.5–3.6 в [21]; [22–24]; гл. 8, § 8.4 в [25]; статьи [26–31] и приведенную там библиографию).

Теорема 3. *При* $1 \le q < \infty$, $n \ge 1$ *справедливы следующие утверждения.*

(1) *Наилучшие константы в неравенствах* (3.1) *и* (3.3) *совпадают*:

$$M(n)_q = M(n,0)_q. \tag{3.4}$$

(2) *Неравенства* (3.1) *и* (3.3) *имеют одно и то же множество экстремальных полиномов. Экстремальные полиномы этих неравенств достигают равномерной нормы только в точке* 0.

Для обоснования теоремы будет применен оператор сдвига T_t. Впервые мы использовали соответствующий оператор (обобщенного) сдвига в исследовании неравенства разных метрик типа (3.1) в работе [32], в дальнейшем этот метод использовался в ряде других работ (см. [9–11; 31; 33–35] и приведенную там библиографию).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство $M(n,0)_q \le M(n)_q$ для наилучших констант в неравенствах (3.1) и (3.3) очевидно. Докажем обратное неравенство. Воспользуемся оператором сдвига, представленным формулами (2.10) или (1.8) в зависимости от ситуации. Пусть $f \in \mathcal{P}_n$ и равномерная норма f достигается в некоторой точке $t \in [0,1]$. Из определения (1.8) видно, что функция $g(x) = (T_t f)(x)$ также является полиномом порядка n и обладает свойством $g(0) = f(t)$. Применяя неравенство (3.3), получаем

$$\|f\|_{C[0,1]} = |f(t)| = |g(0)| \le M(n,0)_q \|g\|_q = M(n,0)_q \|T_t f\|_q \le M(n,0)_q \, \|T_t\|_{L^q \to L^q} \|f\|_q; \qquad (3.5)$$

в результате имеем

$$\|f\|_{C[0,1]} = |f(t)| \le M(n,0)_q \, \|T_t\|_{L^q \to L^q} \|f\|_q. \qquad (3.6)$$

Теорема 1 или даже лемма 4 влекут теперь неравенство $\|f\|_{C[0,1]} \le M(n,0)_q \|f\|_q$. В силу произвольности $f \in \mathcal{P}_n$ отсюда следует неравенство $M(n)_q \le M(n,0)_q$. Равенство (3.4) проверено.

Докажем, что при всех значениях $1 \le q < \infty$ любой экстремальный полином $f \in \mathcal{P}_n$ неравенства (3.1) достигает равномерной нормы только в точке 0. Будем рассуждать от противного. Предположим, что некий экстремальный полином $f \not\equiv 0$ обладает свойством $\|f\|_{C[0,1]} = |f(t)|,\ 0 < t < 1$. В случае $1 < q < \infty$ в силу (3.6) и второго неравенства (2.27) на полиноме f будет выполняться строгое неравенство $\|f\|_{C[0,1]} < M(n,0)_q \|f\|_q$, что противоречит предположению об экстремальности f. В случае же $q = 1$ полином f будет обращать в равенства все неравенства в (3.5), включая последнее. Но это означает, что на полиноме f достигается норма оператора $T_t,\ 0 < t < 1$, в пространстве L^1. Однако, как следует из утверждений леммы 2, норма оператора сдвига в L^1 на полиноме достигаться не может. Так что действительно экстремальный полином неравенства (3.1) достигает равномерной нормы только в точке 0.

Из последнего утверждения, в частности, следует, что экстремальный полином неравенства (3.1) является экстремальным и в неравенстве (3.3). Верно и обратное утверждение. В самом деле, пусть f — экстремальный полином неравенства (3.3). Имеем

$$M(n,0)_q \, \|f\|_q = |f(0)| \le \|f\|_{C[0,1]} \le M(n)_q \, \|f\|_q.$$

Отсюда с учетом равенства (3.4) следует, что полином f является экстремальным в неравенстве (3.1) и имеет место равенство $\|f\|_{C[0,1]} = |f(0)|$.

Теорема 3 доказана.

З а м е ч а н и е. Экстремальные полиномы неравенств (3.1) и (3.3) единственные с точностью до мультипликативной константы.

Достаточно обосновать единственность экстремального полинома неравенства (3.3). Исследование неравенства (3.3) означает исследование нормы линейного функционала $f(0)$ на множестве полиномов $\mathcal{P}_n$ с нормой пространства $L^q((0,1),x^2)$. Пространство $L^q((0,1),x^2)$ при $1 < q < \infty$ является строго выпуклым, поэтому норма функционала в этом случае действительно достигается лишь на одном элементе. При $q = 1$ единственность также имеет место, но нужно проводить более обстоятельные исследования (см., к примеру, [36]).

3.2. Случай $q = 2$. Ядро Кристоффеля — Дарбу

При $q = 2$ неравенство (3.3) исследуется хорошо известным классическим методом. В самом деле, согласно формуле (1.6) коэффициенты полинома

$$\phi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \eta_k(x) \qquad (3.7)$$

выражаются через сам полином по формулам $a_k = 2k^2\pi^2 \langle \phi_n, \eta_k \rangle$, $1 \le k \le n$. Подставив эти выражения в (3.7), получаем

$$\phi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \eta_k(x) = \sum_{k=1}^{n} 2\pi^2 k^2 \langle \phi_n, \eta_k \rangle \eta_k(x) = \Big\langle \phi_n, \sum_{k=1}^{n} 2\pi^2 k^2 \eta_k(x) \eta_k \Big\rangle,$$

что можно записать в виде

$$\phi_n(x) = \int\limits_0^1 \phi_n(\xi)\mathcal{K}_n(x,\xi)\xi^2\,d\xi, \tag{3.8}$$

где

$$\mathcal{K}_n(x,\xi) = 2\sum_{k=1}^{n} \pi^2 k^2 \eta_k(x)\eta_k(\xi) \tag{3.9}$$

есть ядро Кристоффеля—Дарбу порядка n системы $\mathfrak{S}$. Применяя формулу (1.5), при $x \neq 0$, $\xi \neq 0$ находим

$$\mathcal{K}_n(x,\xi) = 2\sum_{k=1}^{n} \pi^2 k^2 \eta_k(x)\eta_k(\xi) = 2\sum_{k=1}^{n} \pi^2 k^2 \frac{\sin k\pi x}{k\pi x}\,\frac{\sin k\pi\xi}{k\pi\xi} = \frac{2}{x\xi}\sum_{k=1}^{n} \sin k\pi x \sin k\pi\xi$$

$$= \frac{1}{x\xi}\sum_{k=1}^{n}(\cos(k\pi(x-\xi)) - \cos(k\pi(x+\xi))) = \frac{1}{x\xi}(D_n(\pi(x-\xi)) - D_n(\pi(x+\xi))),$$

где D_n есть ядро Дирихле

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ku = \frac{\sin((2n+1)u/2)}{2\sin(u/2)}.$$

Для ядра (3.9) справедлива оценка

$$|\mathcal{K}_n(x,\xi)| \le \mathcal{K}_n(0,0) = 2\pi^2 \sum_{k=1}^{n} k^2 = 2\pi^2\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Наряду с (3.9) обозначим тем же символом $\mathcal{K}_n$ функцию одного переменного

$$\mathcal{K}_n(\xi) = \mathcal{K}_n(0,\xi), \quad \xi \in [0,1].$$

При $\xi \neq 0$ имеем

$$\mathcal{K}_n(\xi) = \mathcal{K}_n(0,\xi) = 2\sum_{k=1}^{n} \pi^2 k^2 \eta_k(\xi) = 2\sum_{k=1}^{n} (\pi k)^2 \frac{\sin k\pi\xi}{k\pi\xi}. \tag{3.10}$$

Как частный случай (3.8) справедлива формула

$$\phi_n(0) = \int\limits_0^1 \phi_n(\xi)\mathcal{K}_n(\xi)\xi^2\,d\xi. \tag{3.11}$$

Применяя в (3.11) неравенство Коши—Буняковского, получаем

$$|\phi_n(0)| \le \|\mathcal{K}_n\|_2 \|\phi_n\|_2, \quad \phi_n \in \mathcal{P}.$$

Последнее неравенство точное и обращается в равенство лишь на полиномах $\phi_n^* = c\mathcal{K}_n$, $c \in \mathbb{C}$. С помощью равенства Парсеваля (1.7) для полинома (3.10) находим

$$\|\mathcal{K}_n\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k\,|2\pi^2 k^2|^2 = 2\pi^2 \sum_{k=1}^{n} k^2 = 2\pi^2\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Таким образом, при $q = 2$ наилучшие константы в неравенствах (3.1), (3.3) имеют следующие значения:

$$M(n)_2 = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\,\sqrt{n(n+1)(2n+1)}.$$

Авторы предполагают в ближайшее время провести более обстоятельное исследование неравенств (3.1) и (3.3).

Благодарность. Авторы выражают благодарность рецензентам статьи, которые внимательно прочитали рукопись и сделали ряд полезных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ватсон Г.Н.** Теория бесселевых функций. Часть первая. М.: ИЛ, 1949. 798 с.
2. **Бейтмен Г., Эрдейи А.И.** Высшие трансцидентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966. 295 с.
3. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
4. **Левитан Б.М.** Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. 1951. Т. 6, вып. 2. С. 102–143.
5. **Бабенко А.Г.** Точное неравенство Джексона—Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{R}^m)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1998. Т. 5. С. 183–198.
6. **Платонов С.С.** Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой // Изв. РАН. Сер. Мат. 2007. Т. 71, № 5. С. 149–196.
7. **Liu Y.** Best L^2-approximation of function on $[0,1]$ with the weight $x^{2\nu+1}$. Тр. междунар. летн. мат. шк. С. Б. Стечкина по теории функций. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. С. 180–190.
8. **Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К.** Некоторые вопросы приближения функций суммами Фурье—Бесселя // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2013. Т. 53, № 7. С. 1051–1057. doi: 10.7868/S0044466913070028
9. **Arestov V., Babenko A., Deikalova M., Horváth A.** Nikol'skii inequality between the uniform norm and integral norm with Bessel weight for entire functions of exponential type on the half-line // Anal. Math. 2018. Vol. 44, iss. 1. P. 21–42. doi: 10.1007/s10476-018-0103-6
10. **Арестов В.В., Дейкалова М.В.** Об одном обобщенном сдвиге и соответствующем неравенстве разных метрик // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, № 4. С. 40–53. doi: 10.21538/0134-4889-2022-28-4-40-53
11. **Arestov V., Deikalova M.** On one inequality of different metrics for trigonometric polynomials // Ural Math. J. 2022. Vol. 8, no. 2. P. 25–43. doi: 10.15826/umj.2022.2.003
12. **Левитан Б.М.** Применение операторов обобщенного сдвига к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка // Успехи мат. наук. 1949. Т. 4. Вып. 1. С. 1–107.
13. **Грей Э., Мэтьюз Г.Б.** Функции Бесселя их приложения к физике и механике. М.: ИЛ, 1953. 372 с.
14. **Данфорд Н., Шварц Дж.Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: Едиториал УРСС, 2004. 896 с.
15. **Натансон И.П.** Теория функций вещественной переменной: учебн. пособие. СПб.: Лань, 1999.
16. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 333 с.
17. **Jackson D.** Certain problems of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. 1933. Vol. 39, no. 12. P. 889–906.
18. **Никольский С.М.** Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. МИАН СССР. 1951. Т. 38. С. 244–278.
19. **Никольский С.М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Гл. редакция физ.-мат. литературы изд-ва Наука, 1977. 456 с.
20. **Бернштейн С.Н.** Экстремальные свойства полиномов., М.-Л., ОНТИ, 1937.
21. **Корнейчук Н.П., Бабенко В.Ф., Лигун А.А.** Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. Киев: Наукова думка, 1992. 304 с.
22. **Milovanović G.V., Mitrinović D.S., Rassias Th.M.** Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros. Singapore: World Scientific, 1994. 821 p.
23. **Borwein P., Erdélyi T.** Polynomials and Polynomial Inequalities. New York: Springer-Verlag, 1995.
24. **Rahman Q.I., Schmeisser G.** Analytic Theory of Polynomials. Oxford: Oxford Univ. Press, 2002. 742 p.
25. **Бабенко В.Ф., Корнейчук Н.П., Кофанов В.А., Пичугов С.А.** Неравенства для производных и их приложения. Киев: Наукова думка, 2003. 590 с.
26. **Бари Н.К.** Обобщение неравенств С. Н. Бернштейна и А. А. Маркова // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1954. Т. 18, № 2. С. 159–176.
27. **Иванов В.И.** Некоторые неравенства для тригонометрических полиномов и их производных в разных метриках // Мат. заметки. 1975. Т. 18, № 4. С. 489–498.
28. **Арестов В.В.** О неравенстве разных метрик для тригонометрических полиномов // Мат. заметки. 1980. Т. 27, вып. 4. С. 539–547.

29. **Бадков В.М.** Асимптотические и экстремальные свойства ортогональных полиномов при наличии особенностей у веса // Тр. МИАН. 1992, Т. 198. С. 41–88.
30. **Babenko V., Kofanov V., Pichugov S.** Comparison of rearrangement and Kolmogorov–Nagy type inequalities for periodic functions. Approx. Theory: A volume dedicated to Blagovest Sendov / ed. B. Bojanov. Sofia: DARBA, 2002. P. 24–53.
31. **Горбачев Д.В.** Точные неравенства Бернштейна — Никольского для полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сб. 2021. Т. 22, № 5. С. 58–110. doi: 10.22405/2226-8383-2021-22-5-58-110
32. **Арестов В.В., Дейкалова М.В.** Неравенство Никольского для алгебраических полиномов на многомерной евклидовой сфере // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. P. 34–47.
33. **Arestov V., Deikalova M.** Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with ultraspherical weight of algebraic polynomials on an interval // Comput. Methods Funct. Theory. 2015. Vol. 15, no. 4. P. 689–708. doi: 10.1007/s40315-015-0134-y
34. **Arestov V., Deikalova M.** Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with Jacobi weight of algebraic polynomials on an interval // Analysis Math. 2016. Vol. 42, no. 2. P. 91–120. doi: 10.1007/s10476-016-0201-2
35. **Arestov V., Deikalova M., Horváth Á.** On Nikol'skii type inequality between the uniform norm and the integral q-norm with Laguerre weight of algebraic polynomials on the half-line // J. Approx. Theory. 2017. Vol. 222. P. 40–54. doi: 10.1016/j.jat.2017.05.005
36. **Arestov V.V.** A characterization of extremal elements in some linear problems // Ural Math. J. 2017. Vol. 3, no. 2. P. 22–32. doi: 10.15826/umj.2017.2.004

Поступила 14.04.2023
После доработки 17.05.2023
Принята к публикации 22.05.2023

Арестов Виталий Владимирович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: vitalii.arestov@urfu.ru

Дейкалова Марина Валерьевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Уральский федеральный университет;
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: marina.deikalova@urfu.ru

REFERENCES

1. Watson G.N. *A treatise on the theory of Bessel functions.* Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1995, 814 p. ISBN: 0521483913 Translated to Russian under the title *Teoriya besselevykh funktsii. Ch.* 1, Moscow, Inostr. Liter. Publ., 1949, 798 p.
2. Bateman G., Erdélyi A. *Higher transcendental functions. Vol. II.* NY, McGraw Hill Book Company, 1953, 396 p. ISBN: 0486446158 Translated to Russian under the title *Vysshie transtsendentnye funktsii. T.* 2. *Funktsii Besselya, funktsii parabolicheskogo tsilindra, ortogonal'nye mnogochleny*, Moscow, Nauka Publ., 1966, 295 p.
3. Vladimirov V.S. *Generalized functions in mathematical physics.* Moscow, Mir Publ., 1979, 362 p. ISBN: 071471545X . Original Russian text published in Vladimirov V.S., *Uravneniya matematicheskoi fiziki*, Moscow, Nauka Publ., 1981, 512 p.

4. Levitan B.M. Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1951, vol. 6, no. 2, pp. 102–143 (in Russian).
5. Babenko A.G. Exact Jackson–Stechkin inequality in the space $L^2(\mathbb{R}^m)$. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 1998, vol. 5, pp. 183–198 (in Russian).
6. Platonov S.S. Bessel harmonic analysis and approximation of functions on the half-line. *Izv. Math.*, 2007, vol. 71, no. 5, pp. 1001–1048. doi: 10.1070/IM2007v071n05ABEH002379
7. Liu Y. Best L^2-approximation of function on $[0,1]$ with the weight $x^{2\nu+1}$. *Prooceedings of S. B. Stechkin's International Mathematical Summer Workshop on function theory*, Tula, Tul'skii Gosudarstvennyi Universitet, 2007, pp. 180–190 (in Russian).
8. Abilov V.A., Abilova F.V., Kerimov M.K. Some issues concerning approximations of functions by Fourier–Bessel sums. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2013, vol. 53, no. 7, pp. 867–873. doi: 10.1134/S0965542513070026
9. Arestov V., Babenko A., Deikalova M., Horváth A. Nikol'skii inequality between the uniform norm and integral norm with Bessel weight for entire functions of exponential type on the half-line. *Anal. Math.*, 2018, vol. 44, no. 1, pp. 21–42. doi: 10.1007/s10476-018-0103-6
10. Arestov V. V., Deikalova M. V. On one generalized translation and the corresponding inequality of different metrics. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2022, vol. 319, suppl. 1, pp. S30–S42. doi: 10.1134/S0081543822060049
11. Arestov V., Deikalova M. On one inequality of different metrics for trigonometric polynomials. *Ural Math. J.*, 2022, vol. 8, no. 2, pp. 25–43. doi: 10.15826/umj.2022.2.003
12. Levitan B.M. The application of generalized displacement operators to linear differential equations of the second order. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1949, vol. 4, no. 1(29), pp. 3–112 (in Russian).
13. Gray A., Mathews G.B. *A treatise on Bessel functions and their applications to physics.* London, Macmillan and Co., 1895, 292 p. Translated to Russian under the title *Functsii Besselya i ikh prilozheniya k fizike i mekhanike*, Moscow, Inostr. Liter. Publ., 1953, 372 p.
14. Dunford N., Schwartz J.T. *Linear Operators. Part 1: General Theory.* NY, Interscience, 1988, 872 p. ISBN: 978-0-471-60848-6 . Translated to Russian under the title *Lineinye operatory. Obshchaya teoriya.* Moscow, Editorial URSS Publ., 2004, 896 p. ISBN: 5-354-00601-5 .
15. Natanson I.P. *Theory of functions of a real variable.* Dover Publ., 2016, 544 p. ISBN: 978-0486806433 . Original Russian text was published in Natanson I.P. *Teoriya funktsii veshchestvennoi peremennoi*, Saint Petersburg, Lan' Publ., 1999, 560 p. ISBN: 5-8114-0136-1 .
16. Stein E.M., Weiss G. *Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces.* Princeton, Princeton Univ. Press, 1971, 312 p. ISBN: 9780691080789 . Translated to Russian under the title *Vvedenie v garmonicheskii analiz na evklidovykh prostranstvakh*, Moscow, Mir Publ., 1974, 333 p.
17. Jackson D. Certain problems of closest approximation. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1933, vol. 39, no. 12, pp. 889–906. doi: 10.1090/S0002-9904-1933-05759-2
18. Nikol'skii S.M. Inequalities for entire functions of finite degree and their application in the theory of differentiable functions of several variables. *Trudy Mat. Inst. Steklov*, 1951, vol. 38, pp. 244–278 (in Russian).
19. Nikol'skii S.M. *Approximation of functions of several variables and imbedding theorems.* NY, Springer, 1975, 420 p. doi: 10.1007/978-3-642-65711-5 Original Russian text published under the title *Priblizhenie funktsii mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya*, Moscow, Nauka Publ., 1969, 480 p.
20. Bernstein S.N. *Ekstremal'nye svoistva polinomov i nailuchshee priblizhenie nepreryvnykh funktsii odnoi veshchestvennoi peremennoi* [Extremal properties of polynomials and the best approximation of continuous functions of one real variable], Part 1. Moscow, Leningrad, Ob'edinennoe Nauch. Tekh. Izd. Narod. Komiss. Tyazheloi Promyshl. SSSR, 1937, 203 p.
21. Korneichuk N.P., Babenko V.F., Ligun A.A. *Extremal properties of polynomials and splines.* NY, Nova Science Publ., 1996, 439 p. ISBN: 978-1560723615 . Original Russian text was published in Korneichuk N.P., Babenko V.F., Ligun A.A., *Ekstremal'nye svoistva polinomov i splainov*, Kiev, Naukova Dumka Publ., 1992, 304 p. ISBN: 5-12-002210-3 .
22. Milovanović G.V., Mitrinović D.S., Rassias Th.M. *Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros.* Singapore, World Scientific, 1994, 821 p. ISBN: 981-02-0499-X .
23. Borwein P., Erdélyi T. *Polynomials and polynomial inequalities.* NY, Springer-Verlag, 1995, 480 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0793-1
24. Rahman Q.I., Schmeisser G. *Analytic theory of polynomials.* Oxford, Oxford Univ. Press, 2002, 742 p. ISBN: 0-19-853493-0 .

25. Babenko V.F., Korneichuk N.P., Kofanov V.A., Pichugov S.A. *Neravenstva dlya proizvodnykh i ikh prilozheniya* [Inequalities for derivatives and their applications]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 2003, 590 p.
26. Bari N.K. Generalization of inequalities of S. N. Bernshtein and A. A. Markov. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1954, vol. 18, no. 2, pp. 159–176 (in Russian).
27. Ivanov V.I. Certain inequalities in various metrics for trigonometric polynomials and their derivatives. *Math. Notes*, 1975, vol. 18, no. 4, pp. 880–885. doi: 10.1007/BF01153038
28. Arestov V.V. Inequality of different metrics for trigonometric polynomials. *Math. Notes*, 1980, vol. 27, no. 4, pp. 265–269. doi: 10.1007/BF01140526
29. Badkov V.M. Asymptotic and extremal properties of orthogonal polynomials corresponding to weight having singularities. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1994, vol. 198, pp. 37–82.
30. Babenko V., Kofanov V., Pichugov S. *Comparison of rearrangement and Kolmogorov – Nagy type inequalities for periodic functions.* In: Approx. Theory: A volume dedicated to Blagovest Sendov, ed. B. Bojanov, Sofia, DARBA, 2002, pp. 24–53.
31. Gorbachev D.V. Sharp Bernstein–Nikolskii inequalities for polynomials and entire functions of exponential type. *Chebyshevskii Sbornik*, 2021, vol. 22, no. 5, pp. 58–110 (in Russian). doi: 10.22405/2226-8383-2021-22-5-58-110
32. Arestov V.V., Deikalova M.V. Nikol'skii inequality for algebraic polynomials on a multidimensional Euclidean sphere. *Proc. Steklov Inst. Math. Suppl.*, 2014, vol. 284, suppl. 1, pp. 9–23. doi: 10.1134/S0081543814020023
33. Arestov V., Deikalova M. Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with ultraspherical weight of algebraic polynomials on an interval. *Comput. Methods Funct. Theory*, 2015, vol. 15, no. 4, pp. 689–708. doi: 10.1007/s40315-015-0134-y
34. Arestov V., Deikalova M. Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with Jacobi weight of algebraic polynomials on an interval. *Analysis Math.*, 2016, vol. 42, no. 2. pp. 91–120. doi: 10.1007/s10476-016-0201-2
35. Arestov V., Deikalova M., Horváth Á. On Nikol'skii type inequality between the uniform norm and the integral q-norm with Laguerre weight of algebraic polynomials on the half-line. *J. Approx. Theory*, 2017, vol. 222, pp. 40–54. doi: 10.1016/j.jat.2017.05.005
36. Arestov V.V. A characterization of extremal elements in some linear problems. *Ural Math. J.*, 2017, vol. 3, no. 2, pp. 22–32. doi: 10.15826/umj.2017.2.004

Received April 14, 2023
Revised May 17, 2023
Accepted May 22, 2023

Funding Agency: This work was performed as a part of the research conducted in the Ural Mathematical Center and supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (agreement no. 075-02-2023-913).

Vitalii Vladimirovich Arestov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: vitalii.arestov@urfu.ru .

Marina Valer'evna Deikalova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; e-mail: marina.deikalova@urfu.ru .

Cite this article as: V.V. Arestov, M.V. Deikalova. A generalized translation generated by the sinc function on an interval. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 27–48.